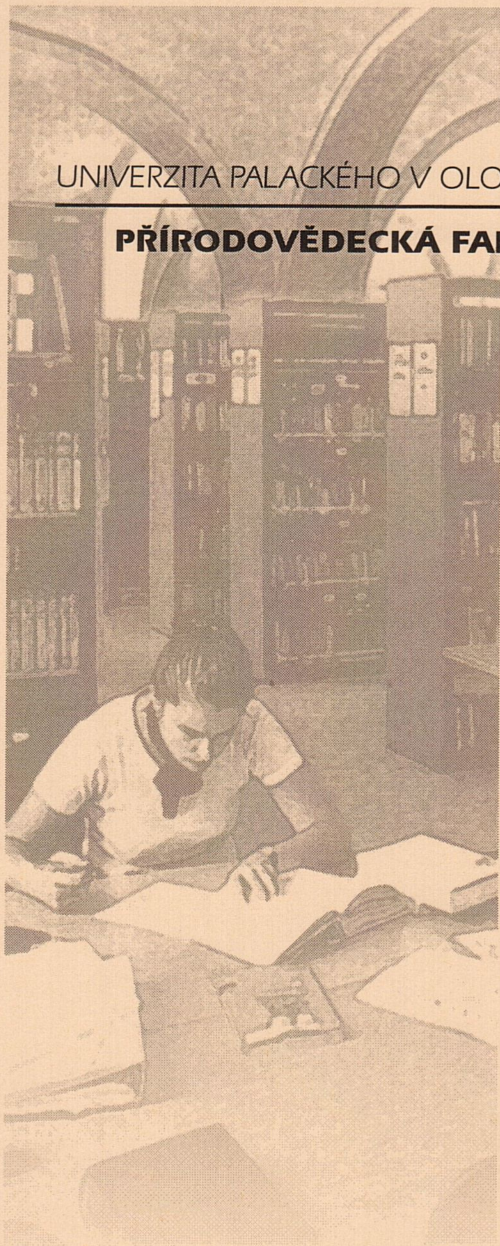
UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA



2010

LINEÁRNÍ ALGEBRA

EUKLIDOVSKÉ VEKTOROVÉ PROSTORY
HOMOMORFIZMY VEKTOROVÝCH PROSTORŮ

Marek Jukl

Oponenti: prof. RNDr. František Machala, DrSc.
doc. RNDr. Alena Vanžurová, CSc.

2. upravené vydání
1. vydání vyšlo v roce 2006

ISBN 978-80-244-2522-1

OBSAH

* * *

Úvodem

Předložený učební text je věnován dvěma standardním tématům lineární algebry, a to základním poznatkům o euklidovských vektorových prostorech (část I.) a o homomorfizmech vektorových prostorů (část II.).

V části I. je především zaveden pojem skalárního součinu na reálném vektorovém prostoru a pomocí něj pak další pojmy - kolmost vektorů a podprostorů, odchylka a vzdálenost vektoru od podprostoru. Čtenář se rovněž seznámí s vnějším a ortogonálním součinem a ve všech těchto případech rovněž s přirozenými geometrickými aplikacemi těchto partií lineární algebry. Dále se výklad věnuje speciálně homomorfizmům na euklidovských vektorových prostorech.

V části II. jsou uvedeny základní vlastnosti homomorfizmů, čímž se vytváří základ pro jejich další studium ve vyšších semestrech. Je studován vektorový prostor homomorfizmů a grupa automorfizmů, přičemž jsou vždy studovány jim přiřazené struktury matic těchto homomorfizmů. Navazující partie se věnuje faktorovým vektorovým prostorům a výklad je ukončen studiem lineárních forem a principem duality ve vektorových prostorech.

Skriptum je koncipováno pro základní kurz lineární algebry[1]) zejména ve studiu aplikované matematiky na Přírodovědecké fakultě UP v Olomouci, využít jej mohou i studenti jiných matematických oborů (diskrétní matematiky a studia zaměřeného na přípravu středoškolských učitelů), studenti oborů fyzikálních i další zájemci.

V textu zařazené řešené příklady mají jen ilustrativní význam. Další příklady, jejichž zvládnutí má v osvojení teorie nezastupitelnou úlohu, najde čtenář v řadě sbírek úloh z lineární algebry (viz např. [1],[3],[8] či [13]).

Dále se chci zmínit o označování vět, definic a poznámek. Jsou číslovány zvlášť v rámci každé kapitoly. Odkazuji-li na ně v

---

[1]) předpokládá se znalost zejm. základů teorie zobrazení, vektorových prostorů a matic v rozsahu např. dle [17].

rámci této kapitoly, uvádím jen jejich číslo. Činím-li odkaz do kapitoly (příp. i části) jiné, předřadím označení kapitoly (příp. i části) před číslo dané položky (např. I.3.2 je položka č.2 v 3. kapitole části I.). Formule jsou číslovány tak, že v kulaté závorce je uvedeno číslo definice/věty, k níž se formule vztahuje, a za pomlčkou je pak pořadové číslo formule v rámci uvedené definice/věty.

Pro druhé vydání byl text skripta na některých místech mírně upraven.

Závěrem chci poděkovat oběma recenzentům - doc.RNDr.Aleně Vanžurové,CSc. a doc.RNDr.Daliboru Kluckému,CSc., v případě druhého vydání pak i prof.RNDr.Františku Machalovi,DrSc., - za cenné rady a připomínky, které vedly ke zkvalitnění tohoto učebního textu.

Olomouc, listopad 2005, únor 2010

Autor

* * *

I. EUKLIDOVSKÉ VEKTOROVÉ PROSTORY

1. Euklidovský vektorový prostor a jeho základní vlastnosti

Základním pojmem, s nímž se v této kapitole setkáme, je pojem *skalární součin*. Čtenář se již jistě na střední škole s tímto pojmem setkal - obvykle je skalární součin $\mathbf{u}.\mathbf{v}$ dvou vektorů $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ zaváděn pomocí (intuitivně chápaných) pojmů *délka vektoru* a *úhel dvou vektorů* následující formulí

$$\mathbf{u}.\mathbf{v}=\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\sphericalangle(\mathbf{u},\mathbf{v}),$$

čímž je definováno zobrazení $.:\mathbf{V}\times\mathbf{V}\to\mathbb{R}$ mající vlastnosti (1)-(4)[2]), které *zvolíme* za axiomy teorie euklidovského vektorového prostoru a pojmy *délky vektoru* či *úhlu vektorů* zavedeme v dalším právě pomocí skalárního součinu.

1. Definice *Euklidovským vektorovým prostorem* rozumíme vektorový prostor $\mathbf{V}$ nad tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$ spolu se zobrazením $.:\mathbf{V}\times\mathbf{V}\to\mathbb{R}$ majícím následující vlastnosti:

$\forall\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbf{V}$, $\forall t\in\mathbb{R}$:

(1) $\mathbf{u}.\mathbf{v}=\mathbf{v}.\mathbf{u}$,

(2) $\mathbf{u}.(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\mathbf{u}.\mathbf{v}+\mathbf{u}.\mathbf{w}$,

(3) $(t\mathbf{u}).\mathbf{v}=t(\mathbf{u}.\mathbf{v})$,

(4) $\mathbf{u}\neq\mathbf{o}\Rightarrow\mathbf{u}.\mathbf{u}>0$.

V tomto případě nazýváme zobrazení $.:\mathbf{V}\times\mathbf{V}\to\mathbb{R}$ *skalárním násobením na* $\mathbf{V}$ a reálné číslo $\mathbf{u}.\mathbf{v}$ pak *skalárním součinem vektorů* $\mathbf{u}$ *a* $\mathbf{v}$.

2. Úmluva Nebude-li řečeno jinak, budeme symbolem $\mathbf{V}$ (příp. $\mathbf{V}_n$) **po celou část I.** rozumět n-rozměrný euklidovský vektorový prostor se skalárním součinem „.".

---

[2]) na SŠ se $\mathbf{V}$ chápe ovšem jako množina vektorů pouze dvou konkrétních vektorových prostorů - *fyzikální roviny* nebo *3-rozm. fyzikálního prostoru*.

3. Poznámky

- uvědomme si, že na jednom a témže vektorovém prostoru **V** lze zavést různé skalární součiny a získáme tak *různé* euklidovské vektorové prostory, byť se stejným nosičem (viz např. Příklad **A**). Euklidovský vektorový prostor **V** se skalárním součinem . je možno chápat jako *uspořádanou dvojici* (**V**, .).

- pro označení skalárního součinu dvou vektorů **u**,**v** se užívá i jiných označení - např. *g*(**u**,**v**), <**u**,**v**> a podobně.

- vzhledem k tomu, že nehrozí nebezpečí záměny skalárního součinu za násobení reálných čísel (skaláry a vektory jsou typograficky odlišeny), budeme nadále zpravidla znak skalárního součinu vynechávat a psát jen **uv**.

- pro hodnotu **xx** se užívá rovněž označení $\mathbf{x}^2$ - *skalární čtverec vektoru* **x**.

- zobrazení $\mathbf{V}\times\mathbf{V}\to\mathbb{R}$ majícímu vlastnosti (1)-(4) říkáme také *kladně definitní symetrická bilineární forma*, což zde uvádíme jen pro orientaci čtenáře - studiu bilineární forem budou věnovány přednášky ve vyšších semestrech - viz např. [9].

Příklad A

Rozhodněte, která z následujících zobrazení „." jsou skalárním součinem na příslušném vektorovém prostoru **V**:

1. $\mathbf{V}=\mathbb{R}^2$, $(x_1,x_2).(y_1,y_2)=2x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2$,

2. $\mathbf{V}=\mathbb{R}^n$, $(x_1,\dots,x_n).(y_1,\dots,y_n)=\sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i$,

3. $\mathbf{V}=\mathbb{R}^3$, $(x_1,x_2,x_3).(y_1,y_2,y_3)=2x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2$,

4. $\mathbf{V}=\mathbb{R}^2$, $(x_1,x_2).(y_1,y_2)=2x_1y_1+x_1$,

5. $\mathbf{V}=\mathbb{R}^3$, $(x_1,x_2,x_3).(y_1,y_2,y_3)=2x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+2x_2y_2+2x_3y_3$.

Řešení

V jednotlivých případech ověříme splnění podmínek (1)-(4) definice 1.

Ad 1:

Ověření splnění podmínek (1)-(3) je mechanickou záležitostí a přenecháváme je čtenáři.

Prověřme podmínku (4). Buď $(u_1,u_2)\neq(0,0)$. Pak můžeme psát:

$$(u_1,u_2).(u_1,u_2)=2u_1u_1+u_1u_2+u_2u_1+u_2u_2=2u_1^2+2u_1u_2+u_2^2=2(u_1^2+u_1u_2)+u_2^2=$$

$$=2((u_1+\tfrac{1}{2}u_2)^2-\tfrac{1}{4}u_2^2)+u_2^2=2(u_1+\tfrac{1}{2}u_2)^2+\tfrac{1}{2}u_2^2,$$

a jelikož $(u_1,u_2)\neq(0,0)$, plyne odtud, že

$$(u_1,u_2).(u_1,u_2)>0,$$

což značí splnění podmínky (4) a tudíž zkoumané zobrazení *je skalárním součinem na* $\mathbb{R}^2$.

Ad 2:

Zde je ověření všech podmínek mechanickou záležitostí a přenecháváme je čtenáři[3]).

Ad 3:

I zde je splnění podmínek (1)-(3) evidentní.

Prověřme podmínku (4). Buď $(u_1,u_2,u_3)\neq(0,0,0)$. Pak stejně jako v případě 1 obdržíme:

$$(u_1,u_2,u_3).(u_1,u_2,u_3)=2(u_1+\tfrac{1}{2}u_2)^2+\tfrac{1}{2}u_2^2,$$

což však obecně je číslo nezáporné, nikoli nutně kladné (viz např. $(u_1,u_2,u_3)=(0,0,1)$, kdy je výsledkem 0), a tedy podmínka

---

[3]) tento skalární součin se nazývá *standardní skalární součin na* $\mathbb{R}^n$. Jeho formule je v porovnání s formulí, jíž je zadán skalární součin v případě č.1, jednodušší.

V kapitole 2 ostatně ukážeme, že v každém euklidovském vektorovém prostoru $(\mathbf{V},.)$ lze najít bázi tak, že skalární součin $\mathbf{x}.\mathbf{y}$ bude dán formulí

$$\mathbf{x}.\mathbf{y}=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

kde $x_1,\ldots,x_n$ a $y_1,\ldots,y_n$ jsou po řadě souřadnice vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ v dotyčné bázi.

(4) zde splněne není. Zkoumané zobrazení proto *není skalárním součinem na* $\mathbb{R}^3$.

Ad 4:

Zkoumané zobrazení zřejmě *není skalárním součinem* - provedení přenecháváme čtenáři.

Ad 5:

Analogicky jako v případě 1 bychom zjistili, že *jde o skalární součin* na $\mathbb{R}^3$.

Nechť $(\mathbf{V},.)$ je euklidovský vektorový prostor. Uvažujme některý podprostor $\mathbf{W}$ vektorového prostoru $\mathbf{V}$. Naskýtá se přirozená otázka, zda je $\mathbf{W}$ euklidovský vektorový prostor.

Položme[4] $\quad \odot = .|\mathbf{W}\times\mathbf{W}$, tj. $\forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{W}: \mathbf{u}\odot\mathbf{v}=\mathbf{u}.\mathbf{v}$.

Vzhledem k tomu, že $\mathbf{W}$ je podprostor $\mathbf{V}$ (a je tedy uzavřen na libovolné lineární kombinace svých prvků), je triviální ověřit, že zobrazení $\odot:\mathbf{W}\times\mathbf{W}\to\mathbb{R}$ je *skalárním součinem* na $\mathbf{W}$ - tj. že splňuje požadavky definice 1 (proveďte!).

Platí tedy následující věta:

4.Věta *Buď* $\mathbf{V}$ *se skalárním součinem* . *euklidovský vektorový prostor. Pak libovolný podprostor* $\mathbf{W}\subseteq\mathbf{V}$ *je spolu s restrikcí* $.|\mathbf{W}\times\mathbf{W}$ *euklidovským vektorovým prostorem.*

5.Důsledek Všechny pojmy zaváděné pro euklidovské vektorové prostory lze přenést do jejich podprostorů (aniž by je bylo nutno definovat znova). Všechny věty platné pro euklidovské vektorové prostory platí i pro jejich podprostory (aniž by je bylo nutno zvlášť dokazovat).

---

[4]) tj.zobrazení $\odot$ je *restrikcí* skalárního součinu . na $\mathbf{W}\times\mathbf{W}$.

6. Věta *Pro libovolné vektory* $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ *platí:*

(1) $\forall t,r\in\mathbb{R}$: $(t\mathbf{u})(r\mathbf{v})=(tr)\mathbf{uv}$,

(2) $\mathbf{uu}=0 \Leftrightarrow \mathbf{u}=\mathbf{o}$,

(3) $(\forall\mathbf{x}\in\mathbf{V}\colon\ \mathbf{xu}=0) \Leftrightarrow \mathbf{u}=\mathbf{o}$,

(4) $\mathbf{u}=\mathbf{v} \Leftrightarrow (\forall\mathbf{x}\in\mathbf{V}\colon\ \mathbf{xu}=\mathbf{xv})$[5].

Důkaz:

Ad (1):

Jde o trivilání důsledek axiomů (1) a (3) z definice 1.

Ad (2):

Uvážíme-li, že $\mathbf{o}=0\mathbf{u}$, můžeme psát:

$$\mathbf{u}=\mathbf{o} \Rightarrow \mathbf{uu}=(0\mathbf{u})\mathbf{u}\overset{(a)}{=}0(\mathbf{uu})=0,$$

kde jsme v rovnosti (a) použili axiom (3) z definice 1.

Obrácená implikace plyne bezprostředně z axiomu (4) v definici 1 (jak?).

Ad (3):

Analogicky jako v předešlém případě snadno ukážeme, že:

$$\mathbf{u}=\mathbf{o} \Rightarrow (\forall\mathbf{x}\in\mathbf{V}\colon\ \mathbf{xu}=0).$$

Obrácená implikace je přímým důsledkem tvrzení (2).

Ad (4):

Implikace „$\Rightarrow$" je evidentní.

Jestliže $\mathbf{xu}=\mathbf{xv}$, pak $0=\mathbf{xu}-\mathbf{xv}\overset{(c)}{=}\mathbf{x}(\mathbf{u}-\mathbf{v})$, odkud dle dokázané (3) plyne $\mathbf{u}-\mathbf{v}=\mathbf{o}$, neboť $\mathbf{x}$ je libovolný. Kterého axiomu z definice 1 bylo užito v rovnosti (c)? ∎

Z axiomu 1.(4) a vlastnosti (2) právě uvedené věty plyne:

7. Důsledek *Pro libovolný vektor* $\mathbf{u}\in\mathbf{V}$ *platí:* $\mathbf{uu}\geq 0$.

Jak jsme předeslali výše, zavedeneme nyní *pomocí* skalárního součinu pojem *normy* (užívá se též pojmu *délka) vektoru.*

---

[5]) Poznamenejme, že *existence* vektoru $\mathbf{x}$, pro nějž $\mathbf{xu}=\mathbf{xv}$ nezaručuje $\mathbf{u}=\mathbf{v}$ - např. v $\mathbb{R}^2$ se standardním skalárním součinem $(1,1)\cdot(1,0)=(1,1)\cdot(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, avšak $(1,0)\neq(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

8. Definice Buď $\mathbf{u}\in\mathbf{V}$. Pak *normou vektoru* $\mathbf{u}$ rozumíme číslo označované $\|\mathbf{u}\|$ a definované takto:

$$\boxed{\|\mathbf{u}\|=\sqrt{\mathbf{uu}}\,.}$$

Je-li $\|\mathbf{u}\|=1$, řekneme, že *vektor* $\mathbf{u}$ *je normovaný*.

9. Poznámka Především konstatujme, že vzhledem k důsledku 7 je definice 8 korektní (proč?).

Získáváme tak jisté zobrazení $\|.\|:\mathbf{V}\to\mathbb{R}$, jehož posléze využijeme k zavedení *metriky* na euklidovském vektorovém prostoru.

Příklad B

Napište formule pro normy určené skalárními součiny z příkladu **A**.

Řešení

Formule získáme prostým užitím definice 8.

Ad 1. $\|(x_1,x_2)\|=\sqrt{(x_1,x_2).(x_1,x_2)}=\sqrt{2x_1x_1+x_1x_2+x_2x_1+x_2x_2}=$
$$=\sqrt{2x_1^2+2x_1x_2+x_2^2}\,,$$

2. Ad 2. $\|(x_1,\dots,x_n)\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\,,$

3. Ad 5. $\|(x_1,x_2,x_3)\|=\sqrt{2x_1x_1+x_1x_2+x_2x_1+2x_2x_2+2x_3x_3}=$
$$=\sqrt{2x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+2x_3^2}\,.$$

10. Věta *Pro libovolné vektory* $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ *a libovolné* $t\in\mathbb{R}$ *platí*[6]*):*

(1) $\|t\mathbf{u}\|=|t|\,\|\mathbf{u}\|$,

(2) $\|\mathbf{u}\|=0 \Leftrightarrow \mathbf{u}=\mathbf{o}$,

(3) $\|\mathbf{u}\|>0 \Leftrightarrow \mathbf{u}\neq\mathbf{o}$,

(4) $\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\geq|\mathbf{uv}|$, *přičemž rovnost nastává, právě když* $\mathbf{u},\mathbf{v}$ *jsou lineárně závislé,*

(5) $\|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\|\geq\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|$, *přičemž rovnost nastává, právě existuje-li* $r\in\mathbb{R}$, $r\geq0$, *tak, že* $\mathbf{v}=r\mathbf{u}$ *nebo* $\mathbf{u}=r\mathbf{v}$,

(6) $\big|\,\|\mathbf{u}\|-\|\mathbf{v}\|\,\big|\leq\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$, *přičemž rovnost nastává, právě existuje-li* $r\in\mathbb{R}$, $r\geq0$, *tak, že* $\mathbf{v}=r\mathbf{u}$ *nebo* $\mathbf{u}=r\mathbf{v}$.

Důkaz:

Tvrzení (1)-(3) se dokáží snadno pomocí definice normy, (1) a (2) z věty 6 a z (4) definice 1 (promyslete si!)

Ad (4):

(i) nerovnost $|\mathbf{uv}|\leq\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$

V případě $\mathbf{u}=\mathbf{o}$ tvrzení zřejmě platí (proč?).

Předpokládejme $\mathbf{u}\neq\mathbf{o}$ a uvažujme vektor $t\mathbf{u}-\mathbf{v}$, kde t je libovolné reálné číslo. Dle (4) definice 1 obdržíme:

$$(t\mathbf{u}-\mathbf{v})(t\mathbf{u}-\mathbf{v})\geq0,$$

což lze pomocí (1), (2) a (3) téže definice psát:

$$t^2(\mathbf{uu})-2t(\mathbf{uv})+\mathbf{vv}\geq0.$$

Levá strana nerovnosti je kvadratický ($\mathbf{uu}\neq0$) polynom v proměnné t a má-li být nezáporný, musí mít nejvýše jeden reálný kořen, což nastane, právě když jeho diskriminant bude nekladný:

$$4(\mathbf{uv})^2-4(\mathbf{uu})(\mathbf{vv})\leq0,$$

odkud $$(\mathbf{uv})^2\leq(\mathbf{uu})(\mathbf{vv}),$$

neboli (viz def. 8): $$|(\mathbf{uv})|^2\leq(\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|)^2,$$

což vzhledem k nezápornosti abs. hodnoty reálného čísla a součinu norem vektorů lze odmocnit, čímž dostaneme:

$$|\mathbf{uv}|\leq\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|.$$

(ii) nutná a postačující podmínka pro $|\mathbf{uv}|=\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$

Jsou-li $\mathbf{u},\mathbf{v}$ lineárně závislé, existuje $r\in\mathbb{R}$ tak, že $\mathbf{v}=r\mathbf{u}$ nebo $\mathbf{u}=r\mathbf{v}$ - nechť např. $\mathbf{v}=r\mathbf{u}$ - a tudíž:

---

[6]) nerovnost (4) se často nazývá *Cauchyova* či *Schwarzova*, nerovnost (5) pak *trojúhelníková.*

$$|\mathbf{uv}|=|\mathbf{u}(r\mathbf{u})|=|r(\mathbf{uu})|=|r|(\mathbf{uu})=|r|\,\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{u}\|\overset{(a)}{=}\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|,$$

kde jsme v rovnosti (a) užili již dokázané (1).

Nechť $|\mathbf{uv}|=\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$. Předpokládejme, že $\mathbf{u},\mathbf{v}$ jsou lineárně nezávislé - pak ovšem pro každé $r\in\mathbb{R}$ platí: $r\mathbf{u}+\mathbf{v}\neq\mathbf{o}$, a tedy

$$(r\mathbf{u}+\mathbf{v})(r\mathbf{u}+\mathbf{v})\neq 0 \text{ (proč?)},$$

odkud bychom analogicky, jako výše obdrželi:

$$r^2(\mathbf{uu})+2r(\mathbf{uv})+\mathbf{vv}\neq 0.$$

Odtud - opět analogicky jako výše - obdržíme:

$$|\mathbf{uv}|<\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|,$$

což je ovšem ve sporu s předpokladem $|\mathbf{uv}|=\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$.

Ad (5):

(i) nerovnost $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|\leq\|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\|$

Snadno odvodíme, že

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2=(\mathbf{u}+\mathbf{v})(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\mathbf{uu}+2(\mathbf{uv})+\mathbf{vv}=\|\mathbf{u}\|^2+2(\mathbf{uv})+\|\mathbf{v}\|^2\leq\|\mathbf{u}\|^2+2|\mathbf{uv}|+\|\mathbf{v}\|^2,$$

odkud s využitím již dokázaného tvrzení (4) plyne:

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2\leq\|\mathbf{u}\|^2+2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|+\|\mathbf{v}\|^2=(\|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\|)^2,$$

což po odmocnění (vzhledem k nezápornosti normy vektoru) dává:

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|\leq\|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\|.$$

(ii) nutná a postačující podmínka pro $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|=\|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\|$

Pro $\mathbf{u}=\mathbf{o}$ nebo $\mathbf{v}=\mathbf{o}$ je rovnost splněna a přitom existuje $r\geq 0$, tak, že $\mathbf{v}=r\mathbf{u}$ nebo $\mathbf{u}=r\mathbf{v}$. Nechť nadále $\mathbf{u}\neq\mathbf{o}$ a $\mathbf{v}\neq\mathbf{o}$.

Z (i) plyne

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2=\|\mathbf{u}\|^2+2(\mathbf{uv})+\|\mathbf{v}\|^2\leq\|\mathbf{u}\|^2+2|\mathbf{uv}|+\|\mathbf{v}\|^2\leq\|\mathbf{u}\|^2+2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|+\|\mathbf{v}\|^2=$$
$$=(\|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\|)^2,$$

a tudíž je zkoumaná rovnost ekvivalentní s následujícími:

$$\mathbf{uv}=|\mathbf{uv}|, \tag{α}$$

$$|\mathbf{uv}|=\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|. \tag{β}$$

Rovnost (β) dle (4) je ekvivalentní lineární závislosti vektorů $\mathbf{u},\mathbf{v}$ - nechť např. $\mathbf{u}=r\mathbf{v}$.

Pak ovšem $\mathbf{uv}=r(\mathbf{vv})=r\|\mathbf{v}\|^2$ a $|\mathbf{uv}|=|r|\,\|\mathbf{v}\|^2$, a tedy ($\alpha$) je splněno jen pro $r\geq 0$, neboť $\|\mathbf{v}\|\neq 0$.

Ad (6): Tvrzení se dokáže analogicky jako (5). ∎

Jak jsme rovněž předeslali, zavedeme *pomocí* skalárního součinu i pojem *úhlu dvou vektorů*[7]*):*

11. Definice Buďte $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$. Pak *úhlem vektorů* $\mathbf{u}$ *a* $\mathbf{v}$ rozumíme číslo z intervalu $\langle 0,\pi\rangle$ označované $\sphericalangle(\mathbf{u},\mathbf{v})$ a definované takto:

(1) $\mathbf{u}\neq\mathbf{o}\neq\mathbf{v}$:

$$\boxed{\sphericalangle(\mathbf{u},\mathbf{v})=\arccos\frac{\mathbf{uv}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|},}$$

(2) $\mathbf{u}=\mathbf{o} \vee \mathbf{v}=\mathbf{o}$:

$$\boxed{\sphericalangle(\mathbf{u},\mathbf{v})=\tfrac{1}{2}\pi.}$$

Odtud a z věty 6 plyne (promyslete si):

12. Důsledek *Pro libovolné* $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ *platí*[8]*):*

(1) $\sphericalangle(\mathbf{u},\mathbf{v})=\frac{1}{2}\pi$, *právě když* $\mathbf{uv}=0$,

(2) $\mathbf{uv}=\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\sphericalangle(\mathbf{u},\mathbf{v})$.

13. Poznámky

- S ohledem na symetrii skalárního součinu [tj. 1.(1)] platí:

$$\forall\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}:\ \sphericalangle(\mathbf{u},\mathbf{v})=\sphericalangle(\mathbf{v},\mathbf{u}).$$

- Vzhledem k (4) věty 10 náleží zlomek $\frac{\mathbf{uv}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$ intervalu $\langle -1,1\rangle$, a tudíž je definice 11 korektní.

- Ke každým dvěma vektorům je definicí 11 přiřazen jejich úhel jednoznačně, a to z uvedeného intervalu $\langle 0,\pi\rangle$.

Skalární součin umožňuje zavést na euklidovském vektorovém

---

[7]) přitom se pochopitelně předpokládá, že čtenáři je známa *definice funkce kosinus* reálné proměnné nikoli pomoci intuitivně chápaného pojmu úhlu (jako je tomu na SŠ), ale axiomatická popř. pomocí mocninné řady.

[8]) odstavec (2) porovnejte s úvodní úvahou

prostoru přirozeným způsobem *metriku*[9]):

14. Věta *Buď* **V** *spolu se skalárním součinem „." euklidovský vektorový prostor. Zobrazení* ρ*:* $\mathbf{V}\times\mathbf{V}\to\mathbb{R}$ *definované vztahem*

$$\boxed{\forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}:\ \rho(\mathbf{u},\mathbf{v})=\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|}$$

je metrikou na množině **V**.

Důkaz:
Vezmeme-li v úvahu vlastnosti normy vektoru dle věty 10, je platnost tvrzení evidentní (promyslete si!).

15. Definice Buď **V** spolu se skalárním součinem „." euklidovský vektorový prostor. Pak metrika na **V** definovaná v předešlé větě se nazývá *metrika indukovaná skalárním součinem „."*.

16. Poznámka Každý euklidovský vektorový prostor je tedy současně *prostorem metrickým*. Na daném euklidovském vektorovém prostoru lze ovšem zavést i jiné metriky, než je metrika indukovaná skalárním součinem.

Uvážíme-li např. aritmetický vektorový prostor $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem, je metrika indukovaná tímto skalárním součinem dána formulí (srv. příklad B):

$$\rho((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n))=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}\ .$$

Na témže vektorovém prostoru můžeme např. zavést také metriku ná-

---

[9]) Připomeňme, že *metrikou na množině* **M**, $\mathbf{M}\neq\emptyset$, rozumíme zobrazení ρ: $\mathbf{M}\times\mathbf{M}\to\mathbb{R}$ s vlastnostmi:

(1) $\forall x\in\mathbf{M}:\ \rho(x,x)=0$,

(2) $\forall x,y\in\mathbf{M}:\ x\neq y \Rightarrow \rho(x,y)=\rho(y,x)>0$,

(3) $\forall x,y,z\in\mathbf{M}: \rho(x,y)+\rho(y,z)\geq\rho(x,z)$.

sledující, která skalárním součinem indukovaná není:

$$\rho((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n))=\underset{1\le i\le n}{\mathrm{Max}}\{|y_i-x_i|\}.$$

Uvážíme-li aritmetický vektorový prostor $\mathbb{R}^2$ se skalárním součinem definovaným relací

$$(x_1,x_2).(y_1,y_2)=2x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2,$$

je metrika tímto skalárním součinem indukovaná dána formulí:

$$\rho((x_1,x_2),(y_1,y_2))=\sqrt{2(y_1-x_1)^2+2(y_1-x_1)(y_2-x_2)+(y_2-x_2)^2}.$$

2. Kolmost v euklidovském vektorovém prostoru

V této kapitole si všimneme jednak kolmosti dvou vektorů, vektoru a podmožiny (podprostoru), jakož i dvou podmožin (podprostorů) euklidovského vektorového prostoru, dále pak ortogonálních a ortonormálních bází euklidovského vektorového prostoru.

2.1 Kolmost vektorů euklidovského vektorového prostoru

1. Definice Buďte $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$. Řekneme, že *vektory* $\mathbf{u},\mathbf{v}$ *jsou kolmé (ortogonální)*, což značíme $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$, jestliže $\sphericalangle(\mathbf{u},\mathbf{v})=\frac{1}{2}\pi$.

2. Poznámka S ohledem na poznámku 1.13 je relace být kolmý symetrická - nemusíme tedy rozlišovat, zda $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$ či $\mathbf{v}\perp\mathbf{u}$.

Užitím důsledku 1.12 dostáváme[10]):

3. Věta *Buďte* $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$. *Pak platí:*

$$\boxed{\mathbf{u}\perp\mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u}\mathbf{v}=0.}$$

4. Definice Nechť $\mathcal{U}\subseteq\mathbf{V}$. Řekneme, že

(1) $\mathcal{U}$ *je ortogonální množinou vektorů*, jestliže platí:

$$\boxed{\forall\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathcal{U}\colon\ \mathbf{u}\neq\mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{u}\mathbf{v}=0.}$$

(2) $\mathcal{U}$ *je ortonormální množinou vektorů*, jestliže je ortogo-

---

[10]) mnohde bývají jako *ortogonální* vektory definovány ty, jejichž *skalární součin je nulový*. Následující věta ukazuje, že jde o pojem ekvivaletní námi zavedenému.

nální a platí:

$$\boxed{\forall \mathbf{u}\in\mathcal{U}:\ \|\mathbf{u}\|=1.}$$

Platnost následující věty je evidentní (zdůvodněte):

5. Věta *Nechť* $\mathcal{U}=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_k\}\subseteq\mathbf{V}$. *Pak platí:*
(1) $\mathcal{U}$ *je ortogonální množinou, právě když*

$$\boxed{\forall i,j\in\mathbb{N}, 1\le i,j\le k:\ i\ne j \Rightarrow \mathbf{u}_i\mathbf{u}_j=0.}$$

(2) $\mathcal{U}$ *je ortonormální množinou, právě když*[11]*):*

$$\boxed{\forall i,j\in\mathbb{N}, 1\le i,j\le k:\ \mathbf{u}_i\mathbf{u}_j=\delta_{ij}.}$$

6. Poznámka Někdy se užívá i obratu *vektory* $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_k$ *jsou ortogonální*, resp. *ortonormální*. Jelikož však nejde o vlastnost jednotlivých vektorů, ale o vlastnost podmožiny jimi tvořené, je metodicky vhodnější hovořit o *ortogonalitě*, resp. *ortonormalitě, množiny* (podobně jako u lineární (ne)závislosti).

Uvažujme nyní některou ortogonální podmnožinu nenulových vektorů $\mathcal{U}$ ve $\mathbf{V}$ a vyšetřeme její lineární (ne)závislost.
Buď $\mathcal{U}=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_k\}$, zkoumejme nyní nulovou lineární kombinaci vektorů z $\mathcal{U}$:

$$\sum_{j=1}^{k} c_j\mathbf{u}_j=\mathbf{o} \qquad (7\text{-}1)$$

Zvolme i, $1\le i\le k$, a vynásobme rovnost (7-1) vektorem $\mathbf{u}_i$, čímž obdržíme:

$$0=\mathbf{u}_i\Big(\sum_{j=1}^{k} c_j\mathbf{u}_j\Big)\overset{(a)}{=}\sum_{j=1}^{k} c_j(\mathbf{u}_i\mathbf{u}_j)\overset{(b)}{=}c_i\|\mathbf{u}_i\|^2,$$

a proto $c_1=c_2=\dots=c_k=0$, neboť $\|\mathbf{u}_i\|\ne0$ (proč?).
Přitom v rovnosti (a) bylo užito vlastnosti skalárního součinu a

---

[11]) Připomeňme, že symbol δ_{ij} (tzv. *Kroneckerovo delta)* nabývá hodnoty 0 pro $i\ne j$ a hodnoty 1 pro $i=j$.

v (b) ortogonality množiny $\mathcal{U}$ - sčítanci pro $j \neq i$ jsou rovni nule (srv. 5.(1)). Ukázali jsme platnost následující věty.

7. Věta *Každá ortogonální podmnožina nenulových vektorů z* **V** *je lineárně nezávislá.*

8. Důsledek *Každá ortonormální podmnožina vektorů z* **V** *je lineárně nezávislá.*

2.2 Ortonormální báze euklidovského vektorového prostoru

9. Definice Řekneme, že báze $\mathcal{B}$ euklidovského vektorového prostoru **V** je

(1) *ortogonální bází,* jestliže $\mathcal{B}$ je ortogonální podmnožinou ve **V**,

(2) *ortonormální bází,* jestliže $\mathcal{B}$ je ortonormální podmnožinou ve **V**.

Z právě uvedené definice a věty 7 bezprostředně plyne:

10. Důsledky

(1) Každá n-členná ortogonální podmnožina nenulových vektorů z **V** *je ortogonální bází* **V**.

(2) Každá n-členná ortonormální podmnožina vektorů z **V** *je ortonormální bází* **V**.

Význam ortonormálních bází vyplývá zejména z následujících dvou vět - formule pro výpočet skalárního součinu resp. normy vektoru jsou v těchto bázích velmi jednoduché.

11. Věta *Buď $\mathcal{B}$ báze prostoru* **V**. *$\mathcal{B}$ je ortonormální, právě když platí*[12]*):*

$$\boxed{\forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V},\ \{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}}=(u_1,\ldots,u_n),\ \{\mathbf{v}\}_{\mathcal{B}}=(v_1,\ldots,v_n):\ \mathbf{uv}=\sum_{j=1}^{n}u_jv_j.} \quad (11\text{-}1)$$

12. Poznámka Formule (11-1) pro skalární součin se často nazývá *kartézská formule*. Bylo by ji rovněž možné zapsat takto:

$$\boxed{\mathbf{uv}=\{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}}\{\mathbf{v}\}_{\mathcal{B}}^{T}.}$$

Důkaz věty 11:

Označme $\mathcal{B}=\langle\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n\rangle$.

(i) nechť $\mathcal{B}$ je ortonormální, tj. $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j=\delta_{ij}$, $i,j=1,\ldots,n$.

Zvolme $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$, $\{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}}=(u_1,\ldots,u_n)$, $\{\mathbf{v}\}_{\mathcal{B}}=(v_1,\ldots,v_n)$, což znamená, že

$$\mathbf{u}=\sum_{i=1}^{n}u_i\mathbf{e}_i,\quad \mathbf{v}=\sum_{j=1}^{n}v_j\mathbf{e}_j. \qquad (11\text{-}2)$$

Pro skalární součin **uv** můžeme psát:

$$\mathbf{uv}\overset{(a)}{=}\mathbf{u}\Big(\sum_{j=1}^{n}v_j\mathbf{e}_j\Big)\overset{(b)}{=}\sum_{j=1}^{n}v_j(\mathbf{ue}_j)\overset{(c)}{=}\sum_{j=1}^{n}v_j\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n}u_i\mathbf{e}_i\Big)\mathbf{e}_j\Big)=$$

$$\overset{(d)}{=}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}u_iv_j(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j)\overset{(e)}{=}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}u_iv_j(\delta_{ij})\overset{(f)}{=}\sum_{j=1}^{n}u_jv_j,$$

kde v rovnosti (a),(c) bylo využito relace (11-2), v rovnostech (b) a (d) vlastností skalárního součinu (jakých?), v rovnosti (e) ortonormality báze $\mathcal{B}$ a konečně v (f) faktu, že pro $i\neq j$ jsou příslušní sčítanci rovni nule[13]).

---

[12]) Připomeňme, že symbolem $\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}}$ značíme souřadnice vektoru **x** v bázi $\mathcal{B}$.

[13]) Mimo jiné jsme právě odvodili, že je-li $\mathcal{B}=\langle\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n\rangle$ *libovolná* báze euklidovského vektorového prostoru **V**, pak pro každé $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$, $\{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}}=(u_1,\ldots,u_n)$, $\{\mathbf{v}\}_{\mathcal{B}}=(v_1,\ldots,v_n)$ platí:

$$\mathbf{uv}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}u_iv_j(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j).$$

Položíme-li $f_{ij}=\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$, $1\le i,j\le n$, vidíme, že skalární součin je určen zadáním báze $\mathcal{B}$ a matice $\mathbf{F}=(f_{ij})$, o níž se často hovoří jako

(ii) Nechť je skalární součin dán formulí (11-1).
Zvolme libovolně $i,k\in\{1,\dots,n\}$ a spočtěme hodnotu $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k$.
Zřejmě $\{\mathbf{e}_l\}_{\mathcal{B}}=(\delta_{l1},\delta_{l2},\dots,\delta_{ln})$, $l=1,\dots,n$. Dosadíme-li tedy do (11-1), můžeme psát:

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k=\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}\delta_{kj}=\delta_{ik},$$

což znamená, že $\mathcal{B}$ je ortonormální. ∎

13. Věta *Buď $\mathcal{B}$ báze prostoru* **V**. *$\mathcal{B}$ je ortonormální, právě když platí:*

$$\boxed{\forall \mathbf{u}\in\mathbf{V},\ \{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}}=(u_1,\dots,u_n):\ \|\mathbf{u}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}u_i^2}\ .} \qquad (13\text{-}1)$$

14. Poznámka Formule (13-1) pro normu vektoru se rovněž často nazývá *kartézská formule*.

<u>Důkaz věty 13:</u>

Označme $\mathcal{B}=\langle\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\dots,\mathbf{e}_n\rangle$.

(i) Je-li $\mathcal{B}$ ortonormální, je tvrzení věty evidentním důsledkem věty 11 (a definice normy vektoru).

(ii) Nechť je norma vektoru dána formulí (13-1). Odtud bezprostředně plyne, že $\|\mathbf{e}_i\|=1$, $i=1,\dots,n$ (proč?). Předpokládejme, že existují dva různé vektory z $\mathcal{B}$, které na sebe nejsou kolmé - bez

---

o *matici skalárního součinu vzhledem k bázi $\mathcal{B}$* (báze $\mathcal{B}$ je vzhledem k danému skalárnímu součinu ortonormální, právě když **F**=**E**). Pak můžeme psát

$$\boxed{\mathbf{u}\mathbf{v}=\{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}}\mathbf{F}\{\mathbf{v}\}_{\mathcal{B}}^{T}.}$$

Možnost tohoto přístupu vyplývá z toho, že skalární součin je speciálním případem bilineární formy (viz poznámka 1.3).

újmy na obecnosti nechť $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\neq 0$.

Uvážíme-li, že $\{\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\}_{\mathcal{B}}=(1,1,0,\dots,0)$, pak pro normu vektoru $(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)$ užitím formule (13-1) dostáváme:

$$\|\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\|=\sqrt{2}. \tag{13-2}$$

Pro normu vektoru $(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)$ dle definice 1.8 dostáváme:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\|^2&=(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)=\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2=\\&=\|\mathbf{e}_1\|^2+2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2+\|\mathbf{e}_2\|^2=2+2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2,\end{aligned}$$

Vzhledem k předpokladu $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\neq 0$ odtud plyne, že

$$\|\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\|\neq\sqrt{2},$$

což je ovšem spor s (13-2). $\mathcal{B}$ tudíž musí být ortogonální množinou vektorů, celkem tedy množinou ortonormální. ■

Z věty 13 vyplývá:

15. Důsledek *Buď $\mathcal{B}$ báze prostoru $\mathbf{V}$. $\mathcal{B}$ je ortonormální, právě když platí*[14]*):*

$$\boxed{\forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}, \{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}}=(u_1,\dots,u_n), \{\mathbf{v}\}_{\mathcal{B}}=(v_1,\dots,v_n):\ \rho(\mathbf{u},\mathbf{v})=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(v_i-u_i)^2}.}$$

Naskýtá se přirozená otázka, zda v každém euklidovském vektorovém prostoru existuje ortonormální báze. Odpověď bude bezprostředním důsledkem věty následující.

16. Věta *Ortonormální bázi libovolného podprostoru euklidovského vektorového prostoru lze doplnit na ortonormální bázi tohoto prostoru.*

Důkaz:

Buď $\mathbf{W}\subseteq\mathbf{V}_n$. Důkaz provedeme matematickou indukcí pro dimenzi prostoru $\mathbf{V}_n$.

---

[14]) Metrika daná právě uvedenou formulí se nazývá *m. euklidovská*. Příkladem je např. metrika na $\mathbb{R}^n$ indukovaná standardním skalárním součinem.

(i) Pro $n=1$ je tvrzení zřejmé.

(ii) Předpokládáme platnost věty pro libovolný euklidovský vektorový prostor dimenze $n-1$ $(n\geq 2)$. Buď $\mathbf{W}\subseteq\subseteq\mathbf{V}_n$. Případ $\mathbf{W}=\mathbf{V}_n$ je triviální, nechť dále $\mathbf{W}\subset\mathbf{V}_n$. Odtud plyne existence $\bar{\mathbf{V}}_{n-1}\subset\subset\mathbf{V}_n$ tak, že $\mathbf{W}\subseteq\subseteq\bar{\mathbf{V}}_{n-1}$. Dle indukčního předpokladu existují k ortonormální bázi $<\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_k>$ podprostoru $\mathbf{W}$ vektory $\mathbf{e}_{k+1},\dots,\mathbf{e}_{n-1}$ tak, že

$$\mathcal{W}=<\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_{k+1},\dots,\mathbf{e}_{n-1}>$$

je ortonormální báze prostoru $\bar{\mathbf{V}}_{n-1}$. Čtenáři je známo, že bázi $\mathcal{W}$ lze doplnit např. vektorem $\mathbf{u}$ na bázi $\mathcal{E}$ prostoru $\mathbf{V}$ - tj.

$$\mathcal{E}=<\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_{n-1},\mathbf{u}>.$$

Hledejme nyní vektor $\mathbf{e}\in\mathbf{V}$ tvořící s $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_{n-1}$ ortogonální množinu - tedy vektor splňující podmínky

$$\mathbf{e}\mathbf{e}_i=0,\ i=1,\dots,n-1. \tag{16-1}$$

Jelikož má $\mathbf{e}$ náležet $\mathbf{V}$ a $\mathcal{E}$ je báze $\mathbf{V}$, hledáme $\mathbf{e}$ ve tvaru:

$$\mathbf{e}=x_1\mathbf{e}_1+\dots+x_{n-1}\mathbf{e}_{n-1}+x_n\mathbf{u}. \tag{16-2}$$

Vynásobením rovnosti (16-2) vektorem $\mathbf{e}_i$, $1\leq i\leq n-1$, obdržíme

$$\mathbf{e}\mathbf{e}_i=x_i+x_n(\mathbf{u}\mathbf{e}_i), \tag{16-3}$$

neboť $\mathcal{W}$ je ortonormální množina.

Položíme-li $a_i=\mathbf{u}\mathbf{e}_i$, $1\leq i\leq n-1$, a vezmeme-li v úvahu požadavek (16-1), je (16-3) ekvivalentní následující soustavě lineárních homogenních rovnic o neznámých $x_1,\dots,x_{n-1},x_n\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad\quad &+ a_1x_n=0\\ x_2 \quad\quad &+ a_2x_n=0\\ \dots\dots\dots&\dots\dots\dots\\ x_{n-1}&+ a_{n-1}x_n=0. \end{aligned} \tag{16-4}$$

Tato soustava má zřejmě alespoň jedno netriviální řešení[15]) (jaké?). To ovšem znamená existenci alespoň jednoho nenulového vektoru $\mathbf{e}$ vyhovujícího (16-2), a proto

$$<\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_{n-1},\mathbf{e}>$$

je ortogonální množinou nenulových vektorů (tak jsme $\mathbf{e}$ sestrojili) a dle důsledku 10 ortogonální bází prostoru $\mathbf{V}_n$.

---

[15]) rovnice soustavy (16-4) jsou evidentně lineárně nezávislé, a tudíž všechna její řešení $(x_1,\dots,x_{n-1},x_n)$ vyplňují jistý jednorozměrný podprostor v $\mathbb{R}^n$.

Položíme-li $\mathbf{e}_n=(1/\|\mathbf{e}\|)\mathbf{e}$, je

$$\langle \mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_{n-1},\mathbf{e}_n\rangle$$

ortonormální bázi euklidovského vektor.prostoru $\mathbf{V}_n$. ■

17. Důsledek *V libovolném netriviálním euklidovském vektorovém prostoru existuje alespoň jedna ortonormální báze.*

Důkaz:

Uvážíme-li, že v každém netriviálním vektorovém prostoru existuje alespoň jeden nenulový vektor $\mathbf{e}$, a položíme-li $\mathbf{W}=[\mathbf{e}]$, pak vektor $\mathbf{e}_1=(1/\|\mathbf{e}\|)\mathbf{e}$ tvoří ortonormální bázi ve $\mathbf{W}$ (proč?).
Dle předchozí věty existují $\mathbf{e}_2,\dots,\mathbf{e}_n\in\mathbf{V}$ doplňující vektor $\mathbf{e}_1$ na ortonormální bázi euklidovského vektorového prostoru $\mathbf{V}_n$. ■

Příklad A

V euklidovském vektorovém prostoru z úlohy 5 příkladu 1.**A**, najděte alespoň jednu ortonormální bázi.

Řešení

Připomeňme, že jde o vektorový prostor $\mathbb{R}^3$ spolu se skalárním součinem . definovaným relací

$$\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3),\ \mathbf{y}=(y_1,y_2,y_3):\ \mathbf{x}.\mathbf{y}=2x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+2x_2y_2+2x_3y_3. \qquad (\mathbf{A}\text{-}1)$$

Nejprve nalezneme bázi *ortogonální*, kterou pak normalizujeme.

Zvolme libovolný nenulový vektor $\mathbf{e}_1\in\mathbb{R}^3$:[16]

$$\mathbf{e}_1=(1,0,0).$$

Vektor $\mathbf{e}_2$ hledáme v množině vektorů kolmých na $\mathbf{e}_1$ (tzv. ortogonální doplněk množiny $\{\mathbf{e}_1\}$ - viz podkapitola 2.5).

Vektor $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$ je kolmý na $\mathbf{e}_1$, právě když (užitím (**A**-1)):

$$0=\mathbf{x}.\mathbf{e}_1=(x_1,x_2,x_3).(1,0,0)=2x_1+x_2. \qquad (\mathbf{A}\text{-}2)$$

Nechť tedy např. $\mathbf{e}_2=(1,-2,0)$.

---

[16]) tento vektor je ortogonální bázi podprostoru $[\mathbf{e}_1]$ a dle věty 16 jej tedy lze doplnit na ortogonální bázi prostoru $\mathbb{R}^3$.

Vektor $\mathbf{e}_3$ hledáme v množině vektorů kolmých současně na $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$. Vektor $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$ je kolmý na $\mathbf{e}_1$ a na $\mathbf{e}_2$, právě když:

$$0=\mathbf{x}.\mathbf{e}_1 \wedge 0=\mathbf{x}.\mathbf{e}_2.$$

Analogicky jako výše odvodíme, že

$$0=\mathbf{x}.\mathbf{e}_2 \Leftrightarrow x_2=0,$$

což s využitím výsledku (**A**-2) pro $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$ značí, že

$$(\mathbf{x}.\mathbf{e}_1=0 \wedge \mathbf{x}.\mathbf{e}_2=0) \Leftrightarrow 2x_1+x_2=0 \wedge x_2=0 \Leftrightarrow x_1=x_2=0$$

a vektor $\mathbf{e}_3$ můžeme např. zvolit takto:

$$\mathbf{e}_3=(0,0,1).$$

Položíme-li nyní

$$\bar{\mathbf{e}}_i=(1/\|\mathbf{e}_i\|)\mathbf{e}_i, \quad 1\le i\le 3,$$

tvoří vektory $\bar{\mathbf{e}}_1$, $\bar{\mathbf{e}}_2$, $\bar{\mathbf{e}}_3$ ortonormální bázi.

Jak jsme odvodili v příkladu 1.**B**, platí pro $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$:

$$\|\mathbf{x}\|=\sqrt{2x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+2x_3^2},$$

a tudíž $\bar{\mathbf{e}}_1=(\sqrt{2}/2,0,0)$, $\bar{\mathbf{e}}_2=(\sqrt{6}/6,-\sqrt{6}/3,0)$, $\bar{\mathbf{e}}_3=(0,0,\sqrt{2}/2)$ tvoří jednu z ortonormálních bází eklidovského vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3,.)$[17]).

Příklad B

V aritmetickém vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou dány vektory $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$: $\mathbf{e}_1=(1,1,0)$, $\mathbf{e}_2=(0,1,1)$, $\mathbf{e}_3=(0,0,1)$.

Najděte skalární součin . na $\mathbb{R}^3$ tak, aby $\mathcal{B}=\langle\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\rangle$ byla ortonormální bází prostoru $(\mathbb{R}^3,.)$.

Řešení

Dle věty 11 je hledaný skalární součin dán pro *souřadnice vektorů v bázi* $\mathcal{B}$ formulí

---

[17]) Z příkladu je patrno, že nalezená ortonormální báze *není jediná*. Dále je patrno, že nalezená báze *není* ortonormální bází prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem.

$$\forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3:\ \mathbf{u}.\mathbf{v}=\{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}}\{\mathbf{v}\}_{\mathcal{B}}^{T}. \tag{B-1}$$

Je tedy třeba pro libovolné $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3),\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)\in\mathbb{R}^3$ nalézt jejich souřadnice v bázi $\mathcal{B}$.

Je-li $\mathbf{x}$ libovolný vektor z $\mathbb{R}^3$, pak jak známo platí[18]:

$$(\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)\ \wedge\ \{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3))\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} x_1=\bar{x}_1 \\ x_2=\bar{x}_1+\bar{x}_2 \\ x_3=\quad\ \bar{x}_2+\bar{x}_3. \end{cases}$$

Snadno nalezneme inverzní transformaci souřadnic:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_1&=x_1 \\ \bar{x}_2&=-x_1+x_2 \\ \bar{x}_3&=x_1-x_2+x_3. \end{aligned}\right\} \tag{B-2}$$

Nyní pro libovolné $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3),\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)\in\mathbb{R}^3$ můžeme dle (**B**-1) a (B-2) psát:

$$\mathbf{u}.\mathbf{v}=\bar{u}_1\bar{v}_1+\bar{u}_2\bar{v}_2+\bar{u}_3\bar{v}_3=u_1v_1+(-u_1+u_2)(-v_1+v_2)+(u_1-u_2+u_3)(v_1-v_2+v_3)=$$
$$=3u_1v_1-2u_1v_2+u_1v_3-2u_2v_1+2u_2v_2-u_2v_3+u_3v_1-u_3v_2+u_3v_3.$$

(Přesvědčte se, že opravdu $\mathbf{e}_i.\mathbf{e}_j=\delta_{ij}$, $1\le i,j\le 3$.)

2.3 Přechod mezi ortonormálními bázemi. Ortogonální matice

18.Věta: *Buď $\mathcal{B}$ ortonormální a $\mathcal{C}$ libovolná další báze euklidovského vektorového prostoru. Pak je báze $\mathcal{C}$ ortonormální právě tehdy, když platí*[19]*:*

$$\boxed{(\mathcal{B},\mathcal{C})(\mathcal{B},\mathcal{C})^{T}=E.}$$

Důkaz:

Nechť $\mathcal{B}=\langle\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\rangle$, $\mathcal{C}=\langle\mathbf{d}_1,\dots,\mathbf{d}_n\rangle$. Položme $(\mathcal{B},\mathcal{C})=(a_{ij})$, neboli:

---

[18]) To, že $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$, je ekvivalentní $\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{S}}=(x_1,x_2,x_3)$, kde $\mathcal{S}$ je standardní báze prostoru $\mathbb{R}^3$.

[19]) Symbolem $(\mathcal{B},\mathcal{C})$ rozumíme *matici přechodu od $\mathcal{B}$ k $\mathcal{C}$*. Přitom se držíme konvence, kdy její řádky jsou tvořeny souřadnicemi prvků báze $\mathcal{C}$ vzhledem k bázi $\mathcal{B}$.

$$\mathbf{d}_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_j,\quad 1\le i\le n. \tag{18-1}$$

Zvolme nyní libovolné $i,l\in\{1,\ldots,n\}$ a spočtěme hodnotu $\mathbf{d}_i\mathbf{d}_l$:

$$\mathbf{d}_i\mathbf{d}_l\overset{(a)}{=}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_j\Big)\mathbf{d}_l\overset{(b)}{=}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{e}_j\mathbf{d}_l)\overset{(c)}{=}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Big(\mathbf{e}_j\Big(\sum_{k=1}^{n} a_{lk}\mathbf{e}_k\Big)\Big)\overset{(d)}{=}$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ij}a_{lk}(\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k)\overset{(e)}{=}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ij}a_{lk}\delta_{jk}\overset{(f)}{=}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{lj},$$

tedy
$$\mathbf{d}_i\mathbf{d}_l=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{lj}, \tag{18-2}$$

kde v rovnostech (a) a (c) jsme použili (18-1), v rovnostech (b) a (d) pak vlastnosti skalárního součinu, v rovnosti (e) ortonormalitu báze $\mathcal{B}$ a konečně v (f) nulovosti sčítanců pro $k\neq j$.

Uvážíme-li, že a_{lj} je prvkem na pozici (j,l) matice $(\mathcal{B},\mathcal{C})^T$, lze rovnost (18-2) interpretovat tak, že hodnota $\mathbf{d}_i\mathbf{d}_l$ je rovna prvku na pozici (i,l) v matici rovné součinu matic $(\mathcal{B},\mathcal{C})(\mathcal{B},\mathcal{C})^T$ pro každé $i,l\in\{1,\ldots,n\}$. Odtud bezprostředně dostáváme, že báze $\mathcal{C}$ bude ortonormální (tj. $\mathbf{d}_i\mathbf{d}_l=\delta_{il}$, $1\le i,l\le n$), právě když bude uvedený součin matic roven matici jednotkové, čímž je věta dokázána. ∎

Pro matice přechodu mezi ortonormálními bázemi se zavádí speciální název:

19. Definice Reálnou čtvercovou matici $\mathbf{A}$ nazýváme *ortogonální matice*[20]), jestliže

$$\boxed{\mathbf{A}\mathbf{A}^T=\mathbf{E}.}$$

Z věty o determinantu součinu matic a determinantu matice transponované ihned obdržíme (jak?), že každá ortogonální matice je regulární (a její determinant je ±1).

---

[20]) Někdy se též užívá názvu *ortonormální matice*.

Vzhledem k tomu, že studujeme jen *reálné* prostory se skalárním součinem, budeme vždy *ortogonální maticí* rozumět *reálnou* matici s vlastností dle této definice.

Uvážíme-li, že řádky libovolné regulární matice **A** řádu n tvoří bázi $\mathcal{A}$ aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$, lze matici **A** chápat jako matici přechodu od standardní báze $\mathcal{S}$ prostoru $\mathbb{R}^n$ k bázi $\mathcal{A}$ [21]. S ohledem na větu 18 tak dostáváme, že řádky právě ortogonálních matic tvoří ortonormální báze prostoru $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem (vůči němu je $\mathcal{S}$ bází ortonormální).

Platí tedy následující věta:

20. Věta *Reálná matice řádu* n *je ortogonální, právě když její řádky tvoří ortonormální bázi aritmetického vektorového prostoru* $\mathbb{R}^n$ *se standardním skalárním součinem.*

Označme nyní symbolem $O_n(\mathbb{R})$ množinu všech ortogonálních matic daného řádu n.

Jsou-li $\mathbf{A},\mathbf{B}\in O_n(\mathbb{R})$, je otázkou, zda matice **AB** bude ortogonální. Z právě uvedeného plyne, že matici **B** lze chápat jako matici přechodu od standardní báze $\mathcal{S}$ vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$ k *ortonormální* bázi $\mathcal{B}$ tvořené řádky matice **B**. Zkonstruujme nyní bázi $\mathcal{C}$ prostoru $\mathbb{R}^n$ tak, aby **A** byla maticí přechodu od $\mathcal{B}$ k $\mathcal{C}$. V souladu s větou 18 je báze $\mathcal{C}$ *ortonormální*, a tudíž matice přechodu od $\mathcal{S}$ k $\mathcal{C}$ bude *ortogonální* - to je ovšem matice **AB** (proč?), a tudíž $\mathbf{AB}\in O_n(\mathbb{R})$.

Zřejmě jednotková matice je ortogonální maticí.

Nechť $\mathbf{B}\in O_n(\mathbb{R})$. Pokud ji opět interpretujeme jako matici přechodu od $\mathcal{S}$ k $\mathcal{B}$, je $\mathbf{B}^{-1}$ opět maticí přechodu mezi ortonormálními bázemi, a proto $\mathbf{B}^{-1}\in O_n(\mathbb{R})$.

Dostáváme tak větu následující[22]:

---

[21]) pro libovolný $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ totiž platí $\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{S}}=\mathbf{x}$

[22]) za známé považujeme, že násobení matic je asociativní

21. Věta *Množina ortogonálních matic téhož řádu spolu s násobením matic tvoří grupu, která je podgrupou v multiplikativní grupě reálných regulárních matic tohoto řádu.*[23]

Příklad C

Nalezněte všechny ortogonální matice řádu 2.

Řešení

Uvažujme matici

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

S ohledem na definici 19 musí platit $\mathbf{AA}^T=\mathbf{E}$, neboli

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

což je ekvivalentní následující soustavě rovnic:

$$(1)\ a_{11}^2+a_{12}^2=1$$

$$(2)\ a_{21}^2+a_{22}^2=1$$

$$(3)\ a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}=0.$$

Z (1) plyne existence čísla $\varphi\in\langle 0,2\pi)$ s vlastností

$$a_{11}=\cos\varphi \wedge a_{12}=\sin\varphi,$$

což, dosadíme-li do (3) dává:

$$a_{21}\cos\varphi+a_{22}\sin\varphi=0,$$

odkud plyne, že

$$a_{21}=t\sin\varphi,\ a_{22}=-t\cos\varphi,\ t\in\mathbb{R},$$

odtud dosazením do (2) plyne

$$t^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)=1,$$

neboli $t\in\{-1,1\}$.

Souhrnně tak vidíme, že každá ortonormální matice řádu 2 je jednoho z následujících typů[24]:

---

[23]) tato grupa se - pro matice řádu n nad tělesem $\mathbb{T}$ - obvykle značí symbolem $L_n(\mathbb{T})$ *(linerání grupa)*. Tedy $O_n(\mathbb{R})\subset L_n(\mathbb{R})$.

[24]) tato skutečnost představuje algebraický aparát pro *klasifika-*

$$A_{\varphi}^{(1)}=\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},\ A_{\varphi}^{(2)}=\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix},\ \varphi\in\langle 0,2\pi).$$

2.4 Ortonormalizační proces

Jak jsme ukázali (věta 17), existuje v každém euklidovském vektorovém prostoru (a tudíž i jeho podprostoru) alespoň jedna (a tím nekonečně mnoho - proč?) ortonormální báze.

Nyní se budeme zabývat *konstrukcí*[25]), která nám umožní v libovolném takovém prostoru přiřadit každé bázi *právě jednu* ortonormální bázi jistých vlastností.

Ve vektorových prostorech nad uspořádaným tělesem $\mathbb{T}$ (a těleso $\mathbb{R}$ uspořádané je) se zavádějí pojmy *souhlasné báze, orientace vektorového prostoru* či *souhlasnost vektorů dle vektorové nadroviny*[26]).

---

[25]) uvedená konstrukce se nazývá *Grammův-Schmidtův ortonormalizační proces*

[26]) **Doplněk:**

1.Definice Buďte $\mathcal{B},\mathcal{C}$ libovolné báze vektorového prostoru **V** nad uspořádaným tělesem. Je-li determinat matice přechodu od $\mathcal{B}$ k $\mathcal{C}$ kladný, nazveme bázi $\mathcal{B}$ *souhlasnou s bází* $\mathcal{C}$, což budeme značit $\mathcal{B}\sim\mathcal{C}$.

2.Věta *Relace „být souhlasný" je relací ekvivalence na množině bází daného vektorového prostoru.*

Můžeme proto hovořit o *souhlasných bázích.*

3.Věta *Množina bází každého vektorového prostoru se dle relace „být souhlasný" rozkládá právě na dvě třídy.*

4.Definice *Orientovat vektorový prostor* znamená prohlásit jednu ze tříd rozkladu množiny jeho bází dle relace „být souhlasný" za kladnou. Druhou třídu budeme nazývat *záporná.*

5.Věta *Každý vektorový prostor lze orientovat právě dvěma způsoby.*

22. Věta *Ke každé bázi* $\mathcal{U}=\{\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_n\}$ *euklidovského vektorového prostoru* **V** *existuje právě jedna ortonormální báze* $\mathcal{V}=\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\}$ *tohoto prostoru s vlastnostmi:*

(1) $\forall\ r=1,\dots,n$: $[\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_r]=[\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_r]$,

(2) $\forall\ r=1,\dots,n$: $\{\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_r\}$ a $\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_r\}$ *jsou souhlasné báze podprostoru jimi generovaného.*

23. Definice Buď $\mathcal{U}$ báze euklidovského vektorového prostoru. Pak se báze $\mathcal{V}$ s vlastnostmi dle předešlé věty nazývá *ortonormalizace báze* $\mathcal{U}$.

Důkaz věty 22:

I. Nejprve ukážeme existenci ortogonální báze $\mathcal{W}=\{\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_n\}$

---

6. Definice Buď **W** vektorová nadrovina vektorového prostoru **V**. Buďte dále $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}\setminus\mathbf{W}$. Řekneme, že vektor **v** *je souhlasný s vektorem* **u** *vzhledem k vektorové nadrovině* **W**, což značíme $\mathbf{v}\sim\mathbf{u}(\mathrm{mod}\mathbf{W})$, jestliže:

$$\boxed{\mathbf{v}=\mathbf{w}+t\mathbf{u},\ \mathbf{w}\in\mathbf{W},\ t>0.}$$

7. Věta *Relace „být souhlasný vzhledem k dané vektorové nadrovině" je relací ekvivalence na množině vektorů vektorového prostoru, které nenáleží do této nadroviny.*

Můžeme proto hovořit o *souhlasných vektorech* (vzhledem k dané vektorové nadrovině).

8. Věta *Množina vektorů vektorového prostoru, které nenáleží do dané vektor. nadroviny, se dle relace „být souhlasný vzhledem k této nadrovině" rozkládá právě na dvě třídy.*

9. Věta *Buď* **W** *vektorová nadrovina prostoru* $\mathbf{V}_n$, $n\geq 2$. *Nechť* $\bar{\mathcal{B}}$, $\bar{\mathcal{C}}$ *jsou souhlasné báze ve* **W**. *Jsou-li* $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ *vektory doplňující tyto báze po řadě na báze* $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ *vektorového prostoru* **V**, *platí:*

$$\mathcal{B}\sim\mathcal{C} \Leftrightarrow \mathbf{u}\sim\mathbf{v}(\mathrm{mod}\mathbf{W}).$$

prostoru **V** splňující (1) a (2). Důkaz provede matematickou indukcí pro n=dim**V**.

(a) pro n=1 stačí položit $\mathbf{w}_1=\mathbf{u}_1$, neboť každá jednoprvková množina je ortogonální (proč?).

(b) předpokládáme platnost pro všechny prostory dimenze n-1, n≥2, a nechť tedy $\{\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_{n-1}\}$ je ortogonální systém splňující (1) a (2) pro r=1,...,n-1.
Hledejme vektor $\mathbf{w}_n$, který spolu s předchozími tvoří hledanou ortogonální bázi splňující (1) a (2).
Má-li platit $[\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_{n-1},\mathbf{w}_n]=[\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_{n-1},\mathbf{u}_n]$, stačí, když $\mathbf{w}_n$ najdeme ve tvaru:

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{u}_n + t_1\mathbf{w}_1 + \dots + t_{n-1}\mathbf{w}_{n-1}, \tag{22-1}$$

neboť dle indukčního předpokladu generují vektory $\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_{n-1}$ a $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_{n-1}$ týž prostor.
Vynásobme rovnost (22-1) skalárně $\mathbf{w}_j$, $1\le j\le n-1$. Vzhledem k tomu,že dle indukčního předpokladu tvoří $\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_{n-1}$ ortogonální soustavu, je pro i≠j $\mathbf{w}_i\mathbf{w}_j=0$ a dostaneme:

$$\mathbf{w}_j\mathbf{w}_n = \mathbf{w}_j\mathbf{u}_n + t_j(\mathbf{w}_j\mathbf{w}_j). \tag{22-2}$$

Protože žádáme, aby $\mathbf{w}_n$ byl kolmý na $\mathbf{w}_j$, položme $\mathbf{w}_j\mathbf{w}_n=0$. Vektor $\mathbf{w}_j$ je nenulový (dle ind.předpokladu je prvkem báze) a tedy $\mathbf{w}_j\mathbf{w}_j\neq 0$. Ze vztahu (22-2) lze tedy vypočítat t_j. Postupnou volbou j=1, ...,n-1 tak obdržíme čísla $t_1,\dots,t_{n-1}$ a získáme tak vektor $\mathbf{w}_n$, který spolu s $\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_{n-1}$ tvoří ortogonální systém.
Je-li $\mathbf{w}_n\neq\mathbf{o}$, je tento systém dle důsledku 7 bází **V**. Pokud by $\mathbf{w}_n=\mathbf{o}$, pak by dle (22-1) byl $\mathbf{u}_n$ lineární kombinací $\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_{n-1}$ a náležel by tedy do $[\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_{n-1}]$, což ovšem není možné, neboť $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_{n-1},\mathbf{u}_n$ jsou lineárně nezávislé.
Nyní již zbývá dokázat podmínku (2), tj. že báze $\mathcal{W}$ a $\mathcal{U}$ jsou souhlasné. Dle ind.předpokladu jsou báze $\langle\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_{n-1}\rangle$ a $\langle\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_{n-1}\rangle$ souhlasné báze v podprostoru $W=[\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_{n-1}]$. Ze vztahu (22-1) plyne $\mathbf{w}_n=1.\mathbf{u}_n+\mathbf{w}$, $\mathbf{w}\in W$, což značí, že $\mathbf{w}_n,\mathbf{u}_n$ jsou souhlasné vektory modW, neboť 1>0. Dle Doplňku, věty 9, jsou proto báze $\mathcal{W}$ a $\mathcal{U}$ souhlasné.

II. Dokážeme existenci a jednoznačnost ortonormální báze $\mathcal{V}$. Položíme-li $\mathbf{v}_i=\mathbf{w}_i/\|\mathbf{w}_i\|$, i=1,...,n, pak zřejmě obdržíme ortonormální soustavu (užijeme věty 1.10 (1)), a tudíž bázi prostoru **V** - označme ji $\mathcal{V}$.

Vektory z $\mathcal{V}$ zřejmě splňují podmínku (1) - jsou přece nenulovými násobky prvků z $\mathcal{W}$, a tedy generují tytéž podprostory.

Splňují i podmínku (2) - příslušná matice přechodu od $<\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_r>$ k $<\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_r>$ je zřejmě rovna $\mathcal{D}iag(1/\|\mathbf{w}_1\|,\dots,1/\|\mathbf{w}_r\|)$, $1\le r\le n$,[27]) takže její determinant je kladný.

Zbývá již dokázat pouze jednoznačnost báze $\mathcal{V}$.

Nechť tedy k bázi $\mathcal{U}=\{\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_n\}$ existují dvě ortonormální báze $\mathcal{V}=\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\}$ a $\mathcal{Z}=\{\mathbf{z}_1,\dots,\mathbf{z}_n\}$ splňující podmínky (1) a (2).

Ukažme $\mathcal{V}=\mathcal{Z}$, a to matematickou indukcí pro n.

Je-li n=1, musí dle (1) být $[\mathbf{v}_1]=[\mathbf{z}_1]$, tedy $\mathbf{z}_1=c\mathbf{v}_1$, kde (vzhledem k (2)) musí být $c>0$. Navíc má platit $\|\mathbf{v}_1\|=\|\mathbf{z}_1\|=1$, tj. $|c|=1$. Celkem tedy máme $c=1$, neboli $\mathbf{z}_1=\mathbf{v}_1$.

Nyní předpokládejme, že $\mathbf{z}_1=\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{z}_{n-1}=\mathbf{v}_{n-1}$. Protože $\mathcal{V}$ je bází ve **V**, lze $\mathbf{z}_n$ psát:

$$\mathbf{z}_n= c_1\mathbf{v}_1+\dots+ c_{n-1}\mathbf{v}_{n-1}+ c_n\mathbf{v}_n. \tag{22-3}$$

Vynásobme tuto rovnost skalárně vektorem $\mathbf{v}_j$, $1\le j\le n-1$. Protože $\mathcal{V}$ je ortonormální (tj. $\mathbf{v}_i\mathbf{v}_j=\delta_{ij}$), obdržíme:

$$\mathbf{v}_j\mathbf{z}_n= c_j,\ 1\le j\le n-1.$$

Pro uvažované j je však dle ind. předpokladu $\mathbf{v}_j=\mathbf{z}_j$, a tedy $\mathbf{v}_j\mathbf{z}_n=\mathbf{z}_j\mathbf{z}_n=0$, neboť $\mathcal{Z}$ je též ortonormální.

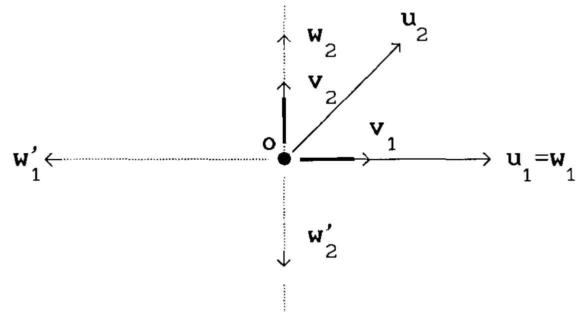
Volbou $j=1,\dots,n-1$ tak dostaneme, že $c_1=\dots=c_{n-1}= 0$ a z rovnosti (22-3) tedy plyne $\mathbf{z}_n= c_n\mathbf{v}_n$, odkud (neboť $\mathbf{z}_n$ i $\mathbf{v}_n$ jsou téže délky) $|c_n|=1$.

Snadno vidíme, že matice přechodu od $\mathcal{V}$ k $\mathcal{Z}$ je rovna $\mathcal{D}iag(1,\dots,1,c_n)$. Báze $\mathcal{V}$ a $\mathcal{Z}$ budou tedy souhlasné jen tehdy, když $c_n>0$ - celkem tedy $c_n=1$. Máme tedy dokázáno, že $\mathcal{V}=\mathcal{Z}$. ■

Následující obrázek znázorňuje konstrukci dle důkazu pro n=2. Vektory $\mathbf{w}'_1$ $\mathbf{w}'_2$ tvoří ortogonální bází splňující podmínku (1), nikoli (2).

---

[27]) připomeňme, že symbolem $\mathcal{D}iag(a_1,a_2,\dots a_k)$ rozumíme diagonální matici řádu k, jejíž hlavní diagonálu tvoří uspořádaná k-tice uvedená v závorce.



Příklad D

Nechť je dán vektorový prostor $\mathbb{R}^3$ se skalárním součinem . definovaným relací

$$\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3),\ \mathbf{y}=(y_1,y_2,y_3):\ \mathbf{x}.\mathbf{y}=2x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2+2x_3y_3.$$

Ortonormalizujte bázi $\mathcal{U}=\langle \mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\rangle$, kde

$$\mathbf{u}_1=(1,0,0),\ \mathbf{u}_2=(0,1,0),\ \mathbf{u}_3=(0,0,1).$$

Řešení[28])

Budeme postupovat podobně, jako v důkaze věty 22.

I. Nalezneme ortogonální bázi $\mathcal{W}=\langle \mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3\rangle$ splňující (1) a (2), a to opakovanou aplikací postupu uplatněného v indukčním kroku důkazu:

(i) položíme $\mathbf{w}_1=\mathbf{u}_1=(1,0,0)$.

(ii) vektor $\mathbf{w}_2$ hledáme ve tvaru (srv. (22-1))

$$\mathbf{w}_2=\mathbf{u}_2+t_{21}\mathbf{w}_1.$$

Tuto rovnost skalárně vynásobíme $\mathbf{w}_1$ a položíme $\mathbf{w}_2.\mathbf{w}_1=0$:

$$0=\mathbf{u}_2.\mathbf{w}_1+t_{21}(\mathbf{w}_1.\mathbf{w}_1),$$

tj. $$0=(0,1,0).(1,0,0)+t_{21}((1,0,0).(1,0,0)),$$

odkud užitím definiční relace pro skalární součin . plyne:

$$0=1+2t_{21},$$

odkud $$t_{21}=-\tfrac{1}{2},$$

a tedy $$\mathbf{w}_2=\mathbf{u}_2-\tfrac{1}{2}\mathbf{w}_1=(0,1,0)-\tfrac{1}{2}(1,0,0)=(-\tfrac{1}{2},1,0).$$

(iii) vektor $\mathbf{w}_3$ hledáme ve tvaru (opět viz (22-1))

$$\mathbf{w}_3=\mathbf{u}_3+t_{31}\mathbf{w}_1+t_{32}\mathbf{w}_2.$$

Tuto rovnost skalárně vynásobíme $\mathbf{w}_1$ a potom $\mathbf{w}_2$ a položíme

[28]) skalární součin . není standardní, a tedy báze $\mathcal{U}$ není ortonormální bází euklid.vektor.prostoru $(\mathbb{R}^3, .)$.

$w_3.w_1=w_3.w_2=0$. Uvážíme-li, že $w_1 \perp w_2$, obdržíme:

$$0=u_3.w_1+t_{31}(w_1.w_1),$$
$$0=u_3.w_2+t_{32}(w_2.w_2),$$

tj. $$0=(0,0,1).(1,0,0)+t_{31}((1,0,0).(1,0,0)),$$
$$0=(0,0,1).(-\tfrac{1}{2},1,0)+t_{32}((-\tfrac{1}{2},1,0).(-\tfrac{1}{2},1,0)),$$

odkud užitím definiční relace pro skalární součin . plyne:

$$0=t_{31},\ 0=t_{32},$$

a tedy $$w_3=u_3=(0,0,1).$$

II. Nyní položíme $v_i=w_i/\|w_i\|$, $1\le i\le 3$, čímž získáme bázi $\mathcal{V}=\langle v_1,v_2,v_3\rangle$ která je ortonormalizací báze $\mathcal{U}$. Užitím formule pro normu odvozené v příkladě 1.**B**, obdržíme:

$$\|w_1\|=\sqrt{2},\quad \|w_2\|=\sqrt{\frac{3}{2}},\quad \|w_3\|=\sqrt{2},$$

a tedy

$$v_1=(\sqrt{2}/2)(1,0,0),\quad v_2=\sqrt{\frac{2}{3}}(-\frac{1}{2},1,0),\quad v_3=(\sqrt{2}/2)(0,0,1).$$

2.5 Kolmost podprostorů euklidovského vektorového prostoru

24. Definice Buďte $\mathbf{u}\in\mathbf{V}$, $Q\subseteq\mathbf{V}$, $Q\neq\emptyset$. Řekneme, že *vektor* $\mathbf{u}$ *je kolmý (ortogonální) na množinu* Q, což značíme $\mathbf{u}\perp Q$, jestliže je kolmý na všechny vektory $\mathbf{x}\in Q$.

Nechť je nyní $\mathbf{W}$ *podprostorem* ve $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}=[w_1,w_2,\dots,w_k]$ a $\mathbf{u}$ některý vektor z $\mathbf{V}$. Buď $\mathbf{x}$ libovolný vektor z $\mathbf{W}$, tj.

$$\mathbf{x}=\sum_{j=1}^{k} x_j w_j .$$

Pak pro skalární součin $\mathbf{ux}$ lze psát:

$$\mathbf{ux}=\mathbf{u}(\sum_{j=1}^{n} x_j w_j)=\sum_{j=1}^{n} x_j(\mathbf{u}w_j),$$

odkud je patrno, že kolmost vektoru $\mathbf{u}$ na vektory $w_1,w_2,\dots,w_k$ je postačující podmínkou k tomu, aby $\mathbf{u}\perp\mathbf{x}$, a v důsledku, jelikož $\mathbf{x}$ byl

vybrán libovolně, $\mathbf{u}\perp\mathbf{W}$.
Zřejmě jde i o podmínku nutnou. Platí tedy následující věta:

25. Věta *Buďte* $\mathbf{u}\in\mathbf{V}$, $\mathbf{W}\subseteq\subseteq\mathbf{V}$. *Pak je vektor* $\mathbf{u}$ *kolmý na podprostor* $\mathbf{W}$, *právě když je kolmý na některou (a pak tedy každou) množinu generátorů podprostoru* $\mathbf{W}$.

Na základě již zavedených pojmů *kolmost dvou vektorů* a *kolmost vektoru na množinu vektorů (podprostor)*, zavedeme pojem *kolmost dvou podprostorů*.
Užitečným k tomu bude pojem *ortogonálního doplňku:*

26. Definice Buď $Q\subseteq\mathbf{V}$. *Ortogonálním doplňkem množiny* Q *ve* $\mathbf{V}$ rozumíme množinu vektorů z $\mathbf{V}$ kolmých na Q a označujeme ji $Q^{\perp}$.

27. Poznámky

- zřejmě pro libovolné $Q\subseteq\mathbf{V}$ platí:

$$\boxed{Q^{\perp}=\{\mathbf{y}\in\mathbf{V};\ \forall\mathbf{x}\in Q:\ \mathbf{xy}=0\}.}$$

- uvedení příslušného podprostoru, v němž ortogonální doplněk uvažujeme, v definici 26 není nadbytečné - promyslete si např. situaci $Q\subseteq\mathbf{W}$, $\mathbf{W}\subseteq\subseteq\mathbf{V}$, kde $\mathbf{V}\neq\mathbf{W}$. Nebude-li však řečeno jinak, budeme ortogonální doplněk jakékoli množiny uvažovat ve $\mathbf{V}$.

28. Věta *Buďte* $Q,S\subseteq\mathbf{V}$. *Pak platí*[29]*):*
(1) $Q^{\perp}\subseteq\subseteq\mathbf{V}$,
(2) $Q\subseteq(Q^{\perp})^{\perp}$,
(3) $Q\subseteq S \Rightarrow S^{\perp}\subseteq Q^{\perp}$, *přičemž tvrzení obrácené obecně neplatí*[30]*).*

---

[29]) namísto $(Q^{\perp})^{\perp}$ budeme dále psát jen $Q^{\perp\perp}$

[30]) Nechť $S=\{\mathbf{u}\}$, $Q=\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}$, kde $\mathbf{v}=2\mathbf{u}$, $\mathbf{u}\neq\mathbf{o}$. Pak zřejmě $S^{\perp}=Q^{\perp}$, tedy $S^{\perp}\subseteq Q^{\perp}$, a přitom $Q\not\subseteq S$.

Důkaz:

Ad (1):

Uvažujme $\mathbf{u},\mathbf{v}\in Q^{\perp}$ - tj. $\mathbf{ux}=\mathbf{vx}=0$, $\forall\mathbf{x}\in Q$. Pro libovolné $\mathbf{x}$ z Q lze psát:
$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})\mathbf{x}=\mathbf{ux}+\mathbf{vx}=0,$$
neboli $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\in Q^{\perp}$.

Podobně, je-li $\mathbf{u}\in Q^{\perp}$ a $t\in\mathbb{R}$, tak pro libovolné $\mathbf{x}$ z Q dostáváme:
$$(t\mathbf{u})\mathbf{x}=t(\mathbf{ux})=0,$$
tj. $t\mathbf{u}\in Q^{\perp}$.

Ad (2):

Nechť $\mathbf{x}\in Q$. Pak $\forall\mathbf{y}\in Q^{\perp}$: $\mathbf{xy}=0$, což ovšem značí, že $\mathbf{x}\perp Q^{\perp}$, čili $\mathbf{x}\in(Q^{\perp})^{\perp}$, a tedy $Q\subseteq(Q^{\perp})^{\perp}$.

Ad (3):

Nechť $\mathbf{x}\in S^{\perp}$, pak $\mathbf{x}\perp S$, a jelikož $Q\subseteq S$, tak též $\mathbf{x}\perp Q$, tedy $\mathbf{x}\in Q^{\perp}$. ∎

Nyní si všimneme ortogonálního doplňku *podprostoru.*

29. Věta *Buď* $W\subseteq\subseteq V$. *Pak platí:*

(1) $\dim W^{\perp}=\dim V-\dim W$,

(2) $V=W\oplus W^{\perp}$,

(3) $W^{\perp\perp}=W$.

30. Důsledky

- každý podprostor je ortogonálním doplňkem právě jednoho podprostoru.
- je-li $W\subseteq\subseteq V$, pak každý vektor $\mathbf{x}\in V$ lze právě jedním způsobem psát ve tvaru
$$\boxed{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{*}+\mathbf{x}^{\perp},\ \text{kde } \mathbf{x}^{*}\in W,\ \mathbf{x}^{\perp}\in W^{\perp}.}$$

Důkaz věty 29:

Ad (1):

Ať $k=\dim W$. Zvolme ve W ortonormální bázi $\langle\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_k\rangle$, kterou doplníme na ortonormální bázi $\mathcal{B}=\langle \mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_{k+1},\dots,\mathbf{e}_n\rangle$[31]) prostoru **V**. Pak platí (viz věta 25):

$$\mathbf{x}\perp W \Leftrightarrow (\mathbf{xe}_i=0,\ 1\le i\le k).$$

Vektor $\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}}=(x_1,\dots x_n)$ tedy náleží $W^\perp$, právě když pro jeho souřadnice platí:

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad &= 0 \\ x_2 \quad &= 0 \\ \dots\dots\dots&\dots \\ x_k &= 0 \end{aligned}\ ,$$

neboť $\mathbf{xe}_i=x_i$, $1\le i\le n$ ($\mathcal{B}$ je ortonormální).
To ovšem představuje homogenní soustavu k lineárně nezávislých rovnic o n neznámých a její řešení tvoří podprostor dimenze n-k, s nímž je $\mathbf{W}^\perp$ izomorfní (proč?).

Ad (2):
Protože $\dim W+\dim W^\perp=n$, stačí dokázat, že $W\cap W^\perp=\{\mathbf{o}\}$.
Nechť $\mathbf{x}\in W\cap W^\perp$, pak ovšem musí platit $\mathbf{x}\perp\mathbf{x}$, tj. $\mathbf{xx}=0$, což nastane jen pro $\mathbf{x}=\mathbf{o}$.

Ad (3):
Dle (1) platí: $\dim(W^\perp)^\perp=n-\dim W^\perp=n-(n-\dim W)=\dim W$. Protože dle 28.(2) platí $W\subseteq W^{\perp\perp}$, musí být $W=W^{\perp\perp}$. ■

31. Věta *Buďte* $\mathbf{U},\mathbf{W}\subseteq\subseteq\mathbf{V}$. *Pak platí*
(1) $(\mathbf{U}+\mathbf{W})^\perp=\mathbf{U}^\perp\cap\mathbf{W}^\perp$,
(2) $(\mathbf{U}\cap\mathbf{W})^\perp=\mathbf{U}^\perp+\mathbf{W}^\perp$.

<u>Důkaz:</u>

Ad (1):
(i) Nechť $\mathbf{x}\in U^\perp\cap W^\perp$, čili $\mathbf{x}\in U^\perp\wedge\mathbf{x}\in W^\perp$, a tedy $\mathbf{x}\perp U\wedge\mathbf{x}\perp W$.
Zvolme libovolný $\mathbf{y}\in U+W$, tudíž $\mathbf{y}=\mathbf{y}_U+\mathbf{y}_W$, kde $\mathbf{y}_U\in U$, $\mathbf{y}_W\in W$.
Pak můžeme psát:

$$\mathbf{xy}=\mathbf{x}(\mathbf{y}_U+\mathbf{y}_W)=\mathbf{xy}_U+\mathbf{xy}_W=0+0=0,$$

neboť $\mathbf{x}\perp U$ a $\mathbf{x}\perp W$. Odtud tedy $\mathbf{x}\in(U+W)^\perp$.

(ii) Je-li $\mathbf{x}\in(U+W)^\perp$, pak $\mathbf{x}\perp(U+W)$. Protože však $U,W\subseteq U+W$, je $\mathbf{x}\perp U\wedge\mathbf{x}\perp W$, což značí, že $\mathbf{x}\in U^\perp\cap W^\perp$.

---

[31]) užili jsme větu 16 a její důsledek 17

Ad (2):

Užitím již dokázaného tvrzení (1) lze psát:

$$(\mathbf{U}^{\perp}+\mathbf{W}^{\perp})^{\perp}=\mathbf{U}^{\perp\perp}\cap\mathbf{W}^{\perp\perp}\overset{(a)}{=}\mathbf{U}\cap\mathbf{W},$$

odkud pro $(\mathbf{U}\cap\mathbf{W})^{\perp}$ plyne:

$$(\mathbf{U}\cap\mathbf{W})^{\perp}=(\mathbf{U}^{\perp}+\mathbf{W}^{\perp})^{\perp\perp}\overset{(b)}{=}\mathbf{U}^{\perp}+\mathbf{W}^{\perp},$$

kde jsme v rovnosti (a) i (b) užili 29.(3). ∎

V následující větě nalezneme význam $Q^{\perp\perp}$. Odtud bude zřejmé, že inkluze v 28.(2) je rovností, právě když Q je *podprostorem* ve **V**.

32. Věta *Buď* $Q\subseteq\mathbf{V}$. *Pak platí:*

(1) $Q^{\perp\perp}=[Q]$ [32]*),*

(2) $Q^{\perp}=[Q]^{\perp}$.

Důkaz:

Ad (1):

Buď **U** libovolný podprostor ve **V**, pro nějž:

$$Q\subseteq\mathbf{U}\subseteq Q^{\perp\perp}. \qquad (32\text{-}1)$$

Užijeme-li 28.(3), obdržíme:

$$Q^{\perp}\supseteq\mathbf{U}^{\perp}\supseteq(Q^{\perp\perp})^{\perp},$$

odkud pomocí 29.(3) dostáváme:

$$Q^{\perp}\supseteq\mathbf{U}^{\perp}\supseteq Q^{\perp},$$

což ovšem značí, že: $\mathbf{U}^{\perp}=Q^{\perp}$,

odkud (opět dle 29.(3)) plyne:

$$\mathbf{U}=\mathbf{U}^{\perp\perp}=Q^{\perp\perp}.$$

---

[32]) stojí za povšimnutí, že $Q^{\perp\perp}$ tudíž nezávisí na volbě skalárního součinu na daném nosiči euklidovského vektorového prostoru **V**.

S ohledem na (32-1) to znamená, že $Q^{\perp\perp}$ je nejmenší podprostor obsahující množinu Q - je tedy jejím lineárním obalem.

Ad (2): Jde o triviální důsledek dokázaného (1) (proč?) ■

33. Věta[33])

(1) Buďte $P,Q\subseteq \mathbf{V}$. *Pak platí:* $P\subseteq Q^{\perp} \Leftrightarrow P^{\perp}\supseteq Q$.

(2) Buďte $P,Q\subseteq\subseteq \mathbf{V}$. *Pak platí:* $P\supseteq Q^{\perp} \Leftrightarrow P^{\perp}\subseteq Q$.

Důkaz:

Ad (1):

(i) užitím 28.(3) plyne z $P\subseteq Q^{\perp}$:

$$P^{\perp}\supseteq Q^{\perp\perp}.$$

Jelikož $Q\subseteq[Q]$ a $[Q]=Q^{\perp\perp}$ (dle předešlé věty), plyne odtud:

$$P^{\perp}\supseteq Q.$$

(ii) zcela analogicky se ukáže platnost implikace obrácené.

Ad(2):

vzhledem k tomu, že P,Q jsou podprostory, jde o triviální důsledek 28.(3) a 29.(3). ■

Nyní již můžeme zavést pojem kolmosti podprostorů.[34])

---

[33]) (2) obecně neplatí, jsou-li P,Q podmnožiny ve **V**, ale nikoli *podprostory:* Nechť $P,Q\subset \mathbf{V}_2$, $P=[\mathbf{p}]$, $Q=\{\mathbf{q}\}$, kde $\mathbf{p}\perp\mathbf{q}$, $\mathbf{p},\mathbf{q}\neq\mathbf{o}$. Pak zřejmě $P=Q^{\perp}$, tedy $P\supseteq Q^{\perp}$, a přitom $P^{\perp}\not\subseteq Q$.

[34]) Pojem zavedený následující definicí bude zřejmě inspirován naší intuitivní představou o kolmosti podprostorů ve $\mathbf{V}_2$ a $\mathbf{V}_3$:

Máme-li např. dva dvourozměrné podprostory **U**,**W** ve $\mathbf{V}_3$, pak $\dim\mathbf{W}^{\perp}=1$, tj. $\mathbf{W}^{\perp}=[\mathbf{n}]$, $\mathbf{n}\neq\mathbf{o}$. Situace, kdy $[\mathbf{n}]\subset\mathbf{U}$, by dle intuitivní představy měla znamenat, že $\mathbf{W}\perp\mathbf{U}$ (udělejte si obrázek).

34. Definice Buďte $\mathbf{U},\mathbf{W}\subseteq\subseteq\mathbf{V}$. Řekneme, že podprostor $\mathbf{U}$ *je kolmý na podprostor* $\mathbf{W}$, což značíme $\mathbf{U}\perp\mathbf{W}$, jestliže

$$\boxed{\mathbf{U}\subseteq\mathbf{W}^{\perp} \vee \mathbf{W}^{\perp}\subseteq\mathbf{U}.}$$

35. Poznámka Nutnou podmínkou pro $\mathbf{U}\subset\mathbf{W}^{\perp}$ je $\dim\mathbf{U}+\dim\mathbf{W}<n$, pro $\mathbf{U}=\mathbf{W}^{\perp}$ pak $\dim\mathbf{U}+\dim\mathbf{W}=n$ a konečně pro $\mathbf{U}\supset\mathbf{W}^{\perp}$ je $\dim\mathbf{U}+\dim\mathbf{W}>n$.

36. Věta *Buďte* $\mathbf{U},\mathbf{W}\subseteq\subseteq\mathbf{V}_n$. *Pak platí:*

$$\boxed{\mathbf{U}\perp\mathbf{W} \Rightarrow \mathbf{W}\perp\mathbf{U}.}$$

Důkaz:
Užitím definice 34 (implikace (a),(c)) a věty 33 (implikace (b)) postupně dostáváme:

$$\mathbf{U}\perp\mathbf{W} \overset{(a)}{\Rightarrow} (\mathbf{U}\subseteq\mathbf{W}^{\perp} \vee \mathbf{W}^{\perp}\subseteq\mathbf{U}) \overset{(b)}{\Rightarrow} (\mathbf{W}\subseteq\mathbf{U}^{\perp} \vee \mathbf{U}^{\perp}\subseteq\mathbf{W}) \overset{(c)}{\Rightarrow} \mathbf{W}\perp\mathbf{U},$$

čímž je tvrzení dokázáno. ∎

37. Poznámka Relace „být kolmý" je tedy symetrická a namísto „*podprostor* $\mathbf{U}$ *je kolmý na* $\mathbf{W}$" budeme proto říkat jen „$\mathbf{U},\mathbf{W}$ *jsou kolmé podprostory*".

Uvážíme-li definice 24 a 34, je platnost následující věty evidentní (proč?):

38. Věta *Buď* $\mathbf{u}\in\mathbf{V}$, $\mathbf{W}\subset\subset\mathbf{V}$. *Pak platí, že vektor* $\mathbf{u}$ *je kolmý na podprostor* $\mathbf{W}$, *právě když* $[\mathbf{u}]$ *a* $\mathbf{W}$ *jsou kolmé podprostory.*

Všimněme si nyní *vektorových nadrovin* euklidovského vektorového prostoru[35]):

---

[35]) připomeňme, že *vektorovou nadrovinou vektorového prostoru* $\mathbf{V}_n$ rozumíme každý (n-1)-rozměrný vektorový podprostor ve $\mathbf{V}_n$.

Uvažujme nyní libovolnou vektorovou nadrovinu $\mathbf{N}\subset\mathbf{V}$. Pak dle věty 29 je $\dim\mathbf{N}^{\perp}=1$, odkud plyne existence nenulového vektoru $\mathbf{n}$ tak, že $\mathbf{N}^{\perp}=[\mathbf{n}]$, a tudíž opět dle 29 (a věty 25):

$$\mathbf{N}=\mathbf{N}^{\perp\perp}=[\mathbf{n}]^{\perp}=\{\mathbf{x}\in\mathbf{V};\ \mathbf{xn}=0\}.$$

Zaveďme nyní následující označení:

39. Označení Buď $\mathbf{n}\in\mathbf{V}$, $\mathbf{n}\neq\mathbf{o}$. Pak symbolem $\mathcal{N}(\mathbf{n})$ budeme nadále označovat množinu definovanou vztahem

$$\boxed{\mathcal{N}(\mathbf{n})=\{\mathbf{x}\in\mathbf{V};\ \mathbf{xn}=0\},}$$

Pak platí zřejmě tvrzení (1) věty 40 (odkud plyne jednoznačnost?).

Platnost tvrzení (2) je zřejmá (zdůvodněte).

40. Věta

(1) Ke každé vektorové nadrovině $\mathbf{N}\subset\mathbf{V}$ *existuje až na nenulový násobek jediný (a to nenulový) vektor* $\mathbf{n}\in\mathbf{V}$ *tak, že* $\mathbf{N}=\mathcal{N}(\mathbf{n})$.

(2) Ke každému nenulovému vektoru $\mathbf{n}\in\mathbf{V}$ *existuje právě jedna vektorová nadrovina* $\mathbf{N}\subset\mathbf{V}$ *tak, že* $\mathbf{N}=\mathcal{N}(\mathbf{n})$.

41. Definice Buď $\mathbf{N}$ libovolná vektorová nadrovina ve $\mathbf{V}$. Pak $\mathbf{N}^{\perp}$ se nazývá *normálový směr vektorové nadroviny* $\mathbf{N}$ a každý generátor normálového směru se nazývá *normálový vektor vektor.nadroviny* $\mathbf{N}$.

42. Poznámky

(1) Z věty 40 vyplývá existence *vzájemně jednoznačného zobrazení* mezi množinou vektorových nadrovin a množinou směrů daného euklidovského vektorového prostoru $\mathbf{V}$ (normálových směrů daných nadrovin).

(2) Uvědomme si, že pro *tutéž* vektorovou nadrovinu $\mathbf{N}$ vektorového prostoru $\mathbf{V}$ nad $\mathbb{R}$ dostáváme pro *různé* volby skalárního součinu (tj. *různé* euklidovské vektorové prostory o témže nosiči)

obecně *různé* normálové směry (vektory).

Buď $\mathbf{N}=\mathcal{N}(\mathbf{n})$ vektorová nadrovina. Zvolme ve $\mathbf{V}$ bázi $\mathcal{B}$. Nechť $\{\mathbf{n}\}_{\mathcal{B}}=(a_1,a_2,\dots,a_n)$. Pak v souladu s větou 40 můžeme pro každý $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$, $\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ psát:

$$\mathbf{x}\in\mathbf{N} \Leftrightarrow \mathbf{xn}=0.$$

Je-li báze $\mathcal{B}$ ortonormální (a jen tehdy), je dle věty 11 skalární součin $\mathbf{xn}$ roven $a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n$,
a tudíž $\mathbf{x}$ náleží $\mathbf{N}$, právě když

$$a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=0.$$

Dostáváme tak následující tvrzení:

43. Důsledek *Buď* $\mathbf{N}$ *vektorová nadrovina ve* $\mathbf{V}$, $\mathcal{B}$ *ortonormální báze ve* $\mathbf{V}$. *Pak pro normálový vektor* $\mathbf{n}$ *vekt. nadroviny* $\mathbf{N}$ *platí:*

$$\{\mathbf{n}\}_{\mathcal{B}}=(a_1,a_2,\dots,a_n),$$

právě když:

$$\mathbf{N}=\{\mathbf{x}\in\mathbf{V}, \{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}}=(x_1,x_2,\dots,x_n);\ a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=0\}.$$

44. Poznámka Podmínka pro souřadnice vektoru $\mathbf{x}$ náležícího vektor. nadrovině $\mathbf{N}$ nabývá přirozeně v *každé* bázi $\mathcal{B}$ tvaru $a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=0$, avšak toliko v bázi ortonormální tvoří n-tice $a_1,a_2,\dots,a_n$ *souřadnice normálového vektoru* vektorové nadroviny $\mathbf{N}$.

Příklad E

V euklidovském vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ je dán podprostor $\mathbf{W}=[\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2]$. Nalezněte ortogonální doplněk $\mathbf{W}^{\perp}$, jestliže vzhledem k ortonormální bázi $\mathcal{B}$ je dáno:

$$\{\mathbf{w}_1\}_{\mathcal{B}}=(1,2,0),\ \{\mathbf{w}_2\}_{\mathcal{B}}=(1,1,1).$$

Řešení

S ohledem na definici 26 a větu 25 můžeme psát:

$$\mathbf{x}\in W^{\perp}\Leftrightarrow \mathbf{x}\mathbf{w}_1=\mathbf{x}\mathbf{w}_2=0,$$

odkud, položíme-li $\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}}=(x_1,x_2,x_3)$, dostáváme

$$x_1+2x_2 \quad =0$$
$$x_1+x_2+x_3=0.$$

Řešením této soustavy lineárních rovnic je směr

$$[(-2,1,1)],$$

což značí, že $$W^{\perp}=[\mathbf{n}],\ \{\mathbf{n}\}_{\mathcal{B}}=(-2,1,1).$$

Mimo jiné odtud plyne, že W je vektorová nadrovina $\mathcal{N}(\mathbf{n})$ určená normálovým vektorem $\mathbf{n}$, $\{\mathbf{n}\}_{\mathcal{B}}=(-2,1,1)$. V souladu s důsledkem 43 proto $$W=\{\mathbf{x}\in\mathbf{V},\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}}=(x_1,x_2,x_3);\ -2x_1+x_2+x_3=0\}.$$

3. Grammův determinant. Vnější a ortogonální součin

3.1 Grammův determinant

1. Definice Buďte $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k \in \mathbf{V}$. Pak:

(1) *Grammovou maticí vektorů* $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k$ rozumíme matici z $\mathcal{M}_{kk}(\mathbb{R})$ označovanou $\mathcal{G}(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k)$ a definovanou takto:

$$\boxed{\mathcal{G}(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k)=(a_{ij})_{k.k},\ \text{kde } a_{ij}=\mathbf{a}_i.\mathbf{a}_j,\ 1\le i,j\le k.}$$ [1])

(2) *Grammovým determinantem vektorů* $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k$ rozumíme číslo označované $G(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k)$ a definované takto:

$$\boxed{G(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k)=\det\mathcal{G}(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k).}$$

2. Poznámky

- u Grammovy matice, resp. determinantu, by bylo terminologicky přesnější hovořit o matici, resp. determinantu, *uspořádané* k-*tice vektorů*. Totéž se týká dále definovaných pojmů *vnějšího* a *ortogonálního součinu*. Jak uvidíme dále, na pořadí vektorů nezáleží obecně pouze u Grammova determinantu.

- Grammova matice je *symetrická* (proč?).

---

[1]) Tedy

$$\mathcal{G}(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k)=\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_1\mathbf{a}_k \\ \mathbf{a}_2\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_2\mathbf{a}_k \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mathbf{a}_k\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k\mathbf{a}_k \end{pmatrix}$$

3. Věta *Pro libovolné* $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k \in \mathbf{V}$ *platí*[2]*):*

(1) $G(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k) \geq 0$,

(2) $G(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k) = 0$, *právě když vektory* $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k$ *jsou lineárně závislé,*

(3) $\forall \pi \in S_k$: $G(\mathbf{a}_{\pi(1)},\dots,\mathbf{a}_{\pi(k)}) = G(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k)$.

Důkaz:

Ad (2):

Uvažujme soustavu lineárních homogenních rovnic o matici $\mathcal{G}(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k)$. Zaregistrujme, že $G(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k)=0$, právě když má tato soustava alespoň jedno netriviální řešení.

Zkoumejme, kdy je $(x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{R}^k$ řešením uvažované soustavy. Je to právě, když platí:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1)x_1+\dots+(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_k)x_k &= 0 \\ (\mathbf{a}_2\mathbf{a}_1)x_1+\dots+(\mathbf{a}_2\mathbf{a}_k)x_k &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (\mathbf{a}_k\mathbf{a}_1)x_1+\dots+(\mathbf{a}_k\mathbf{a}_k)x_k &= 0 \end{aligned} \tag{3-1}$$

což lze ekvivalentně psát:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1(\mathbf{a}_1x_1+\dots+\mathbf{a}_kx_k)&=0 \\ \mathbf{a}_2(\mathbf{a}_1x_1+\dots+\mathbf{a}_kx_k)&=0. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathbf{a}_k(\mathbf{a}_1x_1+\dots+\mathbf{a}_kx_k)&=0 \end{aligned} \tag{3-2}$$

Vynásobme nyní první rovnost x_1, druhou $x_2,\dots,$ k-tou x_k a sečtěme je. Dostáváme tak:

$$(x_1\mathbf{a}_1+\dots+x_k\mathbf{a}_k).(x_1\mathbf{a}_1+\dots+x_k\mathbf{a}_k)=0.$$

Uvážíme-li větu 1.6, plyne odtud:

$$x_1\mathbf{a}_1+\dots+x_k\mathbf{a}_k=\mathbf{o}. \tag{3-3}$$

Naopak, platí-li $x_1\mathbf{a}_1+\dots+x_k\mathbf{a}_k=\mathbf{o}$, jsou zřejmě rovnosti (3-2) - a tedy i (3-1) - splněny.

$(x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{R}^k$ je tedy řešením zkoumané soustavy, právě když platí (3-3). Odtud je patrno, že existence netriviálního řešení dané soustavy je ekvivalentní lineární závislosti vektorů $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k$, čímž je tvrzení (2) dokázáno.

---

[2]) připomeňme, že S_k značí množinu všech permutací množiny $\{1,\dots,k\}$.

Ad (1):

Jsou-li $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k$ lineárně závislé, je dle (2) $G(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k)=0$.

Nechť jsou $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k$ lineárně nezávislé (a tedy $k\le n$), jsou tedy bází jistého podprostoru $\mathbf{W}_k$ ve $\mathbf{V}_n$. Zvolme ve $\mathbf{W}_k$ ortonormální bázi $\mathcal{E}$ a nechť v ní platí:

$$\{\mathbf{a}_i\}_{\mathcal{E}}=(a_{i1},\dots,a_{ik}),\ 1\le i\le k.$$

Pak můžeme skalární součiny $\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j$ vyjádřit známým způsobem a pro prvek na pozici (i,j) Grammovy matice $\mathcal{G}(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k)$ dostáváme:

$$g_{ij}=\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j=\sum_{l=1}^{k} a_{il}a_{jl},\ 1\le i,j\le k,$$

odtud - označíme-li $\mathbf{A}=(a_{ij})_{k.k}$ [3]) - je patrno, že

$$\mathcal{G}(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k)=\mathbf{A}\mathbf{A}^T,$$

odkud pro Grammův determinant plyne:

$$G(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k)=\det\mathbf{A}.\det(\mathbf{A}^T)=(\det\mathbf{A})^2. \tag{3-4}$$

Protože vektory $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k$ jsou lineárně nezávislé, je determinat matice $\mathbf{A}$ z jejich souřadnic nenulový, a tedy jeho čtverec (tj.$G(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k)$) kladný.

Tím je tvrzení (1) dokázáno.

Ad (3):

Jsou-li $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k$ lin.závislé, je dle (2) $G(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k)=0$, a to nezávisle na jejich pořadí.

Jsou-li nezávislé, pak provedeme stejnou konstrukci, jako v důkazu tvrzení (1) a použijme pro vyjádření $G(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k)$ relace (3-4). Znaménko determinantu matice $\mathbf{A}$ se provedením permutace vektorů $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k$ sice může změnit, to však na čtverec jejího determinantu (tj.$G(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k)$) nemá vliv.

---

[3]) Tj. jde o matici, jejíž řádky jsou po řadě tvořeny souřadnicemi vektorů $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k$ v bázi $\mathcal{E}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11},a_{12}\dots,a_{1k} \\ a_{21},a_{22}\dots,a_{2k} \\ \dots\ \ \dots\dots \\ a_{k1},a_{k2}\dots,a_{kk} \end{pmatrix}.$$

3.2 Vnější součin

4. Definice Buďte $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n \in \mathbf{V}_n$[4]), $\mathcal{B}$ nechť je kladná ortonormální báze orientovaného[5]) prostoru $\mathbf{V}_n$.

Položíme-li $\{\mathbf{a}_i\}_{\mathcal{B}}=(a_{i1},\dots,a_{in})$, $1\le i\le n$, pak *vnějším součinem vektorů* $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$ *(vzhledem k bázi $\mathcal{B}$)* nazveme číslo označované $[\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n]_{\mathcal{B}}$ a definované takto:

$$[\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n]_{\mathcal{B}}=\begin{vmatrix} a_{11},\dots,a_{1n}\\ a_{21},\dots,a_{2n}\\ \dots\dots\dots\dots\\ a_{n1},\dots,a_{nn}\end{vmatrix}.$$

Naskýtá se přirozená otázka závislosti vnějšího součinu daných vektorů na volbě báze:

Buďte $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ ortonormální báze a označme $(\mathcal{B},\mathcal{C})=(t_{ij})_{nn}$ příslušnou matici přechodu. Pak, položíme-li

$$\{\mathbf{a}_i\}_{\mathcal{B}}=(a_{i1},\dots,a_{in}) \wedge \{\mathbf{a}_i\}_{\mathcal{C}}=(a'_{i1},\dots,a'_{in}),\ 1\le i\le n,$$

platí pro libovolné přípustné i:

$$(a_{i1},\dots,a_{in})=(a'_{i1},\dots,a'_{in})(\mathcal{B},\mathcal{C}),$$

neboli
$$a_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a'_{ik}t_{kj},\ 1\le i,j\le n,$$

což - označíme-li $\mathbf{A}=(a_{ij})_{n.n}$ a $\mathbf{A}'=(a'_{ij})_{n.n}$ - lze psát:

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}'(\mathcal{B},\mathcal{C}). \tag{5-1}$$

Ze zavedení matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}'$ (a ovšem definice 4) plyne:

$$[\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n]_{\mathcal{B}}=\det\mathbf{A} \wedge [\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n]_{\mathcal{C}}=\det\mathbf{A}',$$

a tudíž užitím relace (5-1) dostáváme:

$$[\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n]_{\mathcal{B}}=\det(\mathcal{B},\mathcal{C}).[\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n]_{\mathcal{C}}. \tag{5-2}$$

Protože $\mathcal{B},\mathcal{C}$ jsou ortonormální, je dle věty 2.18 $\det(\mathcal{B},\mathcal{C})=\pm1$.

(i) Jsou-li obě báze kladné, jsou souhlasné, a tedy $\det(\mathcal{B},\mathcal{C})=1$.

(ii) Buď ve zvolené orientaci báze $\mathcal{B}$ kladná a nechť $\mathcal{C}$ je kladná báze v orientaci opačné. $\mathcal{C}$ je tedy zápornou bází orientace vý-

---

[4]) povšimněme si, že počet vektorů musí být roven dimenzi $\mathbf{V}$.

[6]) viz 2.Doplněk v subparagrafu 2.4

chozí, a tudíž jsou tyto báze nesouhlasné - proto $\det(\mathcal{B},\mathcal{C})=-1$.

Platí tudíž věta následující[7]):

5. Věta

(1) Hodnota vnějšího součin daných vektorů nezávisí na výběru kladné ortonormální báze.

(2) Změní-li se orientace vektorového prostoru, změní se hodnota vnějšího součinu daných vektorů v číslo opačné.

6. Úmluva Nebude-li volba báze významná, budeme její znak ze symbolu vnějšího součinu vynechávat a psát jen $[\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n]$.

Vrátíme-li se k důkazu věty 3 (především části (1)), můžeme nalézt souvislost mezi hodnotou vnějšího součinu a Grammova determinantu těchže vektorů.

(i) jsou-li $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n\in\mathbf{V}$ lineárně nezávislé, pak provedeme-li touž konstrukci, jako v důkazu tvrzení (1) a použijeme-li pro vyjádření $G(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k)$ relace (3-4), plyne přímo ze zavedení vnějšího součinu:

$$[\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n]_{\mathcal{C}}^2= G(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n). \tag{7-1}$$

(ii) jsou-li $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n\in\mathbf{V}$ lineárně závislé, je zřejmě $[\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n]_{\mathcal{C}}=0$ (proč?) a jelikož dle věty 3.(2) je $G(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n)=0$, platí opět relace (7-1).

Dokázali jsme tedy následující větu:

7. Věta *Pro vnější součin libovolných* n *vektorů z* **V** *platí:*

$$\boxed{[\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n]^2= G(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n).}$$

---

[7]) Z jejího odvození (konkrétně relace 5-2) plyne oprávněnost požadavku, aby báze v definici vnějšího součinu byla *kladná* a *ortonormální*.

Bezprostředně z definice vnějšího součinu a vlastností determinantů plynou následující vlastnosti vnějšího součinu:

8. Věta *Buďte* $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n \in \mathbf{V}$. *Pak platí:*

(1) $\forall \pi \in S_n$: $[\mathbf{a}_{\pi(1)},\ldots,\mathbf{a}_{\pi(n)}] = \mathrm{sgn}\pi . [\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n]$,

(2) $\forall i, 1 \le i \le n$, $\forall \mathbf{a}_i, \mathbf{a}'_i \in \mathbf{V}$:

$[\mathbf{a}_1,\ldots,(\mathbf{a}_i+\mathbf{a}'_i),\ldots,\mathbf{a}_n] = [\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_i,\ldots,\mathbf{a}_n] + [\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}'_i,\ldots,\mathbf{a}_n]$,

(3) $\forall i, 1 \le i \le n$, $\forall c \in \mathbb{R}$: $[\mathbf{a}_1,\ldots,c\mathbf{a}_i,\ldots,\mathbf{a}_n] = c[\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_i,\ldots,\mathbf{a}_n]$.

Pro vnější součin v 3-rozměrném prostoru zavádíme speciální název.

9. Definice: V prostoru V_3 se vnější součin nazývá *smíšený součin.*

3.3 Ortogonální součin

Pro $n=3$ intuitivně očekáváme, že ke každým dvěma $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbf{V}_3$ existuje právě jeden vektor $\mathbf{a}^*$ s následujícími vlastnostmi[7]):

10. Věta *Buďte* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1} \in \mathbf{V}_n$[8]) *a nechť je* $\mathbf{V}_n$ *orientovaný. Pak existuje právě jeden* $\mathbf{a}^* \in \mathbf{V}_n$ *tak, že platí:*

(1) $\mathbf{a}^* \perp \mathbf{a}_i$, $1 \le i \le n-1$,

(2) $\|\mathbf{a}^*\| = \sqrt{G(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1})}$,

(3) Jsou-li $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}$ *lineárně nezávislé, tvoří* $\langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{a}^* \rangle$ *kladnou bázi* $\mathbf{V}_n$.

Důkaz:

I. Důkaz existence

Buď $\mathcal{B}$ ortonormální báze a nechť $\{\mathbf{a}_i\}_{\mathcal{B}} = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$, $1 \le i \le n-1$.
Zaveďme zobrazení $f: \mathbf{V} \to \mathbb{R}$:
$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{V}$, $\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}} = (x_1, \ldots, x_n)$:

$$f(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} a_{11}, \ldots\ldots, a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1,1}, \ldots, a_{n-1,n} \\ x_1, \ldots\ldots, x_n \end{vmatrix}. \qquad (10\text{-}1)$$

---

[7]) čtenář se jistě na střední škole s vektorem požadovaných vlastností (označovaným $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$ a nazývaným *vektorový součin*) setkal. Odstavce (1) a (3) věty 10 jsou evidentním zobecněním vlastností požadovaným pro $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$ ve SŠ matematice (promyslete si (3)!).

Zkoumejme nyní, zda je tomu tak i pro (2). S využitím především definice Grammova determinantu a definice úhlu dvou vektorů můžeme psát:

$$\sqrt{G(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)} = \sqrt{\|\mathbf{a}_1\|^2 \|\mathbf{a}_2\|^2 - (\mathbf{a}_1 . \mathbf{a}_2)^2} = \|\mathbf{a}_1\| \|\mathbf{a}_2\| \sqrt{1 - \cos^2 \sphericalangle(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)} =$$
$$= \|\mathbf{a}_1\| \|\mathbf{a}_2\| \, |\sin \sphericalangle(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)|,$$

což je právě poslední vlastnost požadovaná pro $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$.

Ve SŠ matematice se smíšený součin vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ definuje jako číslo $(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{a}_3$. Srovnejte s definicí 9 (užijte větu 13)!

[8]) povšimněme si, že počet vektorů musí být roven $\dim \mathbf{V} - 1$.

Označíme-li pro $i=1,\dots,n$ symbolem $\mathcal{A}_i$ algebraický doplněk prvku x_i (tj. prvku na pozici (n,i)) a zavedeme-li vektor $\mathbf{a}\in\mathbf{V}$:

$$\{\mathbf{a}\}_{\mathcal{B}}=(\mathcal{A}_1,\dots,\mathcal{A}_n), \tag{10-2}$$

můžeme dále psát:

$$f(\mathbf{x})\overset{(a)}{=}x_1\mathcal{A}_1+\dots+x_n\mathcal{A}_n\overset{(b)}{=}\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}, \tag{10-3}$$

kde jsme v rovnosti (a) užili Laplaceovu větu, v rovnosti (b) pak relace pro skalární součin v ortonormální bázi.

Ze vztahu (10-1) hned vidíme, že $f(\mathbf{a}_i)=0$, $1\le i\le n-1$, (proč?), což s ohledem na (10-3) dává:

$$\mathbf{a}_i.\mathbf{a}=0,\ 1\le i\le n-1, \tag{10-4}$$

a tedy vektor $\mathbf{a}$ má vlastnost (1) dokazované věty.

Protože báze $\mathcal{B}$ je ortonormální, plyne z (10-1):

$$f(\mathbf{x}) = [\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{n-1},\mathbf{x}],$$

a tudíž dle věty 7 platí:

$$|f(\mathbf{x})| = \sqrt{G(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{n-1},\mathbf{x})},$$

odkud pro $\mathbf{x}=\mathbf{a}$ plyne:

$$|f(\mathbf{a})|=\left(\left|\begin{array}{ccc|c} \mathbf{a}_1.\mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_1.\mathbf{a}_{n-1} & \mathbf{a}_1.\mathbf{a} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a}_{n-1}.\mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_{n-1}.\mathbf{a}_{n-1} & \mathbf{a}_{n-1}.\mathbf{a} \\ \hline \mathbf{a}.\mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}.\mathbf{a}_{n-1} & \mathbf{a}.\mathbf{a} \end{array}\right|\right)^{1/2}\overset{(a)}{=}$$

$$= \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 G(\mathbf{a},\dots,\mathbf{a}_{n-1})}\overset{(b)}{=}\|\mathbf{a}\|\sqrt{G(\mathbf{a},\dots,\mathbf{a}_{n-1})}, \tag{10-5}$$

kde jsme nejdříve využili (10-4), v rovnosti (a) pak Laplaceovy věty a v (b) toho, že norma vektoru je vždy nezáporná.

Současně však z (10-3) obdržíme:

$$f(\mathbf{a})=\mathbf{a}.\mathbf{a}=\|\mathbf{a}\|^2,\ \text{tedy}\ |f(\mathbf{a})|=\|\mathbf{a}\|^2,$$

odkud porovnáním s (10-5) dostaneme:

$$\|\mathbf{a}\|=\sqrt{G(\mathbf{a},\dots,\mathbf{a}_{n-1})}.$$

To znamená, že vektor $\mathbf{a}$ má vlastnost (2) dokazované věty.

Dále buďte $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{n-1}$ lineárně nezávislé a nechť již zvolená ortonormální báze $\mathcal{B}=<\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n>$ je navíc kladná.

Zkoumejme determinant

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11},\dots\dots,a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n-1,1},\dots,a_{n-1,n} \\ \mathcal{A}_1,\dots\dots,\mathcal{A}_n \end{vmatrix}.$$

Jak jsme odvodili výše, platí:

$$\Delta=f(\mathbf{a})=\sqrt{G(\mathbf{a},\dots,\mathbf{a}_{n-1})}\ .$$

Z lineární nezávislosti $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{n-1}$ plyne dle věty 3, že

$$\Delta>0. \tag{10-6}$$

To znamená, že jeho řádky jsou lineárně nezávislé aritmetické vektory ($\Delta\neq0$), a tudíž vektory, pro něž tyto řádky jsou souřadnicemi, tj. $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{n-1},\mathbf{a}$, jsou lineárně nezávislé.

Proto $\mathcal{C}=<\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{n-1},\mathbf{a}>$ tvoří bázi prostoru $\mathbf{V}$, přičemž Δ je determinantem matice přechodu od $\mathcal{B}$ k $\mathcal{C}$ (proč?) a vzhledem k (10-6) je $\mathcal{C}$ kladnou bází prostoru $\mathbf{V}$.

Ukázali jsme, že vektor $\mathbf{a}$ má i vlastnost (3) dokazované věty.

II. Důkaz jednoznačnosti

Buďte $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}'$ vektory splňující podmínky (1),(2) a (3) věty.

Ať vektory $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{n-1}$ jsou lineárně závislé. Pak dle 3 je $G(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{n-1})=0$ a podmínce (2) dokazované věty může tedy vyhovět pouze vektor nulový - tj. $\mathbf{o}=\mathbf{a}=\mathbf{a}'$.

Buďte vektory $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{n-1}$ lineárně nezávislé.

Z podmínky (1) (za použití věty 2.25) plyne, že $\mathbf{a}$ i $\mathbf{a}'$ náleží ortogonálnímu doplňku $\mathbf{W}$ lineárního obalu vektorů $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{n-1}$. V souladu s větou 2.29 je $\dim\mathbf{W}=1$.

Dále, z podmínky (2) (za použití věty 3) dostáváme:

$$\mathbf{a}\neq\mathbf{o}\neq\mathbf{a}' \tag{10-7}$$

a

$$\|\mathbf{a}\|=\|\mathbf{a}'\|. \tag{10-8}$$

Z (10-7) a z toho, že $\dim\mathbf{W}=1$ plyne:

$$\exists t\in\mathbb{R}:\ \mathbf{a}'=t\mathbf{a}. \tag{10-9}$$

Z této relace a z (10-8) obdržíme, že $|t|=1$, neboli $t\in\{1,-1\}$.

Splnění podmínky (3) značí, že $\mathcal{C},\mathcal{D}$, kde

$$\mathcal{C}=\langle a_1,\ldots,a_{n-1},a\rangle,\quad \mathcal{D}=\langle a_1,\ldots,a_{n-1},a'\rangle,$$

jsou kladné báze prostoru **V**.

Z relace (10-9) pro matici přechodu vyplývá:

$$(\mathcal{C},\mathcal{D})=\mathcal{D}iag(1,\ldots,1,t),$$

a tudíž $\det(\mathcal{C},\mathcal{D})=t.$

Protože obě báze jsou kladné, jsou navzájem souhlasné (tj. $\det(\mathcal{C},\mathcal{D})>0$), a proto $t=1$ - tudíž $\mathbf{a}'=\mathbf{a}$ (viz (10-9)).

Vektor $\mathbf{a}^*$ požadovaných vlastností je tedy roven vektoru **a** zkonstruovanému v části I. ■

11. Definice Buďte $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{n-1}\in\mathbf{V}_n$ a nechť je $\mathbf{V}_n$ orientovaný. Pak vektor $\mathbf{a}^*\in\mathbf{V}$ splňující podmínky (1)-(3) předešlé věty se nazývá *ortogonální součin vektorů* $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{n-1}$ a značí se

$$\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2\times\ldots\times\mathbf{a}_{n-1}.$$

Na základě věty 10 a jejího důkazu můžeme učinit následující poznámky:

12. Poznámky Buďte $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{n-1}$ vektory orientovaného vektorového prostoru **V**.

- ortogonální součin je jednoznačně dán zadáním vektorů $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{n-1}$ a volbou orientace prostoru **V**.
- je-li $\mathcal{B}$ kladná ortonormální báze a $\{\mathbf{a}_i\}_{\mathcal{B}}=(a_{i1},\ldots,a_{in})$, $1\le i\le n-1$, pak je ortogonální součin $\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2\times\ldots\times\mathbf{a}_{n-1}$ dán následujícím symbolickým determinantem[9])

$$\mathbf{a}_1\times\ldots\times\mathbf{a}_{n-1}=\begin{vmatrix} a_{11},\ldots\ldots,a_{1n}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n-1,1},\ldots,a_{n-1,n}\\ \mathbf{e}_1,\ldots\ldots,\mathbf{e}_n\end{vmatrix},$$

[9]) Viz důkaz věty 10 - z části I. plyne, že

$$\mathbf{a}_1\times\ldots\times\mathbf{a}_{n-1}=\mathcal{A}_1\mathbf{e}_1+\ldots+\mathcal{A}_n\mathbf{e}_n.$$

což nám dává návod pro výpočet souřadnic ortogonálního součinu.

Z důkazu věty 10 vyplývá, že je-li $\mathbf{a}$ ortogonálním součinem vektorů $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{n-1}$, pak pro libovolný $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$ platí:

$$[\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{n-1},\mathbf{x}]=\mathbf{a}.\mathbf{x}. \tag{13-1}$$

Má-li $\mathbf{a}\in\mathbf{V}$ vlastnost, že pro každý $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$ je relace (13-1) splněna, pak, zvolíme-li kladnou ortonormální bázi a vyjádříme-li levou stranu rovnosti (13-1) pomocí souřadnic vektorů, obdržíme (opět s využitím části I. důkazu věty 10):

$$\forall\mathbf{x}\in\mathbf{V}:\ (\mathbf{a}_1\times\dots\times\mathbf{a}_{n-1}).\mathbf{x}=\mathbf{a}.\mathbf{x},$$

odkud pomocí věty 1.6 obdržíme, že $\mathbf{a}_1\times\dots\times\mathbf{a}_{n-1}=\mathbf{a}$.

Platí tedy následující věta:

13. Věta *Buďte* $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{n-1}$ *vektory orientovaného vektorového prostoru* $\mathbf{V}$. *Pak* $\mathbf{a}=\mathbf{a}_1\times\dots\times\mathbf{a}_{n-1}$, *právě když pro každý* $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$ *platí:*

$$\boxed{[\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{n-1},\mathbf{x}] = \mathbf{a}.\mathbf{x}.}$$

Využitím vlastností determinantů a konstrukce ortogonálního součinu dle části I. důkazu věty 10 snadno vyplynou tvrzení (1)-(3) následující věty.

Z věty 10 víme, že ortogonální součin je jednoznačně dán zadáním vektorů $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{n-1}$ a *orientací* uvažovaného vektorového prostoru $\mathbf{V}$. Zkoumejme nyní závislost ortogonálního součinu na zvolené orientaci. Buďte $\mathbf{a}^{(1)}$ a $\mathbf{a}^{(2)}$ po řadě ortogonální součiny uvedených vektorů ve dvou navzájem *různých* orientacích $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ prostoru $\mathbf{V}$. Oba vektory tedy mají vlastnosti (1),(2) z věty 10, neboť tyto na orientaci prostoru nezávisí, a tudíž (srv. část II. důkazu věty 10):

(i) jsou-li $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{n-1}$ lineárně nezávislé, pak

$$\exists t\in\{1,-1\}:\ \mathbf{a}^{(2)}=t\mathbf{a}^{(1)}.$$

Vzhledem k tomu, že prostor $\mathbf{V}$ je možné orientovat právě dvěma způsoby, jsou báze

$$\mathcal{B}_1=\langle\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{n-1},\mathbf{a}^{(1)}\rangle,\ \mathcal{B}_2=\langle\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{n-1},\mathbf{a}^{(2)}\rangle$$

nesouhlasné a determinant matice přechodu $(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ záporný. Vzhledem k tomu, že $(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)=\mathcal{D}iag(1,\dots,1,t)$, musí být $t<0$, souhrnně tedy $t=-1$, což značí $\mathbf{a}^{(2)}=-\mathbf{a}^{(1)}$.

(ii) jsou-li $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{n-1}$ lineárně závislé, pak jsou $\mathbf{a}^{(1)}$, $\mathbf{a}^{(2)}$ vektory nulové, což ovšem rovněž značí $\mathbf{a}^{(2)}=-\mathbf{a}^{(1)}$.

Zjištěné poznatky formulujeme následující větou.

14. Věta *Buďte* $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{n-1}\in\mathbf{V}$. *Pak platí:*

(1) $\forall\pi\in S_{n-1}$: $\mathbf{a}_{\pi(1)}\times\dots\times\mathbf{a}_{\pi(n-1)}=\mathrm{sgn}\pi.(\mathbf{a}_1\times\dots\times\mathbf{a}_{n-1})$,

(2) $\forall i, 1\le i\le n-1$, $\forall\mathbf{a}_i,\mathbf{a}'_i\in\mathbf{V}$:

$$\mathbf{a}_1\times\dots\times(\mathbf{a}_i+\mathbf{a}'_i)\times\dots\times\mathbf{a}_{n-1}=(\mathbf{a}_1\times\dots\times\mathbf{a}_i\times\dots\times\mathbf{a}_{n-1})+(\mathbf{a}_1\times\dots\times\mathbf{a}'_i\times\dots\times\mathbf{a}_{n-1}),$$

(3) $\forall i, 1\le i\le n-1$, $\forall c\in\mathbb{R}$:

$$\mathbf{a}_1\times\dots\times(c\mathbf{a}_i)\times\dots\times\mathbf{a}_{n-1}=c(\mathbf{a}_1\times\dots\times\mathbf{a}_i\times\dots\times\mathbf{a}_{n-1}).$$

(4) změní-li se orientace vektorového prostoru **V**, *přejde ortogonální součin vektorů* $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{n-1}$ *ve vektor opačný.*

Pro ortogonální součin v 3-rozměrném prostoru zavádíme speciální název[10]).

15. Definice V prostoru V_3 se ortogonální součin nazývá *vektorový součin.*

Uvážíme-li definici normálového vektoru vektorové nadroviny (definice 2.41) a vlastnost ortogonálního součinu dle věty 10.(1), dostáváme:

16. Věta *Nechť* $\mathbf{N}\subseteq\mathbf{V}$ *je vektorová nadrovina,* $\langle\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{n-1}\rangle$ *její libovolná báze. Je-li* **V** *orientovaný vektorový prostor, pak vektor* $\mathbf{a}_1\times\dots\times\mathbf{a}_{n-1}$ *je normálovým vektorem nadroviny* **N**.

---

[10]) srv. poznámka pod čarou na začátku podkapitoly 3.3.

Příklad A

V euklidovském vektorovém prostoru **V** je vzhledem ke kladné ortonormální bázi $\mathcal{B}=\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \rangle$ dáno:

$$\{\mathbf{a}_1\}_{\mathcal{B}}=(1,0,1,0),\ \{\mathbf{a}_2\}_{\mathcal{B}}=(0,1,1,0),\ \{\mathbf{a}_3\}_{\mathcal{B}}=(1,1,1,1).$$

Spočtěte ortogonální součin $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3$.

Řešení

Použijeme postupu dle poznámky 12 a Laplaceovy věty:

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \end{vmatrix} = \ldots = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4,$$

neboli $\{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3\}_{\mathcal{B}}=(1,1,-1,-1)$.

3.4. Geometrický význam vnějšího a ortogonálního součinu

Úvodem připomeňme, že v geometrii se *objem n-rozměrného simplexu o vrcholech* $A_0, A_1, \dots, A_n$ v euklidovském prostoru $\mathcal{E}_m$ $(n \le m)$[11] zavádí jako reálné číslo V definované takto:

$$\boxed{V = \frac{1}{n!}\,|\,[A_1 - A_0, A_2 - A_0, \dots, A_n - A_0]\,|.}$$

Ukažme, že se takto definovaná délka úsečky (tj. n=1), obsah trojúhelníka (tj. n=2), popř. objem čtyřstěnu (tj. n=3) dá vyjádřit též vztahem známým čtenáři ze SŠ matematiky.

(i) Uvažujme úsečku s krajními body B_0, B_1 ležící v $\mathcal{E}'_1 \subseteq \mathcal{E}_m$. Pak pro její délku V dle výše uvedené definice dostaneme:

$$V = |\,[B_0 - B_1]\,| \overset{(a)}{=} \sqrt{G(B_0 - B_1)} \overset{(b)}{=} \sqrt{(B_0 - B_1)(B_0 - B_1)} = \sqrt{\|B_0 - B_1\|^2} = $$
$$= \|B_0 - B_1\|,$$

což opravdu představuje vzdálenost bodů B_0, B_1, která se značí obvykle $\rho(B_0, B_1)$.

V rovnosti (a) jsme použili větu 7, v rovnosti (b) pak definici Grammova determinantu.

(ii) Uvažujme nyní trojúhelník o vrcholech B_0, B_1, B_2 v $\mathcal{E}'_2 \subseteq \mathcal{E}_m$. Pak můžeme psát:

---

[11]) • *Euklidovským prostorem* $\mathcal{E}_n$ se rozumí každý afinní prostor, na jehož zaměření $\mathbf{V}_n$ je definován skalární součin (tj. $\mathbf{V}_n$ je *euklidovským vektorovým prostorem*, o nichž zde pojednáváme);

• je-li dáno n+1 lineárně nezávislých bodů *(vrcholů simplexu)*, pak *n-rozměrným simplexem* rozumíme nejmenší konvexní množinu obsahující tyto body. O *n-rozměrném* simplexu hovoříme proto, že existuje právě jeden *n-rozměrný* euklidovský prostor $\mathcal{E}'_n$ tento simplex obsahující.

Pro n=1 je simplexem *úsečka* s krajními body A_0, A_1, pro n=2 *trojúhelník* o vrcholech A_0, A_1, A_2, pro n=3 pak *čtyřstěn* A_0, A_1, A_2, A_3;

• pro n=1 hovoříme o *délce*, pro n=2 o *ploše* daného simplexu.

$$V=\frac{1}{2!}\,|[B_1-B_0,B_2-B_0]|\overset{(a)}{=}\tfrac{1}{2}\sqrt{G((B_1-B_0)(B_2-B_0))}=$$

$$\overset{(b)}{=}\tfrac{1}{2}\sqrt{((B_1-B_0)(B_1-B_0))((B_2-B_0)(B_2-B_0))-((B_1-B_0)(B_2-B_0))^2}=$$

$$\overset{(c)}{=}\tfrac{1}{2}\sqrt{\|B_1-B_0\|^2\|B_2-B_0\|^2-\|B_1-B_0\|^2\|B_2-B_0\|^2\cos^2\sphericalangle((B_1-B_0)(B_2-B_0))}=$$

$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{\|B_1-B_0\|^2\|B_2-B_0\|^2(1-\cos^2\sphericalangle((B_1-B_0)(B_2-B_0)))}=$$

$$=\tfrac{1}{2}\|B_1-B_0\|\,\|B_2-B_0\|\,\sqrt{(1-\cos^2\sphericalangle((B_1-B_0)(B_2-B_0)))}=$$

$$\overset{(d)}{=}\tfrac{1}{2}\rho(B_0,B_1)\rho(B_0,B_2)\,|\sin\sphericalangle((B_1-B_0)(B_2-B_0))|,$$

což je žádaný výsledek.

Přitom v rovnosti (a) jsme užili větu 7, v rovnosti (b) definici Grammova determinantu, v rovnosti (c) definici 1.11 (pro nenulové vektory) a v rovnosti (d) pak definici vzdálenosti dvou bodů v $\mathcal{E}$.

(iii) Uvažujme čtyřstěn o vrcholech B_0,B_1,B_2,B_3 v $\mathcal{E}'_3\subseteq\mathcal{E}_m$. Pak můžeme psát (užitím věty 13):

$$V=\frac{1}{3!}\,|[B_1-B_0,B_2-B_0,B_3-B_0]|=\frac{1}{6}\,|((B_1-B_0)\times(B_2-B_0)).(B_3-B_0)|.$$

Vektorový součin $\mathbf{v}=(B_1-B_0)\times(B_2-B_0)$ představuje dle věty 16 normálový vektor roviny π určené lineárně nezávislou trojicí bodů B_0,B_1,B_2[12]) v prostoru $\mathcal{E}'_3$. Pro jeho normu platí (užitím vět 10.(2) a 7):

$$\|\mathbf{v}\|=\|(B_1-B_0)\times(B_2-B_0)\|=\sqrt{G((B_1-B_0),(B_2-B_0))}=|[B_1-B_0,B_2-B_0]|,$$

což dle odstavce (ii) představuje dvojnásobek obsahu trojúhelníka $B_0B_1B_2$ (proč?).

Pro vzdálenost bodu B_3 od roviny π jak známo platí:

$$\rho(B_3,\pi)=\frac{|(B_3-B_0).\mathbf{v}|}{\|\mathbf{v}\|}.$$

S ohledem na právě uvedené lze pro objem dotyčného čtyřstěnu dále psát:

$$V=\frac{1}{6}\,|\mathbf{v}.(B_3-B_0)|=\frac{1}{6}\,\|\mathbf{v}\|.\rho(B_3,\pi)=\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2}\|\mathbf{v}\|)\rho(B_3,\pi),$$

takže označíme-li P obsah trojúhelníka $B_0B_1B_2$ *(obsah podstavy*

---

[12]) tj. bázi zaměření $\mathbf{W}_2$ roviny π tvoří vektory B_2-B_0, B_1-B_0.

čtyřstěnu) a symbolem v vzdálenost bodu B_3 od roviny podstavy π *(výška čtyřstěnu)*, zjišťujeme, že *objem čtyřstěnu o vrcholech* B_0, B_1, B_2, B_3 *je roven* $\frac{1}{3}Pv$, což je opět očekávaný výsledek.

Je-li dáno n lineárně nezávislých bodů $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ prostoru $\mathcal{E}_n$, lze je pokládat za vrcholy (n-1)-rozměrného simplexu ležícího v nadrovině $\mathcal{N} \subset \mathcal{E}_n$. Užitím věty 7 snadno vyplývá *geometrický význam ortogonálního součinu* - norma ortogonálního součinu vektorů $(A_1-A_0), \ldots, (A_{n-1}-A_0)$ udává (n-1)!-násobek objemu uvedeného simplexu. Konkrétně pro n=3 byl již tento význam zjištěn v odstavci (iii).

Příklad B

V euklidovském prostoru $\mathcal{E}_4$ jsou dány body A,B,C svými souřadnicemi v kartézské bázi takto:

$$A=[1,1,1,1],\ B=[1,2,2,1],\ C=[2,1,1,2].$$

Spočtěně obsah ΔABC.

Řešení

Snadno se přesvědčíme, že uvedené tři body jsou nekolineární a určují tudíž 2-rozměrný simplex.

Obsah ΔABC je, jak jsme viděli výše, dán relací

$$S=\tfrac{1}{2}\|[C-A,B-A]\|,$$

přičemž uvedený vnější součin uvažujeme v euklidovském vektorovém prostoru $\mathbf{V}_2$, jehož bází je $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$, kde $\mathbf{a}_1=B-A$, $\mathbf{a}_2=C-A$, tj.[13])

$$\{\mathbf{a}_1\}_{\mathcal{B}}=(0,1,1,0),\ \{\mathbf{a}_2\}_{\mathcal{B}}=(1,0,0,1).$$

Abychom jej mohli vyčíslit přímo dle definičního vztahu (definice 4), musíme ve $\mathbf{V}_2$ zvolit některou ortonormální bázi $\mathcal{C}$ - např.[14])

$$\{\mathbf{e}_1\}_{\mathcal{B}}=(\sqrt{2}/2)(0,1,1,0),\ \{\mathbf{e}_2\}_{\mathcal{B}}=(\sqrt{2}/2)(1,0,0,1),$$

V uvedené bázi platí:

$$\{\mathbf{a}_1\}_{\mathcal{C}}=(\sqrt{2},0),\ \{\mathbf{a}_2\}_{\mathcal{C}}=(0,\sqrt{2}),$$

a tedy

---

[13]) $\mathcal{B}$ označuje ortonormální bázi zaměření euklid.prostoru $\mathcal{E}_4$.

[14]) obecně bychom mohli např. nalézt ortonormalizaci dané báze.

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]_{\mathscr{E}} = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = 2,$$

a tedy $S = \frac{1}{2}|2| = 1$.

Pro výpočet absolutní hodnoty vnějšího součinu vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ v prostoru $\mathbf{V}_2$ bychom vhodně mohli rovněž využít relace dle věty 7:

$$|[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]| = \sqrt{G(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)} .$$

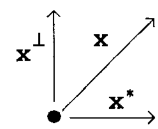
Proveďte!

4. Vzdálenost a odchylka vektoru a podprostoru

4.1 Kolmý průmět vektoru do podprostoru

Je-li $\mathbf{W} \subseteq\subseteq \mathbf{V}$, pak - jak jsme uvedli v 2.30 - lze každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ lze *právě jedním způsobem* psát ve tvaru

$$\boxed{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*+\mathbf{x}^{\perp}, \text{ kde } \mathbf{x}^* \in \mathbf{W},\ \mathbf{x}^{\perp} \in \mathbf{W}^{\perp}.} \qquad (1\text{-}1)$$



Čtenář má jistě intuitivní představu, jak pomocí vektorů $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{x}^{\perp}$ zavedeme pojmy uvedené v názvu této kapitoly. Než tak učiníme, vyšetříme v tomto odstavci k tomu účelu vhodné vlastnosti vektorů $\mathbf{x}^*$ a $\mathbf{x}^{\perp}$.

Pojmenujme nyní vektory $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{x}^{\perp}$:

1.Definice Buď $\mathbf{W} \subseteq\subseteq \mathbf{V}$, $\mathbf{x}$ vektor z $\mathbf{V}$ a nechť $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{x}^{\perp}$ jsou vektory splňující (1-1). Pak vektor $\mathbf{x}^*$ nazýváme *kolmý průmět vektoru* $\mathbf{x}$ *do podprostoru* $\mathbf{W}$ a vektor $\mathbf{x}^{\perp}$ nazýváme *perpendikulár vektoru* $\mathbf{x}$ *na podprostor* $\mathbf{W}$.[1])

2.Úmluva Nadále podržíme označení dle definice 1 - tedy při zvoleném $\mathbf{W} \subseteq\subseteq \mathbf{V}$ budeme pro každý $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ symbolem $\mathbf{x}^*$ označovat kolmý průmět vektoru $\mathbf{x}$ do podprostoru $\mathbf{W}$ a symbolem $\mathbf{x}^{\perp}$ pak perpendikulár vektoru $\mathbf{x}$ na podprostor $\mathbf{W}$.

Jen pokud by bylo nutno zdůraznit o průmět do kterého

---

[1]) krom termínu *kolmý průmět* se užívá rovněž pojem *ortogonální projekce*. My jej však vyhradíme spíše pro jisté *zobrazení* $\mathbf{V} \to \mathbf{W}$ (viz závěr podkapitoly 4.1 a kapitola II.5).

Krom termínu *perpendikulár* se někdy užívá pojmu *kolmice*, ten se však spíše užívá pro přímku, zde jej proto užívat nebudeme.

konkrétního podprostoru se jedná (např. při možné záměně průmětů do různých podprostorů), připojíme jeho označení formou dolního indexu, tj. budeme psát $\mathbf{x}^*_W$. Podobně pro perpendikulár užijeme označení $\mathbf{x}^{\perp}_W$.

Protože $(W^{\perp})^{\perp}=W$, a tedy $V=(W^{\perp})\oplus(W^{\perp})^{\perp}$, je zřejmá platnost následující věty:

3.Věta *Buď* $W\subseteq\subseteq V$, $\mathbf{x}$ *vektor z* V. *Pak platí:*

(1) kolmý průmět vektoru $\mathbf{x}$ *do podprostoru* W *je roven perpendikuláru vektoru* $\mathbf{x}$ *na podrostor* $W^{\perp}$,

(2) perpendikulár vektoru $\mathbf{x}$ *na podprostor* W *je roven kolmému průmětu vektoru* $\mathbf{x}$ *do podrostoru* $W^{\perp}$.

Uvážíme-li jednoznačnost vyjádření (1-1) vektoru $\mathbf{x}$ při zvoleném $W\subseteq\subseteq V$ (a skutečnost, že $\mathbf{x}\perp W \Leftrightarrow \mathbf{x}\in W^{\perp}$), zřejmě platí:

4.Věta *Buď* $W\subseteq\subseteq V$, $\mathbf{x}$ *vektor z* V. *Pak platí*[2]*:*

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathbf{x}\in W \Leftrightarrow \mathbf{x}^*=\mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{x}^{\perp}=\mathbf{o}, \\ \mathbf{x}\perp W \Leftrightarrow \mathbf{x}^*=\mathbf{o} \Leftrightarrow \mathbf{x}^{\perp}=\mathbf{x}. \end{array}}$$

Nalezněme nyní vztah mezi normami vektoru $\mathbf{x}$ a vektorů $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{x}^{\perp}$:
Zvolme $W\subseteq\subseteq V$ a vektor $\mathbf{x}\in V$, který vyjádřeme dle (1-1):

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}^*+\mathbf{x}^{\perp},\ \mathbf{x}^*\in W \wedge \mathbf{x}^{\perp}\in W^{\perp}.$$

Pak pro druhou mocninu normy $\mathbf{x}$ můžeme psát:

$$\|\mathbf{x}\|^2=(\mathbf{x}^*+\mathbf{x}^{\perp})(\mathbf{x}^*+\mathbf{x}^{\perp})=\mathbf{x}^*\mathbf{x}^*+2(\mathbf{x}^*\mathbf{x}^{\perp})+\mathbf{x}^{\perp}\mathbf{x}^{\perp}\overset{(a)}{=}\mathbf{x}^*\mathbf{x}^*+\mathbf{x}^{\perp}\mathbf{x}^{\perp}=\|\mathbf{x}^*\|^2+\|\mathbf{x}^{\perp}\|^2,$$

kde v rovnosti (a) jsme využili faktu, že $\mathbf{x}^{\perp}\in W^{\perp}$, a tudíž $\mathbf{x}^*\mathbf{x}^{\perp}=0$.
Platí tedy věta následující:

---

[2]) Důsledkem je např.: $\boxed{(\mathbf{x}=\mathbf{x}^*=\mathbf{x}^{\perp})\Leftrightarrow \mathbf{x}=\mathbf{o}.}$

5. Věta *Buď* $\mathbf{W}\subseteq\mathbf{V}$, $\mathbf{x}$ *vektor z* $\mathbf{V}$. *Pak platí*[3]*):*

$$\boxed{\|\mathbf{x}\|^2=\|\mathbf{x}^*\|^2+\|\mathbf{x}^\perp\|^2.}$$

Jak nalézt normu vektorů $\mathbf{x}^*$ a $\mathbf{x}^\perp$, je-li zadán vektor $\mathbf{x}$?[4])

Uvažujme nejprve případ, kdy zvolený vektorový podprostor je *vektorovou nadrovinou* $\mathbf{N}$ zadanou normálovým vektorem $\mathbf{n}$ (viz 2.39 a násl.).

Vyjádřeme vektor $\mathbf{x}$ dle (1-1):

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}^*+\mathbf{x}^\perp,\quad \mathbf{x}^*\in\mathbf{N}\wedge\mathbf{x}^\perp\in\mathbf{N}^\perp,$$

neboli

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}^*+t\mathbf{n},\quad \mathbf{x}^*\in\mathbf{N}\wedge t\in\mathbb{R}, \tag{6-1}$$

Naším cílem je spočíst t, a proto vynásobíme obě strany (6-1) skalárně vektorem $\mathbf{n}$, čímž obdržíme:

$$\mathbf{xn}=(\mathbf{x}^*+t\mathbf{n})\mathbf{n}$$

Pravou stranu lze psát (v rovnosti (a) jsme uvážili, že $\mathbf{x}^*\perp\mathbf{n}$):

$$(\mathbf{x}^*+t\mathbf{n})\mathbf{n}=\mathbf{x}^*\mathbf{n}+t(\mathbf{nn})\overset{(a)}{=}0+t\|\mathbf{n}\|^2,$$

a tedy

$$\mathbf{xn}=t\|\mathbf{n}\|^2,$$

odkud[5])

$$t=\frac{\mathbf{x}.\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}. \tag{6-2}$$

Dosazením (6-2) do (6-1) dostaneme pro $\mathbf{x}^\perp$:

$$\mathbf{x}^\perp=(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*)=\frac{\mathbf{x}.\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n},$$

a odtud (užitím věty 1.10)

$$\|\mathbf{x}^\perp\|=\left\|\frac{\mathbf{x}.\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n}\right\|=\left|\frac{\mathbf{x}.\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}\right|\|\mathbf{n}\|=\frac{|\mathbf{x}.\mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|^2}\|\mathbf{n}\|=\frac{|\mathbf{x}.\mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}.$$

Odvodili jsme platnost věty následující:

---

[3]) v euklidovských vektorových prostorech tedy platí *Pythagorova věta.*

[4]) vzhledem k větě 5 postačí zjistit jednu z norem $\|\mathbf{x}^*\|$, $\|\mathbf{x}^\perp\|$.

[5]) zde raději typograficky zdůrazníme rozdíl mezi skalárním násobením vektorů a násobením vektoru skalárem (reálným číslem)

6. Věta *Buď* $\mathbf{N}=\mathcal{N}(\mathbf{n})$ *vektorová nadrovina ve* $\mathbf{V}$, $\mathbf{x}$ *vektor z* $\mathbf{V}$. *Pak platí:*

$$\boxed{\|\mathbf{x}^{\perp}\| = \frac{|\mathbf{x}.\mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}.}$$

Nyní budeme řešit týž problém pro případ obecného podprostoru $\mathbf{W}\subseteq\mathbf{V}$.

K tomuto využijeme řešení pro případ vektorové nadroviny. V případě, kdy $\mathbf{x}\notin\mathbf{W}$, je totiž $\mathbf{W}$ vektorovou nadrovinou v podprostoru $\mathbf{U}=\mathbf{W}+[\mathbf{x}]$[6]).

Definujeme-li zobrazení $\odot:\mathbf{U}\times\mathbf{U}\to\mathbb{R}$ relací

$$\forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{U}:\ \mathbf{u}\odot\mathbf{v}=\mathbf{u}.\mathbf{v},$$

tj. jako restrikci skalárního součinu na $\mathbf{U}\times\mathbf{U}$, je dle věty 1.4 $\mathbf{U}$ spolu s $\odot$ euklidovský vektorový prostor.

Odlišovat typograficky skalární součin na $\mathbf{U}$ od součinu na $\mathbf{V}$ tudíž nemá význam a nadále tak činit nebudeme. Totéž platí i pro pojmy pomocí skalárního součinu definované - zaregistrujme především kolmost vektorů, Grammův determinant a normu vektoru.

Zejména *kolmý průmět vektoru* $\mathbf{x}$ do $\mathbf{W}$ ($\mathbf{x}^*$), jakož i *perpendikulár vektoru* $\mathbf{x}$ *na* $\mathbf{W}$ ($\mathbf{x}^{\perp}$), je *týž*, ať pohlížíme na $\mathbf{W}$ jako na podprostor v $\mathbf{U}$ či ve $\mathbf{V}$, protože ortogonální doplněk podprostoru $\mathbf{W}$ *v podprostoru* $\mathbf{U}$ je obsažen v ortogonálním doplňku $\mathbf{W}$ *v prostoru* $\mathbf{V}$ [7]).

Nechť $\langle\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_k\rangle$ je báze podprostoru $\mathbf{W}$. Orientujme nyní (libovolně) vektorový prostor $\mathbf{U}$. Pak za normálový vektor vektorové nadroviny $\mathbf{W}$ v $\mathbf{U}$ lze v souladu s 3.16 vzít

$$\mathbf{n}=\mathbf{u}_1\otimes\mathbf{u}_2\otimes\dots\otimes\mathbf{u}_k,$$

---

[6]) přesvědčte se o tom užitím Grassmannovy formule (jelikož $\mathbf{x}\notin\mathbf{W}$, je $\mathbf{x}\neq\mathbf{o}$)

[7]) tato úvaha je do jisté míry nadbytečná, uvážíme-li, že (1-1) lze ekvivalentně psát

$$\boxed{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*+\mathbf{x}^{\perp},\ \text{kde } \mathbf{x}^*\in\mathbf{W},\ \mathbf{x}^{\perp}\perp\mathbf{W}.}$$

kde symbolem ⊗ značíme ortogonální násobení v **U**[8]).

Pro normu perpendikuláru $\mathbf{x}^{\perp}$ můžeme dle předešlé věty psát:

$$\|\mathbf{x}^{\perp}\| = \frac{|\mathbf{x}.\mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}. \tag{7-1}$$

- norma $\|\mathbf{n}\|$ (viz 3.10.(2)):

$$\|\mathbf{n}\|=\|\mathbf{u}_1\otimes\mathbf{u}_2\otimes\ldots\otimes\mathbf{u}_k\|=\sqrt{G(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_k)}\,. \tag{7-2}$$

- hodnota $|\mathbf{x}.\mathbf{n}|$:

$$\mathbf{x}.\mathbf{n}=\mathbf{x}.(\mathbf{u}_1\otimes\mathbf{u}_2\otimes\ldots\otimes\mathbf{u}_k)\overset{(a)}{=}[\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_k,\mathbf{x}],$$

kde jsme v rovnosti (a) užili větu 3.13.

Dále užitím věty 3.7 plyne:

$$|[\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_k,\mathbf{x}]|=\sqrt{G(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_k,\mathbf{x})}\,,$$

takže

$$|\mathbf{x}.\mathbf{n}|=\sqrt{G(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_k,\mathbf{x})}\,. \tag{7-3}$$

Dosazením (7-2) a (7-3) do (7-1), dostáváme (proč je jmenovatel zlomku nenulový?):

$$\boxed{\|\mathbf{x}^{\perp}\| = \frac{\sqrt{G(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_k,\mathbf{x})}}{\sqrt{G(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_k)}}} \tag{7-4}$$

Předchozí úvaha byla provedena pro $\mathbf{x}\notin\mathbf{W}$. Jestliže $\mathbf{x}\in\mathbf{W}$, je jeho perpendikulár nulový (viz 4). Uvážíme-li, že $\mathbf{x}\in\mathbf{W}$, právě když jsou vektory $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_k,\mathbf{x}$ lineárně závislé, neboli jejich Grammův determinant nulový (viz 3.3), je relace (7-4) platná i pro $\mathbf{x}\in\mathbf{W}$.

Zjistili jsme, že následující tvrzení platí:

---

[8]) Ortogonální součin v **U** však od ortogonálního součinu ve **V** odlišovat musíme - ve **V** není ortogonální součin k vektorů při k≠n-1 definován.

Stejně je tomu s vnějším součinem v **U** - odlišíme skloněním závorek.

7. Věta *Buď* $\mathbf{W}\subseteq\mathbf{V}$, $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\rangle$ *báze* $\mathbf{W}$ *a* $\mathbf{x}$ *vektor z* $\mathbf{V}$*. Pak norma perpendikuláru vektoru* $\mathbf{x}$ *na podprostor* $\mathbf{W}$ *je dána relací* (7-4).

8. Poznámka Ukažme si nyní postup, jak při zvoleném $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$, $\mathbf{W}\subseteq\mathbf{V}$ najít vektory $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{x}^\perp$:

Předpokládejme, že $\mathbf{W}$ má bázi $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\rangle$. Nalezení $\mathbf{x}^*\in\mathbf{W}$ je ekvivalentní nalezení skalárů $x_1, \dots, x_k\in\mathbb{R}$, pro něž

$$\mathbf{x}^* = x_1\mathbf{u}_1 + \dots + x_k\mathbf{u}_k, \tag{8-1}$$

neboli (srv. (1-1))

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + \dots + x_k\mathbf{u}_k + \mathbf{x}^\perp. \tag{8-2}$$

Protože $\mathbf{x}^\perp$ náleží $\mathbf{W}^\perp$, je kolmý na všechna $\mathbf{u}_i$, $i=1,\dots,k$, a tudíž vynásobením rovnosti (8-2) libovolným $\mathbf{u}_i$ obdržíme:

$$\mathbf{x}\mathbf{u}_i = x_1(\mathbf{u}_1\mathbf{u}_i) + \dots + x_k(\mathbf{u}_k\mathbf{u}_i), \tag{i}$$

což, proběhne-li $i=1,\dots,k$, vede na soustavu k lineárních rovnic (1), ..., (k) o neznámých $x_1, \dots, x_k$, kde maticí soustavy je matice $\mathcal{G}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ a uvedenou soustavu můžeme schematicky zapsat takto[9]:

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathcal{G}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k) & \begin{matrix} \mathbf{x}\mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}\mathbf{u}_k \end{matrix} \end{array}\right)$$

Dosazením skalárů $x_1, \dots, x_k\in\mathbb{R}$, které řeší uvedenou soustavu, do rovnosti (8-1), získáme vektor $\mathbf{x}^*$ (jak získáme $\mathbf{x}^\perp$?).

Jak bylo již uvedeno před definicí 1, zvolíme-li podprostor $\mathbf{W}\subseteq\mathbf{V}$, pak můžeme ke každému $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$ nalézt jednoznačně jeho kolmý průmět do $\mathbf{W}$ – tj. vektor $\mathbf{x}^*$, čímž máme definováno jisté *zobrazení*

---

[9]) Tato soustava musí mít řešení, neboť ke každému $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$ vektor $\mathbf{x}^*$ existuje (a to jediný). Plyne to ovšem též přímo z vlastnosti Grammovy matice – její determinant je pro lineárně nezávislé vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ nenulový (věta 3.3), přičemž je současně determinantem uvedené soustavy. Jak je čtenáři známo, má v tomto případě tato soustava jediné řešení $(x_1, \dots, x_k)\in\mathbb{R}^k$.

označované p_W:

$$\boxed{\begin{aligned} p_W&: \mathbf{V} \to \mathbf{W}, \\ p_W&: \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^*_W. \end{aligned}}$$

které budeme nazývat *ortogonální projekcí prostoru* **V** *na podprostor* **W**.

Snadno se ukáže, že ortogonální projekce p_W je homomorfizmem **V** na **W** s vlastností $\mathrm{Ker}p_W=\mathbf{W}^\perp$ a $\mathrm{Im}p_W=\mathbf{W}$ (promyslete si!). Podrobněji se však projekcím obecně i projekci ortogonální budeme věnovat v kapitole II.5 a II.6.

Příklad A

V euklidovském vektorovém prostoru **V** je dán vektor **x** a podprostor $\mathbf{W}=[\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2]$. Nalezněte kolmý průmět vektoru **x** do podprostoru **W**, jestliže vzhledem k ortonormální bázi $\mathcal{B}$ je dáno:

$$\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}}=(5,3,1),$$
$$\{\mathbf{w}_1\}_{\mathcal{B}}=(1,2,0),\quad \{\mathbf{w}_2\}_{\mathcal{B}}=(1,1,1).$$

Řešení

Budeme postupovat dle poznámky 8. Kolmý průmět $\mathbf{x}^*$ budeme hledat ve tvaru

$$\mathbf{x}^*=x_1\mathbf{w}_1+x_2\mathbf{w}_2, \tag{A-1}$$

a proto

$$\mathbf{x}=x_1\mathbf{w}_1+x_2\mathbf{w}_2+\mathbf{x}^\perp. \tag{A-2}$$

Vynásobením (**A**-2) postupně $\mathbf{w}_1$ a $\mathbf{w}_2$ obdržíme:

$$x_1(\mathbf{w}_1\mathbf{w}_1)+x_2(\mathbf{w}_2\mathbf{w}_1)=\mathbf{x}\mathbf{w}_1,$$
$$x_1(\mathbf{w}_1\mathbf{w}_2)+x_2(\mathbf{w}_2\mathbf{w}_2)=\mathbf{x}\mathbf{w}_2.$$

Po dosazení ze zadání dostáváme:

$$5x_1+3x_2=11$$
$$3x_1+3x_2=\ 9.$$

Tato soustava má jediné řešení

$$x_1=1,\quad x_2=2,$$

což po dosazení do (**A**-1) dává:

$$\{\mathbf{x}^*\}_{\mathcal{B}}=(1,2,0)+2(1,1,1)=(3,4,2).$$

Pro perpendikulár platí $\mathbf{x}^\perp=\mathbf{x}-\mathbf{x}^*$, a tedy

$$\{x^{\perp}\}_{\mathcal{B}}=(5,3,1)-(3,4,2)=(2,-1,-1).$$

4.2 Odchylka vektoru od podprostoru

Odchylku vektoru od podprostoru zavedeme přirozeným způsobem takto:

9. Definice Buď $W \subseteq\subseteq V$, $\mathbf{x}$ vektor z V a nechť $\mathbf{x}^*$ je kolmý průmět vektoru $\mathbf{x}$ do podprostoru W. Pak *odchylkou vektoru* $\mathbf{x}$ *od podprostoru* W rozumíme číslo označované $\sphericalangle(\mathbf{x},W)$ a definované vztahem

$$\boxed{\sphericalangle(\mathbf{x},W)=\sphericalangle(\mathbf{x},\mathbf{x}^*).}$$

Zjistěme nyní, jakých hodnot může odchylka $\mathbf{x}$ od W nabývat[10]).

- pro $\mathbf{x}=\mathbf{o}$ je $\sphericalangle(\mathbf{x},\mathbf{y})=\frac{1}{2}\pi$ pro libovolný $\mathbf{y}\in V$, a tudíž $\sphericalangle(\mathbf{x},W)=\frac{1}{2}\pi$.
- pro $\mathbf{x}^*=\mathbf{o}$ analogicky obdržíme, že $\sphericalangle(\mathbf{x},W)=\frac{1}{2}\pi$.
- nechť $\mathbf{x}\neq\mathbf{o}\neq\mathbf{x}^*$. Pro $\cos\sphericalangle(\mathbf{x},\mathbf{x}^*)$ můžeme psát:

$$\cos\sphericalangle(\mathbf{x},\mathbf{x}^*)=\frac{\mathbf{x}\mathbf{x}^*}{\|\mathbf{x}\|\ \|\mathbf{x}^*\|},$$

uvážíme-li (1-1), obdržíme

$$\mathbf{x}\mathbf{x}^*=(\mathbf{x}^*+\mathbf{x}^{\perp})\mathbf{x}^*=\mathbf{x}^*\mathbf{x}^*+\mathbf{x}^{\perp}\mathbf{x}^*=\mathbf{x}^*\mathbf{x}^*,\ \text{neboť}\ \mathbf{x}^{\perp}\mathbf{x}^*=0\ \text{(proč?)} \qquad (10\text{-}1)$$

a pro $\cos\sphericalangle(\mathbf{x},\mathbf{x}^*)$ tedy dostáváme:

$$\cos\sphericalangle(\mathbf{x},\mathbf{x}^*)=\frac{\mathbf{x}^*\mathbf{x}^*}{\|\mathbf{x}\|\ \|\mathbf{x}^*\|}=\frac{\|\mathbf{x}^*\|^2}{\|\mathbf{x}\|\ \|\mathbf{x}^*\|}=\frac{\|\mathbf{x}^*\|}{\|\mathbf{x}\|}, \qquad (10\text{-}2)$$

odkud plyne, že $\cos\sphericalangle(\mathbf{x},\mathbf{x}^*)>0$ a jelikož obecně je odchylka dvou vektorů z intervalu $\langle 0,\pi\rangle$, zjišťujeme, že $\sphericalangle(\mathbf{x},W)=\sphericalangle(\mathbf{x},\mathbf{x}^*)\in\langle 0,\frac{1}{2}\pi\rangle$.

Nalezené poznatky shrneme do následující věty:

10. Věta *Buď* $W \subseteq\subseteq V$, $\mathbf{x}$ *vektor z* V. *Pak platí:*

---

[10]) na aplikaci definice 9, jakož i 1.11 se nadále nebudeme explicitně odvolávat

$$\boxed{\sphericalangle(\mathbf{x},W)\in\langle 0,\tfrac{1}{2}\pi\rangle.}$$

Rovněž jsme odvodili[11]):

11.Věta *Buď* $W\subseteq V$, $\mathbf{x}$ *vektor z* V. *Pak platí:*

$$\boxed{\|\mathbf{x}^*\| = \|\mathbf{x}\|\cos\sphericalangle(\mathbf{x},W).}$$

Nyní vyšetřeme nutné a postačující podmínky pro to, aby:

$$\text{(i) } \sphericalangle(\mathbf{x},W)=\tfrac{1}{2}\pi, \quad \text{(ii) } \sphericalangle(\mathbf{x},W)=0.$$

Rozložme vektor $\mathbf{x}$ dle (1-1):

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}^*+\mathbf{x}^{\perp}, \quad \mathbf{x}^*\in W \wedge \mathbf{x}^{\perp}\in W^{\perp}.$$

Pak můžeme psát:

Ad (i)

$$\sphericalangle(\mathbf{x},W)=\tfrac{1}{2}\pi \Leftrightarrow \sphericalangle(\mathbf{x},\mathbf{x}^*)=\tfrac{1}{2}\pi \Leftrightarrow \mathbf{x}\mathbf{x}^*=0 \overset{(a)}{\Leftrightarrow} \mathbf{x}^*\mathbf{x}^*=0 \Leftrightarrow \|\mathbf{x}^*\|=0 \overset{(b)}{\Leftrightarrow} \mathbf{x}^*=\mathbf{o} \overset{(c)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x}\in W^{\perp} \Leftrightarrow \mathbf{x}\perp W,$$

kde v implikaci (a) jsme užili (10-1), v implikaci (b) větu 1.10 a v implikaci (c) větu 4.

Ad (ii)

Intuitivně očekáváme pro $\mathbf{x}\neq\mathbf{o}$[12]) platnost ekvivalence

$$\sphericalangle(\mathbf{x},W)=0 \Leftrightarrow \mathbf{x}\in W.$$

neboli

$$\sphericalangle(\mathbf{x},\mathbf{x}^*)=0 \Leftrightarrow \mathbf{x}\in W.$$

Proto nadále předpokládejme $\mathbf{x}\neq\mathbf{o}$. Za tohoto předpokladu obě strany druhé ekvivalence vylučují případ $\mathbf{x}^*=\mathbf{o}$ (zdůvodněte!).

Můžeme proto dále psát[13]):

$$\sphericalangle(\mathbf{x},\mathbf{x}^*)=0 \Leftrightarrow \cos\sphericalangle(\mathbf{x},\mathbf{x}^*)=1 \overset{(a)}{\Leftrightarrow} \mathbf{x}\mathbf{x}^*=\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{x}^*\| \overset{(b)}{\Leftrightarrow} \|\mathbf{x}^*\|^2=\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{x}^*\| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|\mathbf{x}^*\|=\|\mathbf{x}\| \overset{(c)}{\Leftrightarrow} \|\mathbf{x}^{\perp}\|=0 \overset{(d)}{\Leftrightarrow} \mathbf{x}^{\perp}=\mathbf{o} \overset{(e)}{\Leftrightarrow} \mathbf{x}\in W.$$

---

[11]) odvození bylo provedeno pro $\mathbf{x}\neq\mathbf{o}$, relace v násl. větě však platí i pro $\mathbf{x}=\mathbf{o}$ (proč?)

[12]) pro $\mathbf{x}=\mathbf{o}$ ekvivalence jistě neplatí - viz (i).

[13]) uvažujeme tedy $\mathbf{x}\neq\mathbf{o}\neq\mathbf{x}^*$, tudíž i $\|\mathbf{x}\|\neq 0\neq\|\mathbf{x}^*\|$

Přitom v ekvivalencích (a),...,(e) bylo po řadě využito:

(a): definice 1.11,

(b): dle (10-1) $\mathbf{x}\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*\mathbf{x}^*$, což je rovno $\|\mathbf{x}^*\|^2$,

(c): věta 5,

(d): věta 1.10,

(e): věta 4.

Získané poznatky vyjadřuje věta následující:

12. Věta *Buď* $\mathbf{W} \subseteq\subseteq \mathbf{V}$, $\mathbf{x}$ *vektor z* $\mathbf{V}$. *Pak platí:*

(1) $\sphericalangle(\mathbf{x},\mathbf{W}) = \frac{1}{2}\pi$, *právě když* $\mathbf{x} \perp \mathbf{W}$,

(2) $\sphericalangle(\mathbf{x},\mathbf{W}) = 0$, *právě když* $\mathbf{x} \in \mathbf{W}$ *a* $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$.

Zabývejme se nyní stanovením odchylky vektoru od podprostoru. Uvážíme-li, že s ohledem na (10-2)[14]) pro odchylku vektoru $\mathbf{x} \in \mathbf{V}, \mathbf{x} \neq \mathbf{o}$, od $\mathbf{W} \subseteq\subseteq \mathbf{V}$ platí:

$$\sphericalangle(\mathbf{x},\mathbf{W}) = \arccos \frac{\|\mathbf{x}^*\|}{\|\mathbf{x}\|},$$

využijeme výsledků předchozí podkapitoly - zejména vět 5,6 a 7. Užitím 5 dostáváme:

$$\cos^2\sphericalangle(\mathbf{x},\mathbf{W}) = \frac{\|\mathbf{x}^*\|^2}{\|\mathbf{x}\|^2} = \frac{\|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{x}^\perp\|^2}{\|\mathbf{x}\|^2} = 1 - \frac{\|\mathbf{x}^\perp\|^2}{\|\mathbf{x}\|^2},$$

odkud plyne (proč?):

$$\sin^2\sphericalangle(\mathbf{x},\mathbf{W}) = \frac{\|\mathbf{x}^\perp\|^2}{\|\mathbf{x}\|^2},$$

a neboť $\sphericalangle(\mathbf{x},\mathbf{W}) \in \langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle$[15]), můžeme psát

$$\sin\sphericalangle(\mathbf{x},\mathbf{W}) = \sqrt{\sin^2\sphericalangle(\mathbf{x},\mathbf{W})} = \frac{\|\mathbf{x}^\perp\|}{\|\mathbf{x}\|},$$

a proto, vyjádříme-li $\|\mathbf{x}^\perp\|$ pomocí věty 6 a následně 7, můžeme pro případ vektorové nadroviny a obecného podprostoru tvrdit:

13. Věta *Buď* $\mathbf{N} = \mathcal{N}(\mathbf{n})$ *vektorová nadrovina ve* $\mathbf{V}$, $\mathbf{x}$ *vektor z* $\mathbf{V}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$. *Pak platí:*

---

[14]) tato relace byla odvozena pro $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{o}$, avšak platí i pro $\mathbf{x}^* = \mathbf{o}$.

[15]) tj. $\sin\sphericalangle(\mathbf{x},\mathbf{W}) > 0$

$$\sphericalangle(\mathbf{x},\mathbf{N}) = \arcsin\frac{|\mathbf{x}.\mathbf{n}|}{\|\mathbf{x}\|\ \|\mathbf{n}\|}.$$

14. Věta *Buď* $W \subseteq\subseteq V$, $\langle u_1, u_2, \ldots, u_k\rangle$ *báze* W *a* $\mathbf{x}$ *vektor z* V, $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$. *Pak platí:*

$$\sphericalangle(\mathbf{x},W) = \arcsin \frac{\sqrt{G(u_1, u_2, \ldots, u_k, \mathbf{x})}}{\|\mathbf{x}\| \sqrt{G(u_1, u_2, \ldots, u_k)}}.$$

Příklad B

V euklidovském vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ je dán vektor $\mathbf{x}$ a podprostor $W=[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2]$. Stanovte odchylku vektoru $\mathbf{x}$ od podprostoru W, jestliže vzhledem k ortonormální bázi $\mathcal{B}$ je dáno:

$$\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}}=(5,3,1),$$
$$\{\mathbf{w}_1\}_{\mathcal{B}}=(1,2,0),\quad \{\mathbf{w}_2\}_{\mathcal{B}}=(1,1,1).$$

Řešení

Dle definice 9 je dotyčná odchylka definována relací

$$\sphericalangle(\mathbf{x},W)=\sphericalangle(\mathbf{x},\mathbf{x}^*),$$

kde $\mathbf{x}^*$ je kolmý průmět vektoru $\mathbf{x}$ do W.

Jak jsme zjistili v příkladu **A**, platí

$$\{\mathbf{x}^*\}_{\mathcal{B}}=(3,4,2),$$

a tedy

$$\sphericalangle(\mathbf{x},W)=\sphericalangle(\mathbf{x},\mathbf{x}^*)=\arccos\frac{(5,3,1)(3,4,2)}{\|(5,3,1)\|\|(3,4,2)\|} = \arccos\frac{29}{\sqrt{1015}}.$$

Vzhledem k tomu, že v příkladu 2.**E** bylo zjištěno, že W je vektorovou nadrovinou o normálovém vektoru $\mathbf{n}$, $\{\mathbf{n}\}_{\mathcal{B}}=(-2,1,1)$, můžeme odchylku vypočíst rovněž užitím věty 13:

$$\sphericalangle(\mathbf{x},W)=\arcsin\frac{|\mathbf{x}.\mathbf{n}|}{\|\mathbf{x}\|\ \|\mathbf{n}\|}=\arcsin\frac{|(5,3,1)(-2,1,1)|}{\|(5,3,1)\|\|(-2,1,1)\|} =$$

$$=\arcsin\frac{6}{\sqrt{210}},$$

což je týž výsledek jako výše (přesvědčte se o tom).

4.3 Vzdálenost vektoru od podprostoru

Pro zavedení vzdálenosti vektoru od podprostoru intuitivně očekáváme užití kolmého průmětu tohoto vektoru do daného podprostoru.

Uvažujme libovolný podprostor $\mathbf{W}\subseteq\mathbf{V}$ a vektor $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$. Zvolme dále libovolný vektor $\mathbf{y}\in\mathbf{W}$ a porovnejme vzdálenosti $\rho(\mathbf{x},\mathbf{x}^*)$ a $\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})$: Pro vektor $\mathbf{y}-\mathbf{x}$ lze psát:

$$\mathbf{y}-\mathbf{x}=(\mathbf{y}-\mathbf{x}^*)+(\mathbf{x}^*-\mathbf{x}),$$

a pro jeho normu pak:

$$\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|^2=(\mathbf{y}-\mathbf{x}^*)(\mathbf{y}-\mathbf{x}^*)+2\underline{((\mathbf{y}-\mathbf{x}^*)(\mathbf{x}^*-\mathbf{x}))}+(\mathbf{x}^*-\mathbf{x})(\mathbf{x}^*-\mathbf{x}),$$

což, uvážíme-li, že $\mathbf{y},\mathbf{x}^*\in\mathbf{W}$ a $(\mathbf{x}^*-\mathbf{x})=-\mathbf{x}^\perp\in\mathbf{W}^\perp$, a tudíž je podtržený výraz nulový, lze dále psát:

$$\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|^2=\|\mathbf{y}-\mathbf{x}^*\|^2+\|\mathbf{x}^*-\mathbf{x}\|^2,$$

neboli $$\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})^2=\rho(\mathbf{x}^*,\mathbf{y})^2+\rho(\mathbf{x},\mathbf{x}^*)^2.$$

Odtud vyplývá, že $$\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})^2\geq\rho(\mathbf{x},\mathbf{x}^*)^2, \qquad (15\text{-}1)$$

přičemž rovnost nastává jen pro $\mathbf{y}=\mathbf{x}^*$ (proč?).

Uvážíme-li, že vzdálenost dvou vektorů je číslo nezáporné, vyplývá z (15-1):

$$\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})\geq\rho(\mathbf{x},\mathbf{x}^*),$$

kde rovnost nastává jen pro $\mathbf{y}=\mathbf{x}^*$.

Dokázali jsme platnost tvrzení následujícího:

15. Věta *Buďte* $\mathbf{W}\subseteq\mathbf{V}$ *a* $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$. *Pak pro každý vektor* $\mathbf{y}\in\mathbf{W}$ *platí:*

$$\boxed{\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})\geq\rho(\mathbf{x},\mathbf{x}^*),}$$

přičemž rovnost nastává jen v případě $\mathbf{y}=\mathbf{x}^*$.

Přirozeným způsobem tedy definujeme vzdálenost vektoru od podprostoru euklidovského vektorového prostoru[16]):

16. Definice Buď $\mathbf{W}\subseteq\mathbf{V}$, $\mathbf{x}$ vektor z $\mathbf{V}$ a nechť $\mathbf{x}^*$ je kolmý průmět vektoru $\mathbf{x}$ do podprostoru $\mathbf{W}$. Pak *vzdáleností vektoru* $\mathbf{x}$ *od podprostoru* $\mathbf{W}$ *rozumíme číslo označované* $\rho(\mathbf{x},\mathbf{W})$ a definované vztahem

$$\boxed{\rho(\mathbf{x},\mathbf{W})=\rho(\mathbf{x},\mathbf{x}^*).}$$

Z věty 15 plyne bezprostředně:

17. Důsledek *Buďte* $\mathbf{W}\subseteq\mathbf{V}$ *a* $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$. *Pak platí:*

$$\boxed{\rho(\mathbf{x},\mathbf{W})=\min_{\mathbf{y}\in\mathbf{W}}\{\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})\}.}$$

Vzdálenost vektoru od podprostoru je tedy definována jako *norma příslušného perpendikuláru.* Uvážíme-li platnost vět 4, 6 a 7 dostáváme postupně následující tři věty:

18. Věta *Buď* $\mathbf{W}\subseteq\mathbf{V}$, $\mathbf{x}$ *vektor z* $\mathbf{V}$. *Pak platí:*

$$\boxed{\begin{gathered}\mathbf{x}\in\mathbf{W} \Leftrightarrow \rho(\mathbf{x},\mathbf{W})=0,\\ \mathbf{x}\perp\mathbf{W} \Leftrightarrow \rho(\mathbf{x},\mathbf{W})=\|\mathbf{x}\|.\end{gathered}}$$

---

[16]) Tato definice je evidentně specializací obecné definice vzdálenosti bodu x od podmnožiny W metrického prostoru:

$$\rho(x,W)=\inf_{y\in W}\{\rho(x,y)\}.$$

19. Věta *Buď* $\mathbf{N}=\mathcal{N}(\mathbf{n})$ *vektorová nadrovina ve* **V**, **x** *vektor z* **V**. *Pak platí:*

$$\boxed{\rho(\mathbf{x},\mathbf{N}) = \frac{|\mathbf{x}.\mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}.}$$

20. Věta *Buď* $\mathbf{W}\subseteq\mathbf{V}$, $\langle \mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_k\rangle$ *báze* **W** *a* **x** *vektor z* **V**. *Pak platí:*

$$\boxed{\rho(\mathbf{x},\mathbf{W}) = \frac{\sqrt{G(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_k,\mathbf{x})}}{\sqrt{G(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_k)}}.}$$

Příklad C

V euklidovském vektorovém prostoru **V** je dán vektor **x** a podprostor $\mathbf{W}=[\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2]$. Stanovte vzdálenost vektoru **x** od podprostoru **W**, jestliže vzhledem k ortonormální bázi $\mathcal{B}$ je dáno:

$$\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}}=(5,3,1),$$
$$\{\mathbf{w}_1\}_{\mathcal{B}}=(1,2,0),\ \{\mathbf{w}_2\}_{\mathcal{B}}=(1,1,1).$$

Řešení

V souladu s definicí 16 můžeme psát:

$$\rho(\mathbf{x},\mathbf{W})=\rho(\mathbf{x},\mathbf{x}^*)=\|\mathbf{x}^\perp\|,$$

kde $\mathbf{x}^*$ je kolmý průmět vektoru **x** do **W** a $\mathbf{x}^\perp$ perpendikulár téhož vektoru na podprostor **W**.

Jak jsme zjistili v příkladu **A**, platí

$$\{\mathbf{x}^\perp\}_{\mathcal{B}}=(2,-1,-1),$$

a tedy

$$\rho(\mathbf{x},\mathbf{W})=\|(2,-1,-1)\|=\sqrt{6}.$$

Vzhledem k tomu, že v příkladu 2.**E** bylo zjištěno, že **W** je vektorovou nadrovinou o normálovém vektoru **n**, $\{\mathbf{n}\}_{\mathcal{B}}=(-2,1,1)$, můžeme vzdálenost vypočíst rovněž užitím věty 19:

$$\rho(\mathbf{x},\mathbf{W})=\frac{|\mathbf{x}.\mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}=\frac{|(5,3,1)(-2,1,1)|}{\|(-2,1,1)\|}=\frac{|-6|}{\sqrt{6}}=\sqrt{6},$$

což je týž výsledek jako výše.

4.3.1 Metoda nejmenších čtverců

Tato metoda je aplikací věty 15 v teorii řešení soustav lineárních rovnic.

Uvažujme soustavu lineárních rovnic danou maticí $\mathbf{A}=(a_{ij})$, $\mathbf{A}\in\mathcal{M}_{rn}(\mathbb{R})$, a sloupcem pravých stran $\mathbf{b}\in\mathcal{M}_{r1}(\mathbb{R})$[17], o neznámých $(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, neboli maticově

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{b}. \tag{21-1}$$

Zabývejme se situací, kdy soustava (21-1) není řešitelná - tj. $h(\mathbf{A})\neq h(\mathbf{A}|\mathbf{b})$.

Naším cílem je najít „co nejpřesnější" *přibližné řešení*. Vyjádřeme tento pojem exaktněji.

Považujme $\mathbb{R}^r$ za euklidovský vektorový prostor se standardním skalárním součinem.

Označíme-li $\mathbf{a}^{(1)}$, $\mathbf{a}^{(2)},\dots,\mathbf{a}^{(n)}\in\mathbb{R}^r$ po řadě sloupce matice $\mathbf{A}$, budeme hledat taková $x_1,x_2,\dots,x_n\in\mathbb{R}$, aby vektor

$$\mathbf{x}=x_1\mathbf{a}^{(1)}+\ x_2\mathbf{a}^{(2)}+\dots+x_n\mathbf{a}^{(n)}$$

měl od vektoru $\mathbf{b}$ *nejmenší možnou vzdálenost*. Protože vektor $\mathbf{x}$ náleží sloupcovému podprostoru $\mathbf{W}_\mathbf{A}$ matice $\mathbf{A}$, musí být dle věty 15 roven **kolmému průmětu** $\mathbf{b}^*$ vektoru $\mathbf{b}$ do $\mathbf{W}_\mathbf{A}$. To značí, že hledáme $x_1,x_2,\dots,x_n\in\mathbb{R}$ tak, aby

$$x_1\mathbf{a}^{(1)}+\ x_2\mathbf{a}^{(2)}+\dots+x_n\mathbf{a}^{(n)}=\mathbf{b}^*,$$

neboli řešíme namísto (21-1) *náhradní soustavu* lineárních rovnic[18]

$$\boxed{\mathbf{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{b}^*.} \tag{21-2}$$

Tato metoda se nazývá *metoda nejmenších čtverců*[19].

---

[17]) vzhledem k izomorfizmu aritmetických vektorových prostorů $\mathcal{M}_{r1}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^r$ budeme v této podkapitole nadále sloupcové aritmetické vektory považovat za prvky z $\mathbb{R}^r$.

[18]) proč je tato soustava řešitelná?

[19]) název vychází z toho, že je minimalizován součet čtverců roz-

21. Věta *Buďte* $\mathbf{A}\in\mathcal{M}_{rn}(\mathbb{R})$ *a* $\mathbf{b}\in\mathcal{M}_{r1}(\mathbb{R})$. *Je-li* $\mathbf{b}^*$ *kolmým průmětem vektoru* $\mathbf{b}$ *do sloupcového podprostoru matice* $\mathbf{A}$ *a* $x_1,x_2,\dots,x_n\in\mathbb{R}$ *vyhovují soustavě lineárních rovnic* (21-2), *pak pro každé* $y_1, y_2,\dots,y_n\in\mathbb{R}$ *platí:*

$$\left\|\mathbf{A}\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}-\mathbf{b}\right\| \geq \left\|\mathbf{A}\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}-\mathbf{b}\right\|,$$

přičemž rovnost nastává, právě když $y_1,y_2,\dots,y_n\in\mathbb{R}$ *vyhovují soustavě lineárních rovnic* (21-2).

Příklad D

Určitý přírodní děj je popsán funkční závislostí $y=f(x)$, o níž je známo, že je lineární.

Při experimentu byly zjištěny následující hodnoty:

x	0	1	2
$f(x)$	1	5	3

Metodou nejmenších čtverců nalezněte parametry ve funkčním předpise uvedené závislosti, aby co nejlépe vystihoval provedené měření.

Řešení

Teoreticky je uvedený děj popsán lineární funkcí:

$$y=ax+b.$$

Naším cílem je zjistit parametry a,b. Dosazením hodnot z tabulky obdržíme pro a,b následující soustavu lineárních rovnic:

$$b=1$$

$$a+b=5$$

$$2a+b=3,$$

kterou můžeme rovněž zapsat maticově:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5\\ 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{array}\right).$$

---

dílů příslušných souřadnic vektoru $\mathbf{x}$ a vektoru $\mathbf{b}$ (viz kartézská formule pro metriku)

Snadno zjistíme, že tato soustava není řešitelná, a budeme aplikovat metodu nejmenších čtverců, kdy sloupec pravých stran, tj. aritmetický vektor $\mathbf{b}=(5,3,1)^T$ nahradíme jeho kolmým průmětem $\mathbf{b}^*$ do podprostoru sloupců levých stran $\mathbf{W}=[(1,2,0)^T,(1,1,1)^T]$.
Známým postupem (srv. příklad **A**) zjistíme, že

$$\mathbf{b}^*=(3,4,2)^T,$$

a tedy budeme řešit následující (náhradní) soustavu o neznámých a,b:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Obvyklým postupem zjistíme, že tato soutava má jediné řešení:

$$(a,b)=(1,2),$$

což znamená, že aproximace lineární závislosti získaná metodou nejmenších čtverců zní:

$$\underline{y=x+2.}$$

4.4 Některé geometrické aplikace vzdálenosti a odchylky vektoru od podprostoru

Nechť máme nadále dán euklidovský prostor $\mathcal{E}$ se zaměřením $\mathbf{V}$.[20])

(i) uvažujme podprostor $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{E}$ daný bodem A a zaměřením $\mathbf{W}$[21]).
Nechť je zvolen libovolný bod $B\in\mathcal{E}$.
Vzdálenost bodu B od podprostoru $\mathcal{M}$ značíme $\rho(B,\mathcal{M})$ a definuje se jako vzdálenost bodu B od jeho kolmého průmětu B^* do podprostoru $\mathcal{M}$[22]). tj. $\rho(B,\mathcal{M})=\rho(B,B^*)$.

---

[20]) podrobněji - viz např. [10].

[21]) tuto skutečnost obvykle zapisujeme $\mathcal{M}=\{A,\mathbf{W}\}$

[22]) což je jediný bod s vlastnostmi:

Dle podkapitoly 4.3 máme definovánu (v prostoru **V**) vzdálenost $\rho((B-A),\mathbf{W})$[23]) vektoru (B-A) od podprostoru **W**. Porovnejme ji s $\rho(B,\mathcal{M})$.

Můžeme psát: $B-A=(B-B^*)+(B^*-A)$,

kde $A,B^*\in\mathcal{M}$, a tedy $B^*-A\in\mathbf{W}$, a $B-B^*\in\mathbf{W}^{\perp}$,

odkud plyne, že B^*-A je kolmým průmětem vektoru B-A do **W**, což značí, že $\rho(B,B^*)=\|B^*-B\|$ je rovna normě perpendikuláru vektoru B-A, a proto dle definice 16 je $\|B^*-B\|=\rho((B-A),\mathbf{W})$. Zjišťujeme tedy:

$$\rho(B,\mathcal{M})=\rho((B-A),\mathbf{W}).$$

Platí tedy:

22. Věta *Buď $\mathcal{M}$ podprostor euklidovského prostoru $\mathcal{E}$ určený bodem A a zaměřením **W**. Pak pro každý bod $B\in\mathcal{E}$ platí:*

$$\boxed{\rho(B,\mathcal{M})=\rho((B-A),\mathbf{W}).}$$

23. Důsledek *Buď $\mathcal{M}$ podprostor euklidovského prostoru $\mathcal{E}$ určený bodem A a nechť $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_k$ tvoří bázi jeho zaměření. Pak pro každý bod $B\in\mathcal{E}$ platí:*

$$\boxed{\rho(B,\mathcal{M}) = \frac{\sqrt{G(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_k,B-A)}}{\sqrt{G(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_k)}}.}$$

(a) $B^*\in\mathcal{M}$

(b) $(B-B^*)\perp\mathbf{W}$

[23]) dovolili jsme si stejným symbolem ρ označit dvě různé metriky:

- metriku v euklidovském vektorovém prostoru **V** (tj. zobrazení $\mathbf{V}\times\mathbf{V}\to\mathbb{R}$) a
- metriku v euklidovském prostoru $\mathcal{E}$ (tj. zobrazení $\mathcal{E}\times\mathcal{E}\to\mathbb{R}$),

k nedorozumění však dojít nemůže.

(ii) uvažujme podprostor $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{E}$ o zaměření $\mathbf{W}$. Nechť je zvolena libovolná přímka p se směrovým vektorem $\mathbf{s}$.
Odchylku přímky p od podprostoru $\mathcal{M}$ značíme $\sphericalangle(p,\mathcal{M})$ a definujeme ji jako odchylku přímky p od jejího kolmého průmětu p^* do podrostoru $\mathcal{M}$[24]), tj. $\sphericalangle(p,\mathcal{M})=\sphericalangle(p,p^*)$.

Dle podkapitoly 4.2 máme definovánu (v prostoru $\mathbf{V}$) odchylku $\sphericalangle(\mathbf{s},\mathbf{W})$[25]) vektoru $\mathbf{s}$ od podprostoru $\mathbf{W}$. Porovnejme ji s $\sphericalangle(p,\mathcal{M})$:
Zvolme na přímce p body A,B tak, aby B-A=$\mathbf{s}$.
Můžeme psát: $B-A=(B^*-A^*)+(B-B^*)+(A^*-A)$,
kde $A^*,B^*\in\mathcal{M}$, a tedy $B^*-A^*\in\mathbf{W}$. Dále $B-B^*,A-A^*\in\mathbf{W}^{\perp}$[26]), takže $((B-B^*)+$ $+(A^*-A))\in\mathbf{W}^{\perp}$.
Odtud plyne, že B^*-A^* je kolmým průmětem vektoru $\mathbf{s}$=B-A do $\mathbf{W}$, což v souladu s definicí 9 značí $\sphericalangle(\mathbf{s},\mathbf{W})=\sphericalangle(B-A,B^*-A^*)$ a neboť B^*-A^* je směrovým vektorem přímky p^*, platí dále $\sphericalangle(B-A,B^*-A^*)=\sphericalangle(p,p^*)$, což je rovno $\sphericalangle(p,\mathcal{M})$.
Souhrnně zjišťujeme, že $\sphericalangle(\mathbf{s},\mathbf{W})=\sphericalangle(p,\mathcal{M})$.

Platí tedy:

24. Věta *Buďte $\mathcal{M}$ podprostor euklidovského prostoru $\mathcal{E}$ o zaměření $\mathbf{W}$ a p přímka v euklidovském prostoru $\mathcal{E}$ o směrovém vektoru $\mathbf{s}$. Pak platí:*

$$\boxed{\sphericalangle(\mathbf{s},\mathbf{W})=\sphericalangle(p,\mathcal{M}).}$$

25. Důsledek *Buď $\mathcal{M}$ podprostor euklidovského prostoru $\mathcal{E}$ a nechť $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_k$ tvoří bázi jeho zaměření. Buď p přímka v euklidovském prostoru $\mathcal{E}$ o směrovém vektoru $\mathbf{s}$. Pak platí:*

---

[24]) přitom platí, že kolmým průmětem je bod (v případě $p\perp\mathcal{M}$, kdy klademe $\sphericalangle(p,\mathcal{M})=\frac{1}{2}\pi$), nebo přímka.

[25]) opět označujeme - bez rizika nedorozumění - stejným symbolem $\sphericalangle$ úhel vektorů ve $\mathbf{V}$ a odchylku podprostorů v $\mathcal{E}$.

[26]) vlastnosti kolmého průmětu bodu - viz odstavec (i).

$$\boxed{\sphericalangle(p,\mathcal{M}) = \arcsin \frac{\sqrt{G(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_k,\mathbf{s})}}{\|\mathbf{s}\| \sqrt{G(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_k)}}\,.}$$

II. HOMOMORFIZMY VEKTOROVÝCH PROSTORŮ

1. Homomorfizmus a jeho základní vlastnosti

1. Definice Buďte $(\mathbf{V},+,\mathbb{T},\cdot)$ a $(\mathbf{W},\oplus,\mathbb{T},\odot)$ vektorové prostory. Zobrazení $f:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ se nazývá *homomorfizmus*[1]*) vektorového prostoru* $\mathbf{V}$ *do vektorového prostoru* $\mathbf{W}$, jestliže má následující vlastnosti:

(1) $\forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$: $f(\mathbf{u}+\mathbf{v})=f(\mathbf{u})\oplus f(\mathbf{v})$,

(2) $\forall \mathbf{u}\in\mathbf{V}, \forall t\in\mathbb{T}$: $f(t\cdot\mathbf{u})=t\odot f(\mathbf{u})$.

2. Úmluva (pro celou část II.)

● Nebude-li řečeno jinak, budou všechny vektorové prostory uvažovány nad týmž tělesem skalárů $\mathbb{T}$.

● Protože nehrozí nebezpečí nedorozumění, budeme zpravidla sčítání vektorů ve všech vektorových prostorech označovat týmž symbolem „+" a násobení vektoru skalárem pak symbolem „·", nebudeme-li znak „·" zcela vypouštět.

● Všechny vektorové prostory budeme nadále označovat jen symbolem příslušné množiny vektorů - tj. např. namísto $(\mathbf{V},+,\mathbb{T},\cdot)$ budeme psát jen $\mathbf{V}$.

---

[1]) užívá se též pojmu *lineární zobrazení.*

K tomu pro orientaci čtenáře uveďme, že je-li $\mathbf{V}$ vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{T}$ a $\mathbf{W}$ vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$, pak *semilineárním zobrazením* uvedených vektorovývch prostorů se nazývá dvojice (f,φ), kde

(i) $\varphi:\mathbb{T}\to\mathbb{F}$ je izomorfizmus těles,

(ii) $\forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$: $f(\mathbf{u}+\mathbf{v})=f(\mathbf{u})\oplus f(\mathbf{v})$,

(iii) $\forall \mathbf{u}\in\mathbf{V}, \forall t\in\mathbb{T}$: $f(t\cdot\mathbf{u})=\varphi(t)\odot f(\mathbf{u})$.

Tímto pojmem se zde však zabývat nebudeme.

3. Označení Buďte **V**, **W** vektorové prostory. Množinu všech homomorfizmů **V** do **W** budeme označovat $\mathcal{Hom}(\mathbf{V},\mathbf{W})$.

Příklad A

Buďte $\mathbf{V}_3$, $\mathbf{W}_3$ vektorové prostory a uvažujme zobrazení $f:\mathbf{V}_3\to\mathbf{W}_3$ daná vzhledem ke zvoleným bázím $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ předpisem:

$$\forall \mathbf{x}\in\mathbf{V}_3:\ \{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}}=(x_1,x_2,x_3) \longmapsto \{f(\mathbf{x})\}_{\mathcal{C}}=(y_1,y_2,y_3),$$

kde

1. $$\begin{aligned} y_1&= x_1\\ y_2&=2x_1+ x_2\\ y_3&=3x_1 \quad - x_3\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} y_1&= x_1^2\\ y_2&=2x_1+ x_2\\ y_3&=3x_1 \quad - x_3\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} y_1&= x_1\\ y_2&=2x_1+ x_2+5\\ y_3&=3x_1 \quad - x_3\end{aligned}$$

Je zobrazení f v jednotlivých případech homomorfizmem?

Řešení

Ve všech případech ověříme splnění vlastností (1) a (2) definice 1:[2])

Ad 1.

- buďte $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$, $\{\mathbf{u}\}=(u_1,u_2,u_3)$, $\{\mathbf{v}\}=(v_1,v_2,v_3)$. Pak dle definičního předpisu pro zobrazení f dostáváme:

$$\{f(\mathbf{u})\}=(u_1,2u_1+u_2,3u_1-u_3),\quad \{f(\mathbf{v})\}=(v_1,2v_1+v_2,3v_1-v_3),$$

a tedy

$$\{f(\mathbf{u})\}+\{f(\mathbf{v})\}=(u_1+v_1,2u_1+u_2+2v_1+v_2,3u_1-u_3+3v_1-v_3).$$

Jelikož $\{\mathbf{u}+\mathbf{v}\}=(u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3)$, plyne z definice zobr. f:

$$\{f(\mathbf{u}+\mathbf{v})\}=(u_1+v_1,2(u_1+v_1)+u_2+v_2,3(u_1+v_1)-(u_3+v_3)),$$

což je evidentně rovno $\{f(\mathbf{u})\}+\{f(\mathbf{v})\}$,

a tedy $$f(\mathbf{u}+\mathbf{v})=f(\mathbf{u})+f(\mathbf{v}),$$

---

[2]) znaky báze budeme u symbolu souřadnic {.} vypouštět

což značí splnění podmínky (1) definice 1.

• zvolme $\mathbf{u}\in\mathbf{V}$, $\{\mathbf{u}\}=(u_1,u_2,u_3)$, a $t\in\mathbb{T}$. Pak

$$\{f(\mathbf{u})\}=(u_1,2u_1+u_2,3u_1-u_3),$$

a tedy

$$t\{f(\mathbf{u})\}=t(u_1,2u_1+u_2,3u_1-u_3)=(tu_1,t(2u_1+u_2),t(3u_1-u_3)).$$

Jelikož $\{t\mathbf{u}\}=(tu_1,tu_2,tu_3)$, plyne z definice zobr. f:

$$\{f(t\mathbf{u})\}=(tu_1,2(tu_1)+tu_2,3(tu_1)-tu_3),$$

což je evidentně rovno $t\{f(\mathbf{u})\}$,

a tedy $$f(t\mathbf{u})=tf(\mathbf{u}),$$

což značí splnění podmínky (2) definice 1.

Zkoumané zobrazení proto *je homomorfizmem.*

Ad 2.

Protože obecně $(u_1+v_1)^2\neq u_1^2+v_1^2$, není splněna podmínka (1) definice 1 (není ostatně splněna ani (2)-proč?), a tudíž *f není homomorfizmem.*

Ad 3.

Protože obecně $2(tx_1)+(tx_2)+5\neq t(2x_1+x_2+5)$, není splněna podmínka (2) definice 1 (není ostatně splněna ani (1) - proč?), a tudíž *f není homomorfizmem.*

Jak uvidíme dále (důsledek 2.6), je „typ funkčního předpisu“[3]), jímž může být homomorfizmus zadán, jednoznačně určen.

4.Definice Buď $f\in\mathcal{H}om(\mathbf{V},\mathbf{W})$.

(1) jestliže je f injektivní, nazývá se *monomorfizmus* **V** *do* **W**,

(2) jestliže je f surjektivní, nazývá se *epimorfizmus* **V** *na* **W**,

(3) jestliže je f bijektivní, nazývá se *izomorfizmus* **V** *na* **W**,

(4) jestliže je **W=V**, nazývá se f *endomorfizmus vektorového prostoru* **V**,[4])

---

[3]) bude nazván *analytické vyjádření*

[4]) užívá se též názvu *lineární operátor na* **V**. Studiu endomorfizmů (lineárních operátorů) se v tomto textu věnovat nebudeme

(5) jestliže je $\mathbf{W}=\mathbf{V}$ a f je bijektivní, nazývá se *automorfizmus vektorového prostoru* $\mathbf{V}$.

5. Definice Buď $f\in\mathcal{H}om(\mathbf{V},\mathbf{W})$. Pak

(1) *obrazem homomorfizmu* f rozumíme množinu označovanou $\mathrm{Im}f$ a definovanou takto:

$$\boxed{\mathrm{Im}f=\{\mathbf{y}\in\mathbf{W};\ \exists\mathbf{x}\in\mathbf{V}:\ \mathbf{y}=f(\mathbf{x})\},}$$

(2) *jádrem homomorfizmu* f rozumíme množinu označovanou $\mathrm{Ker}f$ a definovanou takto:

$$\boxed{\mathrm{Ker}f=\{\mathbf{x}\in\mathbf{V};\ f(\mathbf{x})=\mathbf{o}\}.}$$

Podle uvedené definice je pro $f\in\mathcal{H}om(\mathbf{V},\mathbf{W})$ $\mathrm{Im}f$ podmnožinou ve $\mathbf{W}$ a $\mathrm{Ker}f$ podmnožinou v $\mathbf{V}$. Naskýtá se otázka, zda se jedná o *podprostory*.

Uvažujme $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathrm{Im}f$. Pak existují $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{V}$ tak, že

$$\mathbf{u}=f(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{v}=f(\mathbf{y}),$$

a tedy $$\mathbf{u}+\mathbf{v}=f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y})\overset{(a)}{=}f(\mathbf{x}+\mathbf{y}),$$

a jelikož $\mathbf{x}+\mathbf{y}\in\mathbf{V}$, dostáváme, že $\mathbf{u}+\mathbf{v}\in\mathrm{Im}f$.

Zvolíme-li dále $t\in\mathbb{T}$, můžeme psát:

$$t\mathbf{u}=tf(\mathbf{x})\overset{(b)}{=}f(t\mathbf{x}),$$

a protože $t\mathbf{x}\in\mathbf{V}$, plyne, že $t\mathbf{u}\in\mathrm{Im}f$.

V rovnostech (a) i (b) jsme využili definičních vlastností homomorfizmu.

Ukázali jsme, že $\mathrm{Im}f$ je podprostorem ve $\mathbf{W}$. Důkaz, že i $\mathrm{Ker}f$ je podprostorem, ponecháme čtenáři.

6. Věta *Buď* $f\in\mathcal{H}om(\mathbf{V},\mathbf{W})$. *Pak:*

(1) $\mathrm{Im}f\subseteq\subseteq\mathbf{W}$,

(2) $\mathrm{Ker}f\subseteq\subseteq\mathbf{V}$.

- viz např. [6], [11]

Příklad B

Buďte $\mathbf{V}_3$, $\mathbf{W}_4$ vektorové prostory a uvažujme zobrazení $f:\mathbf{V}_3 \to \mathbf{W}_4$ dané vzhledem ke zvoleným bázím $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ předpisem:

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{V}_3: \ \{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}}=(x_1,x_2,x_3) \longmapsto \{f(\mathbf{x})\}_{\mathcal{C}}=(y_1,y_2,y_3,y_4),$$

kde

$$\left.\begin{aligned} y_1&=x_1+2x_2-\ x_3 \\ y_2&=x_1+5x_2-5x_3 \\ y_3&=\quad\ \ 3x_2-4x_3 \\ y_4&=x_1+8x_2-9x_3 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(B-1)}$$

Najděte jeho jádro a obraz.

Řešení:

(i) Z definice jádra plyne, že $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$, $\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}}=(x_1,x_2,x_3)$, náleží do $\mathrm{Ker}f$, právě když

$$\begin{aligned} x_1+2x_2-\ x_3&=0 \\ x_1+5x_2-5x_3&=0 \\ 3x_2-4x_3&=0 \\ x_1+8x_2-9x_3&=0. \end{aligned}$$

Standardním způsobem nalezneme řešení této soustavy: $[(-5,4,3)]$. To značí, že

$$\underline{\mathrm{Ker}f=\{\mathbf{x} \in \mathbf{V}, \{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}} \in [(-5,4,3)]\}.}$$

(ii) Z definice obrazu plyne, že $\mathbf{y} \in \mathbf{W}$, $\{\mathbf{y}\}_{\mathcal{C}}=(y_1,y_2,y_3,y_4)$, náleží do $\mathrm{Im}f$, právě když existuje $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$, $\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}}=(x_1,x_2,x_3)$, tak, že vyhovují (B-1), neboli $\mathbf{y} \in \mathrm{Im}f$, právě když je pro (y_1,y_2,y_3,y_4) následující soustava řešitelná (zapíšeme ji maticově):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & y_1 \\ 1 & 5 & -5 & y_2 \\ 0 & 3 & -4 & y_3 \\ 1 & 8 & -9 & y_4 \end{array}\right) \ \cdots \ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & y_1 \\ 0 & 3 & -4 & -y_1+y_2 \\ 0 & 0 & 0 & y_1-y_2+y_3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}y_1+y_3-\frac{1}{2}y_4 \end{array}\right).$$

Dle Frobeniovy věty je tato soustava řešitelná, právě když

$$\begin{aligned} y_1-y_2+y_3 \qquad &=0 \\ \tfrac{1}{2}y_1 \qquad +y_3-\tfrac{1}{2}y_4&=0. \end{aligned}$$

Nalezneme řešení této soustavy: $[(-2,-1,1,0),(1,1,0,1)]$, což značí:

$$\underline{\mathrm{Im}f=\{\mathbf{y} \in \mathbf{W}, \{\mathbf{y}\}_{\mathcal{C}} \in [(-2,-1,1,0),(1,1,0,1)]\}.}$$

Zřejmě každý homomorfizmus $f:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ je surjekcí $\mathbf{V}$ na $\mathrm{Im}f$, a protože dle věty 6 je $\mathrm{Im}f$ vektorový prostor, platí:

7. Věta *Buď $f\in\mathcal{H}om(\mathbf{V},\mathbf{W})$. Pak platí:*

(1) f je epimorfizmem $\mathbf{V}$ na $\mathrm{Im}f$,

(2) je-li f monomorfizmem $\mathbf{V}$ do $\mathbf{W}$, pak je f izomorfizmem $\mathbf{V}$ na $\mathrm{Im}f$.

Nechť f je homomorfizmus $\mathbf{V}$ do $\mathbf{W}$. Uvažujme libovolnou neprázdnou podmnožinu $\mathbf{U}\subseteq\mathbf{V}$. Pak můžeme zkonstruovat restrikci (zúžení)

$$f|\mathbf{U}:\ \mathbf{U}\to\mathbf{W}.$$

Chceme-li se ptát, zda je $f|\mathbf{U}$ homomorfizmem $\mathbf{U}$ do $\mathbf{W}$, musí být $\mathbf{U}$ uzavřeno na sčítání vektorů a na násobení vektoru skalárem (proč?) - musí tedy být *podprostorem.*

Pak je mechanickou záležitostí ověření platnosti věty následující:

8. Věta *Buď $f\in\mathcal{H}om(\mathbf{V},\mathbf{W})$. Pak pro libovolný $\mathbf{U}\subseteq\subseteq\mathbf{V}$ platí, že $f|\mathbf{U}$ je homomorfizmem $\mathbf{U}\to\mathbf{W}$.*

Je-li dán izomorfizmus f $\mathbf{V}$ na $\mathbf{W}$, můžeme sestrojit inverzní zobrazení f^{-1} $\mathbf{W}$ na $\mathbf{V}$. Bude toto zobrazení homomorfizmem?

Zvolme $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{W}$ a $t\in\mathbb{T}$. Pak existují $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{V}$ tak, že:

$$\mathbf{u}=f(\mathbf{x})\ \wedge\ \mathbf{v}=f(\mathbf{y}). \tag{9-1}$$

Můžeme tedy psát:

- $f^{-1}(\mathbf{u}+\mathbf{v})\overset{(a)}{=}f^{-1}(f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y}))\overset{(b)}{=}f^{-1}(f(\mathbf{x}+\mathbf{y}))\overset{(c)}{=}\mathbf{x}+\mathbf{y}\overset{(d)}{=}f^{-1}(\mathbf{u})+f^{-1}(\mathbf{v})$,

přičemž v rovnostech (a) a (d) jsme využili (9-1), v (b) toho, že f je homomorfizmus a v (c) vlastnosti inverzního zobrazení. Užitím těchže skutečností odvodíme:

- $f^{-1}(t\mathbf{u})=f^{-1}(tf(\mathbf{x}))=f^{-1}(f(t\mathbf{x}))=t\mathbf{x}=tf^{-1}(\mathbf{u})$.

Souhrnně jsme ukázali, že f^{-1} je homomorfizmem $\mathbf{W}$ do $\mathbf{V}$ a jelikož víme, že inverzní zobrazení k bijekci je opět bijekcí, platí:

9.Věta *Buďte* **V**,**W** *vektorové prostory. Je-li* f *izomorfizmem* **V** *na* **W**, *pak je* f^{-1} *izomorfizmem* **W** *na* **V**.

Uvažme vektorové prostory **V**,**W** a $f \in \mathcal{H}om(\mathbf{V},\mathbf{W})$.

- je-li f epimorfizmus, pak z definice Imf plyne, že Imf=**W**. Z téže definice plyne i implikace opačná.
- protože 0-násobek libovolného vektoru je vektorem nulovým, platí[5]: $f(\mathbf{o})=\bar{\mathbf{o}}$.

(prověřte!).

To značí, že $\mathbf{o} \in \mathrm{Ker}f$. V případě existence $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$, $\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}f$, zřejmě nemůže být f injektivním zobrazením - monomorfizmem (proč?). Předpokládejme tedy, že $\mathrm{Ker}f=\{\mathbf{o}\}$ a zkoumejme, zda f je monomorfizmem. Pokud f není monomorfizmus, existují $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{V}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, tak, že

$$f(\mathbf{x})=f(\mathbf{y}).$$

Odtud dostáváme: $\mathbf{o}=f(\mathbf{x})-f(\mathbf{y})=f(\mathbf{x}-\mathbf{y})$,

což značí, že $\mathbf{x}-\mathbf{y} \in \mathrm{Ker}f$, a protože $\mathrm{Ker}f=\{\mathbf{o}\}$, je $\mathbf{x}-\mathbf{y}=\mathbf{o}$, tedy $\mathbf{x}=\mathbf{y}$, což je spor s předpokládanou růzností $\mathbf{x},\mathbf{y}$.

Platí tedy následující tvrzení:

10.Věta *Buď* $f \in \mathcal{H}om(\mathbf{V},\mathbf{W})$. *Pak platí:*

(1) f *je epimorfizmem* **V** *na* **W**, *právě když* Imf=**W**,

(2) f *je monomorfizmem* **V** *do* **W**, *právě když* $\mathrm{Ker}f=\{\mathbf{o}\}$.

(i) Dle definice zachovává homomorfizmus sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem. Užitím těchto vlastností dostáváme pro libovolné $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k \in \mathbf{V}$, $t_1,\ldots,t_k \in \mathbb{T}$ a $f \in \mathcal{H}om(\mathbf{V},\mathbf{W})$:

---

[5]) symbolem **o** označíme nulový vektor ve **V** a symbolem $\bar{\mathbf{o}}$ nulový vektor ve **W**, ačkoli bychom bez nebezpečí nedorozumění mohli užít symbol týž (což budeme dále činit), byť jde obecně o objekty různé.

$$f(t_1\mathbf{x}_1+\ldots+t_k\mathbf{x}_k)=f(t_1\mathbf{x}_1)+\ldots+f(t_k\mathbf{x}_k)=t_1f(\mathbf{x}_1)+\ldots+t_kf(\mathbf{x}_k).$$

Zkoumejme, v jakém vztahu je lineární závislost vzorů a jejich obrazů. Zvolme $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k\in\mathbf{V}$ a $f\in\mathcal{Hom}(\mathbf{V},\mathbf{W})$.

(ii) Nechť jsou $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k$ lineárně závislé. Existují proto $t_1,\ldots,t_k\in\mathbb{T}$, z nichž alespoň jedno není nula, tak, že:

$$t_1\mathbf{x}_1+\ldots+t_k\mathbf{x}_k=\mathbf{o}.$$

Pak (neboť $f(\mathbf{o})=\mathbf{o}$) dostáváme:

$$f(t_1\mathbf{x}_1+\ldots+t_k\mathbf{x}_k)=\mathbf{o}$$

a po úpravě levé strany (viz (i)) konečně:

$$t_1f(\mathbf{x}_1)+\ldots+t_kf(\mathbf{x}_k)=\mathbf{o}.$$

Zjistili jsme tedy, že existuje *netriviální* nulová lineární kombinace vektorů $f(\mathbf{x}_1),\ldots,f(\mathbf{x}_k)$ - jsou tedy lin. závislé.

(iii) Nechť jsou $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k$ lineárně nezávislé.
Zkoumejme nulovou lineární kombinaci jejich obrazů:

$$t_1f(\mathbf{x}_1)+\ldots+t_kf(\mathbf{x}_k)=\mathbf{o},$$

neboli (opět viz (i)):

$$f(t_1\mathbf{x}_1+\ldots+t_k\mathbf{x}_k)=\mathbf{o},$$

což značí, že $(t_1\mathbf{x}_1+\ldots+t_k\mathbf{x}_k)\in\mathrm{Ker}f$.

Doplníme-li požadavek, aby f byl monomorfizmus (tedy $\mathrm{Ker}f=\{\mathbf{o}\}$ - viz věta 10), plyne odtud:

$$t_1\mathbf{x}_1+\ldots+t_k\mathbf{x}_k=\mathbf{o},$$

což vzhledem k předpokládané lineární nezávislosti vektorů $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k$ implikuje $t_1=\ldots t_k=0$.
Shrňme poznatky získané v (i)-(iii) do věty:

11. Věta *Buď $f\in\mathcal{Hom}(\mathbf{V},\mathbf{W})$. Pak*

(1) pro každé $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k\in\mathbf{V}$ a každé $t_1,\ldots,t_k\in\mathbb{T}$ platí:

$$f(t_1\mathbf{x}_1+\ldots+t_k\mathbf{x}_k)=t_1f(\mathbf{x}_1)+\ldots+t_kf(\mathbf{x}_k),$$

(2) pro každé $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k\in\mathbf{V}$ platí: jsou-li $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k$ lineárně závislé, pak $f(\mathbf{x}_1),\ldots,f(\mathbf{x}_k)$ jsou též lineárně závislé,

(3) pro každé $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k\in\mathbf{V}$ platí: jsou-li $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k$ lineárně nezávislé a je-li f monomorfizmus, pak $f(\mathbf{x}_1),\ldots,f(\mathbf{x}_k)$ jsou též

lineárně nezávislé[6]*)*.

Připomeňme, že je-li f zobrazení $\mathbf{V}\to\mathbf{W}$, pak pro $\mathbf{U}\subseteq\mathbf{V}$ a $\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{W}$ označujeme:

- symbolem $f(\mathbf{U})$ *obraz množiny* $\mathbf{U}$ *v zobrazení* f, přičemž $f(\mathbf{U})$ definujeme takto:

$$f(\mathbf{U})=\{\mathbf{y}\in\mathbf{W},\ \exists\mathbf{x}\in\mathbf{U}:\ \mathbf{y}=f(\mathbf{x})\},$$

- symbolem $f^{-1}(\mathbf{Q})$ *vzor množiny* $\mathbf{Q}$ *v zobrazení* f, přičemž $f^{-1}(\mathbf{Q})$ definujeme takto[7]):

$$f^{-1}(\mathbf{Q})=\{\mathbf{x}\in\mathbf{V},\ \exists\mathbf{y}\in\mathbf{Q}:\ \mathbf{y}=f(\mathbf{x})\}.$$

V případě, kdy $f\in\mathcal{H}om(\mathbf{V},\mathbf{W})$ zřejmě tedy např. platí:

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{Im}f=f(\mathbf{V}),\\ \mathrm{Ker}f=f^{-1}(\{\mathbf{o}\}).\end{array}}$$

Základní vlastnosti homomorfizmů doplňuje následující věta.

12. Věta *Buďte* $\mathbf{V},\mathbf{W}$ *vektorové prostory,* $\mathbf{U}\subseteq\subseteq\mathbf{V}$, $\mathbf{Q}\subseteq\subseteq\mathbf{W}$ *a* $f\in\mathcal{H}om(\mathbf{V},\mathbf{W})$. *Pak platí:*

(1) $f(\mathbf{U})\subseteq\subseteq\mathbf{W}$,

(2) $f^{-1}(\mathbf{Q})\subseteq\subseteq\mathbf{V}$,

(3) jestliže $\mathcal{M}$ *je množina generátorů podprostoru* $\mathbf{U}$, *pak* $f(\mathcal{M})$ *je množina generátorů podrostoru* $f(\mathbf{U})$[8]*)*,

(4) je-li $\mathcal{G}$ *množina generátorů prostoru* $\mathbf{V}$, *pak je* f *epimorfizmus, právě když* $f(\mathcal{G})$ *je množina generátorů prostoru* $\mathbf{W}$,

---

[6]) předpoklad, že f je monomorfizmus, nelze vynechat - stačí uvážit $\mathbf{x}_1\neq\mathbf{o}$ s vlastností $f(\mathbf{x}_1)=\mathbf{o}$.

[7]) označení $f^{-1}(\mathbf{Q})$ představuje *symbol* - neznamená to, že by f muselo být bijekcí!

[8]) Platí i tvrzení obrácené? Uvažte $\mathbf{x}\notin\mathbf{U}$ s vlastností $f(\mathbf{x})=\mathbf{o}$!

(5) je-li $\mathcal{B}$ báze prostoru **V**, *pak je f izomorfizmus, právě když $f(\mathcal{B})$ je báze prostoru* **W**.

Důkaz:

tvrzení (1),(2) jsou triviální, důkaz přenecháváme čtenáři.

Ad (3):

Nechť $\mathcal{M}=\{\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_k\}$ generuje **U**.

Pro každý $\mathbf{y}\in f(\mathbf{U})$ můžeme psát následující řetězec ekvivalencí:

$$\mathbf{y}\in f(\mathbf{U}) \overset{(a)}{\Leftrightarrow} \mathbf{y}=f(\mathbf{u}),\mathbf{u}\in\mathbf{U} \overset{(b)}{\Leftrightarrow} \mathbf{y}=f\Big(\sum_{i=1}^{k} x_i\mathbf{u}_i\Big) \overset{(c)}{\Leftrightarrow} \mathbf{y}=\sum_{i=1}^{k} x_i f(\mathbf{u}_i) \overset{(d)}{\Leftrightarrow} \mathbf{y}\in[f(\mathcal{M})],$$

kde v ekvivalenci (a) a (d) jsme užili zavedení obrazu množiny, v (b) pak faktu, že $\mathcal{M}$ generuje **U** a v ekvivalenci (c) věty 11.(1).

Ad (4):

- je-li f epimorfizmem, pak dle věty 10 lze psát:

$$f(\mathbf{V})=\mathrm{Im}f=\mathbf{W}$$

a dle tvrzení (3) je $f(\mathbf{V})$ generováno $f(\mathcal{G})$, celkem tedy

$$[f(\mathcal{G})]=\mathbf{W}.$$

- nechť $[f(\mathcal{G})]=\mathbf{W}$, $\mathcal{G}=\{\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_k\}$. Zvolíme-li libovolné $\mathbf{y}\in\mathbf{W}$, plyne odtud $\mathbf{y}=\sum_{i=1}^{k} x_i f(\mathbf{u}_i)$. Položíme-li $\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{k} x_i\mathbf{u}_i$, pak zřejmě $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$ a dle 11.(1) je $f(\mathbf{x})=\mathbf{y}$, což značí, že f je epimorfizmem.

Ad (5):

- je-li f izomorfizmem, pak dle tvrzení (4) $f(\mathcal{B})$ generuje **W** a dle věty 11.(3) je množina $f(\mathcal{B})$ lineárně nezávislá, a tedy je $f(\mathcal{B})$ bází prostoru **W**.

- je-li $f(\mathcal{B})$ bází **W**, je současně množinou generátorů **W**, a proto je dle tvrzení (4) f epimorfizmus.

Pokud by f nebyl monomorfizmem, existoval by $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$; $\mathbf{x}\neq\mathbf{o} \wedge f(\mathbf{x})=\mathbf{o}$. Označíme-li $\mathcal{B}=\langle\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_n\rangle$, můžeme $\mathbf{x}$ psát takto:

$$\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{u}_i, \tag{12-1}$$

a nulovost $f(\mathbf{x})$ pak lze (užitím tvrzení 11.(1)) ekvivalentně psát:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f(\mathbf{u}_i)=\mathbf{o},$$

a protože $f(\mathcal{B})$ je lineárně nezávislá, plyne odtud, že $x_1=\dots x_n=0$, což vzhledem k (12-1) implikuje $\mathbf{x}=\mathbf{o}$, což je spor - f je tedy monomorfizmus.

Celkem jsme ukázali, že f je izomorfizmus. ∎

Homomorfizmus $f \in \mathcal{H}om(\mathbf{V},\mathbf{W})$ je zobrazením a představuje tedy podmnožinu v kartézském součinu $\mathbf{V}\times\mathbf{W}$. Je pro jeho určení třeba znát všechny uspořádané dvojice $(\mathbf{x},f(\mathbf{x}))$, kde $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$?

Vzhledem k tomu, že homomorfizmus zobrazuje lineární kombinaci daných vektorů (tedy i *bázových*) na lineární kombinaci jejich obrazů s týmiž koeficienty[9]), jeví se přirozené zvolit ve $\mathbf{V}$ libovolnou bázi $\mathcal{B}=\langle\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_n\rangle$ a předepsat obrazy jejích jednotlivých vektorů po řadě $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\in\mathbf{W}$ a dále pro libovolný $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$ definovat zobrazení $f:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ takto:

$$\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{u}_i \longmapsto f(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{v}_i. \qquad (13\text{-}1)$$

O tomto *zobrazení*[10]) budeme chtít ukázat, že je homomorfizmem $\mathbf{V}$ do $\mathbf{W}$ s vlastností $\mathbf{u}_i\mapsto\mathbf{v}_i$, $1\le i\le n$.

Zvolme libovolné $\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbf{V}$ a $t\in\mathbb{T}$. Nechť $\mathbf{y}=\sum_{i=1}^{n} y_i\mathbf{u}_i$, $\mathbf{z}=\sum_{i=1}^{n} z_i\mathbf{u}_i$.

- $\mathbf{y}+\mathbf{z}$ lze po úpravě psát $\mathbf{y}+\mathbf{z}=\sum_{i=1}^{n}(y_i+z_i)\mathbf{u}_i$, pro $f(\mathbf{y}+\mathbf{z})$ dostáváme:

$$f(\mathbf{y}+\mathbf{z})\overset{(a)}{=}\sum_{i=1}^{n}(y_i+z_i)\mathbf{v}_i\overset{(b)}{=}\sum_{i=1}^{n} y_i\mathbf{v}_i+\sum_{i=1}^{n} z_i\mathbf{v}_i\overset{(c)}{=}f(\mathbf{y})+f(\mathbf{z}),$$

přičemž v rovnostech (a) a (c) jsme užili (13-1) (čeho bylo užito v (b)?)

- $t\mathbf{y}$ lze po úpravě psát $t\mathbf{y}=\sum_{i=1}^{n}(ty_i)\mathbf{u}_i$, pro $f(t\mathbf{y})$ dostáváme:

$$f(t\mathbf{y})\overset{(d)}{=}\sum_{i=1}^{n}(ty_i)\mathbf{v}_i\overset{(e)}{=}t\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i\mathbf{v}_i\Big)\overset{(f)}{=}tf(\mathbf{y}),$$

přičemž v rovnostech (d) a (f) jsme opět užili (13-1) a v rovnosti

---

[9]) viz věta 11.(1)

[10]) každý vektor $\mathbf{x}$ lze právě *jedním* způsobem psát jako $\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{u}_i$, a tudíž je relací (13-1) zobrazení f dobře definováno.

(e) známých vlastností zobrazení + a · ve vektorových prostorech.

Jelikož pro každé i, $1 \le i \le n$, lze psát $\mathbf{u}_i = 1\mathbf{u}_i$, plyne z (13-1):

$$f(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}_i, \quad i=1,\dots,n. \tag{13-2}$$

Máme tak ukázáno, že $f \in \mathcal{H}om(\mathbf{V},\mathbf{W})$ a má vlastnost (13-2).

Uvažujme nyní libovolný *homomorfizmus* $g:\mathbf{V} \to \mathbf{W}$ s vlastností

$$g(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}_i, \quad i=1,\dots,n. \tag{13-3}$$

Zvolme libovolný $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$. Pak jej lze psát $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{u}_i$ a neboť g je homomorfizmus, dostáváme:

$$g(\mathbf{x}) = g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{u}_i\right) \overset{(a)}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i g(\mathbf{u}_i) \overset{(b)}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{v}_i \overset{(c)}{=} f(\mathbf{x}),$$

neboli $f=g$, což značí, že f je *jediný* homomorfizmus s vlastností (13-2).

Přitom v rovnosti (a) bylo užito věty 11.(1), v (b) vlastnosti (13-3) a v (c) relace (13-1).

Získané poznatky shrneme do věty *(o určenosti homomorfizmu)*.

13. Věta *Buďte* $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ *vektorové prostory. Pak ke každé bázi* $\mathcal{B} = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \rangle$ *vektorového prostoru* $\mathbf{V}$ *a každé uspořádané* n-*tici* $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ *vektorů z vektorového prostoru* $\mathbf{W}$ *existuje právě jeden homomorfizmus* $f:\mathbf{V} \to \mathbf{W}$ *s vlastností*

$$f(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}_i, \quad i=1,\dots,n.$$

1.1 Izomorfní vektorové prostory

14. Definice Buďte **V**,**W** vektorové prostory. Řekneme, že *vektorový prostor* **W** *je izomorfní s vektorovým prostorem* **V**, jestliže existuje izomorfizmus vektorového prostoru **V** na **W**.

15. Poznámka Z věty 9 bezprostředně plyne, že je-li **V** izomorfní s **W**, pak je i **W** izomorfní s **V**. Proto budeme nadále říkat pouze, že *vektorové prostory* **V** *a* **W** *jsou (navzájem) izomorfní.*

Z věty 12.(5) plyne, že každé dva izomorfní vektorové prostory mají touž dimenzi (proč?).

Vyšetřeme nyní tvrzení obrácené - buďte **V**,**W** vektorové prostory téže dimenze n.

Je pouze mechanickou záležitostí ověřit, že zvolíme-li ve **V** některou bázi $\mathcal{B}$ a označíme-li σ příslušnou soustavu souřadnic[11]), je σ izomorfizmem vektorového prostoru **V** na aritmetický vektorový prostor $\mathbb{T}^n$ (proveďte!).

Buď dále γ některá soustava souřadnic ve **W** - tj. izomorfizmus **W** na $\mathbb{T}^n$. Užitím věty 9 obdržíme, že γ^{-1} je izomorfizmem $\mathbb{T}^n$ na **W**.

Rovněž je zřejmé[12]), že jsou-li **U**,**Y**,**Z** vektorové prostory (nad týmže tělesem) a $f \in \mathcal{H}om(\mathbf{U},\mathbf{Y})$ a $g \in \mathcal{H}om(\mathbf{Y},\mathbf{Z})$, je složení $f \circ g : \mathbf{U} \to \mathbf{Z}$ homomorfizmem, a jsou-li f,g izomorfizmy, pak je izomorfizmem (proveďte!). Ve zkoumaném případě tedy zjišťujeme, že $\sigma \circ \gamma^{-1}$ je izomorfizmem **V** na **W**.

Dokázali jsme tak platnost následující věty:

---

[11]) připomeňme, že je-li $\mathcal{B}=\langle \mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n \rangle$, pak lze každý $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ právě jedním způsobem psát takto:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n, \quad x_1,\dots,x_n \in \mathbb{T}.$$

Pak je $\sigma : \mathbf{V} \to \mathbb{T}^n$ definováno předpisem:

$$\sigma : \mathbf{x} \mapsto (x_1,\dots,x_n).$$

[12]) podrobněji - viz kapitola 4.

16. Věta *Dva vektorové prostory nad týmže tělesem[13]) jsou izomorfní, právě když mají touž dimenzi.*

Na závěr této podkapitoly si podrobněji všimneme vztahu mezi dvěma *izomorfními* vektorovými prostory.

Buďte $(\mathbf{V},+,\mathbb{T},\cdot)$ a $(\mathbf{W},\oplus,\mathbb{T},\odot)$ izomorfní vektorové prostory, $f:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ příslušný izomorfizmus.

Izomorfizmus f je *bijekcí* mezi množinami **V** a **W** *(ekvivalentní množiny)* - každý vektor $\mathbf{v}\in\mathbf{W}$ lze jednoznačně psát ve tvaru

$$\mathbf{v}=f(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in\mathbf{V}.$$

Jaká je však závislost mezi sčítáním vektorů ve **V** $(+)$ a ve **W** $(\oplus)$, jakož i mezi násobením vektoru skalárem ve **V** $(\cdot)$a ve **W** $(\odot)$- tedy zobrazeními spolu s nimiž množiny **V**, **W** tvoří vektorové prostory?

Zvolme libovolné $\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbf{W}$. Pak je lze jednoznačně psát ve tvaru

$$\mathbf{v}=f(\mathbf{x}),\ \mathbf{w}=f(\mathbf{y}),\ \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{V}. \qquad (17\text{-}1)$$

Pro jejich součet dostáváme:

$$\mathbf{v}\oplus\mathbf{w}\overset{(a)}{=}f(\mathbf{x})\oplus f(\mathbf{y})\overset{(b)}{=}f(\mathbf{x}+\mathbf{y})\overset{(c)}{=}f(f^{-1}(\mathbf{v})+f^{-1}(\mathbf{w})),$$

což značí, že sčítání $\oplus$ vektorů ve **W** je *jednoznačně určeno* sčítáním vektorů $+$ ve **V**.

Přitom v rovnosti (a) a (c) jsme užili relace (17-1) a v (b) definiční vlastnost homomorfizmu.

Zvolme libovolný $\mathbf{v}\in\mathbf{W}$ - lze jej jednoznačně psát ve tvaru $\mathbf{v}=f(\mathbf{x})$ - a skalár $t\in\mathbb{T}$.

Pro t-násobek vektoru **v** dostáváme (zdůvodněte!):

$$t\odot\mathbf{v}=t\odot f(\mathbf{x})=f(t\cdot\mathbf{x})=f(t\cdot f^{-1}(\mathbf{v})),$$

což značí, že násobení $\odot$ vektorů skalárem ve **W** je *jednoznačně určeno* násobením $\cdot$ vektorů skalárem ve **V**.

Ukázali jsme, že je-li vektorový prostor **W** izomorfním obrazem vektorového prostoru **V**, je nejen množina vektorů **W**, ale i sčítání vektorů ve **W** a násobení vektoru z **W** skalárem, jednoznačně určeno zadáním vektorového prostoru **V** a příslušného izomorfizmu f.

Tak je třeba rozumět frekventovanému obratu, že *není třeba*

---

[13]) nebylo zde třeba uvádět - jinými se dle Úmluvy 2 nezabýváme.

rozlišovat mezi dvěma izomorfními vektorovými prostory, neboť se liší toliko označením svých prvků.[14]*)*

Odvodili jsme platnost následující věty (promyslete si platnost obrácené implikace!):

17. Věta *Buďte* $(\mathbf{V},+,\mathbb{T},\cdot)$ *a* $(\mathbf{W},\oplus,\mathbb{T},\odot)$ *vektorové prostory. Pak platí, že* $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ *jsou izomorfní, právě když existuje bijekce* $f:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ *s vlastnostmi*[15]*):*

(i) $\forall \mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbf{W}$: $\mathbf{v}\oplus\mathbf{w}=f(f^{-1}(\mathbf{v})+f^{-1}(\mathbf{w}))$,

(ii) $\forall t\in\mathbb{T},\forall \mathbf{v}\in\mathbf{W}$: $t\odot\mathbf{v}=f(t\cdot f^{-1}(\mathbf{v}))$.

Důkaz následující věty spočívá jen v mechanickém ověření axiomů vektorového prostoru a přenecháváme jej čtenáři.

18. Věta *Buď* $(\mathbf{V},+,\mathbb{T},\cdot)$ *vektorový prostor a* $\mathbf{W}$ *množina spolu se zobrazeními* $\oplus:\mathbf{W}\times\mathbf{W}\to\mathbf{W}$ *a* $\odot:\mathbb{T}\times\mathbf{W}\to\mathbf{W}$. *Jestliže existuje bijekce* $f:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ *s vlastnostmi*

(1) $\forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$: $\quad f(\mathbf{u}+\mathbf{v})=f(\mathbf{u})\oplus f(\mathbf{v})$,

(2) $\forall \mathbf{u}\in\mathbf{V},\forall t\in\mathbb{T}$: $\quad f(t\cdot\mathbf{u})=t\odot f(\mathbf{u})$,

pak $(\mathbf{W},\oplus,\mathbb{T},\odot)$ *je vektorový prostor izomorfní vektorovému prostoru* $(\mathbf{V},+,\mathbb{T},\cdot)$, *přičemž* f *je příslušným izomorfizmem.*

---

[14]) s tímto obratem se čtenář jistě setkal nejen v případě izomorfních *vektorových prostorů*

[15]) připomeneme-li, že pro dvojici zobrazení $a:A\to K$ a $b:B\to L$ značíme symbolem $a\times b$ zobrazení $A\times B\to K\times L$ definované předpisem

$$(a,b)\mapsto(a(a),b(b)),$$

mohli bychom tvrzení (i) symbolicky psát:

$$\oplus=(f^{-1}\times f^{-1})\circ(+)\circ f.$$

Tvrzení (ii) lze symbolicky psát takto:

$$\odot=(f^{-1})\circ(\cdot)\circ f.$$

2. Matice a analytické vyjádření homomorfizmu

V předešlé podkapitole jsme ukázali, že k určení homomorfizmu stačí znát obrazy prvků některé báze. Nyní se zabývejme otázkou, jak (při popsaném zadání) zjistit obrazy ostatních vektorů.

Uvažujme vektorové prostory **V**, **W**. Nechť je dán homomorfizmus $f\colon \mathbf{V}\to\mathbf{W}$.

Je-li $\mathcal{B}=\langle \mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\rangle$ libovolná báze v $\mathbf{V}_n$, je f v souladu s větou 1.13 jednoznačně určen zadáním obrazů $f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2),\dots,f(\mathbf{e}_n)$.

Zvolme v prostoru $\mathbf{W}_m$ bázi $\mathcal{C}=\langle \mathbf{d}_1,\mathbf{d}_2,\dots,\mathbf{d}_m\rangle$ a nechť platí:

$$\{f(\mathbf{e}_i)\}_{\mathcal{C}}=(a_{i1},a_{i2},\dots,a_{im}),\quad 1\le i\le n. \tag{1-1}$$

Uvažujme nyní libovolný vektor $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$:

$$\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}}=(x_1,x_2,\dots,x_n). \tag{1-2}$$

Pro obraz $f(\mathbf{x})$ dostáváme:

$$f(\mathbf{x})\overset{(a)}{=}f\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i\mathbf{e}_i\Big)\overset{(b)}{=}\sum_{i=1}^{n}x_if(\mathbf{e}_i)\overset{(c)}{=}\sum_{i=1}^{n}x_i\Big(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\mathbf{d}_j\Big)\overset{(d)}{=}\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{n}x_ia_{ij}\Big)\mathbf{d}_j,$$

což znamená, že $\{f(\mathbf{x})\}_{\mathcal{C}}=(y_1,y_2,\dots,y_m)$,

kde
$$\boxed{y_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_i,\quad 1\le j\le m.} \tag{1-3}$$

Přitom v rovnosti (a) jsme užili (1-2), v (b) větu 1.11.(1), v (c) pak (1-1) a konečně v (d) záměnu pořadí sumace.

Zaveďme nyní pojem *matice homomorfizmu* a po té shrňme odvozené do věty.

1. Definice Buď f homomorfizmus **V** do **W**. Nechť $\mathcal{B},\mathcal{C}$, $\mathcal{B}=\langle \mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\rangle$ $\mathcal{C}=\langle \mathbf{d}_1,\dots,\mathbf{d}_m\rangle$, jsou libovolné báze po řadě prostorů **V**, **W**. Označíme-li[16])

[16]) symbolem $\{\mathbf{y}\}_{\mathcal{D}}$ rozumíme aritmetický vektor souřadnic vektoru **y** v bázi $\mathcal{D}$, který budeme krátce nazývat *souřadnice*.

$$\boxed{\{f(\mathbf{e}_i)\}_{\mathcal{C}}=(a_{i1},a_{i2},\dots,a_{im}),\ 1\le i\le n,}$$

pak matici $\mathbf{A}=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{T})$ nazýváme *matice homomorfizmu* f *v bázích*[17] $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ a značíme ji $(f,\mathcal{B},\mathcal{C})$.

2. **Věta** *Buď f homomorfizmus $\mathbf{V}$ do $\mathbf{W}$. Nechť $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{B}=\langle\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\rangle$, $\mathcal{C}=\langle\mathbf{d}_1,\dots,\mathbf{d}_m\rangle$, jsou libovolné báze po řadě prostorů $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$. Pak pro každý $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$ platí:*

$$\boxed{\{f(\mathbf{x})\}_{\mathcal{C}}=\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}}(f,\mathcal{B},\mathcal{C}),} \tag{2-1}$$

neboli:

je-li $\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}}=(x_1,\dots,x_n)$, pak pro $f(\mathbf{x})$ platí:

$$\boxed{\{f(\mathbf{x})\}_{\mathcal{C}}=(y_1,\dots,y_n)\ \Leftrightarrow\ \forall j, 1\le j\le m:\ y_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_i,} \tag{2-2}$$

kde $(a_{ij})_{nm}=(f,\mathcal{B},\mathcal{C})$.

Vztahy (2-1), (2-2) budeme přirozeně nazývat *analytické vyjádření homorfizmu f v bázích $\mathcal{B},\mathcal{C}$* (rozepište si sumační zápis (2-2)!).

3. **Poznámka** Zřejmě je vzájemně jednoznačný vztah mezi maticí homomorfizmu a jeho analytickým vyjádřením (při shodné volbě bází).

Ze zavedení matice homomorfizmu při dané volbě bází zřejmě plyne, že v dané dvojici bází má každý homomorfizmus právě jednu matici.

Obráceně, zvolíme-li dvojici bází $\mathcal{B},\mathcal{C}$ po řadě prostorů $\mathbf{V},\mathbf{W}$ a

---

[17]) užívá se též obratu *vzhledem k bázím*

vybereme-li libovolnou matici **A** typu nm nad $\mathbb{T}$, pak máme definiční relací (1-1) matice homomorfizmu jednoznačně předepsány obrazy báze $\mathcal{B}$, a tudíž dle věty 1.13 existuje právě jeden homomorfizmus $\mathbf{V}\to\mathbf{W}$, jehož je **A** maticí v bázích $\mathcal{B},\mathcal{C}$.

Platí tedy tato věta:

4. Věta *Buďte $\mathcal{B},\mathcal{C}$ některé báze po řadě prostorů* **V**, **W**. *Pak zobrazení $H_{\mathcal{BC}}$: $\mathcal{H}om(\mathbf{V}_n,\mathbf{W}_m)\to\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{T})$ definované vztahem*

$$\boxed{\forall f\in\mathcal{H}om(\mathbf{V},\mathbf{W}):\ H_{\mathcal{BC}}(f)=(f,\mathcal{B},\mathcal{C})} \tag{4-1}$$

je definováno korektně a je bijekcí uvedených množin.

5. Důsledek *Buďte $f,g\in\mathcal{H}om(\mathbf{V},\mathbf{W})$, $\mathcal{B},\mathcal{C}$ libovolná dvojice bází po řadě prostorů* **V**,**W**. *Pak platí:*

$$\boxed{f=g \Leftrightarrow (f,\mathcal{B},\mathcal{C})=(g,\mathcal{B},\mathcal{C}).}$$

6. Důsledek *Buďte dány vektorové prostory $\mathbf{V}_n$, $\mathbf{W}_m$ a jejich báze po řadě $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$. Pak každá formule typu (2-1), resp. soustava formulí typu (2-2), je v uvedených bázích analytickým vyjádřením právě jednoho homomorfizmu $f:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ a každý homomorfizmus $f:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ má v uvedených bázích právě jedno analytické vyjádření.*

Příklad A

Buďte **V**, **W** vektorové prostory. Nechť $\mathcal{B}=\langle\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\rangle$ je báze prostoru **V** a $\mathcal{C}=\langle\mathbf{d}_1,\mathbf{d}_2,\mathbf{d}_3\rangle$ báze prostoru **W**.
Napiště analytické vyjádření homomorfizmu $f:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$, pro nějž platí:

$$f(\mathbf{e}_1)+2f(\mathbf{e}_2)=\mathbf{d}_1+4\mathbf{d}_2+3\mathbf{d}_3,$$
$$f(\mathbf{e}_1)-f(\mathbf{e}_2)+f(\mathbf{e}_3)=\mathbf{d}_1+\mathbf{d}_2+2\mathbf{d}_3,$$
$$f(\mathbf{e}_2)+f(\mathbf{e}_3)=\mathbf{d}_2-\mathbf{d}_3.$$

Řešení

K tomu, abychom mohli napsat analytické vyjádření, je třeba znát matici homomorfizmu vzhledem k daným bázím, tedy souřadnice po řadě vektorů $f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2)$ a $f(\mathbf{e}_3)$ v bázi $\mathcal{C}$. Ze soustavy rovnic výše uvedené proto vypočteme $f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2)$ a $f(\mathbf{e}_3)$ (např. užitím maticové symboliky):

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 2 & 0 & \mathbf{d}_1+4\mathbf{d}_2+3\mathbf{d}_3 \\ 1 & -1 & 1 & \mathbf{d}_1+\mathbf{d}_2+2\mathbf{d}_3 \\ 0 & 1 & 1 & \mathbf{d}_2-\mathbf{d}_3 \end{array}\right) \ldots \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & \mathbf{d}_1+2\mathbf{d}_2+3\mathbf{d}_3 \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{d}_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\mathbf{d}_3 \end{array}\right),$$

což značí:

$$\{f(\mathbf{e}_1)\}_{\mathcal{C}}=(1,2,3),\ \{f(\mathbf{e}_2)\}_{\mathcal{C}}=(0,1,0),\ \{f(\mathbf{e}_3)\}_{\mathcal{C}}=(0,0,-1)$$

a matice homomorfizmu f tedy zní

$$(f,\mathcal{B},\mathcal{C})=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Odtud plyne analytické vyjádření:

$$\begin{aligned} f:\ y_1 &= x_1 \\ y_2 &= 2x_1 + x_2 \\ y_3 &= 3x_1 \quad - x_3. \end{aligned}$$

Příklad B

Buďte **V**, **W** vektorové prostory. Nechť $\mathcal{B},\mathcal{C}$ jsou po řadě jejich báze. Napište analytické vyjádření homomorfizmu $f:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$, pro nějž platí:

$$\left.\begin{aligned} &f(\mathbf{u}_i)=\mathbf{v}_i,\ 1\le i\le 3, \\ &\{\mathbf{u}_1\}_{\mathcal{B}}=(1,1,1),\ \{\mathbf{u}_2\}_{\mathcal{B}}=(1,0,1),\ \{\mathbf{u}_3\}_{\mathcal{B}}=(2,0,0), \\ &\{\mathbf{v}_1\}_{\mathcal{C}}=(1,3,2),\ \{\mathbf{v}_2\}_{\mathcal{C}}=(1,2,2),\ \{\mathbf{v}_3\}_{\mathcal{C}}=(2,4,6). \end{aligned}\right\} \quad \text{(B-1)}$$

kde:

Řešení

Protože vektory $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$ jsou lineárně nezávislé, existuje v souladu s větou 1.13 právě jeden homomorfimus požadované vlastnosti.

Zadání bychom snadno převedli na stejný typ, jakým je zadání příkladu A (proveďte). Ukažme jiný způsob řešení. Analytické vyjádření očekáváme ve tvaru:

$$f\colon\ \begin{aligned} y_1&=a_{11}x_1+a_{21}x_2+a_{31}x_3\\ y_2&=a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{32}x_3\\ y_3&=a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3. \end{aligned}$$

Dosadíme-li do něj z (B-1), obdržíme soustavu lineárních rovnic pro neznámé $a_{11},a_{12},\dots,a_{33}$:

$$a_{1i}+a_{2i}+a_{3i}=\begin{cases}1 \text{ pro } i=1\\ 3 \text{ pro } i=2\\ 2 \text{ pro } i=3\end{cases}$$

$$a_{1i}\qquad\ \ +a_{3i}=\begin{cases}1 \text{ pro } i=1\\ 2 \text{ pro } i=2\\ 2 \text{ pro } i=3\end{cases}$$

$$2a_{1i}\qquad\qquad\ =\begin{cases}2 \text{ pro } i=1\\ 4 \text{ pro } i=2\\ 6 \text{ pro } i=3,\end{cases}$$

jejíž řešení zapíšeme maticově:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c|c|c} & & & i=1 & i=2 & i=3 \end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1&1&1&1&3&2\\ 1&0&1&1&2&2\\ 2&0&0&2&4&6 \end{array}\right)\end{array} \quad\dots\quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c|c|c} & & & i=1 & i=2 & i=3 \end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1&0&0&1&2&3\\ 0&1&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&-1 \end{array}\right)\end{array},$$

což značí

$$(f,\mathcal{B},\mathcal{C})=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Analytické vyjádření je proto shodné, jako v příkladu A.

Další způsob řešení - viz příklad C.

Uvažujme homomorfizmus $f\colon\mathbf{V}\to\mathbf{W}$. Zřejmě jeho matice, resp. analytické vyjádření, závisí na volbě bází v $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$.

Nechť např. vůči zvoleným bázím $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ analytické vyjádření homomorfizmu f zní:

$$\left.\begin{aligned} y_1&=2x_1+x_2\\ y_2&=x_1-x_2 \end{aligned}\right\}\ \text{(A)}$$

Zvolíme-li např. ve $\mathbf{V}$ další bázi $\mathcal{B}'$ tak, že transformační rovnice pro přechod od $\mathcal{B}$ k $\mathcal{B}'$ znějí:

$$\left.\begin{aligned} x_1&=3x_1'\\ x_2&=x_1'-x_2' \end{aligned}\right\}\ \text{(T)}$$

pak prostým dosazením za x_1, x_2 z (T) do (A) obdržíme analytické vyjádření (a tím i matici) homomorfizmu f v bázích $\mathcal{B}',\mathcal{C}$:

$$y_1=7x'_1-x'_2$$
$$y_2=2x'_1+x'_2.$$

Uvedený postup přímého dosazení je neelegantní, a proto se zabývejme nalezením obecné formule vyjadřující změnu *matice* homomorfizmu při změně bází.

Nechť je dán homomorfizmus $f:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ a zvolme v prostoru $\mathbf{V}$ báze $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ a v prostoru $\mathbf{W}$ pak báze $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}'$.
Zvolme libovolný $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$. Pak dle věty 2 pro $f(\mathbf{x})$ můžeme psát:

$$\{f(\mathbf{x})\}_{\mathcal{C}}=\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}}(f,\mathcal{B},\mathcal{C}). \qquad (7\text{-}1)$$

Uvážíme-li, že pro souřadnice každého vektoru $\mathbf{z}$ v různých bázích $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ libovolného vektor.prostoru $\mathbf{Z}$ platí[18]):

$$\{\mathbf{z}\}_{\mathcal{D}}=\{\mathbf{z}\}_{\mathcal{D}'}(\mathcal{D},\mathcal{D}'), \qquad (7\text{-}2)$$

plyne z (7-1) užitím (7-2) pro souřadnice $f(\mathbf{x})$ v bázi $\mathcal{C}'$:

$$\{f(\mathbf{x})\}_{\mathcal{C}'}(\mathcal{C},\mathcal{C}')=\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B},\mathcal{B}')(f,\mathcal{B},\mathcal{C}),$$

odkud (matice přechodu je regulární):

$$\{f(\mathbf{x})\}_{\mathcal{C}'}=\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B},\mathcal{B}')(f,\mathcal{B},\mathcal{C})(\mathcal{C},\mathcal{C}')^{-1},$$

a jelikož $(\mathcal{C},\mathcal{C}')^{-1}=(\mathcal{C}',\mathcal{C})$, obdržíme:

$$\{f(\mathbf{x})\}_{\mathcal{C}'}=\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}'}((\mathcal{B},\mathcal{B}')(f,\mathcal{B},\mathcal{C})(\mathcal{C}',\mathcal{C})).$$

Vzhledem k větě 4 (důsledku 6) odtud plyne, že

$$(\mathcal{B},\mathcal{B}')(f,\mathcal{B},\mathcal{C})(\mathcal{C}',\mathcal{C})$$

je maticí homomorfizmu f v bázích $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$, což vyjadřuje následující věta:

7.Věta *Buďte f homomorfizmus* **V** *do* **W** *a $\mathcal{B},\mathcal{B}'$, resp. $\mathcal{C},\mathcal{C}'$, libovolné báze prostoru* **V**, *resp.* **W**. *Pak platí*

$$\boxed{(f,\mathcal{B}',\mathcal{C}')=(\mathcal{B},\mathcal{B}')(f,\mathcal{B},\mathcal{C})(\mathcal{C}',\mathcal{C}).}$$

---

[18]) Symbolem $(\mathcal{D},\mathcal{D}')$ rozumíme *matici přechodu od $\mathcal{D}$ k $\mathcal{D}'$*. Přitom se držíme konvence, kdy její řádky jsou tvořeny souřadnicemi prvků báze $\mathcal{D}'$ vzhledem k bázi $\mathcal{D}$.

Příklad C

Buďte $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ vektorové prostory. Nechť $\mathcal{B},\mathcal{C}$ jsou po řadě jejich báze. Napište analytické vyjádření homomorfizmu $f:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$, pro nějž platí:

$$\left.\begin{array}{l} f(\mathbf{u}_i)=\mathbf{v}_i,\ 1\le i\le 3, \\ \{\mathbf{u}_1\}_{\mathcal{B}}=(1,1,1),\ \{\mathbf{u}_2\}_{\mathcal{B}}=(1,0,1),\ \{\mathbf{u}_3\}_{\mathcal{B}}=(2,0,0), \\ \{\mathbf{v}_1\}_{\mathcal{C}}=(1,3,2),\ \{\mathbf{v}_2\}_{\mathcal{C}}=(1,2,2),\ \{\mathbf{v}_3\}_{\mathcal{C}}=(2,4,6). \end{array}\right\} \quad (C-1)$$

kde:

Řešení

Protože vektory $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$ jsou lineárně nezávislé, představují bázi $\mathcal{B}'$ prostoru $\mathbf{V}$.

Matici $(f,\mathcal{B}',\mathcal{C})$ můžeme dle (C-1) napsat ihned:

$$(f,\mathcal{B}',\mathcal{C})=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Vztah mezi maticemi $(f,\mathcal{B}',\mathcal{C})$ a $(f,\mathcal{B},\mathcal{C})$ v souladu s větou 7 zní:

$$(f,\mathcal{B},\mathcal{C})=(\mathcal{B}',\mathcal{B})(f,\mathcal{B}',\mathcal{C}),$$

zjistíme proto matici $(\mathcal{B}',\mathcal{B})$.

Zřejmě

$$(\mathcal{B},\mathcal{B}')=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jak známo $(\mathcal{B}',\mathcal{B})=(\mathcal{B},\mathcal{B}')^{-1}$. Výpočtem zjistíme, že:

$$(\mathcal{B}',\mathcal{B})=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

a tudíž

$$(f,\mathcal{B},\mathcal{C})=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

což je pochopitelně týž výsledek, jako v příkladu B.

Povšimněme si nyní významu hodnosti matice homomorfizmu.

Buď dán homomorfizmus $f:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ a $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ po řadě báze prostorů $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$.

Z definice 1 matice homomorfizmu, označíme-li $\mathcal{B}=\langle\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\rangle$, plyne:

$$(f,\mathcal{B},\mathcal{C})=\begin{pmatrix} \{f(\mathbf{e}_1)\}_{\mathcal{C}} \\ \vdots \\ \{f(\mathbf{e}_n)\}_{\mathcal{C}} \end{pmatrix}.$$

Dle věty 1.12.3 je $f(\mathbf{e}_1),\dots,f(\mathbf{e}_n)$ množina generátorů prostoru $\mathrm{Im}f\subseteq\mathbf{W}$, a protože

$$[f(\mathbf{e}_1),\dots,f(\mathbf{e}_n)]\cong[\{f(\mathbf{e}_1)\}_{\mathcal{C}},\dots,\{f(\mathbf{e}_n)\}_{\mathcal{C}}],$$

kde příslušným izomorfizmem je soustava souřadnic $\sigma_{\mathcal{B}}$, dostáváme:

$$\mathrm{Im}f\cong[\{f(\mathbf{e}_1)\}_{\mathcal{C}},\dots,\{f(\mathbf{e}_n)\}_{\mathcal{C}}],$$

odkud vzhledem k definici hodnosti matice plyne (jak?):

$$\dim \mathrm{Im}f = \mathrm{h}(f,\mathcal{B},\mathcal{C}).$$

Uvážíme-li dále, že vektorový prostor $\mathrm{Im}f$ (a tedy ani jeho dimenze) nijak nezávisí na výběru bází v prostorech $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$, platí věta následující:

8. Věta *Buďte f homomorfizmus* $\mathbf{V}$ *do* $\mathbf{W}$ *a $\mathcal{B},\mathcal{B}'$, resp. $\mathcal{C},\mathcal{C}'$, libovolné báze prostoru* $\mathbf{V}$*, resp.* $\mathbf{W}$*. Pak platí*[19]

$$\boxed{\mathrm{h}(f,\mathcal{B},\mathcal{C})=\mathrm{h}(f,\mathcal{B}',\mathcal{C}')=\dim\mathrm{Im}f.}$$

Nechť nadále $f\in\mathcal{H}om(\mathbf{V},\mathbf{W})$. Jak víme, je v případě, kdy f je izomorfizmem, $\dim\mathrm{Ker}f=0 \wedge \dim\mathrm{Im}f=\dim\mathbf{V}$. Dále, je-li $f=o$[20], pak $\dim\mathrm{Ker}f=\dim\mathbf{V} \wedge \dim\mathrm{Im}f=0$.

V obou těchto případech platí

$$\dim\mathrm{Ker}f+\dim\mathrm{Im}f=\dim\mathbf{V}.$$

Všimněme si nyní této otázky obecně.

Vyšetřeme jádro homomorfizmu. Zvolíme-li ve $\mathbf{V}$ některou bázi $\mathcal{B}$, můžeme užitím definice jádra a věty 2 psát[21]:

$$\mathbf{x}\in\mathrm{Ker}f \Leftrightarrow f(\mathbf{x})=\mathbf{o} \Leftrightarrow (0,\dots,0)=\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}}(f,\mathcal{B},\mathcal{C}),$$

---

[19]) dimenze $\mathrm{Im}f$ se značívá také $\mathrm{h}(f)$ a nazývá se *hodnost homomorfizmu f.*

[20]) tzv. *nulový homomorfizmus* - definován předpisem:

$$\forall\mathbf{x}\in\mathbf{V}:\ o(\mathbf{x})=\mathbf{o}.$$

[21]) je volba báze $\mathcal{C}$ ve $\mathbf{W}$ podstatná?

neboli transponováním poslední rovnosti:

$$\mathbf{x}\in\mathrm{Ker}f \Leftrightarrow (f,\mathcal{B},\mathcal{C})^{\mathrm{T}}\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}. \qquad (9\text{-}1)$$

Z relace (9-1) je patrno, že vektor **x** náleží jádru homomorfizmu f, právě když jeho souřadnice v (libovolně zvolené) bázi $\mathcal{B}$ vyhovují homogenní soustavě lineárních rovnic, jejíž maticí je $(f,\mathcal{B},\mathcal{C})^{\mathrm{T}}$, což značí, že Ker$f$ je izomorfní aritmetickému vektorovému prostoru řešení této soustavy, a tudíž[22])

$$\dim\mathrm{Ker}f=\dim\mathbf{V} - h((f,\mathcal{B},\mathcal{C})^{\mathrm{T}}),$$

neboli (srv. věta 8):

$$\dim\mathrm{Ker}f+\dim\mathrm{Im}f=\dim\mathbf{V}.$$

Odvodili jsme tedy platnost věty následující[23]):

9. Věta *Buď f homomorfizmus* **V** *do* **W**. *Pak platí:*

$$\boxed{\dim\mathrm{Ker}f+\dim\mathrm{Im}f=\dim\mathbf{V}.}$$

Odtud a z věty 1.10 plyne:

10. Důsledek *Buď f homomorfizmus* **V** *do* **W** *a nechť* dim**V**=dim**W**. *Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(1) f je izomorfizmus.

(2) f je epimorfizmus.

(3) f je monorfizmus.

Odtud a z věty 8 obdržíme:

11. Důsledek *Homomorfizmus je izomorfizmem* **V** *na* **W**, *právě když jeho matice v jedné (a tudíž v každé) dvojici bází prostoru* **V** *a* **W** *je regulární.*

---

[22]) počet neznámých je přece roven dim**V**.

[23]) o dimenzi Ker$f$ se často hovoří jako o *defektu homomorfizmu*, snad proto, že vyjadřuje jakousi „odchylku" od jeho injektivity.

Příklad D

Buďte **V**, **W** vektorové prostory a uvažujme homomorfizmus $f:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ dané vzhledem ke zvoleným bázím $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ analytickým vyjádřením

$$\begin{aligned} y_1&=x_1+2x_2-\ x_3\\ y_2&=x_1+5x_2-5x_3\\ y_3&=\quad\ \ 3x_2-4x_3\\ y_4&=x_1+8x_2-9x_3 \end{aligned}$$

Najděte jeho obraz.

Řešení (srovnejte s řešením Příkladu 1.B):

Při odvození věty 8 jsme zjistili, že, je-li $\mathcal{B}=\langle \mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\rangle$, pak:

$$\mathrm{Im}f=[f(\mathbf{e}_1),\dots,f(\mathbf{e}_n)]\cong[\{f(\mathbf{e}_1)\}_{\mathcal{C}},\dots,\{f(\mathbf{e}_n)\}_{\mathcal{C}}].$$

Sestrojme tedy matici homomorfizmu f:

$$(f,\mathcal{B},\mathcal{C})=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 5 & 3 & 8\\ -1 & -5 & -4 & -9 \end{pmatrix}.$$

Pak můžeme psát:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 5 & 3 & 8\\ -1 & -5 & -4 & -9 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

a proto

$$\mathrm{Im}f=\{\mathbf{y}\in\mathbf{W},\{\mathbf{y}\}_{\mathcal{C}}\in[(1,1,0,1),(0,1,1,2)]\},$$

což je týž výsledek, jako v příkladu 1.B.

Zabývejme se nyní otázkou, zda pro daný $f\in\mathcal{H}om(\mathbf{V},\mathbf{W})$ lze vhodnou volbou bází $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ po řadě prostorů **V**, **W**, docílit zjednodušení analytického vyjádření (matice) homomorfizmu f.

Zvolíme-li bázi $\mathcal{B}=\langle \mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_r,\mathbf{e}_{r+1},\dots,\mathbf{e}_n\rangle$ tak, že vektory $\mathbf{e}_{r+1},\dots,\mathbf{e}_n$ tvoří bázi Ker$f$ a $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_r$ jsou libovolné vektory, které je (ve smyslu Steinitzovy věty) doplňují na bázi prostoru **V**[24]), zřejmě platí:

[24]) a jsou tedy bází jistého podprostoru **M** s vlastností

$$\mathbf{V}=\mathbf{M}\oplus\mathrm{Ker}f$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(i)} & f(\mathbf{e}_i)\neq\mathbf{o},\ i=1,\dots,r \\ \text{(ii)} & f(\mathbf{e}_i)=\mathbf{o},\ i=r+1,\dots,n\end{array}\right\} \qquad (12\text{-}1)$$

Dle věty 1.12.3 je $f(\mathbf{e}_1),\dots,f(\mathbf{e}_n)$ množina generátorů prostoru $\mathrm{Im}f\subseteq\mathbf{W}$, a vzhledem k (12-1) lze psát:

$$[f(\mathbf{e}_1),\dots,f(\mathbf{e}_r)]=\mathrm{Im}f.$$

Protože $\dim\mathrm{Ker}f=n-r$, plyne z věty 9, že $r=\dim\mathrm{Im}f$, tedy vektory

$$\mathbf{d}_1=f(\mathbf{e}_1),\dots,\mathbf{d}_r=f(\mathbf{e}_r) \qquad (12\text{-}2)$$

jsou lin.nezávislé a můžeme je doplnit na bázi $\mathcal{C}$ prostoru $\mathbf{W}$:

$$\mathcal{C}=\langle\mathbf{d}_1,\dots,\mathbf{d}_r,\mathbf{d}_{r+1},\dots,\mathbf{d}_m\rangle.$$

Jak bude znít matice $(f,\mathcal{B},\mathcal{C})=(a_{ij})_{nm}$? S ohledem na definici matice homomorfizmu (definice 1), zavedení vektorů $\mathbf{d}_1,\dots,\mathbf{d}_r$ (relace (12-2)) a relaci (ii) z (12-1) plyne[25]):

$$a_{(i)}=\{f(\mathbf{e}_i)\}_{\mathcal{C}}=(\delta_{1i},\delta_{2i},\dots,\delta_{mi}) \text{ pro } i=1,\dots,r,$$

$$a_{(i)}=\{f(\mathbf{e}_i)\}_{\mathcal{C}}=(0,0,\dots,0) \text{ pro } i=r+1,\dots,n,$$

neboli

$$\boxed{(f,\mathcal{B},\mathcal{C}) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{E}_r & \begin{matrix}0\dots0\\ \dots\dots\\ 0\dots0\end{matrix} \\ \hline 0\dots\dots\dots0 & \\ 0\dots\dots\dots0 & \end{array}\right),} \qquad (12\text{-}3)$$

kde blokem $\mathbf{E}_r$ je jednotková matice řádu r.

Napište si analytické vyjádření homomorfizmu f v bázích $\mathcal{B},\mathcal{C}$!

Platí tedy tato věta:

12.Věta *Buď f homomorfizmus* **V** *do* **W**. *Pak existují báze $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ po řadě prostorů* **V**, **W** *tak, že matice homomorfizmu f v těchto bázích má tvar* (12-3), *kde* $r=\dim\mathrm{Im}f$.

---

[25]) symbolem $a_{(i)}$ značíme i-tý řádek matice $(a_{ij})_{nm}$, $a_{(i)}\in\mathbb{T}^m$

Lze ukázat (a touto otázkou se budete dále v kurzu lin. algebry zabývat), že pro endomorfizmus (tj. případ, kdy **V**=**W**) a volbu $\mathcal{B}=\mathcal{C}$ nelze obecně nalézt takovou bázi $\mathcal{B}$, aby matice endomorfizmu v této bázi byla diagonální[26]).

Příklad E

Buďte **V**, **W** vektorové prostory a uvažujme homomorfizmus f: **V**→**W** dané vzhledem ke zvoleným bázím $\mathcal{A},\mathcal{D}$ analytickým vyjádřením

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1+2x_2-x_3 \\ y_2 &= x_1+5x_2-5x_3 \\ y_3 &= \phantom{x_1+{}}3x_2-4x_3 \\ y_4 &= x_1+8x_2-9x_3 \ . \end{aligned}$$

Najděte báze $\mathcal{B},\mathcal{C}$ po řadě prostorů **V**, **W** tak, aby matice homomorfizmu f v těchto bázích měla tvar (12-3) a napište příslušné analytické vyjádření.

Řešení

Báze zkonstruujeme tak, jak jsme to učinili v důkazu věty 12. V příkladu 1.B jsme zjistili, že jádro homomorfizmu f je generováno vektorem **e**, $\{\mathbf{e}\}_{\mathcal{A}}=(-5,4,3)$. Tento vektor doplňují na bázi $\mathcal{B}$ prostoru **V** např. vektory mající v bázi $\mathcal{A}$ souřadnice (1,0,0), (0,1,0)[27]). Tedy:

$$\mathcal{B}=\langle \mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\rangle,$$
$$\{\mathbf{e}_1\}_{\mathcal{A}}=(1,0,0),\ \{\mathbf{e}_2\}_{\mathcal{A}}=(0,1,0),\ \{\mathbf{e}_3\}_{\mathcal{A}}=(-5,4,3).$$

Zobrazíme-li vektory $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ v homomorfizmu f, obdržíme vektory $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$:

$$\{\mathbf{d}_1\}_{\mathcal{D}}=(1,1,0,1),\ \{\mathbf{d}_2\}_{\mathcal{D}}=(2,5,3,8).$$

Tyto vektory doplňují na bázi $\mathcal{C}$ prostoru **W** např. vektory mající v bázi $\mathcal{D}$ souřadnice (0,0,1,0), (0,0,0,1), tedy

---

[26]) viz např. [11]

[27]) přesvědčíme se o tom např. tak, že matice sestavená ze souřadnic všech tří vektorů má hodnost rovnu 3

$$\mathcal{C}=\langle \mathbf{d}_1,\mathbf{d}_2,\mathbf{d}_3,\mathbf{d}_4\rangle,$$

$$\{\mathbf{d}_1\}_{\mathcal{D}}=(1,1,0,1),\ \{\mathbf{d}_2\}_{\mathcal{D}}=(2,5,3,8),\ \{\mathbf{d}_3\}_{\mathcal{D}}=(0,0,1,0),$$
$$\{\mathbf{d}_4\}_{\mathcal{D}}=(0,0,0,1).$$

Matice homomorfizmu f v bázích $\mathcal{B}$,$\mathcal{C}$ zní[28]):

$$(f,\mathcal{B},\mathcal{C})=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

příslušné analytícké vyjádření má tvar:

$$f:\ \begin{aligned} \bar{y}_1 &= \bar{x}_1 \\ \bar{y}_2 &= \bar{x}_2 \\ \bar{y}_3 &= 0 \\ \bar{y}_4 &= 0. \end{aligned}$$

---

[28]) proveďte zkoušku přímým výpočtem matice $(f,\mathcal{B},\mathcal{C})$ užitím věty 7.

3. Vektorový prostor homomorfizmů

V této kapitole vybudujeme na množině $\mathcal{Hom}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ vektorový prostor.

Zvolme libovolné $f,g\in\mathcal{Hom}(\mathbf{V},\mathbf{W})$. Definujme zobrazení označené $f+g$ a definované vztahem:

$$\left.\begin{aligned} f+g\colon\ &\mathbf{V}\to\mathbf{W},\\ \forall\mathbf{x}\in\mathbf{V}\colon\ &(f+g)(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})+g(\mathbf{x})\end{aligned}\right\} \tag{1-1}$$

Je mechanickou záležitostí verifikovat (proveďte!), že

$$f+g\in\mathcal{Hom}(\mathbf{V},\mathbf{W}),$$

jakož i to, že

$$\left.\begin{aligned} \forall f,g\in\mathcal{Hom}(\mathbf{V},\mathbf{W})\colon\ &f+g=g+f,\\ \forall f,g,h\in\mathcal{Hom}(\mathbf{V},\mathbf{W})\colon\ &(f+g)+h=f+(g+h).\end{aligned}\right\} \tag{1-2}$$

Zvolme libovolné $f\in\mathcal{Hom}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ a $t\in\mathbb{T}$. Definujme zobrazení označené $t\cdot f$ a definované vztahem:

$$\left.\begin{aligned} t\cdot f\colon\ &\mathbf{V}\to\mathbf{W},\\ \forall\mathbf{x}\in\mathbf{V}\colon\ &(t\cdot f)(\mathbf{x})=t(f(\mathbf{x}))\end{aligned}\right\} \tag{1-3}$$

I zde je mechanickou záležitostí ověřit, že[29]

$$t\cdot f\in\mathcal{Hom}(\mathbf{V},\mathbf{W}).$$

Definujeme-li dále[30]

$$\left.\begin{aligned} o\colon\ &\mathbf{V}\to\mathbf{W},\\ \forall\mathbf{x}\in\mathbf{V}\colon\ &o(\mathbf{x})=\mathbf{o},\end{aligned}\right\} \tag{1-4}$$

přičemž je evidentní, že $o\in\mathcal{Hom}(\mathbf{V},\mathbf{W})$,

a pro každé $f\in\mathcal{Hom}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ definujeme homomorfizmus $-f$:

$$-f=(-1)f, \tag{1-5}$$

snadno se ověří, že množina $\mathcal{Hom}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ spolu se zobrazením

---

[29]) vzhledem k tomu, že typograficky odlišujeme skaláry a homomorfizmy, nemůže dojít k nedorozumění a namísto $t\cdot f$ budeme nadále psát jen tf.

[30]) jak jsme již uvedli dříve, značíme nulové vektory ve všech vektorových prostorech týmž symbolem $\mathbf{o}$.

$$+:\mathcal{H}om(\mathbf{V},\mathbf{W})\times\mathcal{H}om(\mathbf{V},\mathbf{W})\to\mathcal{H}om(\mathbf{V},\mathbf{W})$$

definovaným relací (1-2) je *komutativní grupou* s nulovým prvkem o definovaným relací (1-4) (nadále bude nazýván *nulový homomorfizmus*), kde ke každému prvku f je opačným prvkem $-f$ definovaný relací (1-5) (nadále bude nazýván *homomorfizmus opačný k homomorfizmu f*).

Relací (1-3) je definováno zobrazení

$$\cdot:\mathbb{T}\times\mathcal{H}om(\mathbf{V},\mathbf{W})\to\mathcal{H}om(\mathbf{V},\mathbf{W}).$$

Je mechanickou záležitostí ponechanou čtenáři ověřit, že platí:

$\forall \mathrm{t},\mathrm{r}\in\mathbb{T},\ \forall f,g\in\mathcal{H}om(\mathbf{V},\mathbf{W})$:

$$\mathrm{t}(f+g)=(\mathrm{t}f)+(\mathrm{t}f),$$
$$\mathrm{t}(\mathrm{r}f)=(\mathrm{tr})f,$$
$$(\mathrm{t}+\mathrm{r})f=\mathrm{t}f+\mathrm{r}f,$$
$$1f=f.$$

To ovšem spolu se skutečností, že $(\mathcal{H}om(\mathbf{V},\mathbf{W}),+)$ je komutativní grupa značí, že $(\mathcal{H}om(\mathbf{V},\mathbf{W}),+,\mathbb{T},\cdot)$ je *vektorový prostor*.

Pojmenujme nyní zobrazení $+,\cdot$ a shrňme získané poznatky do věty.

1.Definice Buďte f,g homomorfizmy $\mathbf{V}$ do $\mathbf{W}$, t skalár z $\mathbb{T}$. Pak *součtem homomorfizmů f a g* rozumíme zobrazení $f+g$: $\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ definované vztahem

$$\boxed{\forall \mathbf{x}\in\mathbf{V}:\ (f+g)(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})+g(\mathbf{x}),}$$

skalárním t-násobkem homomorfizmu f nazýváme zobrazení $\mathrm{t}f$: $\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ definované vztahem

$$\boxed{\forall \mathbf{x}\in\mathbf{V}:\ (\mathrm{t}f)(\mathbf{x})=\mathrm{t}\cdot f(\mathbf{x}).}$$

2.Věta *Množina $\mathcal{H}om(\mathbf{V},\mathbf{W})$ spolu se sčítáním homomorfizmů a násobením homomorfizmu skalárem z $\mathbb{T}$ tvoří vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{T}$.*

Je nyní přirozenou otázkou, jaká bude matice součtu homomorfizmu a skalárního násobku homomorfizmu.

Uvažujme homomorfizmy $f,g\in\mathcal{Hom}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ a zvolme libovolně báze $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ po řadě prostorů $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$, $\mathcal{B}=\langle\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\rangle$, $\mathcal{C}=\langle\mathbf{d}_1,\dots,\mathbf{d}_m\rangle$.
Nechť $(f,\mathcal{B},\mathcal{C})=(f_{ij})$, $(g,\mathcal{B},\mathcal{C})=(g_{ij})$.
Pak, užijeme-li definici součtu homomorfizmů (rovnost (a)) a definici matice homomorfizmu (rovnost (b)), dostáváme pro $i=1,\dots,n$:

$$(f+g)(\mathbf{e}_i)\overset{(a)}{=}f(\mathbf{e}_i)+g(\mathbf{e}_i)\overset{(b)}{=}\sum_{j=1}^{m}f_{ij}\mathbf{d}_j+\sum_{j=1}^{m}g_{ij}\mathbf{d}_j=\sum_{j=}^{m}(f_{ij}+g_{ij})\mathbf{d}_j,$$

což s ohledem na definici sčítání matic (a definici matice homomorfizmu) značí, že:

$$(f+g,\mathcal{B},\mathcal{C})=(f,\mathcal{B},\mathcal{C})+(g,\mathcal{B},\mathcal{C}).$$

Odvodili jsme platnost věty následující (druhá část tvrzení se dokáže zcela analogicky).

3. Věta *Buďte f,g homomorfizmy $\mathbf{V}$ do $\mathbf{W}$ a t skalár z $\mathbb{T}$. Pak pro libovolné báze $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ po řadě prostorů $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ platí:*

$$\boxed{\begin{aligned}(f+g,\mathcal{B},\mathcal{C})&=(f,\mathcal{B},\mathcal{C})+(g,\mathcal{B},\mathcal{C}),\\ (tf,\mathcal{B},\mathcal{C})&=t(f,\mathcal{B},\mathcal{C}).\end{aligned}}$$

4. Poznámka S přihlédnutím k větě 2.4 by bylo možné definovat součet matic a skalární násobek matice právě pomocí vztahů ve větě 3, což se v některých kurzech lineární algebry užívá.

Z vět 2.4, 1.18 a právě uvedené věty 3 plyne ihned:

5. Důsledek *Množina $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{T})$ spolu se sčítáním matic a násobením matice skalárem z $\mathbb{T}$ tvoří vektororový prostor izomorfní s prostorem $\mathcal{Hom}(\mathbf{V}_n,\mathbf{W}_m)$.*

Jsou-li $\mathcal{B},\mathcal{C}$ báze po řadě prostorů $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$, pak zobrazení $\mathrm{H}_{\mathcal{BC}}$ definované vztahem (2.4-1) je izomorfizmem vektorových prostorů $\mathcal{Hom}(\mathbf{V}_n,\mathbf{W}_m)$ a $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{T})$.

Nyní se zabývejme stanovením dimenze prostoru $\mathcal{Hom}(\mathbf{V},\mathbf{W})$[31]) a nalezením některé jeho báze.

Uvažujme libovolné báze $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ po řadě prostorů $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$, $\mathcal{B}=\langle \mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\rangle$, $\mathcal{C}=\langle \mathbf{d}_1,\dots,\mathbf{d}_m\rangle$.

Definujme nyní systém homomorfizmů z $\mathcal{Hom}(\mathbf{V},\mathbf{W})$

$$\mathcal{E}=\langle e_{11},e_{12},\dots,e_{1m},e_{21},\dots,e_{2m},\dots,e_{n1},\dots,e_{nm}\rangle \tag{6-1}$$

takto:

$$\boxed{\forall i,j,1\le i\le n,1\le j\le m:\ e_{ij}(\mathbf{e}_k)=\delta_{ik}\mathbf{d}_j,\ k=1,\dots,n^{32)}.} \tag{6-2}$$

Odtud a z definice matice homomorfizmu e_{ij}, $1\le i\le n$, $1\le j\le m$, plyne:

$$\boxed{(e_{ij},\mathcal{B},\mathcal{C})=(\mathrm{e}_{kl}),\ \mathrm{e}_{kl}=(\delta_{ik}\delta_{jl}),\ 1\le k\le n,\ 1\le l\le m.} \tag{6-3}$$

Označme tuto matici symbolem $\mathbf{E}_{ij}$ pro přípustná i,j.[33])

Uvážíme-li, že pro libovolnou $\mathbf{C}=(c_{ij})\in\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{T})$ platí:

$$\mathbf{C}=\sum_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}} c_{ij}\mathbf{E}_{ij}\,{}^{34)},$$

pak, zvolíme-li libovolný homomorfizmus $f\in\mathcal{Hom}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ a označíme-li $(f,\mathcal{B},\mathcal{C})=(a_{ij})$, dostáváme:

---

[31]) Tím na základě předchozí věty současně nalezneme dimenzi prostoru $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{T})$.

[32]) To značí:
$$k\ne i \Rightarrow e_{ij}(\mathbf{e}_k)=\mathbf{o},$$
$$k=i \Rightarrow e_{ij}(\mathbf{e}_k)=\mathbf{d}_j.$$

[33]) zřejmě prvek na pozici (i,j) je roven 1 a ostatní její prvky jsou rovny 0, což můžeme schematicky naznačit takto:

$$\mathbf{E}_{ij}=\begin{array}{c} \qquad j \\ \begin{pmatrix} 0. & & ..0 \\ .. & & ... \\ 0. & 1 & ..0 \\ .. & & ... \\ 0. & & ..0 \end{pmatrix} \end{array} \cdots i$$

[34]) Opravdu - pro prvek b_{kl}, $1\le k\le n$, $1\le l\le m$, matice $\mathbf{B}=(\sum_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}} c_{ij}\mathbf{E}_{ij})$ platí:
$$b_{kl}=\sum_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}} c_{ij}(\mathbf{E}_{ij})_{kl}=\sum_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}} c_{ij}(\delta_{ik}\delta_{jl})=c_{kl},$$
neboli
$$\mathbf{C}=\mathbf{B}.$$

$$(f,\mathcal{B},\mathcal{C}) = \sum_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}} a_{ij}\mathbf{E}_{ij} \overset{(a)}{=} \sum_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}} a_{ij}(e_{ij},\mathcal{B},\mathcal{C}) \overset{(b)}{=} \sum_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}} (a_{ij}e_{ij},\mathcal{B},\mathcal{C}) \overset{(c)}{=}$$

$$=((\sum_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}} a_{ij}e_{ij}),\mathcal{B},\mathcal{C}),$$

přičemž v rovnosti (a) bylo užito relace (6-3) a v rovnostech (b) a (c) věty 3.

To je dle důsledku 2.5 ekvivalentní následující rovnosti:

$$f=\sum_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}} a_{ij}e_{ij}. \tag{6-4}$$

Protože homomorfizmus f byl libovolný, znamená rovnost (6-4), že systém homomorfizmů $\mathcal{E}$ je množinou generátorů prostoru $\mathcal{H}om(\mathbf{V},\mathbf{W})$.[35]

Vyšetřeme nyní její lineární závislost.

Nechť

$$\sum_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}} g_{ij}e_{ij}=o, \tag{6-5}$$

což značí, že homomorfizmus g, pro nějž

$$g=\sum_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}} g_{ij}e_{ij},$$

je nulový a současně, jak jsme zjistili výše, je $\mathbf{G}=(g_{ij})$ jeho maticí v bázích $\mathcal{B},\mathcal{C}$. Jelikož však nulový homomorfizmus má v jakékoli dvojici bází toliko matici nulovou (proč?), dostáváme

$$g_{ij}=0,\ 1\le i\le n,\ 1\le j\le m,$$

což s ohledem na (6-5) značí, že systém $\mathcal{E}$ je lineárně nezávislý, tedy je bází prostoru $\mathcal{H}om(\mathbf{V},\mathbf{W})$.

Odvodili jsme tak platnost tvrzení následujících:

---

[35]) současně jsme ukázali, že prvky matice homomorfizmu f mají význam koeficientů lineární kombinace, jíž je f roven.

6. Věta *Buďte* **V**, **W** *vektorové prostory. Pak platí:*

(1) $\dim \mathcal{H}om(\mathbf{V},\mathbf{W}) = \dim \mathbf{V} . \dim \mathbf{W}$,

(2) jsou-li $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{B}=\langle \mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n \rangle$, $\mathcal{C}=\langle \mathbf{d}_1,\dots,\mathbf{d}_m \rangle$, *báze po řadě prostorů* **V**, **W**, *pak systém homomorfizmů*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}=\langle e_{11}, e_{12}, \dots, e_{1m}, e_{21}, \dots, e_{2m}, \dots, e_{n1}, \dots, e_{nm} \rangle,$$

definovaných relací (6-2), *je bází prostoru* $\mathcal{H}om(\mathbf{V},\mathbf{W})$,

(3) jsou-li $\mathcal{B},\mathcal{C}$ *báze po řadě prostorů* **V**, **W**, *pak platí:*

$$\boxed{(f,\mathcal{B},\mathcal{C})=(a_{ij}) \Leftrightarrow f=\sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} a_{ij} e_{ij}.^{36)}}$$

---

[36]) prvky matice homomorfizmu v bázích $\mathcal{B},\mathcal{C}$ mají současně význam souřadnic tohoto homomorfizmu v bázi $\mathcal{E}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$.

4. Skládání homomorfizmů

Uvažujme nyní trojici vektorových prostorů $\mathbf{U},\mathbf{V},\mathbf{W}$ (nad týmž tělesem) a zvolme $f\in\mathcal{H}om(\mathbf{U},\mathbf{V})$ a $g\in\mathcal{H}om(\mathbf{V},\mathbf{W})$. Zkonstruujme složené zobrazení[37]) $f\circ g:\mathbf{U}\to\mathbf{W}$ a zkoumejme, zda je homomorfizmem.

Buďte $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{U}$. Pak můžeme psát:

$$(f\circ g)(\mathbf{x}+\mathbf{y})\overset{(a)}{=}g(f(\mathbf{x}+\mathbf{y}))\overset{(b)}{=}g(f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y}))\overset{(c)}{=}g(f(\mathbf{x}))+g(f(\mathbf{y}))\overset{(d)}{=}$$
$$=(f\circ g)(\mathbf{x})+(f\circ g)(\mathbf{y}),$$

kde jsme v rovnostech (a) a (d) užili definici skládání zobrazení, v (b), resp. (c), faktu, že f, resp. g, je homomorfizmus.

Analogicky bychom zjistili, že pro $\mathbf{x}\in\mathbf{U}$, $t\in\mathbb{T}$:

$$(f\circ g)(t\cdot\mathbf{x})=t\cdot((f\circ g)(\mathbf{x})),$$

platí tedy tato věta:

1.Věta *Buďte $\mathbf{U},\mathbf{V},\mathbf{W}$ vektorové prostory. Pak pro libovolné homomorfizmy $f\in\mathcal{H}om(\mathbf{U},\mathbf{V})$ a $g\in\mathcal{H}om(\mathbf{V},\mathbf{W})$ platí, že $f\circ g\in\mathcal{H}om(\mathbf{U},\mathbf{W})$.*

Vyšetřeme nyní matici složení homomorfizmů.

Uvažujme $f\in\mathcal{H}om(\mathbf{U},\mathbf{V})$ a $g\in\mathcal{H}om(\mathbf{V},\mathbf{W})$ a zvolme v prostorech $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ po řadě báze $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ takto:

$$\mathcal{B}=\langle\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_n\rangle,\quad \mathcal{C}=\langle\mathbf{c}_1,\dots,\mathbf{c}_m\rangle,\quad \mathcal{D}=\langle\mathbf{d}_1,\dots,\mathbf{d}_p\rangle.$$

Položme dále: $(f,\mathcal{B},\mathcal{C})=(f_{ij})$ $(g,\mathcal{C},\mathcal{D})=(g_{hk})$

Pro libovolné $i=1,\dots,n$ můžeme psát:

$$(f\circ g)(\mathbf{b}_i)=g(f(\mathbf{b}_i))\overset{(a)}{=}g\Big(\sum_{j=1}^{m}f_{ij}\mathbf{c}_j\Big)\overset{(b)}{=}\sum_{j=1}^{m}f_{ij}g(\mathbf{c}_j)\overset{(c)}{=}\sum_{j=1}^{m}f_{ij}\Big(\sum_{k=1}^{p}g_{jk}\mathbf{d}_k\Big)=$$
$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}(f_{ij}g_{jk})\mathbf{d}_k\overset{(d)}{=}\sum_{k=1}^{p}\Big(\sum_{j=1}^{m}f_{ij}g_{jk}\Big)\mathbf{d}_k,$$

což vzhledem k definici matice homomorfizmu značí, že

---

[37]) V tomto textu budeme složení $f\circ g$ definovat relací

$$\forall\mathbf{x}\in\mathbf{U}:\ (f\circ g)(\mathbf{x})=g(f(\mathbf{x})).$$

$$\sum_{j=1}^{n} f_{ij}g_{jk}$$

představuje prvek na pozici (i,k) matice $(f\circ g,\mathcal{B},\mathcal{D})$.
Současně[38]) jde o prvek na téže pozici součinu matic

$$(f,\mathcal{B},\mathcal{C})(g,\mathcal{C},\mathcal{D}),$$

obě matice jsou si tedy rovny.
Přitom v rovnosti (a),(c) bylo užito definice matice homomorfizmu,v rovnosti (b) věty 1.11 a v (d) jsme zaměnili pořadí sumace.
Dokázali jsme tak následující větu[39]):

2.Věta *Buďte* **U**,**V**,**W** *vektorové prostory a* $f\in\mathcal{H}om(\mathbf{U},\mathbf{V})$, $g\in\mathcal{H}om(\mathbf{V},\mathbf{W})$. *Pak, jsou-li* $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ *libovolné báze po řadě prostorů* **U**,**V**,**W**, *platí:*

$$\boxed{(f\circ g,\mathcal{B},\mathcal{D})=(f,\mathcal{B},\mathcal{C})(g,\mathcal{C},\mathcal{D}).}$$

Uvážíme-li, že identita na daném vektorovém prostoru je endomorfizmem tohoto prostoru majícím v kterékoli bázi matici jednotkovou příslušného řádu, pak z právě uvedené věty a důsledku 2.11 plyne:

3.Důsledek *Buď f homomorfizmus* **V** *do* **W** *a* $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ *libovolné báze po řadě prostorů* **V** *a* **W**. *Pak platí:*

$$\boxed{(f^{-1},\mathcal{C},\mathcal{B})=(f,\mathcal{B},\mathcal{C})^{-1}.}$$

Užitím věty 1, definice skládání zobrazení a definice součtu homomorfizmů a násobení homomorfizmu skalárem snadno odvodíme větu následující (proveďte!):

---

[38]) vzhledem k definici násobení matic

[39]) promyslete si její odvození užitím maticového zápisu analytického vyjádření!

4. Věta *Buďte* $\mathbf{U},\mathbf{V},\mathbf{W}$ *vektorové prostory,* $f,g\in\mathcal{Hom}(\mathbf{U},\mathbf{V})$, $h,k\in\mathcal{Hom}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ *a* $\mathrm{t}\in\mathbb{T}$. *Pak platí:*

(1) $(f+g)\circ h = f\circ h+g\circ h$,

(2) $f\circ(h+k) = f\circ h+f\circ k$,

(3) $(\mathrm{t}f)\circ h = \mathrm{t}(f\circ h) = f\circ(\mathrm{t}h)$.

5. Poznámka Tvrzení (3) předešlé věty bývá někdy nazýváno *kompatibilita skládání homomorfizmů a násobení homomorfizmu skalárem.*

Vyplývá odtud rovnost skalárního t-násobku homomorfizmu f, $f\in\mathcal{Hom}(\mathbf{V},\mathbf{W})$, a složení homomorfizmu $(\mathrm{t}i)$, kde i je identita na $\mathbf{U}$, s tímto homomorfizmem - tedy:

$$\forall \mathrm{t}\in\mathbb{T}, \forall f\in\mathcal{Hom}(\mathbf{U},\mathbf{V}):\ \mathrm{t}f=(\mathrm{t}i)\circ f$$

čili můžeme *identifikovat skalár* t *s homomorfizmem* t*i*. Nemusíme typograficky odlišovat násobení homomorfizmu skalárem $(\cdot)$ od skládání homomorfizmů $(\circ)$ a lze psát jen $\mathrm{t}fh$.

Věta 4 bude mít význam rovněž pro zkoumání množiny endomorfizmů vektorového prostoru spolu se skládáním homomorfizmů, sčítáním homomorfizmů a násobením homomorfizmu skalárem, čemuž bude věnována další partie kurzu lineární algebry.

6. Označení Buď $\mathbf{V}$ vektorový prostor. Množinu všech automorfizmů prostoru $\mathbf{V}$ označovat $\mathcal{Aut}(\mathbf{V})$.

Buď $f\in\mathcal{Aut}(\mathbf{V})$, $\mathcal{B}$ báze prostoru $\mathbf{V}$. Pak namísto $(f,\mathcal{B},\mathcal{B})$ budeme psát toliko $(f,\mathcal{B})$.

Čtenáři je známo, že složení dvou bijekcí dané množiny je opět bijekce téže množiny - neboli $\mathcal{Aut}(\mathbf{V})$ je uzavřena vzhledem ke skládání automorfizmů. Vzhledem k tomu, že identita na $\mathbf{V}$ je automorfizmem (proč?), a tedy neutrálním prvkem grupoidu $(\mathcal{Aut}(\mathbf{V}),\circ)$, a protože dle věty 1.9 je inverzní zobrazení k libovolnému automorfizmu prostoru $\mathbf{V}$ opět automorfizmem tohoto prostoru, platí věta následující:

7. Věta *Buď* **V** *vektorový prostor. Pak množina* $\mathcal{A}ut(\mathbf{V})$ *spolu se skládáním homomorfizmů tvoří grupu.*

Z důsledku 2.11 plyne bezprostředně:

8. Věta *Endomorfizmus prostoru* **V** *je automorfizmem tohoto prostoru, právě když jeho matice v jedné (a tudíž v každé) bázi prostoru* **V** *je regulární.*

Odtud s ohledem na větu 2.4 a větu 4.2 odtud dostáváme[40]):

9. Důsledek *Množina regulárních matic nad* $\mathbb{T}$ *řádu* n *spolu s násobením matic tvoří grupu izomorfní s grupou automorfizmů vektorového prostoru* $\mathbf{V}_n$[41]).

Je-li $\mathcal{B}$ *báze prostoru* **V**, *pak zobrazení* $H_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ *definované vztahem* (2.4-1) *je izomorfizmem grup* $(Aut(\mathbf{V}_n),\circ)$ *a* $L_n(\mathbb{T})$.

Zabývejme se nyní významem matice automorfizmu. Uvážíme-li větu 1.12.(5) a větu 1.13, vidíme, že při zvolené bázi $\mathcal{B}$ prostoru

---

[40]) připomeňme ještě následující tvrzení:

Buď $(\mathbf{G},\cdot)$ *grupa a* **R** *množina spolu se zobrazením* $\odot:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$. *Jestliže existuje bijekce* $H:\mathbf{G}\to\mathbf{R}$ *s vlastností* $\forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{G}$:

$$H(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})=H(\mathbf{u})\odot H(\mathbf{v}),$$

pak $(\mathbf{R},\odot)$ *je grupa izomorfní grupě* $(\mathbf{G},\cdot)$, *přičemž* H *je příslušným izomorfizmem.*

[41]) • připomeňme, že všechny vektorové prostory uvažujeme nad týmž tělesem $\mathbb{T}$.

• jak jsme již uvedli v poznámce k větě I.2.21, značíme uvedenou multiplikativní grupu regulárních matic $L_n(\mathbb{T})$.

V určuje každý automorfizmus $f \in \mathcal{A}ut(\mathbf{V})$ relací $\mathcal{C}=f(\mathcal{B})$ bázi prostoru **V** a naopak. Vezmeme-li dále v úvahu definici matice přechodu[42]) a definici 2.1 matice homomorfizmu, dostáváme:

10. Věta *Buď $\mathcal{B}$ báze a f endomorfizmus vektorového prostoru* **V**. *Pak f je automorfizmem vektorového prostoru* **V**, *právě když množina $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}=f(\mathcal{B})$, je bází prostoru* **V**.

Přitom platí

$$\boxed{(\mathcal{B},\mathcal{C})=(f,\mathcal{B}).}$$

---

[42]) viz poznámku pod čarou před větou 2.7.

5. Projekce

Uvažujme nyní $\mathbf{V}_3$ a dále $\mathbf{U}_1, \mathbf{W}_2 \subseteq\subseteq \mathbf{V}_3$ tak, že $\mathbf{V}_3 = \mathbf{U}_1 \oplus \mathbf{W}_2$. Čtenář má zřejmě intuitivní představu[43]) o zobrazení, které každému $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ přiřadí $\mathbf{x}_W \in \mathbf{W}$ daný podmínkou, že spojnice koncových bodů uvedených vektorů je rovnoběžná s $\mathbf{U}$, neboli $\mathbf{x} - \mathbf{x}_W \in \mathbf{U}$.

Tuto úvahu zobecněme:

1. Definice Buďte $\mathbf{U}, \mathbf{W} \subseteq\subseteq \mathbf{V}$ takové, že $\mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$. Pak zobrazení označované p_W^U a definované předpisem

$$\boxed{\forall \mathbf{x} \in \mathbf{V},\ \mathbf{x} = \mathbf{x}_W + \mathbf{x}_U,\ \mathbf{x}_W \in \mathbf{W},\ \mathbf{x}_U \in \mathbf{U}:\ p_W^U(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_W,}$$

nazýváme *projekce vektorového prostoru* $\mathbf{V}$ *na podprostor* $\mathbf{W}$ *rovnoběžně podprostoru* $\mathbf{U}$.

2. Poznámka Vzhledem k tomu, že danému vektoru $\mathbf{x}$ z $\mathbf{V}$ je při zvolených podprostorech $\mathbf{U}, \mathbf{W}$ dvojice vektorů $\mathbf{x}_W, \mathbf{x}_U$ přiřazena *jednoznačně* (proč?), je zobrazení p_W^U definováno korektně.

Z definice 1 a jednoznačnosti vyjádření vektoru $\mathbf{x}$ ve tvaru $\mathbf{x} = \mathbf{x}_W + \mathbf{x}_U$, $\mathbf{x}_W \in \mathbf{W}$, $\mathbf{x}_U \in \mathbf{U}$ snadno odvodíme (proveďte):

3. Věta *Buď* p_W^U *projekce. Pak pro každý* $\mathbf{x}$ *z* $\mathbf{V}$ *platí:*

(1) $p_W^U(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$, *právě když* $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$,

(2) $p_W^U(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, *právě když* $\mathbf{x} \in \mathbf{W}$.

Z tvrzení věty 3 bezprostředně plyne:

---

[43]) tuto svou představu vztahuje k množině $\mathbf{V}_3$ vektorů 3-rozměrného *fyzikálního prostoru*

4. Důsledek *Projekce* p_W^U *je surjekcí* **V** *na* **W**.

5. Důsledek *Buď* p_W^U *projekce vektorového prostoru* **V**. *Pak platí:*

(1) $p_W^U = \mathrm{id}_V \Leftrightarrow \mathbf{U} = \{\mathbf{o}\} \Leftrightarrow \mathbf{W} = \mathbf{V}$,

(2) $p_W^U = o \Leftrightarrow \mathbf{U} = \mathbf{V} \Leftrightarrow \mathbf{W} = \{\mathbf{o}\}$.

Zvolme $\mathbf{U},\mathbf{W} \subseteq\subseteq \mathbf{V}$ tak, že $\mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$. Uvažme $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{V}$ a rozložme je na součet vektorů z **U**, **W**:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{x} = \mathbf{x}_W + \mathbf{x}_U,\ \mathbf{x}_W \in \mathbf{W},\ \mathbf{x}_U \in \mathbf{U}, \\ \mathbf{y} = \mathbf{y}_W + \mathbf{y}_U,\ \mathbf{y}_W \in \mathbf{W},\ \mathbf{y}_U \in \mathbf{U}. \end{array}\right\} \quad (6\text{-}1)$$

Pak můžeme psát:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (\mathbf{x}_W + \mathbf{y}_W) + (\mathbf{x}_U + \mathbf{y}_U),$$

přičemž (**U** i **W** jsou vektorové podprostory):

$$\mathbf{x}_W + \mathbf{y}_W \in \mathbf{W},\ \mathbf{x}_U + \mathbf{y}_U \in \mathbf{U},$$

odkud plyne, že

$$p_W^U(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{x}_W + \mathbf{y}_W \overset{(a)}{=} p_W^U(\mathbf{x}) + p_W^U(\mathbf{y}),$$

kde v rovnosti (a) jsme užili definici 1 a relaci (6-1).

Analogicky bychom pro $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$, $t \in \mathbb{T}$ ukázali, že $p_W^U(t\mathbf{x}) = tp_W^U(\mathbf{x})$. Platí tedy následující věta:

6. Věta *Každá projekce vektorového prostoru* **V** *je endomorfizmem prostoru* **V**.

Všimněme si nyní jádra a obrazu projekce:

Je-li p projekcí **V** na **W** rovnoběžně **U** (tj. $p = p_W^U$), pak z věty 3 plyne:

$$\mathbf{U} = \mathrm{Ker}\, p \wedge \mathbf{W} \subseteq \mathrm{Im}\, p.$$

Protože $\mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$ (tudíž $\dim\mathbf{U} + \dim\mathbf{W} = \dim\mathbf{V}$) a obecně $\dim\mathrm{Ker}\, p + \dim\mathrm{Im}\, p = \dim\mathbf{V}$, plyne odtud $\mathbf{W} = \mathrm{Im}\, p$, což vyjadřuje následující věta.

7. Věta *Buď p projekce prostoru* **V***. Pak je projekcí* **V** *na* Imp *rovnoběžně* Ker$p$.

Naskýtá se tudíž přirozená otázka *které* z endomorfizmů prostoru **V** jsou projekcemi.

Je-li p projekcí **V** na **W** rovnoběžně **U** (tj. $p=p_{\mathbf{W}}^{\mathbf{U}}$), pak z věty 7 plyne:

$$(1)\quad \mathbf{V}=\mathrm{Ker}p\oplus\mathrm{Im}p$$

a protože dle téže věty $\mathbf{W}=\mathrm{Im}p$, plyne z věty 3.(2) dále, že

$$(2)\quad p|\mathrm{Im}p=\mathrm{id}.$$

Uvažujme nyní libovolný endomorfizmus p prostoru **W** s vlastnostmi (1),(2) a zkoumejme, zda je projekcí.

Označme $\mathbf{W}=\mathrm{Im}p$, $\mathbf{U}=\mathrm{Ker}p$. S ohledem na (1) lze každý $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$ psát jednoznačně ve tvaru

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}_{\mathbf{W}}+\mathbf{x}_{\mathbf{U}},\ \mathbf{x}_{\mathbf{W}}\in\mathbf{W},\ \mathbf{x}_{\mathbf{U}}\in\mathbf{U}.$$

Pak pro $p(\mathbf{x})$ dostáváme:

$$p(\mathbf{x})=p(\mathbf{x}_{\mathbf{W}}+\mathbf{x}_{\mathbf{U}})\overset{(a)}{=}p(\mathbf{x}_{\mathbf{W}})+p(\mathbf{x}_{\mathbf{U}})\overset{(b)}{=}p(\mathbf{x}_{\mathbf{W}})\overset{(c)}{=}\mathbf{x}_{\mathbf{W}},$$

kde v rovnosti (a) jsme využili toho, že p je homomorfizmus, v (b) pak toho, že $\mathbf{U}=\mathrm{Ker}p$ a v (c) vlastnosti (2) - tj. $p|\mathbf{W}=\mathrm{id}$. Zjistili jsme tedy, že p je projekcí **V** na $\mathbf{W}=\mathrm{Im}p$ rovnoběžně $\mathbf{U}=\mathrm{Ker}p$.

Shrňme získané poznatky do následujících dvou vět:

8. Věta *Buď p endomorfizmus prostoru* **V***. Pak je p projekcí, právě když platí:*

(1) $\mathbf{V}=\mathrm{Ker}p\oplus\mathrm{Im}p$,

(2) $p|\mathrm{Im}p=\mathrm{id}$.

Poznamenejme, že (1) není automatickou vlastností endomorfizmu - např. pro endomorfizmus f prostoru $\mathbf{V}_2$ daný v určité bázi analytickým vyjádřením

$$f:\ \begin{aligned} y_1&=x_2\\ y_2&=0\end{aligned}$$

platí $\mathrm{Im}f=\mathrm{Ker}f=[(1,0)]$.

I při splnění podmnínky (1) nemusí být splněna podmínka (2), jak vidíme na příkladu endomorfizmu g prostoru $\mathbf{V}_2$ daném v určité bázi analytickým vyjádřením

$$g:\ y_1=x_1+x_2$$
$$y_2=x_1+x_2,$$

pro nějž $\mathrm{Im}g=[(1,1)]$ a $\mathrm{Ker}g=[(1,-1)]$, tudíž

$$\mathbf{V}=\mathrm{Im}g\oplus\mathrm{Ker}g,\ \text{ale}\ g|\mathrm{Im}g\neq\mathrm{id}.$$

Nechť p je projekce $p_{\mathbf{W}}^{\mathbf{U}}$. Zvolme $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$, $\mathbf{x}=\mathbf{x}_{\mathbf{W}}+\mathbf{x}_{\mathbf{U}}$, $\mathbf{x}_{\mathbf{W}}\in\mathbf{W}$, $\mathbf{x}_{\mathbf{U}}\in\mathbf{U}$. Pak dle definice 1 (a věty 8) platí:

$$p(\mathbf{x})=\mathbf{x}_{\mathbf{W}},\ p(\mathbf{x}_{\mathbf{W}})=\mathbf{x}_{\mathbf{W}},$$

tudíž

$$(p\circ p)(\mathbf{x})=p(p(\mathbf{x}))=p(\mathbf{x}_{\mathbf{W}})=\mathbf{x}_{\mathbf{W}}=p(\mathbf{x}),$$

neboli

$$p\circ p=p. \tag{9-1}$$

Uvažujme nyní libovolný endomorfizmus p prostoru $\mathbf{V}$ s vlastností (9-1). Zkoumejme, zda jde o projekci - ověřme splnění podmínek (1), (2) z věty 8:

(i) nechť $\mathbf{x}\in\mathrm{Im}p$. Pak $\mathbf{x}=p(\mathbf{y})$, $\mathbf{y}\in\mathbf{V}$, a tedy

$$p(\mathbf{x})=p(p(\mathbf{y}))=(p\circ p)(\mathbf{y})=p(\mathbf{y})=\mathbf{x},$$

neboli

$$p|\mathrm{Im}p=\mathrm{id},$$

což značí splnění podmínky (2) věty 8.

(ii) nechť $\mathbf{x}\in\mathrm{Ker}p\cap\mathrm{Im}p$. Pak současně $p(\mathbf{x})=\mathbf{o}$ ($\mathbf{x}\in\mathrm{Ker}p$) a $p(\mathbf{x})=\mathbf{x}$ ($\mathbf{x}\in\mathrm{Im}p$ a dle (i) je $p|\mathrm{Im}p=\mathrm{id}$), tedy $\mathbf{x}=\mathbf{o}$, neboli

$$\mathrm{Ker}p\cap\mathrm{Im}p=\{\mathbf{o}\},$$

což značí splnění podmínky (1) věty 8.

9. Věta *Buď p endomorfizmus prostoru $\mathbf{V}$. Pak je p projekcí, právě když*

$$\boxed{p\circ p=p.}$$

Projekcemi prostoru $\mathbf{V}$ jsou tedy právě všechny idempotentní endomorfizmy daného prostoru.

Z věty 9 bezprostředně obdržíme:

10. Důsledek *Buď p endomorfizmus prostoru* **V**. *Pak je p projekcí, právě když pro jeho matici v některé (a pak tedy v každé) bázi* $\mathcal{B}$ *platí:*

$$\boxed{(p,\mathcal{B})^2=(p,\mathcal{B}).}$$

Příklad F

Nalezněte projekci p prostoru **V**, pro niž platí

$$p(\mathbf{u}_i)=\mathbf{v}_i,\quad 1\le i\le 2,$$

je-li ve zvolené bázi $\mathcal{B}$ prostoru **V** dáno

$$\{\mathbf{u}_1\}_{\mathcal{B}}=(1,2,1,-1),\quad \{\mathbf{u}_2\}_{\mathcal{B}}=(3,0,0,1),$$
$$\{\mathbf{v}_1\}_{\mathcal{B}}=(1,2,0,0),\quad \{\mathbf{v}_2\}_{\mathcal{B}}=(1,1,1,1).$$

Řešení

Protože dimV=4, je v souladu s větou 1.13 nutno k zadání homomorfizmu p třeba znát obrazy 4 lineárně nezávislých vektorů. Uvážíme-li, že $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\in \mathrm{Im}p$, platí dle věty 8:

$$p(\mathbf{v}_1)=\mathbf{v}_1,\quad p(\mathbf{v}_2)=\mathbf{v}_2.$$

Nyní můžeme použít pro nalezení elementů matice projekce p postupu z příkladu B. Obdržíme tak soustavu lineárních rovnic, jejíž řešení s využitím maticového zápisu:

$$\begin{array}{cccc|c|c|c|c} & & & & i=1 & i=2 & i=3 & i=4 \end{array}\qquad\qquad\qquad \begin{array}{cccc|c|c|c|c} & & & & i=1 & i=2 & i=3 & i=4 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c|c|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \;\cdots\; \left(\begin{array}{cccc|c|c|c|c} 11 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 11 & 0 & 0 & 4 & 9 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 2 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 2 & -1 & 5 & 5 \end{array}\right).$$

Nalezli jsme matici projekce p ve tvaru

$$(p,\mathcal{B})=\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 9 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Přesvědčte se, že nalezená matice je skutečně idempotentní.

Uvážíme-li, že pro každý $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$ náleží $\mathbf{x}-p(\mathbf{x})$ jádru projekce p, zjišťujeme, že p je projekcí $\mathbf{V}$ na $\mathbf{W}$ rovnoběžně $\mathbf{U}$, kde

$$\mathbf{W}=[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2],\quad \mathbf{U}=[(\mathbf{u}_1-\mathbf{v}_1),(\mathbf{u}_2-\mathbf{v}_2)].$$

Poznamenejme, že příklad bylo možno řešit i tak, že bychom využili jen toho, že

$$\mathbf{u}_1\mapsto \mathbf{u}_1,\quad \mathbf{v}_2\mapsto \mathbf{v}_2.$$

Pak bychom pro elementy matice $(p,\mathcal{B})$ řešili soustavu rovnic zapsanou maticově ve tvaru

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \quad\quad\quad\quad\quad\quad & i=1 & i=2 & i=3 & i=4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c|c|c|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right). \end{array}$$

Její řešení, tj. i matice $(p,\mathcal{B})$ by bylo závislé na parametrech, které bychom eliminovali uplatněním podmínky idempotence, tj.

$$(p,\mathcal{B})(p,\mathcal{B})=(p,\mathcal{B}).$$

6. Homomorfizmy euklidovských vektorových prostorů.

V této kapitole bude **V** označovat n-rozměrný euklidovský vektorový prostor se skalárním součinem $\cdot$.

6.1 Ortogonální projekce

V závěru podkapitoly I.4.1 bylo pro libovolný podprostor **W** euklidovského vektorového prostoru **V** zavedeno zobrazení p_W přiřazující každému vektoru **x** jeho kolmý průmět do podprostoru **W**. Uvážíme-li zavedení kolmého průmětu $\mathbf{x}^*$ vektoru **x** dle (I.4.1-1):

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}^*+\mathbf{x}^{\perp},\ \text{kde } \mathbf{x}^*\in\mathbf{W},\ \mathbf{x}^{\perp}\in\mathbf{W}^{\perp},$$

a definici projekce 5.1, je zřejmá platnost následující věty:

1.Věta *Buď* **W** *podprostor euklidovského vektorového prostoru* **V**. *Pak projekce* $p_{\mathbf{W}}^{\mathbf{W}^{\perp}}$ *přiřazuje každému vektoru* **x** *z* **V** *jeho kolmý průmět do podprostoru* **W**.

2.Definice Buď **W** podprostor euklidovského vektorového prostoru **V**. Pak projekci $p_{\mathbf{W}}^{\mathbf{W}^{\perp}}$ nazýváme *ortogonální projekce prostoru* **V** *na podprostor* **W** a značíme ji $p_{\mathbf{W}}$.

Zobrazení přiřazující každému vektoru jeho kolmý průmět do jistého podprostoru **W** - *ortogonální projekce* - je tedy zvláštním případem projekce - jde o projekci **V** na **W** rovnoběžně $\mathbf{W}^{\perp}$.

Najděme nyní další charakterizaci ortogonální projekce. Uvažujme $\mathbf{W}\subseteq\mathbf{V}$ a nechť p je ortogonální projekce **V** na **W**. Zvolme

$\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{V}$ a rozložme je na kolmý průmět a perpendikulár:

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}^*+\mathbf{x}^\perp,\ \text{kde } \mathbf{x}^*\in\mathbf{W},\ \mathbf{x}^\perp\in\mathbf{W}^\perp,$$
$$\mathbf{y}=\mathbf{y}^*+\mathbf{y}^\perp,\ \text{kde } \mathbf{y}^*\in\mathbf{W},\ \mathbf{y}^\perp\in\mathbf{W}^\perp.$$

Pak můžeme psát:

$$p(\mathbf{x})\cdot\mathbf{y}=\mathbf{x}^*\cdot(\mathbf{y}^*+\mathbf{y}^\perp)=\mathbf{x}^*\mathbf{y}^*+\mathbf{x}^*\mathbf{y}^\perp=\mathbf{x}^*\mathbf{y}^*,$$

neboť $\mathbf{x}^*\mathbf{y}^\perp=0$ (proč?).

Analogicky obdržíme, že $\mathbf{x}\cdot p(\mathbf{y})=\mathbf{x}^*\mathbf{y}^*$,

neboli

$$p(\mathbf{x})\cdot\mathbf{y}=\mathbf{x}\cdot p(\mathbf{y}). \tag{3-1}$$

Zjistěme nyní, zda (3-1) není i *postačující* podmínkou pro to, aby některá projekce $p:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ byla *ortogonální* projekcí $\mathbf{V}$ na $\mathbf{W}$. K tomu postačí ukázat, že $\mathrm{Ker}p=\mathbf{W}^\perp$.

Zvolme některý $\mathbf{x}\in\mathrm{Ker}p$. Nechť $\mathbf{y}$ je libovolný prvek z $\mathbf{W}$. Pak můžeme psát:

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\overset{(a)}{=}\mathbf{x}\cdot p(\mathbf{y})\overset{(b)}{=}p(\mathbf{x})\cdot\mathbf{y}\overset{(c)}{=}\mathbf{o}\cdot\mathbf{y}=0$$

a tedy
$$\mathrm{Ker}p\subseteq\mathbf{W}^\perp, \tag{3-2}$$
přičemž v rovnosti (a) jsme užili $p|\mathbf{W}=\mathrm{id}$ (dle 5.8.(2), neboť $\mathbf{W}=\mathrm{Im}p$), v rovnosti (b) užijeme (3-1) a v (c) pak skutečnosti, že $\mathbf{x}\in\mathrm{Ker}p$.

S ohledem na větu 2.9 a I.2.29 obdržíme

$$\dim\mathrm{Ker}p=\dim\mathbf{V}-\dim\mathrm{Im}p=\dim(\mathrm{Im}p)^\perp=\dim\mathbf{W}^\perp,$$

což spolu s (3-2) značí, že $\mathrm{Ker}p=\mathbf{W}^\perp$.

Ukázali jsme tudíž platnost následující věty:

3.**Věta** *Buď* $\mathbf{W}$ *podprostor euklidovského vektorového prostoru* $\mathbf{V}$, *p libovolná projekce* $\mathbf{V}$ *na* $\mathbf{W}$. *Pak je p ortogonální projekcí, právě když platí:*

$$\boxed{\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{V}:\ p(\mathbf{x})\cdot\mathbf{y}=\mathbf{x}\cdot p(\mathbf{y}).} \tag{3-1}$$

4.**Poznámka** V předešlé větě nelze předpoklad *p je projekce* vynechat. Například endomorfizmus daný v jisté ortonormální bázi prostoru $\mathbf{V}$ analytickým vyjádřením

$$p:\ y_1=x_2$$
$$y_2=x_1$$

podmínku (3-1) splňuje (ověřte!), avšak není projekcí (viz věta 5.9).

Nutnou a postačující podmínku pro to, aby projekce byla projekcí ortogonální uvedenou ve větě 3 nyní využijeme k nalezení vlastnosti matice projekce, která bude ekvivaletní ortogonalitě dané projekce.

Uvažujme endomorfizmus p prostoru $\mathbf{V}$ a zvolme v něm některou ortonormální bázi $\mathcal{B}=<\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n>$. Označme $(p,\mathcal{B})=(p_{ij})$. Pak[1]) můžeme psát pro libovolné i, $1\le i\le n$:

$$p(\mathbf{e}_i) = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}\mathbf{e}_k.$$

Vynásobíme-li dále skalárně obě strany této rovnosti vektorem $\mathbf{e}_j$, $1\le j\le n$, dostáváme

$$\mathbf{e}_j\cdot p(\mathbf{e}_i)=\mathbf{e}_j\cdot(\sum_{k=1}^{n} p_{ik}\mathbf{e}_k)=\sum_{k=1}^{n} p_{ik}(\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k)\overset{(a)}{=}\sum_{k=1}^{n} p_{ik}\delta_{jk}=p_{ij}, \qquad (5\text{-}1)$$

kde jsme v rovnosti (a) užili ortonormality báze $\mathcal{B}$.

Zvolme nyní libovolné $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{V}$, $\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}}=(x_1,\dots,x_n)$, $\{\mathbf{y}\}_{\mathcal{B}}=(y_1,\dots,y_n)$. Pak můžeme psát:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x})\cdot\mathbf{y} &= p(\mathbf{x})\cdot(\sum_{j=1}^{n} y_j\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} y_j(p(\mathbf{x})\cdot\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} y_j(p(\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i)\cdot\mathbf{e}_j) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} y_j((\sum_{i=1}^{n} x_i p(\mathbf{e}_i))\cdot\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} y_j(\sum_{i=1}^{n} x_i(p(\mathbf{e}_i)\cdot\mathbf{e}_j)) = \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} (y_j x_i)(p(\mathbf{e}_i)\cdot\mathbf{e}_j) \end{aligned}$$

a analogicky obdržíme, že:

$$\mathbf{x}\cdot p(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} (y_j x_i)(\mathbf{e}_i\cdot p(\mathbf{e}_j)),$$

odkud je zřejmé, že:

---

[1]) s ohledem na definici matice homomorfizmu

$$[\forall i,j, 1\le i,j\le n:\ p(\mathbf{e}_i)\cdot\mathbf{e}_j=\mathbf{e}_i\cdot p(\mathbf{e}_j)] \Rightarrow [\forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{V}:\ p(\mathbf{x})\cdot\mathbf{y}=\mathbf{x}\cdot p(\mathbf{y})],$$

přičemž obrácená implikace je zřejmá.

Odtud a z (5-1) bezprostředně plyne:

$$[\forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{V}:\ p(\mathbf{x})\cdot\mathbf{y}=\mathbf{x}\cdot p(\mathbf{y})] \Leftrightarrow [(p,\mathcal{B})^T=(p,\mathcal{B})].$$

Platí tedy následující lemma:

5. Lemma *Buď p endomorfizmus euklidovského vektorového prostoru* **V**, *$\mathcal{B}$ libovolná ortonormální báze tohoto prostoru. Pak platí*[2]*):*

$$\boxed{[\forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{V}:\ p(\mathbf{x})\cdot\mathbf{y}=\mathbf{x}\cdot p(\mathbf{y})] \Leftrightarrow [(p,\mathcal{B})^T=(p,\mathcal{B})].}$$

Z uvedeného lemmatu dostáváme odpověď na výše položenou otázku, kterou formulujme následující větou:

6. Věta *Buď p projekce euklidovského vektorového prostoru* **V**. *Pak je p ortogonální projekcí, právě když v některé (a pak v každé) ortonormální bázi $\mathcal{B}$ prostoru* **V** *platí:*

$$\boxed{(p,\mathcal{B})^T=(p,\mathcal{B}).}$$ [3])

Příklad A

Nalezněte ortogonální projekci p prostoru **V** na podprostor **W**, $\mathbf{W}=[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2]$, je-li ve zvolené ortonormální bázi $\mathcal{B}$ prostoru **V** dáno

---

[2]) endomorfizmům euklidovského vektorového prostoru s vlastností

$$\forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{V}:\ p(\mathbf{x})\cdot\mathbf{y}=\mathbf{x}\cdot p(\mathbf{y})$$

se říká *symetrické endomorfizmy*.

[3]) neboli, právě když její matice v některé (a pak tedy v každé) ortonormální bázi prostoru **V** je *symetrická*.

$$\{\mathbf{v}_1\}_{\mathcal{B}}=(1,2,0,0),\ \{\mathbf{v}_2\}_{\mathcal{B}}=(1,1,1,1).$$

Řešení

Ortogonální projekce **V** na **W** je projekcí **V** na **W** rovnoběžně $\mathbf{W}^{\perp}$. Nejprve tedy známým postupem nalezneme $\mathbf{W}^{\perp}$:

$$\mathbf{W}^{\perp}=[\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2],\ \{\mathbf{y}_1\}_{\mathcal{B}}=(2,-1,-1,0), \{\mathbf{y}_2\}_{\mathcal{B}}=(0,0,1,-1).$$

Protože $\mathbf{W}=\mathrm{Im}p$, $\mathbf{W}^{\perp}=\mathrm{Ker}p$, je projekce p zadána takto:

$$\mathbf{v}_1 \mapsto \mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2 \mapsto \mathbf{v}_2,\ \mathbf{y}_1 \mapsto \mathbf{o},\ \mathbf{y}_2 \mapsto \mathbf{o}.$$

Pak již postupem dle příkladu 2.B zjistíme, že matice projekce p zní:

$$(p,\mathcal{B})=\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 9 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Již jsme se přesvědčili, že uvedená matice je idempotentní (příklad 5.F), a tedy p je projekce, je patrně i symetrická, a tedy p je projekcí ortogonální.

6.2 Ortogonální homomorfizmy

Je-li $f\colon \mathbf{V}\to\mathbf{W}$ izomorfizmem uvedených prostorů, víme, že se (ve smyslu podkapitoly 1.1) liší jen pojmenováním prvků $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$ a $f(\mathbf{x})\in\mathbf{W}$.

Jak tomu bude v případě euklidovských vektorových prostorů? Uvažujme $\mathbf{V}=\mathbf{W}=\mathbb{R}^2$ se standardním skalárním součinem. Zobrazení

$$f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,$$

definované vztahem $$f(\mathbf{x})=2\mathbf{x}$$

jistě je izomorfizmem těchto vektorových prostorů, nicméně vzhledem např. ke skutečnosti, že pro každý nenulový $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2$ platí

$$\|f(\mathbf{x})\|\neq\|\mathbf{x}\|,$$

lze jen těžko říci, že f jen navzájem „přejmenovává" prvky obou *euklidovských* vektorových prostorů.

V tomto případě je tedy nutno na zobrazení $f\colon \mathbf{V}\to\mathbf{W}$ klást další přirozenou podmínku - totiž zachování skalárního součinu:

7. Definice Buďte $(\mathbf{V},\cdot)$, $(\mathbf{W},\circ)$ euklidovské vektorové prostory. Homomorfizmus $f\colon \mathbf{V}\to\mathbf{W}$ se nazývá *ortogonální*, jestliže platí:

$$\boxed{\forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{V}\colon\ \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=f(\mathbf{x})\circ f(\mathbf{y}).}$$

8. Úmluva Nebude-li hrozit nebezpečí nedorozumění, budeme skalární součin ve všech euklidovských prostorech značit týmž symbolem „·", nebo jej budeme zpravidla vůbec vypouštět.

9. Poznámka Zaregistrujme skutečnost, že množina všech ortogonálních homomorfizmů mezi danou dvojicí vektorových prostorů $\mathbf{V},\mathbf{W}$ *netvoří podprostor vektorového prostoru* $\mathcal{H}om(\mathbf{V},\mathbf{W})$ (je nulový homomorfizmus o obecně homomorfizmem ortogonálním?).

Při volbě $\mathbf{V}=\mathbf{W}$ je ortogonálním automorfizmem např. identita.

Bezprostředně z definice 7 a z definic I.1.8, I.1.11 a věty

I.1.14 plyne (zdůvodněte[4]):

10. Důsledek *Buď f ortogonální homomorfizmus* $\mathbf{V}\to\mathbf{W}$. *Pak pro každé* $\mathbf{x},\mathbf{y}$ *z* $\mathbf{V}$ *platí*[5]*):*

(1) $\|f(\mathbf{x})\|=\|\mathbf{x}\|$,

(2) $\sphericalangle(f(\mathbf{x}),f(\mathbf{y}))=\sphericalangle(\mathbf{x},\mathbf{y})$,

(3) $\rho(f(\mathbf{x}),f(\mathbf{y}))=\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})$.

Uvážíme-li, že homomorfizmus je injektivní, právě když jeho jádro obsahuje toliko nulový vektor, je vzhledem k 10.(1) zřejmá platnost věty následující[6]):

11. Věta *Každý ortogonální homomorfizmus je monomorfizmem*[7]*)*

Odtud za použití důsledku 2.10 obdržíme:

12. Důsledek *Je-li* $\dim\mathbf{V}=\dim\mathbf{W}$, *pak každý ortogonální homomorfizmus* $\mathbf{V}$ *do* $\mathbf{W}$ *je izomorfizmem* $\mathbf{V}$ *na* $\mathbf{W}$.

Speciálně: každý ortogonální endomorfizmus prostoru $\mathbf{V}$ *je automorfizmem tohoto prostoru.*

---

[4]) jak uvidíme dále, je každá z vlastností (1) a (3) současně *postačující* podmínkou pro ortogonalitu daného homomorfizmu (proč jí není i (2)?)

[5]) v souladu s úmluvou 8 neodlišujeme označení normy, úhlu a metriky v obou euklidovských vektor.prostorech

[6]) podrobněji: není-li f injektivní, existuje $\mathbf{x}\neq\mathbf{o}$ (a tedy $\|\mathbf{x}\|\neq 0$) s vlastností $f(\mathbf{x})=\mathbf{o}$ (a tedy $\|f(\mathbf{x})\|=0$), což je spor s 10.(1).

[7]) je ortogonální projekce ortogonálním homomorfizmem?

13. Poznámka Příkladem ortogonálního izomorfizmu je např. kartézská soustava souřadnic daného prostoru **V** (jde o ortogonální izomorfizmus $\mathbf{V}_n$ na $\mathbb{R}^n$ (se standardním skalární součinem) - přesvědčte se o tom!).

Snadno rovněž zjistíme, že každý ortogonální izomorfizmus $\mathbf{V}_n$ na $\mathbb{R}^n$ (se standardním skalární součinem) je kartézskou soustavou souřadnic[8]).

Dle věty 1.12.(5) je homomorfizmus $\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ izomorfizmem, právě když zobrazuje bázi prostoru **V** na bázi prostoru **W**.

Je-li f ortogonální homomorfizmus, pak přímo dle definice 7 je obrazem každé ortonormální množiny vektorů ve **V** opět ortonormální množina ve **W** - tedy obrazem ortonormální báze ve **V** je ortonormální báze ve **W**.

Nechť je f homomorfizmus $\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ s vlastností, že obrazem některé ortonormální báze $\mathcal{B}$ ve **V** je ortonormální báze $f(\mathcal{B})=\mathcal{C}$. Pak je zřejmě f izomorfizmem, vyšetřeme, zda ortogonálním.
Nechť $\mathcal{B}=\langle\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\rangle$. Pak můžeme pro libovolné $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$, $\{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}}=(u_1,\dots,u_n)$, $\{\mathbf{v}\}_{\mathcal{B}}=(v_1,\dots,v_n)$, psát:

$$f(\mathbf{u})\cdot f(\mathbf{v})=f\Big(\sum_{i=1}^{n}u_i\mathbf{e}_i\Big)\cdot f\Big(\sum_{j=1}^{n}v_j\mathbf{e}_j\Big)\overset{(a)}{=}\Big(\sum_{i=1}^{n}u_i f(\mathbf{e}_i)\Big)\cdot\Big(\sum_{j=1}^{n}v_j f(\mathbf{e}_j)\Big)\overset{(b)}{=}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(u_iv_j)(f(\mathbf{e}_i)\cdot f(\mathbf{e}_j))\overset{(c)}{=}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(u_iv_j)(\delta_{ij})=\sum_{i=1}^{n}u_iv_i=\mathbf{u}\cdot\mathbf{v},$$

což značí, že homomorfizmus f je ortogonální. Přitom v rovnostech (a),(b) jsme užili známé vlastnosti homomorfizmu a skalárního součinu, v rovnosti (c) pak faktu, že báze $\mathcal{B}$ je ortonormální.

Platí tudíž následující věta[9]):

---

[8]) je-li f tento izomorfizmus a označíme-li $\mathbf{j}_i$, $1\le i\le n$, i-tý vektor standardní báze prostoru $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem (a tedy ortonormální báze) je i-tý vektor příslušné ortonormální báze ve $\mathbf{V}_n$ roven $f^{-1}(\mathbf{e}_i)$.

[9]) snadno ukážeme, že požadavek *ortonormality* báze $\mathcal{B}$ nelze vynechat (ani nahradit pouhou ortogonalitou) - proveďte!

14. Věta *Buď f homomorfizmus* **V** *do* **W**, *$\mathcal{B}$ libovolná ortonormální báze prostoru* **V**. *Pak je f ortogonální izomorfizmus* **V** *na* **W**, *právě když $f(\mathcal{B})$ je ortonormální bází prostoru* **W**.

Odtud bezprostředně plyne[10]):

15. Důsledek *Buďte* **U,V,W** *euklidovské vektorové prostory. Pak platí:*

(1) je-li f ortogonální izomorfizmus **V** *na* **W**, *pak f^{-1} je ortogonální izomorfizmus* **W** *na* **V**,

(2) je-li f ortogonální homomorfizmus **V** *do* **W** *a g ortogonální homomorfizmus* **W** *do* **U**, *pak $f\circ g$ je ortogonální homomorfizmus* **V** *do* **U**.

Naskýtá se přirozená otázka, jakou vlastnost musí mít matice homomorfizmu, aby tento byl ortogonální.

Z věty 11 plyne, že $f:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ je ortogonálním homomorfizmem, právě když je ortogonálním izomorfizmem **V** na Imf. Zvolíme-li ve **V** některou ortonormální bázi $\mathcal{B}$, bude dle věty 14 f ortogonálním izomorfizmem **V** na Imf, právě když bude $f(\mathcal{B})$ ortonormální bází prostoru Imf.

Položíme-li $\mathcal{B}=\langle\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_n\rangle$ a zvolíme-li ve **W** libovolně ortonormální bázi $\mathcal{C}$, můžeme pro i,j=1,...,n psát:

$$f(\mathbf{u}_i)\cdot f(\mathbf{u}_j)=\{f(\mathbf{u}_i)\}_{\mathcal{C}}\{f(\mathbf{u}_j)\}_{\mathcal{C}}^{T},$$

což ovšem s ohledem na definici matice homomorfizmu představuje prvek na pozici (i,j) součinu matic $(f,\mathcal{B},\mathcal{C})(f,\mathcal{B},\mathcal{C})^T$. $f(\mathcal{B})$ tedy bude ortonormální, právě když tento prvek bude roven δ_{ij}, neboli bude-li $[(f,\mathcal{B},\mathcal{C})(f,\mathcal{B},\mathcal{C})^T]$ maticí jednotkovou.

---

[10]) k odvození odstavce (2) uvažte, že z věty 11 plyne, že ortogonální homomorfizmus $h:\mathbf{Y}\to\mathbf{Z}$ je ortogonálním izomorfizmem **Y** na Imh.

Tvrzení lze rovněž odvodit i přímo z definice 7.

Zjištěné vyjadřuje následující věta[11]):

16. Věta *Buď f homomorfizmus* **V** *do* **W**, *$\mathcal{B},\mathcal{C}$ libovolné ortonormální báze po řadě prostorů* **V**,**W**. *Pak je f ortogonální izomorfizmus* **V** *na* **W**, *právě když*

$$\boxed{(f,\mathcal{B},\mathcal{C})(f,\mathcal{B},\mathcal{C})^T=E.}$$

Z věty 14 ihned plyne, že identita je ortogonálním automorfizmem. S ohledem na důsledek 15 a uvážíme-li dále platnost věty 16, větu 4.7 a důsledek 4.9, obdržíme (srv. větu I.2.21):

17. Důsledek

(1) Množina ortogonálních automorfizmů euklidovského vektorového prostoru **V** *spolu se skládáním homomorfizmů tvoří grupu[12]), která je podgrupou v grupě automorfizmů prostoru* **V**.

(2) Grupa ortogonálních automorfizmů prostoru $\mathbf{V}_n$ je izomorfní s multiplikativní grupou ortogonálních matic řádu n. *Je-li $\mathcal{B}$ ortonormální bází prostoru* **V**, *pak zobrazení $H_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ definované vztahem* (2.4-1) *je izomorfizmem uvedených grup.*

Vraťme se nyní k otázce, zda kterákoli z podmínek (1) a (3) uvedených v důsledku 10 je i postačující pro to, aby daný homomorfizmus byl ortogonální.

Buďte **V**,**W** euklidovské vektorové prostory a nechť $f \in \mathcal{H}om(\mathbf{V},\mathbf{W})$ s vlastností

$$\forall \mathbf{x}\in\mathbf{V}:\ \|f(\mathbf{x})\|=\|\mathbf{x}\|. \tag{18-1}$$

Chceme ukázat, že f zachovává skalární součin.
Uvažme proto následující identitu platnou v euklidovských vekto-

[11]) v případě automorfizmu jde o přímý důsledek věty I.2.18 (proč?)

[12]) uvedená grupa se nazývá *ortogonální grupa* nebo *izometrická grupa* daného vektorového prostoru.

rových prostorech:

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y})(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\mathbf{xx}+2\mathbf{xy}+\mathbf{yy},$$

odkud pro libovolné $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ plyne:

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2=\|\mathbf{u}\|^2+2\mathbf{uv}+\|\mathbf{v}\|^2, \qquad (18\text{-}2)$$

$$\text{a } \|f(\mathbf{u})+f(\mathbf{v})\|^2=\|f(\mathbf{u})\|^2+2f(\mathbf{u})f(\mathbf{v})+\|f(\mathbf{v})\|^2.$$

Protože f je homomorfizmus, je $f(\mathbf{u})+f(\mathbf{v})=f(\mathbf{u}+\mathbf{v})$, a druhá rovnost přejde ve tvar:

$$\|f(\mathbf{u}+\mathbf{v})\|^2=\|f(\mathbf{u})\|^2+2f(\mathbf{u})f(\mathbf{v})+\|f(\mathbf{v})\|^2. \qquad (18\text{-}3)$$

Protože f zachovává normu vektorů (viz (18-1)), platí:

$$\|f(\mathbf{u})\|=\|\mathbf{u}\|,\ \|f(\mathbf{v})\|=\|\mathbf{v}\| \text{ a } \|f(\mathbf{u}+\mathbf{v})\|=\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|.$$

Porovnáním (18-2) a (18-3) obdržíme:

$$f(\mathbf{u})f(\mathbf{v})=\mathbf{uv},$$

což, uvážíme-li platnost důsledku 10, znamená platnost tvrzení následujícího:

18. Věta *Buď f homomorfizmus* **V** *do* **W**. *Pak je f ortogonální homomorfizmus* **V** *do* **W**, *právě když pro každé* $\mathbf{x}$ z **V** *platí:*

$$\boxed{\|f(\mathbf{x})\|=\|\mathbf{x}\|.}$$

Uvážíme-li, že z podmínky

$$\forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{V}:\ \rho(f(\mathbf{x}),f(\mathbf{y}))=\rho(\mathbf{x},\mathbf{y}). \qquad (19\text{-}1)$$

ihned pro libovolný $\mathbf{u}\in\mathbf{V}$ plyne:

$$\|f(\mathbf{u})\|=\|f(\mathbf{u})-\mathbf{o}\|\overset{(a)}{=}\|f(\mathbf{u})-f(\mathbf{o})\|\overset{(b)}{=}\rho(f(\mathbf{u}),f(\mathbf{o}))\overset{(c)}{=}\rho(\mathbf{u},\mathbf{o})\overset{(d)}{=}\|\mathbf{u}-\mathbf{o}\|=\|\mathbf{u}\|,$$

přičemž v rovnosti (a) jsme užili známé vlastnosti homomorfizmu, v (b) a (d) definici metriky indukované skalárním součinem a v (c) předpokladu (19-1), platí:

19. Věta *Buď f homomorfizmus* **V** *do* **W**. *Pak je f ortogonální homomorfizmus* **V** *do* **W**, *právě když pro každé* $\mathbf{x},\mathbf{y}$ *z* **V** *platí*[13]*):*

---

[13]) odtud plyne, proč se krom pojmu *ortogonální homomorfizmus*

$$\boxed{\rho(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}))=\rho(\mathbf{x},\mathbf{y}).}$$

Zabývejme se nyní otázkou, zda zachování skalárního součinu neimplikuje i zachování sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem[14]).

Buďte $\mathbf{V},\mathbf{W}$ euklidovské vektorové prostory a nechť f je bijektivní zobrazení $\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ s vlastností

$$\forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{V}:\ f(\mathbf{x})f(\mathbf{y})=\mathbf{x}\mathbf{y}. \qquad (20\text{-}1)$$

Chceme ukázat, že f je ortogonální izomorfizmus - pro což postačí samozřejmě ukázat, že f je homomorfizmem $\mathbf{V}$ do $\mathbf{W}$, tj.

$$\text{(i)}\ \forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{V}:\ f(\mathbf{x}+\mathbf{y})=f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y}),$$

$$\text{(ii)}\ \forall \mathbf{x}\in\mathbf{V}, \forall t\in\mathbb{R}:\ f(t\mathbf{x})=tf(\mathbf{x}).$$

Ad **(i)**:

Jsou-li $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{V}$, je (i) ekvivalentní s $(f(\mathbf{x}+\mathbf{y})-f(\mathbf{x})-f(\mathbf{y}))=\mathbf{o}$. Uvážíme-li, že nulovým vektorem je právě ten $\mathbf{v}\in\mathbf{W}$ s vlastností (viz věta I.1.6.(3))

$$\forall \mathbf{u}\in\mathbf{W}:\ \mathbf{v}\mathbf{u}=0,$$

zvolíme libovolně $\mathbf{u}\in\mathbf{W}$ a vyšetřujme hodnotu výrazu

$$(f(\mathbf{x}+\mathbf{y})-f(\mathbf{x})-f(\mathbf{y}))\cdot\mathbf{u}.$$

Protože z bijektivity f plyne existence

$$\mathbf{v}\in\mathbf{V}:\ \mathbf{u}=f(\mathbf{v}),$$

můžeme zkoumaný výraz dále psát:

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{y})\mathbf{u}-f(\mathbf{x})\mathbf{u}-f(\mathbf{y})\mathbf{u} = f(\mathbf{x}+\mathbf{y})f(\mathbf{v})-f(\mathbf{x})f(\mathbf{v})-f(\mathbf{y})f(\mathbf{v}) \overset{(a)}{=}$$

$$=(\mathbf{x}+\mathbf{y})\mathbf{v}-\mathbf{x}\mathbf{v}-\mathbf{y}\mathbf{v} \overset{(b)}{=} \mathbf{x}\mathbf{v}+\mathbf{y}\mathbf{v}-\mathbf{x}\mathbf{v}-\mathbf{y}\mathbf{v} = 0,$$

přičemž v rovnosti (a) jsme užili předpoklad (20-1) a v (b) známé vlastnosti skalárného součinu.

Splnění podmínky **(ii)** ukážeme analogicky (proveďte!).

Platí tedy:

---

užívá i pojmenování *izometrie.*

[14]) inspirací nám (pro zachování součtu vektorů) může být představa intuitivního zavedení součtu dvou vektorů pomocí trojúhelníku, přičemž zachování skalárního součinu (a tím délek jeho stran a vnitřních úhlů) značí „zachování tohoto trojúhelníka" v daném zobrazení.

20. Věta *Buď f bijekce* **V** *na* **W**. *Pak je f ortogonální izomorfizmus* **V** *na* **W**, *právě když pro každé* **x**,**y** *z* **V** *platí:*

$$\boxed{f(\mathbf{x})f(\mathbf{y})=\mathbf{xy}.}$$

V odvození věty 19 jsme předpokládali, že $f:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ je homomorfizmus, čehož jsme explicitně užili v rovnosti (a) (vlastnost $f(\mathbf{o})=\mathbf{o}$).

Bylo by možno analogicky jako ve větě 20 předpokládat jen, že $f:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ je bijekce navíc s vlastností $f(\mathbf{o})=\mathbf{o}$?

Uvažujme tedy bijekci $f:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ s vlastnostmi:

$$f(\mathbf{o})=\mathbf{o}, \tag{21-1}$$

$$\rho(f(\mathbf{x}),f(\mathbf{y}))=\rho(\mathbf{x},\mathbf{y}). \tag{21-2}$$

S ohledem na větu 20 postačí ukázat, že f zachovává skalární součin. Z identity

$$(\mathbf{x}-\mathbf{y})(\mathbf{x}-\mathbf{y})=\mathbf{xx}-2\mathbf{xy}+\mathbf{yy},$$

pro libovolné $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ plyne:

$$\mathbf{uv}=\tfrac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2-\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2), \tag{21-3}$$

$$f(\mathbf{u})f(\mathbf{v})=\tfrac{1}{2}(\|f(\mathbf{u})\|^2+\|f(\mathbf{v})\|^2-\|f(\mathbf{u})-f(\mathbf{v})\|^2). \tag{21-4}$$

Z podmínky (21-1) (rovnost (a) a (21-2) (rovnost (b)) vyplývá pro libovolné $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$:[15])

$$\|f(\mathbf{x})\|=\|f(\mathbf{x})-\mathbf{o}\|\overset{(a)}{=}\|f(\mathbf{x})-f(\mathbf{o})\|=\rho(f(\mathbf{x}),f(\mathbf{o}))\overset{(b)}{=}\rho(\mathbf{x},\mathbf{o})=\|\mathbf{x}-\mathbf{o}\|=\|\mathbf{x}\|,$$

a tudíž z (21-4) dostáváme:

$$f(\mathbf{u})f(\mathbf{v})=\tfrac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2-\|f(\mathbf{u})-f(\mathbf{v})\|^2)=\tfrac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2-(\rho(f(\mathbf{u}),f(\mathbf{v})))^2)=$$

$$\overset{(a)}{=}\tfrac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2-(\rho(\mathbf{u},\mathbf{v}))^2)=\tfrac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2-\|\mathbf{u},\mathbf{v}\|^2)\overset{(b)}{=}\mathbf{uv},$$

přičemž v rovnosti (a) jsme užili (21-2) a v (b) relaci (21-3).

Odvodili jsme větu následující:

---

[15]) srv. odvození věty 19.

21.Věta *Buď f bijekce* **V** *na* **W**. *Pak je f ortogonální izomorfizmus* **V** *na* **W**, *právě když platí:*

(i) $f(\mathbf{o})=\mathbf{o}$,
(ii) $\forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{V}$: $\rho(f(\mathbf{x}),f(\mathbf{y}))=\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})$.

Příklad B

Nalezněte všechny ortogonální homomorfizmy $f:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$, pro něž

$$\mathbf{u} \mapsto \mathbf{v},$$

je-li v ortonormálních bázích $\mathcal{B},\mathcal{C}$ po řadě prostorů **V**,**W** dáno:

$$\{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}}=(-\sqrt{2},\sqrt{2}),\quad \{\mathbf{v}\}_{\mathcal{C}}=(0,-2).$$

Řešení

Protože $\|\mathbf{u}\|=2=\|\mathbf{v}\|$, má vzhledem důsledku 10 smysl ortogonální homomorfizmus požadované vlastnosti hledat.

Známým postupem (viz příklad 2.B) budeme hledat matici

$$(f,\mathcal{B},\mathcal{C})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

která s ohledem na větu o určenosti homomorfizmu nebude jediná[16]):

$$a_{11}=(\sqrt{2}/2)(2-t_1),\quad a_{21}=(\sqrt{2}/2)(2-t_1),$$

$$a_{12}=(\sqrt{2}/2)(1-t_2),\quad a_{22}=(\sqrt{2}/2)(-1-t_2).$$

kde $t_1,t_2\in R$ jsou parametry. Tím je popsána množina všech homomorfizmů, pro něž $\mathbf{u}\mapsto\mathbf{v}$. Z nich vybereme ty, která jsou *ortogonální* - tj. dle věty 16 právě ty, pro něž:

$$(f,\mathcal{B},\mathcal{C})(f,\mathcal{B},\mathcal{C})^T=\mathbf{E}.$$

Dosadíme-li zjištěné hodnoty prvků matice $(f,\mathcal{B},\mathcal{C})$, zjistíme, že podmínka ortogonality tétp matice vede k následující soustavě rovnic pro t_1,t_2:

$$t_1^2-4t_1+4=1$$
$$t_2^2+1=1$$
$$-4t_2+2t_1t_2=0,$$

---

[16]) matice soustavy rovnic pro elementy této matice zní:

$$(-\sqrt{2}\ \ \sqrt{2}\ \mid\ 0\ \mid -2\ ).$$

která má dvě řešení:

$$\text{(i)} \quad t_1=1,\ t_2=0,$$
$$\text{(ii)} \quad t_1=3,\ t_2=0.$$

Dosadíme-li zjištěné hodnoty patametrů t_1, t_2 do vyjádření koeficientů $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$, zjišťujeme, že existují *právě dva* ortogonální homomorfizmy požadovaných vlastností, jejichž analytická vyjádření znějí:

$$f_1:\ \begin{aligned} y_1&=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}x_1+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}x_2 \\ y_2&=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}x_1-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}x_2 \end{aligned}$$

$$f_2:\ \begin{aligned} y_1&=-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}x_1-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}x_2 \\ y_2&=\ \tfrac{1}{2}\sqrt{2}x_1-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}x_2. \end{aligned}$$

(srovnejte s výsledkem příkladu I.2.**C**)

Poznamenejme, že příklad je možné řešit rovněž tak, že najdeme obraz dalšího vektoru $\bar{\mathbf{u}}$ z $\mathbf{V}$, čímž bude homomorfizmus f plně určen. Je-li $\bar{\mathbf{u}}\in\mathbf{V}$, pak dle důsledku 10 bude pro jeho obraz platit:

$$\text{(i)} \quad \|f(\bar{\mathbf{u}})\|=\|\bar{\mathbf{u}}\|,$$
$$\text{(ii)} \quad \sphericalangle(f(\mathbf{u}),f(\bar{\mathbf{u}}))=\sphericalangle(\mathbf{u},\bar{\mathbf{u}}).$$

Zvolme $\bar{\mathbf{u}}\perp\mathbf{u}$ - např. $\{\bar{\mathbf{u}}\}_{\mathcal{B}}=(1,1)$, pak pro $f(\bar{\mathbf{u}})$ musí platit:

$$\|f(\bar{\mathbf{u}})\|=\|\bar{\mathbf{u}}\|=\sqrt{2}\ \wedge\ f(\bar{\mathbf{u}})\perp\mathbf{v}\ \ (\text{tj.}\ \{f(\bar{\mathbf{u}})\}_{\mathcal{E}}\in[(1,0)]),$$

tj.
$$\{f(\bar{\mathbf{u}})\}_{\mathcal{E}}=\begin{cases}(\sqrt{2},0)\\(-\sqrt{2},0).\end{cases}$$

Pak již standardním postupem (viz příklady v kapitole 2.) nalezneme matici, popř.analytické vyjádření, obou homomorfizmů f (proveďte!).

6.2.1 Izomorfní euklidovské vektorové prostory

Vrátíme-li se k úvaze na začátku podkapitoly 6.2, je přirozená následující definice (srv. definice 1.14):

22. Definice Buďte **V**, **W** euklidovské vektorové prostory. Řekneme, že *euklidovský vektorový prostor* **W** *je izomorfní s euklidovským vektorovým prostorem* **V**, jestliže existuje ortogonální izomorfizmus prostoru **V** na **W**[17]).

23. Poznámka Z důsledku 15 (a 1.9) plyne, že je-li euklidovský vektorový prostor **V** izomorfní s euklidovským vektorovým prostorem **W**, pak je i **W** izomorfní s **V**. Proto budeme nadále říkat pouze, že *euklidovské vektorové prostory* **V** *a* **W** *jsou izomorfní.*

Z věty 1.16 plyne, že dva izomorfní euklidovské vektorové prostory mají touž dimenzi. Vyšetřeme nyní tvrzení obrácené - buďte **V**, **W** dva euklidovské vektorové prostory téže dimenze n. Zvolíme-li v nich po řadě ortonormální báze $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, pak, jelikož kartézská soustava souřadnic určená $\mathcal{B}$, resp. $\mathcal{C}$, je ortogonálním izomorfizmem prostoru **V**, resp. **W**, na $\mathbb{R}^n$, odvodíme s ohledem na důsledek 15 platnost věty následující:

24. Věta *Dva euklidovské vektorové prostory jsou izomorfní, právě když mají touž dimenzi.*

Izomorfizmus euklidovských vektorových prostorů je zvláštním případem izomorfizmu vektorových prostorů. Vztah mezi dvěma izomorfními vektorovými prostory jsme zkoumali v podkapitole 1.1 (viz věty 1.17 a 1.18). Všimněme si nyní izomorfizmu dvou *eukli-*

---

[17]) někdy se rovněž užívá pojmu *ortogonálně izomorfní* (pak není třeba zdůrazňovat, že jde o izomorfizmus *euklidovských* vektorových prostorů).

dovských vektorových prostorů.

Buďte $((\mathbf{V},+,\mathbb{R},\cdot),\bullet)$ a $((\mathbf{W},\oplus,\mathbb{R},\odot),\circ)$ izomorfní euklidovské vektorové prostory, $f:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ příslušný ortogonální izomorfizmus.

Závislost mezi sčítáním vektorů ve $\mathbf{V}$ $(+)$ a ve $\mathbf{W}$ $(\oplus)$ i mezi násobením vektoru skalárem ve $\mathbf{V}$ $(\cdot)$ a ve $\mathbf{W}$ $(\odot)$ jsme již vyšetřili v podkapitole 1.1. Analogickým postupem zjistíme závislost mezi skalárním součinem ve $\mathbf{V}$ $(\bullet)$ a ve $\mathbf{W}$ $(\circ)$.

Zvolme libovolné $\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbf{W}$. Pak je lze jednoznačně psát ve tvaru $$\mathbf{v}=f(\mathbf{x}),\ \mathbf{w}=f(\mathbf{y}),\ \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{V}.$$
Pro jejich skalární součin s ohledem na ortogonalitu izomorfizmu f (rovnost (a)) dostáváme:
$$\mathbf{v}\circ\mathbf{w}=f(\mathbf{x})\circ f(\mathbf{y})\overset{(a)}{=}\mathbf{x}\bullet\mathbf{y}=f^{-1}(\mathbf{v})\bullet f^{-1}(\mathbf{w}),$$
což značí, že skalární násobení $\circ$ vektorů ve $\mathbf{W}$ je *jednoznačně určeno* skalárním násobením $\bullet$ vektorů ve $\mathbf{V}$.

Vidíme, že je-li euklidovský vektorový prostor $\mathbf{W}$ izomorfním obrazem euklidovského vektorového prostoru $\mathbf{V}$, je nejen množina vektorů $\mathbf{W}$, sčítání vektorů ve $\mathbf{W}$ a násobení vektoru z $\mathbf{W}$ skalárem, ale i skalární násobení vektorů ve $\mathbf{W}$ jednoznačně určeno zadáním euklidovského vektorového prostoru $\mathbf{V}$ a příslušného ortogonálního izomorfizmu f, což vystihuje obrat, že *není třeba rozlišovat mezi dvěma izomorfními euklidovskými vektorovými prostory, neboť se liší toliko označením svých prvků.*

Platí tudíž následující věty (promyslete si platnost obrácené implikace ve větě 25 a ověřte splnění axiomů euklidovského vektorového prostoru ve větě následující!):

25.Věta *Buďte* $((\mathbf{V},+,\mathbb{R},\cdot),\bullet)$ *a* $((\mathbf{W},\oplus,\mathbb{R},\odot),\circ)$ *euklidovské vektorové prostory. Pak platí, že euklidovské vektorové prostory* $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ *jsou izomorfní, právě když existuje bijekce* $f:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ *s vlast-*

nostmi[18]*):*

(i) $\forall \mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbf{W}$: $\mathbf{v}\oplus\mathbf{w}=f(f^{-1}(\mathbf{v})+f^{-1}(\mathbf{w}))$,

(ii) $\forall t\in\mathbb{R}, \forall \mathbf{v}\in\mathbf{W}$: $t\odot\mathbf{v}=f(t\cdot f^{-1}(\mathbf{v}))$,

(iii) $\forall \mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbf{W}$: $\mathbf{v}\circ\mathbf{w}=f^{-1}(\mathbf{v})\bullet f^{-1}(\mathbf{w})$.

26. Věta *Buď* $((\mathbf{V},+,\mathbb{R},\cdot),\bullet)$ *euklidovský vektorový prostor a* $\mathbf{W}$ *množina spolu se zobrazeními* $\oplus:\mathbf{W}\times\mathbf{W}\to\mathbf{W}$, $\odot:\mathbb{R}\times\mathbf{W}\to\mathbf{W}$ *a* $\circ:\mathbf{W}\times\mathbf{W}\to\mathbb{R}$. *Jestliže existuje bijekce* $f:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ *s vlastnostmi*

(1) $\forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$: $f(\mathbf{u}+\mathbf{v})=f(\mathbf{u})\oplus f(\mathbf{v})$,

(2) $\forall \mathbf{u}\in\mathbf{V}, \forall t\in\mathbb{R}$: $f(t\cdot\mathbf{u})=t\odot f(\mathbf{u})$,

(3) $\forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$: $f(\mathbf{u})\circ f(\mathbf{v})=\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}$.

pak $((\mathbf{W},\oplus,\mathbb{R},\odot),\circ)$ *je euklidovský vektorový prostor izomorfní vektorovému prostoru* $((\mathbf{V},+,\mathbb{R},\cdot),\bullet)$, *přičemž* f *je příslušným ortogonálním izomorfizmem.*

---

[18]) Tvrzení (iii) lze symbolicky psát takto:

$$\circ=(f^{-1}\times f^{-1})\circ(\bullet).$$

7. Faktorový vektorový prostor

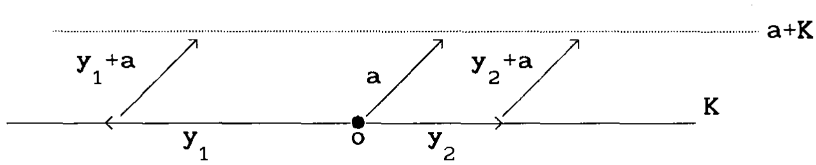
V této kapitole budeme symbolem **V** označovat n-rozměrný vektorový prostor $(\mathbf{V},+,\mathbb{T},\cdot)$.

1. Definice Buď $\mathbf{K} \subseteq\subseteq \mathbf{V}$, $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$. Pak se množina označovaná $\mathbf{a}+\mathbf{K}$ a definovaná vztahem[1])

$$\boxed{\mathbf{a}+\mathbf{K}=\{\mathbf{x}\in\mathbf{V};\ \exists \mathbf{y}\in\mathbf{K}:\ \mathbf{x}=\mathbf{a}+\mathbf{y}\}}$$

nazývá *lineární varieta prostoru* **V** *určená vektorem* **a** *o zaměření* **K**.

2. Poznámka Nechť je dán 2-rozměrný vektor.prostor **V**, jeho jednorozměrný podprostor **K** a některý $\mathbf{a}\in\mathbf{V}$ (viz obrázek). Pak čárkovaná přímka znázorňuje koncové body vektorů náležících varietě $\mathbf{a}+\mathbf{K}$.



3. Poznámka

(1) přímo z definice 1 plyne, že pro každý **x** z **V**:

$$\boxed{\mathbf{x}\in\mathbf{a}+\mathbf{K} \Leftrightarrow \mathbf{x}-\mathbf{a}\in\mathbf{K}.}$$

(2) nelze obecně ztotožňovat varietu $\mathbf{a}+\mathbf{K}$ s podprostorem $[\mathbf{a}]+\mathbf{K}$ (Promyslete si! Čemu by byl roven podprostor $[\mathbf{a}]+\mathbf{K}$ v případě popsaném v poznámce 2?).

---

[1]) • pro označení variety užíváme symbol „+", tedy stejný, jako pro součet vektorů či součet podprostorů. Nebezpečí nedorozumění však nehrozí (viz též poznámka 3). Vhodnost tohoto značení vyplyne dále.

• o vektoru **a** budeme též hovořit jako o *reprezentantu* dané variety

Zaveďme nyní následující relaci na množině **V**:

4. Definice Buďte $\mathbf{K} \subseteq\subseteq \mathbf{V}$ a $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{V}$. Řekneme, že *vektor* **a** *je kongruentní s vektorem* **b** *modulo*[2]) **K**, což značíme $\mathbf{a} \equiv \mathbf{b}(\mathrm{mod}\mathbf{K})$, jestliže vektor $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ náleží **K**.

5. Úmluva Bude-li zřejmé, o jaký podprostor **K** se jedná, budeme závorku „(mod**K**)" vynechávat.

Snadno se ukáže platnost následujícího tvrzení (proveďte!):

6. Věta *Buď* $\mathbf{K} \subseteq\subseteq \mathbf{V}$. *Pak platí:*

(1) $\forall \mathbf{a} \in \mathbf{V}$: $\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}(\mathrm{mod}\mathbf{K})$,

(2) $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{V}$: $\mathbf{a} \equiv \mathbf{b}(\mathrm{mod}\mathbf{K}) \Rightarrow \mathbf{b} \equiv \mathbf{a}(\mathrm{mod}\mathbf{K})$,

(3) $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{V}$: $(\mathbf{a} \equiv \mathbf{b}(\mathrm{mod}\mathbf{K}) \wedge \mathbf{b} \equiv \mathbf{c}(\mathrm{mod}\mathbf{K})) \Rightarrow \mathbf{a} \equiv \mathbf{c}(\mathrm{mod}\mathbf{K})$.

7. Důsledek *Relace „býti kongruentní modulo* **K**" *je pro každé* $\mathbf{K} \subseteq\subseteq \mathbf{V}$ *relací ekvivalence na množině* **V**.

Z poznámky 3.(1) bezprostředně plyne:

8. Věta *Buďte* $\mathbf{K} \subseteq\subseteq \mathbf{V}$, $\mathbf{a}, \mathbf{x} \in \mathbf{V}$. *Pak platí:*

$$\boxed{\mathbf{x} \in \mathbf{a}+\mathbf{K} \Leftrightarrow \mathbf{x} \equiv \mathbf{a}(\mathrm{mod}\mathbf{K}).}$$

Z důsledku 7 a věty 8 obdržíme[3]):

---

[2]) užívá se též obratu *podle* **K** nebo *vzhledem ke* **K**.

[3]) připomeňme, že je-li $\equiv$ relace ekvivalence na množivě V, pak ke každému $a \in V$ sestrojíme množinu všech prvků z V ekvivalentních s a, tj. množinu $\{x \in V;\ x \equiv a\}$ - tzv. *třídu rozkladu množiny* V *dle relace* $\equiv$ *určenou prvkem* a, čímž obdržíme *rozklad množiny* V *dle*

9. Důsledek *Buď* $\mathbf{K} \leq\leq \mathbf{V}$, $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$. *Pak je varieta* $\mathbf{a}+\mathbf{K}$ *třídou rozkladu množiny* **V** *podle relace „býti kongruentní modulo* **K**" *určená prvkem* **a**.

Z teorie rozkladů množin dle relace ekvivalence a důsledku 9 plyne[4]):

10. Lemma *Buď* $\mathbf{K} \leq\leq \mathbf{V}$. *Pak pro každé* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *z* **V** *platí:*

(1) $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{V}$: $(\mathbf{a}+\mathbf{K}=\mathbf{b}+\mathbf{K}) \Leftrightarrow \mathbf{a} \equiv \mathbf{b}(\mathrm{mod}\mathbf{K})$,

(2) $\forall \mathbf{a} \in \mathbf{V}$: $\mathbf{a}+\mathbf{K}=\mathbf{K} \Leftrightarrow \mathbf{a} \equiv \mathbf{o}(\mathrm{mod}\mathbf{K})$,

(3) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{a} \in \mathbf{V}$: $(\mathbf{x} \in \mathbf{a}+\mathbf{K} \wedge \mathbf{y} \in \mathbf{a}+\mathbf{K}) \Leftrightarrow \mathbf{x} \equiv \mathbf{y}(\mathrm{mod}\mathbf{K})$.

Odtud užitím definice 4 obdržíme:

11. Věta *Buď* $\mathbf{K} \leq\leq \mathbf{V}$. *Pak pro každé* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *z* **V** *platí:*

(1) $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{V}$: $(\mathbf{a}+\mathbf{K}=\mathbf{b}+\mathbf{K}) \Leftrightarrow (\mathbf{b}-\mathbf{a}) \in \mathbf{K}$,

(2) $\forall \mathbf{a} \in \mathbf{V}$: $\mathbf{a}+\mathbf{K}=\mathbf{K} \Leftrightarrow \mathbf{a} \in \mathbf{K}$,

(3) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{a} \in \mathbf{V}$: $(\mathbf{x} \in \mathbf{a}+\mathbf{K} \wedge \mathbf{y} \in \mathbf{a}+\mathbf{K}) \Leftrightarrow (\mathbf{y}-\mathbf{x}) \in \mathbf{K}$.

Zadejme $\mathbf{K} \leq\leq \mathbf{V}$. Pak můžeme zkonstruovat *rozklad* množiny **V** dle relace $\equiv(\mathrm{mod}\mathbf{K})$ - množinu právě všech variet prostoru **V** o zaměření **K**. Označme tuto množinu $\mathbf{V}/\mathbf{K}$[5]). Platí tedy

---

relace ≡, což je množina právě všech těchto tříd.

Platí, že:

- každá třída je určena kterýmkoli svým prvkem,
- sjednocení všech tříd je rovno množině *V*,
- každé dvě různé třídy mají prázdný průnik.

Podrobněji viz např. [16]

[4]) odvoďte přímo!

[5]) jak je čtenáři známo, jde o tzv. *faktorovou množinu množiny* **V**

$$\boxed{\mathbf{V/K}=\{\{x\in\mathbf{V};\exists y\in\mathbf{K}:x=a+y\},a\in\mathbf{V}\}=\{\{a+\mathbf{K}\},a\in\mathbf{V}\}.}$$

Nyní bude naší snahou na množině **V/K** vybudovat strukturu vektorového prostoru, tedy definovat sčítání variet a násobení variety skalárem.

• Buďte $\mathbf{a}+\mathbf{K}$, $\mathbf{b}+\mathbf{K}$ z **V/K**.

Definujme zobrazení $+:(\mathbf{V/K})\times(\mathbf{V/K}) \to \mathbf{V/K}$ takto[6]):

$$\boxed{(\mathbf{a}+\mathbf{K})+(\mathbf{b}+\mathbf{K}) = (\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{K}.} \qquad (12\text{-}1)$$

• Buďte $\mathbf{a}+\mathbf{K}$ z **V/K** a t z $\mathbb{T}$.

Definujme zobrazení $\cdot:\mathbb{T}\times(\mathbf{V/K}) \to \mathbf{V/K}$ takto[7]):

$$\boxed{t\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{K}) = (t\cdot\mathbf{a})+\mathbf{K}.} \qquad (12\text{-}2)$$

Vzhledem k tomu, že reprezentant dané variety *není dán jednoznačně,* je otázkou, zda varieta, která je definována relací

---

dle relace $\equiv(\mathrm{mod}\mathbf{K})$. Přesto ji nebudeme značit $\mathbf{V}/\equiv(\mathrm{mod}\mathbf{K})$ (jak je čtenář zřejmě zvyklý), ale **V/K**.

[6]) týmž symbolem „+" jsou označena tři různá zobrazení:

• sčítání vektorů - tj. zobrazení $\mathbf{V}\times\mathbf{V}\to\mathbf{V}$,

• zobrazení přiřazující každému $\mathbf{a}\in\mathbf{V}$ varietu $\mathbf{a}+\mathbf{K}$ (tzv. *přirozené zobrazení)* - tj. zobrazení $\mathbf{V} \to \mathbf{V/K}$ a

• právě definované sčítání variet - tj. zobrazení $(\mathbf{V/K})\times(\mathbf{V/K}) \to \mathbf{V/K}$.

Vzhledem k tomu, že ze způsobu označení příslušných matematických objektů a syntaxe zápisu je vždy jasné, jaký význam je symbolu „+" přisouzen, nemůže dojít k nedorozumění a nebudeme pro sčítání variet zavádět symbol další.

[7]) opět si týmž symbolem „·", který budeme zpravidla vynechávat, dovolíme bez nebezpečí nedorozumění označit dvě různá zobrazení.

(12-1), resp. (12-2), nezávisí na výběru reprezentantů variet, resp. variety, na levé straně uvedených relací.

Předpokládejme, že $\bar{\mathbf{a}}$ je rovněž reprezentantem variety $\mathbf{a}+\mathbf{K}$, tj.

$$\bar{\mathbf{a}}+\mathbf{K}=\mathbf{a}+\mathbf{K},$$

což s ohledem na 11.(1) značí, že

$$\bar{\mathbf{a}}-\mathbf{a}\in\mathbf{K}. \tag{12-3}$$

Pak užitím (12-1) dostáváme:

$$(\bar{\mathbf{a}}+\mathbf{K})+(\mathbf{b}+\mathbf{K})=(\bar{\mathbf{a}}+\mathbf{b})+\mathbf{K}.$$

Porovnejme nyní variety $(\bar{\mathbf{a}}+\mathbf{b})+\mathbf{K}$ a $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{K}$. Protože $(\bar{\mathbf{a}}+\mathbf{b})-(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\bar{\mathbf{a}}-\mathbf{a}$, jsou si variety $(\bar{\mathbf{a}}+\mathbf{b})+\mathbf{K}$ a $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{K}$ s ohledem na (12-3) a 11.(1) rovny, a tudíž sčítání variet je relací (12-1) *definováno korektně*, neboť stejně bychom vyloučili závislost součtu variet na reprezentantu $\mathbf{b}$ druhé z nich.
Analogicky bychom ukázali korektnost zavedení násobení variety skalárem relací (12-2).

Jsme tudíž oprávněni vyslovit následující definici.

12. Definice Buď $\mathbf{K}\subseteq\subseteq\mathbf{V}$ a nechť jsou dány $\mathbf{a}+\mathbf{K}, \mathbf{b}+\mathbf{K}\in\mathbf{V}/\mathbf{K}$ a $t\in\mathbb{T}$. Pak

(1) *součtem lineárních variet* $\mathbf{a}+\mathbf{K}$ a $\mathbf{b}+\mathbf{K}$ rozumíme varietu označovanou $(\mathbf{a}+\mathbf{K})+(\mathbf{b}+\mathbf{K})$ a definovanou relací (12-1).

(2) *skalárním* t-*násobkem lineární variety* $\mathbf{a}+\mathbf{K}$ rozumíme varietu označovanou $t\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{K})$ a definovanou relací (12-2).

Snadno se ukáže (přenecháme čtenáři; plyne bezprostředně z definice 12 a vlastností vektorového prostoru $\mathbf{V}$), že $(\mathbf{V}/\mathbf{K},+)$ *je komutativní grupa,* kde *nulovou varietou* je $\mathbf{K}$ $(=\mathbf{o}+\mathbf{K})$ a k varietě $\mathbf{a}+\mathbf{K}$ je *opačnou varietou* varieta $(-\mathbf{a})+\mathbf{K}$[8]).

---

[8]) je to tzv. *faktorová grupa dle normální podgrupy* $\mathbf{K}$.

Dále bychom snadno odvodili, že na množině **V/K** spolu se zobrazeními $+,\cdot$ dle definice 12 jsou splněny i další podmínky pro to, aby byla vektorovým prostorem (které to jsou?), což vyjadřuje následující věta.

13. Věta *Buď dán* $\mathbf{K} \subseteq\subseteq \mathbf{V}$. *Pak množina* **V/K** *spolu se zobrazeními* + *a* $\cdot$ *definovanými v* 12 *je vektorovým prostorem nad tělesem* $\mathbb{T}$.

Můžeme tedy vyslovit následující definici.

14. Definice Buď dán $\mathbf{K} \subseteq\subseteq \mathbf{V}$. Pak vektorový prostor $(\mathbf{V/K},+,\mathbb{T},\cdot)$ nazýváme *faktorový vektorový prostor vektorového prostoru* **V** *podle podprostoru* **K**[9] a označujeme **V/K**.

Buď $\mathbf{K} \subseteq\subseteq \mathbf{V}$. Uvažujme nyní zobrazení $\nu_{\mathbf{K}}$ přiřazující každému vektoru z **V** lineární varietu z **V/K** tímto vektorem určenou, tj.[10]

$$\boxed{\begin{array}{c} \nu_{\mathbf{K}}:\ \mathbf{V}\to\mathbf{V/K} \\ \forall \mathbf{a}\in\mathbf{V}:\ \nu_{\mathbf{K}}(\mathbf{a})=\mathbf{a}+\mathbf{K}. \end{array}} \qquad (15\text{-}1)$$

Jde o tzv. přirozené zobrazení, jak jsme se již pod čarou zmínili (a mohli bychom jej též značit +, z důvodů přehlednosti dáme přednost symbolu $\nu_{\mathbf{K}}$).

Zvolme $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbf{V}$. Pak můžeme psát:

$$\nu(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \overset{(a)}{=} (\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{K} \overset{(b)}{=} (\mathbf{a}+\mathbf{K})+(\mathbf{b}+\mathbf{K}) \overset{(c)}{=} \nu(\mathbf{a})+\nu(\mathbf{b}),$$

přičemž v rovnosti (a) a (c) jsme užili relaci (15-1) a v (b) pak relaci (12-1).

Analogicky ukážeme, že pro libovolné $\mathbf{a}\in\mathbf{V}$ a $t\in\mathbb{T}$ platí (proveďte):

$$\nu(t\mathbf{a})=t\nu(\mathbf{a}).$$

Celkem jsme ukázali, že $\nu\in\mathcal{H}om(\mathbf{V},\mathbf{V/K})$. Můžeme proto vyslovit

[9]) nebo krátce *faktorizací* **V** *podle* **K**

[10]) bude-li ze souvislosti jasné, o faktorizaci dle jakého podprostoru **K** se jedná, budeme namísto $\nu_{\mathbf{K}}$ psát jen ν.

následující definici:

15. Definice Buď dán vektorový prostor **V** a jeho podprostor **K**. Pak zobrazení $\nu_K:\mathbf{V}\to\mathbf{V}/\mathbf{K}$ definované relací (15-1) se nazývá *přirozený (n. kanonický) homomorfizmus příslušný faktorizaci* **V/K**.

Čtenáři je z teorie rozkladů množin známa tzv. *věta o homomorfizmu množin*[11]. Prozkoumejme tedy vztah mezi daným vektorovým prostorem **V**, jeho homomorfním obrazem **W** a jistou faktorizací prostoru **V** indukovanou homomorfizmem **V** na **W**.

Nechť je dán vektorový prostor **V**, vektorový prostor **W** a epimorfizmus f **V** na **W**. Na **V** definujme binární relaci $\approx$ takto:

$$\forall \mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbf{V}:\ \mathbf{a}\approx\mathbf{b}\ \Leftrightarrow\ f(\mathbf{a})=f(\mathbf{b}).$$

Protože f je homomorfizmus, můžeme pro každé $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbf{V}$ psát:

$$\mathbf{a}\approx\mathbf{b}\ \Leftrightarrow\ f(\mathbf{b}-\mathbf{a})=\mathbf{o}\ \Leftrightarrow\ (\mathbf{b}-\mathbf{a})\in\mathrm{Ker}f\ \Leftrightarrow\ \mathbf{a}\equiv\mathbf{b}(\mathrm{mod}\ \mathrm{Ker}f),$$

což značí, že relace $\approx$ je rovna již zavedené relaci $\equiv(\mathrm{mod}\mathrm{Ker}f)$, a proto existuje právě jedna bijekce $g:\mathbf{V}/\mathrm{Ker}f\to\mathbf{W}$ tak, že

$$\boxed{\nu_{\mathrm{Kerf}}\circ g=f,} \qquad (16\text{-}1)$$

tj. následující diagram komutuje

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V} \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{V}/\mathrm{Ker}f \arrow[dl, dotted, "g"] \\ \mathbf{W} & \end{tikzcd}$$

[11]) Buďte dány množiny V, W a surjekce $f:V\to W$. Definujeme-li relaci $\approx$ na V vztahem

$$\forall a,b\in V:\ a\approx b\ \Leftrightarrow\ f(a)=f(b)$$

a označíme-li $\nu:V\to V/\approx$ přirozené zobrazení přiřazující každému $a\in V$ třídu dle ekvivalence $\approx$ určenou prvkem a, pak existuje právě jedna bijekce $g:V/\approx\ \to W$ tak, že

$$\nu\circ g=f.$$

Zjistěme nyní, zda je zobrazení g homomorfizmus.

Označme $\mathbf{K}=\mathrm{Ker}f$ a uvažujme libovolnou lineární varietu $\mathbf{x}+\mathbf{K}\in\mathbf{V}/\mathbf{K}$ Pak zřejmě $\mathbf{x}+\mathbf{K}=\nu(\mathbf{x})$, a tudíž s ohledem na (16-1)[12]:

$$g(\mathbf{x}+\mathbf{K})=f(\mathbf{x}). \tag{16-2}$$

Zvolme nyní dvě libovolné variety $\mathbf{a}+\mathbf{K}$, $\mathbf{b}+\mathbf{K}$. Pak můžeme psát:

$$g((\mathbf{a}+\mathbf{K})+(\mathbf{b}+\mathbf{K}))\overset{(a)}{=}g((\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{K})\overset{(b)}{=}f(\mathbf{a}+\mathbf{b})\overset{(c)}{=}f(\mathbf{a})+f(\mathbf{b})\overset{(d)}{=}g(\mathbf{a}+\mathbf{K})+g(\mathbf{b}+\mathbf{K}),$$

přičemž v rovnosti (a) jsme užili (12-1), v rovnostech (b),(d) relaci (16-2) a v rovnosti (c) faktu, že f je homomorfizmus.

Analogicky bychom ukázali, že pro libovolné $\mathbf{a}+\mathbf{K}$ a $t\in\mathbb{T}$ platí:

$$g(t(\mathbf{a}+\mathbf{K}))=tg(\mathbf{a}+\mathbf{K}).$$

Z předchozího je tedy patrno, že ν je homomorfizmus a jednoznačně určená bijekce g je izomorfizmem.

Uvážíme-li, že není-li f epimorfizmem $\mathbf{V}$ na $\mathbf{W}$, zůstává epimorfizmem $\mathbf{V}$ na $\mathrm{Im}f\subseteq\mathbf{W}$ a g, které je tedy izomorfizmem $\mathbf{V}/\mathrm{Ker}f$ na $\mathrm{Im}f$, je monomorfizmem $\mathbf{V}/\mathrm{Ker}f$ na $\mathbf{W}$, pak odtud a z věty o homomorfizmu množin dostáváme tzv. *větu o homomorfizmu vektorových prostorů:*

16. Věta *Buďte* $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ *vektorové prostory. Pak ke každému homomorfizmu* $f:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ *existuje právě jeden monomorfizmus* $g:\mathbf{V}/\mathrm{Ker}f$ *do* $\mathbf{W}$ *tak, že* $f=\nu_{\mathrm{Ker}f}\circ g$.

Je-li f epimorfizmus, je g izomorfizmus.

Každý homomorfní obraz vektorového prostoru $\mathbf{V}$ je izomorfní jisté faktorizaci prostoru $\mathbf{V}$. Uvažujme-li obráceně libovolnou faktorizaci $\mathbf{V}/\mathbf{K}$, pak zřejmě $\mathbf{V}/\mathbf{K}=\mathrm{Im}\nu_{\mathbf{K}}$.

Z věty 16 tudíž plyne:

---

[12]) není třeba ověřovat, zda hodnota $g(\mathbf{x}+\mathbf{K})$ nezávisí na volbě reprezentanta variety $\mathbf{x}+\mathbf{K}$, neboť to zaručuje přímo věta o homomorfizmu množin.

17. Důsledek *Množina homomorfních obrazů daného vektorového prostoru je až na izomorfizmus rovna množině jeho faktorizací dle jednotlivých jeho podprostorů.*

Zabývejme se nyní dimenzí faktorového vektorového prostoru **V/K**. Jak jsme již zmínili, je $\mathbf{V}/\mathbf{K}=\mathrm{Im}\nu_{\mathrm{K}}$, tudíž dle věty 2.9

$$\dim\mathbf{V}/\mathbf{K}=\dim\mathbf{V}-\dim\mathrm{Ker}\nu_{\mathrm{K}}.$$

Vyšetřeme nyní $\mathrm{Ker}\nu_{\mathrm{K}}$.

$$\mathbf{x}\in\mathrm{Ker}\nu_{\mathrm{K}} \Leftrightarrow \nu_{\mathrm{K}}(\mathbf{x})=\mathbf{o}+\mathbf{K} \overset{(a)}{\Leftrightarrow} \mathbf{x}+\mathbf{K}=\mathbf{o}+\mathbf{K} \overset{(b)}{\Leftrightarrow} \mathbf{x}\in\mathbf{K},$$

což značí, že

$$\dim\mathrm{Ker}\nu_{\mathrm{K}}=\dim\mathbf{K}.$$

Přitom v ekvivalenci (a) jsme užili definici (15-1) a v (b) pak větu 11.(2).

Platí proto tato věta:

18. Věta *Buď dán vektorový prostor* **V** *a jeho podprostor* **K**. *Pak platí*

$$\boxed{\dim\mathbf{V}/\mathbf{K} = \dim\mathbf{V} - \dim\mathbf{K}.}$$

Nalezněme nyní některou bázi faktorizace **V/K**. Položme $n=\dim\mathbf{V}$, $k=\dim\mathbf{K}$.

Uvažujme libovolnou lin.varietu $\mathbf{x}+\mathbf{K}\in\mathbf{V}/\mathbf{K}$.

Buď $\mathcal{B}=\langle\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\rangle$ báze prostoru **V**. Pak vektor $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$ lze psát ve tvaru

$$\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i,$$

a tudíž pro zvolenou varietu (užitím přirozeného homomorfizmu $\nu_{\mathbf{k}}$) dostáváme[13]):

---

[13]) k témuž výsledku lze pochopitelně dospět i přímo, bez užití přirozeného homomorfizmu

$$\mathbf{x}+\mathbf{K}=\nu_K(\mathbf{x})=\nu_K\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i\Big)=\sum_{i=1}^{n} x_i\nu_K(\mathbf{e}_i)=\sum_{i=1}^{n} x_i(\mathbf{e}_i+\mathbf{K}).$$

Odtud je patrno, že množina variet

$$\mathcal{G}=\{(\mathbf{e}_1+\mathbf{K}),\dots,(\mathbf{e}_n+\mathbf{K})\}$$

je množinou generátorů prostoru **V/K**.

Jsou-li některé z variet v množině $\mathcal{G}$ nulové, obdržíme jejich vynětím opět množinu generátorů prostoru **V/K**.

Přitom z věty 18 plyne, že báze prostoru **V/K** je (n-k)-členná. Nabízí se proto zvolit bázi $\mathcal{B}$ tak, aby *právě* k *z variet množiny* $\mathcal{G}$ *bylo nulových,* neboť pak jejich vynětím z $\mathcal{G}$ obdržíme přímo bázi faktorizace **V/K**. Uvědomíme-li si, že nulovou je právě ta varieta, jejíž reprezentant náleží **K** (viz věta 11.(2)), stačí zkonstruovat bázi $\mathcal{B}$ jako doplnění báze **K** na bázi **V**. Platí tedy evidentně následující věta:

19. Věta *Buď dán vektorový prostor* **V** *a jeho podprostor* **K**. *Buď* $\langle \mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_{n-k}\rangle$ *libovolný systém vektorů s vlastností*[14])

$$\mathbf{V}=[\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_{n-k}]\oplus\mathbf{K}$$

Pak $\langle \mathbf{e}_1+\mathbf{K},\dots,\mathbf{e}_{n-k}+\mathbf{K}\rangle$ *je bází faktorového vektorového prostoru* **V/K**.

20. Poznámka Závěrem ukažme jednu geometrickou interpretaci faktorizace: Máme-li dán vektorový prostor **V**, můžeme pomocí faktorizace vybudovat *afinní prostor* $\mathcal{A}(\mathbf{V})$ takto[15]):

- *body afinního prostoru* $\mathcal{A}(\mathbf{V})$ budeme rozumět právě všechny jednoprvkové podmnožiny ve **V**,
- za *zaměření afinního prostoru* $\mathcal{A}(\mathbf{V})$ vezmeme vektor.prostor **V**,
- vektor rovný *rozdílu bodů* $\{\mathbf{a}\}$ *a* $\{\mathbf{b}\}$ *z* $\mathcal{A}(\mathbf{V})$ definujeme relací

---

[14]) jinak řečeno, je-li $\langle \mathbf{e}_{n-k+1},\dots,\mathbf{e}_n\rangle$ libovolná báze **K**, jsou vektory $\langle \mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_{n-k}\rangle$ těmi, které ji ve smyslu Steinitzovy věty doplňují na bázi prostoru **V**

[15]) viz např. [2]

$$\{\mathbf{b}\}-\{\mathbf{a}\}=\mathbf{b}-\mathbf{a}.$$

Pak se snadno ukáže, že *m-rozměrným afinním podprostorem určeným bodem* $\{\mathbf{a}\}$ *a zaměřením* $\mathbf{K}\subseteq\mathbf{V}$, $\dim\mathbf{K}=m$, bude *lineární varieta* $\mathbf{a}+\mathbf{K}$[16]).

Příklad A

Ve vektorovém prostoru $\mathbf{V}_4$ je dán podprostor $\mathbf{K}=[\mathbf{u},\mathbf{v}]$ a vektor $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$. Stanovte dimenzi faktorprostoru $\mathbf{V}/\mathbf{K}$ a nalezněte alespoň jednu jeho bázi a dále stanovte souřadnice variety $\mathbf{x}+\mathbf{K}$ v této bázi, je-li ve zvolené bázi[17]) prostoru $\mathbf{V}$ dáno:

$$\{\mathbf{u}\}=(1,2,1,1),\ \{\mathbf{v}\}=(2,0,0,1) \text{ a } \{\mathbf{x}\}=(1,-2,2-1).$$

Řešení:

Jelikož $\mathbf{u},\mathbf{v}$ jsou lineárně nezávislé, je $\dim\mathbf{K}=2$, a tudíž dle věty 18 obdržíme:

$$\dim\mathbf{V}/\mathbf{K}=\dim\mathbf{V}-\dim\mathbf{K}=4-2=2.$$

Pro konstrukci některé báze prostoru $\mathbf{V}/\mathbf{K}$ užijeme věty 19 - je třeba vektory $\mathbf{u},\mathbf{v}$ doplnit ve smyslu Steinitzovy věty na bázi prostoru $\mathbf{V}$, což lze např. učinit vektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, pro něž:

$$\{\mathbf{e}_1\}=(0,0,1,0),\ \{\mathbf{e}_2\}=(0,0,0,1),$$

(přesvědčte se o lineární nezávislosti vektorů $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$!).
V souladu s větou 19 je tedy

$$\mathcal{E}=\langle\mathbf{e}_1+\mathbf{K},\ \mathbf{e}_2+\mathbf{K}\rangle$$

bází prostoru $\mathbf{V}/\mathbf{K}$.

Varieta $\mathbf{x}+\mathbf{K}$, jakožto vektor vektorového prostoru $\mathcal{V}=\mathbf{V}/\mathbf{K}$, bude mít v bázi $\mathcal{E}$ souřadnice (x_1,x_2), právě když

$$\mathbf{x}+\mathbf{K}=x_1(\mathbf{e}_1+\mathbf{K})+x_2(\mathbf{e}_2+\mathbf{K}).$$

neboli (užitím definic součtu a skalárního násobku variet)

$$\mathbf{x}+\mathbf{K}=(x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2)+\mathbf{K},$$

což je ekvivalentní s

---

[16]) tedy např. množina přímek o směrovém vektoru $\mathbf{s}$ je množina variet $\mathbf{V}/[\mathbf{s}]$ a podobně.

[17]) nebudeme ji pro jednoduchost nijak označovat

$$\mathbf{x}-(x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2)\in\mathbf{K},$$

což - uvážíme-li, že $\mathbf{K}=[\mathbf{u},\mathbf{v}]$, lze ekvivalentně psát[18]):

$$\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{u}+x_4\mathbf{v}.$$

Přihlédneme-li k souřadnicím jednotlivých vektorů, je tato relace ekvivalentní soustavě lineárních rovnic maticově zapsané takto:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right),$$

a tato má (přirozeně) jediné řešení:

$$\underline{x_1=3,\ x_2=-1},\ x_3=-1,\ x_4=1,$$

což značí, že $\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{E}}=(3,-1)$.

---

[18]) to mimochodem přímo plyne z odvození věty 19, z cvičných důvodů se zde však na to neodvoláváme

8. Duální vektorový prostor

Uvážíme-li, že každé komutativní těleso $\mathbb{T}$ je současně 1-rozměrným vektorovým prostorem $(\mathbb{T},+,\mathbb{T},\cdot)$, je oprávněná následující definice:

1. Definice Buď $\mathbf{V}$ vektorový prostor nad $\mathbb{T}$. Pak

(1) vektorový prostor $\mathcal{H}om(\mathbf{V},\mathbb{T})$ nazýváme *duální vektorový prostor prostoru* $\mathbf{V}$ a značíme $\tilde{\mathbf{V}}$,

(2) každý prvek f z $\tilde{\mathbf{V}}$ nazýváme *lineární forma na* $\mathbf{V}$.

2. Úmluva V této kapitole budeme symbolem $\mathbf{V}$ označovat n-rozměrný vektorový prostor $(\mathbf{V},+,\mathbb{T},\cdot)$.

3. Poznámky

- Lineární formou na $\mathbf{V}$ je tedy každé zobrazení $f:\mathbf{V}\to\mathbb{T}$ s vlastnostmi:

(1) $\forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$: $f(\mathbf{u}+\mathbf{v})=f(\mathbf{u})+f(\mathbf{v})$,

(2) $\forall \mathbf{u}\in\mathbf{V}, \forall t\in\mathbb{T}$: $f(t\mathbf{u})=tf(\mathbf{u})$.

- Duální vektorový prostor $\tilde{\mathbf{V}}$ je množina právě všech lineárních forem na $\mathbf{V}$ spolu se sčítáním lineárních forem a násobením lineární formy skalárem z $\mathbb{T}$[19]).

- S pojmem *lineární forma* se setkáváme i v teorii polynomů[20]), kde je chápán jako *homogenní polynom stupně* 1 (což je přístup historicky starší). Jak uvidíme, je lineární forma právě takové zobrazení $\mathbf{V}\to\mathbb{T}$, jehož analytické vyjádření v některé (a pak v každé) bázi je homogenním polynomem stupně 1 (tedy *lineární formou*

---

[19]) toto sčítání, resp. násobení, se přirozeně nemusí znova definovat, neboť je již na $\mathcal{H}om(\mathbf{V},\mathbb{T})=\tilde{\mathbf{V}}$ definováno v kapitole 3.

[20]) viz např. [14]

ve smyslu teorie polynomů), kde neurčitými jsou souřadnice vektoru z **V**.[21])

Protože lineární forma je zvláštním případem homomorfizmu, je celá řada jejích vlastností pouze specializací těchto známých pro homomorfizmy obecně a popsaných v předešlých kapitolách. Uveďme jen některé z nich (vyhledejte k nim příslušná obecná tvrzení teorie homomorfizmů!).

4. Věta *Buď* **V** *vektorový prostor. Pak platí:*

$$\boxed{\dim\tilde{\mathbf{V}}=\dim\mathbf{V}.}$$ [22])

5. Věta *Ke každé bázi* $\mathcal{B}=\langle\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_n\rangle$ *vektorového prostoru* **V** *a každé uspořádané n-tici* $(a_1,\dots,a_n)$ *skalárů z* $\mathbb{T}$ *existuje právě jedna lineární forma* f *na* **V** *s vlastností*

$$f(\mathbf{u}_i)=a_i,\quad i=1,\dots,n.$$

6. Poznámka Pokud jde o volbu báze $\mathbb{T}$ jakožto vektorového prostoru, budeme implicite předpokládat, že bází je $\langle 1\rangle$[23]).

Matici lineární formy f vzhledem k bázi $\mathcal{B}$ budeme tedy značit jen $(f,\mathcal{B})$[24]).

---

[21]) podobná je situace např. u forem bilineárních

[22]) platí tedy, že $\tilde{\mathbf{V}}\cong\mathbf{V}$. Význačný izomorfizmus najdeme později.

[23]) tedy pro souřadnice libovolného x z $\mathbb{T}$ platí: $\{x\}=x$.

[24]) přitom zřejmě je-li $\mathcal{B}=\langle\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_n\rangle$, platí:

$$\boxed{(f,\mathcal{B})=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\in\mathbb{T}^n,\ \text{kde } a_i=f(\mathbf{u}_i),\ 1\le i\le n.}$$

7. Věta *Buď f lineární forma na $\mathbf{V}$ a $\mathcal{B}$ báze prostoru $\mathbf{V}$. Pak pro každý $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$ platí:*

$$\boxed{f(\mathbf{x})=\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}}(f,\mathcal{B}),}$$

neboli:

je-li $\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}}=(x_1,\ldots,x_n)$ a $\mathcal{B}=\langle\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n\rangle$, pak pro $f(\mathbf{x})$ platí:

$$\boxed{f(\mathbf{x})=a_1x_1+\ldots+a_nx_n,}$$

kde $a_i=f(\mathbf{u}_i)$, $1\le i\le n$.

8. Věta *Duální vektorový prostor $\tilde{\mathbf{V}}_n$ je izomorfní s aritmetickým vektorovým prostorem $\mathbb{T}^n$.*

Je-li $\mathcal{B}$ báze prostoru $\mathbf{V}$, pak je zobrazení $H_{\mathcal{B}}$ definované relací

$$\boxed{\forall f\in\tilde{\mathbf{V}}:\ H_{\mathcal{B}}(f)=(f,\mathcal{B}).}$$

izomorfizmem vektorového prostoru $\tilde{\mathbf{V}}_n$ na $\mathbb{T}^n$.

Lineární forma f je nulová, právě když $h(f)=0$ (proč?). Forma f je tedy nenulová, právě když $h(f)\neq0$, neboli $h(f)=1$. Z věty 2.9 tedy plyne:

9. Věta *Buď f lineární forma na $\mathbf{V}$. Pak platí:*

(1) $f=o$, právě když $\mathrm{Ker}f=\mathbf{V}$,

(2) $f\neq o$, právě když $\dim\mathrm{Ker}f=n-1$.

Nenulové lineární formy jsou tedy právě ty, jejichž jádra jsou vektorovými nadrovinami ve $\mathbf{V}$. Jaký je vztah mezi formami, jejichž jádra jsou ve vztahu inkluze, vyřešíme později (věta 17).

V kapitole 3. byla zavedena význačná báze prostoru homomorfizmů (viz relace (3.6-2)).

Buď $\mathcal{B}=<\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n>$ báze prostoru $\mathbf{V}$. Pak vzhledem k tomu, že $m=\dim\mathbb{T}=1$, bychom dle citované relace obdrželi systém lineárních forem $e_{11},\dots,e_{n1}$ definovaných takto:

$$\forall i, 1\le i\le n,\ e_{i1}(\mathbf{e}_k)=\delta_{ik}1,\ k=1,\dots,n.$$

Dvojí indexace se zde stává zbytečnou. Zaveďme proto k bázi $\mathcal{B}$ systém lineárních forem $<\tilde{\mathbf{e}}_1,\dots,\tilde{\mathbf{e}}_n>$ definovaných relací

$$\boxed{\forall i, 1\le i\le n:\ \tilde{\mathbf{e}}_i(\mathbf{e}_k)=\delta_{ik},\ k=1,\dots,n,} \qquad (10\text{-}1)$$

který tvoří bázi prostoru $\tilde{\mathbf{V}}$.

Jsme tudíž oprávněni vyslovit tuto definici:

10. Definice Buď $\mathcal{B}=<\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n>$ báze prostoru $\mathbf{V}$. Pak systém lineárních forem $<\tilde{\mathbf{e}}_1,\dots,\tilde{\mathbf{e}}_n>$ definovaných relací (10-1) budeme nazývat *báze prostoru $\tilde{\mathbf{V}}$ duální k bázi $\mathcal{B}$ a označovat symbolem $\tilde{\mathcal{B}}$.*

Buď $\mathcal{B}$ báze prostoru $\mathbf{V}$, $\mathcal{F}$ báze prostoru $\tilde{\mathbf{V}}$. Naskýtá se otázka, kdy bude $\mathcal{F}$ duální bází k $\mathcal{B}$, tj. kdy nastane $\mathcal{F}=\tilde{\mathcal{B}}$.

Označme $\mathcal{B}=<\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n>$, $\mathcal{F}=<f_1,\dots,f_n>$

Uvážíme-li, že pro rovnost dvou forem je nutná a stačí rovnost jejich hodnot na některé bázi (vhodné bude užít právě bázi $\mathcal{B}$), můžeme pro $i=1,\dots,n$ psát:

$$f_i=\tilde{\mathbf{e}}_i \Leftrightarrow \forall k, 1\le k\le n:\ f_i(\mathbf{e}_k)=\tilde{\mathbf{e}}_i(\mathbf{e}_k) \Leftrightarrow \forall k, 1\le k\le n:\ f_i(\mathbf{e}_k)=\delta_{ik},$$

kde jsme v druhé ekvivalenci užili relace (10-1).

Platí tedy tato věta:

11. Věta *Buď $\mathcal{B}=<\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n>$ báze prostoru $\mathbf{V}$, $\mathcal{F}=<f_1,\dots,f_n>$ báze prostoru $\tilde{\mathbf{V}}$. Pak je báze $\mathcal{F}$ duální bází k bázi $\mathcal{B}$, právě když*

$$\boxed{\forall i, 1\le i\le n:\ f_i(\mathbf{e}_k)=\delta_{ik},\ k=1,\dots,n.}$$

Zkoumejme nyní vztah mezi maticí přechodu mezi bázemi prostoru $\mathbf{V}$ a bázemi k nim duálními.

Buďte $\mathcal{B}=<\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n>$ a $\mathcal{C}=<\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_n>$ báze prostoru $\mathbf{V}$ a sestrojme k nim báze duální.

Spočtěme pro libovolné $i,k=1,\dots,n$ hodnotu $\tilde{\mathbf{e}}_k(\mathbf{u}_i)$ jak s využitím matice přechodu mezi bázemi $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$, tak i bázemi $\tilde{\mathcal{B}}$ a $\tilde{\mathcal{C}}$.

Označme příslušné matice přechodu takto:

$$(\mathcal{B},\mathcal{C})=(a_{ij}),\quad (\tilde{\mathcal{C}},\tilde{\mathcal{B}})=(b_{ij}),$$

což značí:

$$\mathbf{u}_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_j,\quad 1\le i\le n, \tag{12-1}$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_k=\sum_{h=1}^{n} b_{kh}\tilde{\mathbf{u}}_h,\quad 1\le k\le n. \tag{12-2}$$

(i):

$$\tilde{\mathbf{e}}_k(\mathbf{u}_i)\overset{(a)}{=}\tilde{\mathbf{e}}_k\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_j\Big)\overset{(b)}{=}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{\mathbf{e}}_k(\mathbf{e}_j)\overset{(c)}{=}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\delta_{kj}=a_{ik},$$

přičemž v rovnosti (a) jsme užili relaci (12-1), v (b) toho, že $\tilde{\mathbf{e}}_k$ je lineární forma a v (c) relaci (10-1).

(ii):

$$\tilde{\mathbf{e}}_k(\mathbf{u}_i)\overset{(a)}{=}\Big(\sum_{h=1}^{n} b_{kh}\tilde{\mathbf{u}}_h\Big)(\mathbf{u}_i)\overset{(b)}{=}\sum_{h=1}^{n}(b_{kh}\tilde{\mathbf{u}}_h)(\mathbf{u}_i)\overset{(c)}{=}\sum_{h=1}^{n} b_{kh}(\tilde{\mathbf{u}}_h(\mathbf{u}_i))\overset{(d)}{=}$$

$$=\sum_{h=1}^{n} b_{kh}\delta_{hi}=b_{ki},$$

přičemž v rovnosti (a) jsme užili relaci (12-2), v (b) definici sčítání homomorfizmů, v (c) definici násobení homomorfizmu skalárem a konečně v (d) relaci (10-1).

Z porovnáním výsledku dle (i) a (ii) dostáváme, že

$$b_{ki}=a_{ik},\quad 1\le i,k\le n,$$

což zaznamenává následující věta:

12.Věta *Buďte $\mathcal{B},\mathcal{C}$ báze prostoru* $\mathbf{V}$. *Pak platí:*

$$\boxed{(\tilde{\mathcal{C}},\tilde{\mathcal{B}})=(\mathcal{B},\mathcal{C})^T.}$$

Větu můžeme znázornit takto:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathbf{V}} & \qquad & \tilde{\mathcal{B}} \xleftarrow{\ \mathbf{A}^T\ } \tilde{\mathcal{C}} \\ \hline \mathbf{V} & \qquad & \mathcal{B} \xrightarrow{\ \mathbf{A}\ } \mathcal{C} \end{array}$$

Naskýtá se přirozená otázka, zda se duálními bázemi vyčerpá celá množina bází prostoru $\tilde{\mathbf{V}}$.

Uvažujme libovolnou bázi $\mathcal{F}$ prostoru $\tilde{\mathbf{V}}$ a tažme se, zda (a kolik) existuje báze prostoru $\mathbf{V}$, k níž by duální bází byla báze $\mathcal{F}$.

Zvolme některou bázi $\mathcal{B}$ v $\mathbf{V}$ a zkonstruujme k ní duální bázi $\tilde{\mathcal{B}}$.

Označme
$$\mathbf{A}=(\mathcal{F},\tilde{\mathcal{B}}) \tag{13-1}$$
a zkonstruujme ve $\mathbf{V}$ bázi $\mathcal{C}$ tak, aby platilo[25]):
$$(\mathcal{B},\mathcal{C})=\mathbf{A}^T.$$
K bázi $\mathcal{C}$ sestrojíme bázi duální a s ohledem na větu 12 platí:
$$(\tilde{\mathcal{C}},\tilde{\mathcal{B}})=\mathbf{A},$$
což vzhledem k (13-1) značí, že
$$\mathcal{F}=\tilde{\mathcal{C}}.$$
Dokázali jsme tak následující větu:

13. Věta *Každá báze prostoru* $\tilde{\mathbf{V}}$ *je duální bází k právě jedné bázi prostoru* $\mathbf{V}$.

Z právě uvedené věty plyne, že bázemi ve $\tilde{\mathbf{V}}$ jsou právě ty báze, které jsou duální k některé bázi prostoru $\mathbf{V}$.

Z věty 3.6 dále plyne další význam koeficientů analytického vyjádření lineární formy:

---

[25]) jak známo, existuje ve $\mathbf{V}$ *právě jedna* taková báze $\mathcal{C}$

14. Věta *Je-li $\mathcal{B}$ báze prostoru* **V**, *pak platí*[26]*):*

$$\boxed{(f,\mathcal{B})=(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n) \Leftrightarrow \{f\}_{\tilde{\mathcal{B}}}=(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n).}$$

Hledejme nyní některý izomorfizmus **V** na $\tilde{\mathbf{V}}$:

Zvolme ve **V** libovolně bázi $\mathcal{B}$. Pak označíme-li $\sigma_{\mathcal{B}}$ soustavu souřadnic ve **V** určenou bází $\mathcal{B}$ a $\sigma_{\tilde{\mathcal{B}}}$ soustavu souřadnic ve $\tilde{\mathbf{V}}$ určenou bází $\tilde{\mathcal{B}}$ je

$$\alpha=\sigma_{\mathcal{B}}\circ\sigma_{\tilde{\mathcal{B}}}^{-1}$$

izomorfizmem **V** na $\tilde{\mathbf{V}}$ (proč?).

Jaký bude jeho funkční předpis?

Buď $\mathbf{a}\in\mathbf{V}$. Pak

$$\alpha(\mathbf{a})=f \Leftrightarrow (\sigma_{\mathcal{B}}\circ\sigma_{\tilde{\mathcal{B}}}^{-1})(\mathbf{a})=f \Leftrightarrow \sigma_{\mathcal{B}}(\mathbf{a})=\sigma_{\tilde{\mathcal{B}}}(f),$$

což značí, že forma f má v bázi $\tilde{\mathcal{B}}$ tytéž souřadnice jako vektor **a** v bázi $\mathcal{B}$. Použijeme-li pro souřadnice obvyklé značení, dostáváme:

15. Důsledek *Buď $\mathcal{B}$ báze prostoru* **V**. *Pak zobrazení α:* $\mathbf{V}\to\tilde{\mathbf{V}}$ *definované předpisem*[27]*)*

$$\boxed{\forall\mathbf{a}\in\mathbf{V}\colon\ \alpha(\mathbf{a})=f \Leftrightarrow \{f\}_{\tilde{\mathcal{B}}}=\{\mathbf{a}\}_{\mathcal{B}}}$$

je izomorfizmem vektorového prostoru **V** *na* $\tilde{\mathbf{V}}$.

Buď **x** vektor z **V**. Zvolme ve **V** bázi $\mathcal{B}=\langle\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\rangle$ a zkonstruujme k ní duální bázi $\tilde{\mathcal{B}}$. Nechť $\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}}=(x_1,\dots,x_n)$.

Pak můžeme pro libolvolné i=1,...,n psát:

---

[26]) neboli: *ve zvolené bázi $\mathcal{B}$ má analytické vyjádření lin.formy f tvar* $f(\mathbf{x})=a_1x_1+\dots+a_nx_n$, *právě když* $f=a_1\tilde{\mathbf{e}}_1+\dots+a_n\tilde{\mathbf{e}}_n$.

[27]) má-li vektor $\mathbf{a}\in\mathbf{V}$ v bázi $\mathcal{B}$ souřadnice $(a_1,\dots,a_n)$, je mu přiřazena lin.forma o analytickém vyjádření (v téže bázi):

$$f(\mathbf{x})=a_1x_1+\dots a_nx_n.$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_i(\mathbf{x})=\tilde{\mathbf{e}}_i\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{e}_j\Big)\overset{(a)}{=}\sum_{j=1}^{n} x_j\tilde{\mathbf{e}}_i(\mathbf{e}_j)\overset{(b)}{=}\sum_{j=1}^{n} x_j\delta_{ij}=x_i,$$

kde jsme v rovnosti (a) užili toho, že $\tilde{\mathbf{e}}_i$ je lin.forma a v (b) pak relaci (10-1).

Obdrželi jsme tak větu následující, z níž vyplývá, proč se o formě $\tilde{\mathbf{e}}_i$ hovořívá jako o *i-té souřadnicové formě*:

16.Věta *Buď* $\mathcal{B}=\langle\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\rangle$ *báze prostoru* **V**. *Pak pro každý* **x** *z* **V**, $\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}}=(x_1,\dots,x_n)$, *platí:*

$$\boxed{\tilde{\mathbf{e}}_i(\mathbf{x})=x_i,\quad 1\le i\le n.}$$

Uvažujme lineární formy f,g na **V**. Jestliže existuje $c\in\mathbb{T}$ tak, že $g=cf$, platí zřejmě, že $\mathrm{Ker}f\subseteq\mathrm{Ker}g$ (zdůvodněte!). Je možné tuto implikaci obrátit?

Nechť jsou tedy f,g lin.formy na **V** s vlastností

$$\mathrm{Ker}f\subseteq\mathrm{Ker}g \tag{17-1}$$

(i) jestliže $f=o$, je $\mathrm{Ker}f=\mathbf{V}$, a tudíž i $\mathrm{Ker}g=\mathbf{V}$, z čehož $g=o$, což značí, že jistě existuje $c\in\mathbb{T}$ (je zcela libovolné) tak, že

$$g=cf.$$

(ii) nechť $f\neq o$, tedy dle věty 9 $\dim\mathrm{Ker}f=n-1$.

Je-li $\langle\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_{n-1}\rangle$ báze $\mathrm{Ker}f$ a $\mathbf{e}_n$ vektor doplňující ji na bázi $\mathcal{B}$ prostoru **V**, platí

$$f(\mathbf{e}_n)\neq 0.$$

Existuje tedy $c\in\mathbb{T}$ tak, že

$$g(\mathbf{e}_n)=cf(\mathbf{e}_n). \tag{17-2}$$

S ohledem na (17-1) platí, že

$$\forall i, 1\le i\le n-1:\ g(\mathbf{e}_i)=0.$$

V bázi $\tilde{\mathcal{B}}$ tedy platí (viz věta 14):

$$\left.\begin{aligned}\{f\}_{\tilde{\mathcal{B}}}&=(0,\dots,0,f(\mathbf{e}_n))\\ \{g\}_{\tilde{\mathcal{B}}}&=(0,\dots,0,g(\mathbf{e}_n))\overset{(a)}{=}(0,\dots,0,cf(\mathbf{e}_n))=c(0,\dots,0,f(\mathbf{e}_n)),\end{aligned}\right\}(17\text{-}3)$$

přičemž v (a) jsme užili relaci (17-2).

Z (17-3) bezprostředně plyne, že

$$g=cf.$$

Platí proto věta následující[28]):

17.Věta *Buďte f,g lineární formy na* **V**. *Pak platí, že* $\mathrm{Ker}f \subseteq \mathrm{Ker}g$, *právě když existuje* $c \in \mathbb{T}$ *tak, že* $g=cf$.

Je-li dán vektorový prostor **V** nad tělesem $\mathbb{T}$, můžeme sestrojit prostor $\tilde{\mathbf{V}}$ k němu duální. Protože $\tilde{\mathbf{V}}$ je vektorový prostor, můžeme opět sestrojit prostor k němu duální, tj. $\tilde{\tilde{\mathbf{V}}}$. Prvky prostoru $\tilde{\tilde{\mathbf{V}}}$ jsou lineární formy na $\tilde{\mathbf{V}}$, tedy zobrazení $\tilde{\mathbf{V}} \to \mathbb{T}$, které každé lineární formě na **V** přiřadí skalár z $\mathbb{T}$.
Naskýtá se otázka, jaký je vztah mezi prostory **V** a $\tilde{\tilde{\mathbf{V}}}$. Je zřejmé, že mají touž dimenzi (proč?), a tudíž jsou izomorfní. Pokusme se nyní některý izomorfizmus **V** na $\tilde{\tilde{\mathbf{V}}}$ zkonstruovat.

(i) Zvolme některý $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ a definujme zobrazení

$$\left.\begin{array}{r} \mathfrak{z}_{\mathbf{u}}:\ \tilde{\mathbf{V}} \to \mathbb{T}, \\ \forall f \in \tilde{\mathbf{V}}:\ \mathfrak{z}_{\mathbf{u}}(f)=f(\mathbf{u}). \end{array}\right\} \qquad (18\text{-}1)$$

Evidentně $\mathfrak{z}_{\mathbf{u}}$ je homomorfizmem $\tilde{\mathbf{V}} \to \mathbb{T}$, tj. lineární formou na $\tilde{\mathbf{V}}$ (ověřte!).

(ii) Snadno se přesvědčíme, že

$$\forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbf{V}:\ \mathfrak{z}_{(\mathbf{u}+\mathbf{v})} = \mathfrak{z}_{\mathbf{u}} + \mathfrak{z}_{\mathbf{v}},$$
$$\forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}, \forall t \in \mathbb{T}:\ \mathfrak{z}_{(t\mathbf{u})} = t \cdot \mathfrak{z}_{\mathbf{u}},$$

což značí, že zobrazení

$$\left.\begin{array}{r} \mathfrak{Z}:\ \mathbf{V} \to \tilde{\tilde{\mathbf{V}}}, \\ \mathfrak{Z}(\mathbf{u})=\mathfrak{z}_{\mathbf{u}} \end{array}\right\} \qquad (18\text{-}2)$$

je homomorfizmem.

Vyšetřeme, zda je monomorfizmem, neboť pak vzhledem k rovnosti dimenzí **V** a $\tilde{\tilde{\mathbf{V}}}$ bude již izomorfizmem (viz důsl. 2.10).
Uvažíme-li $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$, je třeba ukázat, že $\mathfrak{Z}(\mathbf{v})$, tj. zobrazení $\mathfrak{z}_{\mathbf{v}}$, je nenulová forma $\tilde{\mathbf{V}} \to \mathbb{T}$ - hledáme tedy element z $\tilde{\mathbf{V}}$, tj. lineární

---

[28]) zaregistrujme, že $f=cg$ *není* ekvivalentní $\mathrm{Ker}f \subseteq \mathrm{Ker}g$ (uvažte např $g=o \neq f$!)

formu na **V**, která by se na **v** neanulovala. K tomu ovšem stačí vektor **v** doplnit na bázi $\mathcal{V}$ prostoru **V**:

$$\mathcal{V}=\langle \mathbf{v},\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_n\rangle$$

a sestrojit duální bázi $\tilde{\mathcal{V}}$. Pak platí s ohledem na (10-1) a (18-1):

$$0\neq 1=\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{v})=\mathfrak{z}_{\mathbf{v}}(\tilde{\mathbf{v}})$$

což značí, že $\mathrm{Ker}\,\mathfrak{J}=\{\mathbf{o}\}$.

Platí tedy věta následující:

18. Věta *Buď* **V** *vektorový prostor. Pak zobrazení* $\mathfrak{J}:\mathbf{V}\to\tilde{\tilde{\mathbf{V}}}$ *definované relací* (18-2) *je izomorfizmem vektorových prostorů.*

19. Poznámka Pokud bychom pro každé $\mathbf{u}\in\mathbf{V}$ ztotožnili **u** s $\mathfrak{J}(\mathbf{u})$, platilo by

$$\tilde{\tilde{\mathbf{V}}}=\mathbf{V}.$$

O této vlastnosti se hovoří jako o *reflexivitě vektorového prostoru* **V**.

Příklad A

Nechť je dán vektor.prostor $\mathbf{V}_3$ a lineární formy f_1,f_2,f_3 na tomto prostoru. Rozhodněte, zda $\mathcal{F}=\langle f_1,f_2,f_3\rangle$ je bází prostoru $\tilde{\mathbf{V}}$ a v kladném případě nalezněte bázi $\mathcal{C}$ prostoru **V**, k níž je báze $\mathcal{F}$ duální, je-li ve zvolené bázi $\mathcal{B}$ prostoru **V** dáno:

$$f_1(\mathbf{x})=x_1+2x_2$$
$$f_2(\mathbf{x})=x_1-x_2+x_3$$
$$f_3(\mathbf{x})=2x_1+x_2.$$

Řešení:

Množina $\mathcal{F}$ bude bází prostoru $\tilde{\mathbf{V}}$, právě když budou formy f_1,f_2,f_3 lineárně nezávislé. Uvážíme-li, že v souladu s větou 14 platí:

$$\{f_1(\mathbf{x})\}_{\tilde{\mathcal{B}}}=(1,2,0),\ \{f_2(\mathbf{x})\}_{\tilde{\mathcal{B}}}=(1,-1,1),\ \{f_3(\mathbf{x})\}_{\tilde{\mathcal{B}}}=(2,1,0),$$

budou zkoumané formy lineárně nezávislé, právě když

$$h\begin{pmatrix}1&2&0\\1&-1&1\\2&1&0\end{pmatrix}=3,$$

což snadno ověříte.

S ohledem na větu 11 bude $\mathcal{C}=\langle \mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\mathbf{c}_3\rangle$ bází duální k bázi $\mathcal{F}$, právě když

$$f_i(\mathbf{c}_k)=\delta_{ik},\quad i,k=1,2,3.$$

Označíme-li $\{\mathbf{c}_k\}_{\mathcal{B}}=(c_{k1},c_{k2},c_{k3})$, k=1,2,3,

je předchozí relace ekvivaletní následující soustavě lineárních rovnic:

$$c_{k1}+2c_{k2}=\begin{cases}1 \text{ pro } k=1\\ 0 \text{ pro } k=2\\ 0 \text{ pro } k=3\end{cases}$$

$$c_{k1}-c_{k2}+c_{k3}=\begin{cases}0 \text{ pro } k=1\\ 1 \text{ pro } k=2\\ 0 \text{ pro } k=3\end{cases}$$

$$2c_{k1}+c_{k2}=\begin{cases}0 \text{ pro } k=1\\ 0 \text{ pro } k=2\\ 1 \text{ pro } k=3,\end{cases}$$

jejíž řešení zapíšeme maticově:

$$\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccc} & k=1 & k=2 & k=3 \\ \end{array} \quad\quad \begin{array}{cccc} & k=1 & k=2 & k=3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \quad \cdots \quad \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1\end{array}\right),$$

což značí:

$$\{\mathbf{c}_1\}_{\mathcal{B}}=(-\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3},1),\ \{\mathbf{c}_2\}_{\mathcal{B}}=(0,0,1),\ \{\mathbf{c}_3\}_{\mathcal{B}}=(\tfrac{2}{3},-\tfrac{1}{3},-1).$$

Nalezení báze $\mathcal{C}$ je možné řešit i jinak - např. užitím věty 12. Jak jsme již uvedli, můžeme psát:

$$\{f_1(\mathbf{x})\}_{\tilde{\mathcal{B}}}=(1,2,0),\ \{f_2(\mathbf{x})\}_{\tilde{\mathcal{B}}}=(1,-1,1),\ \{f_3(\mathbf{x})\}_{\tilde{\mathcal{B}}}=(2,1,0),$$

což značí, že známe matici přechodu od báze $\tilde{\mathcal{B}}$ k $\tilde{\mathcal{C}}$:

$$(\tilde{\mathcal{B}},\tilde{\mathcal{C}})=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

Souřadnice hledaných vektorů $\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\mathbf{c}_3$ tvoří řádky matice přechodu $(\mathcal{B},\mathcal{C})$, pro kterou dle citované věty platí:

$$(\mathcal{B},\mathcal{C})=((\tilde{\mathcal{B}},\tilde{\mathcal{C}})^{-1})^T.$$

9. Princip duality ve vektorových prostorech

9.1 Anihilátory na vektorových prostorech

1. Definice[29])

(1) Buď $U \subseteq \mathbf{V}$. Pak *anihilátorem podmnožiny* U *prostoru* **V** rozumíme množinu označovanou $\mathbb{A}(U)$ a definovanou takto:

$$\boxed{\mathbb{A}(U)=\{f \in \tilde{\mathbf{V}};\ \forall \mathbf{x} \in U:\ f(\mathbf{x})=0\}.}$$

(2) Buď $K \subseteq \tilde{\mathbf{V}}$. Pak *anihilátorem podmnožiny* K *prostoru* $\tilde{\mathbf{V}}$ rozumíme množinu označovanou $\mathbb{A}(K)$ a definovanou takto:

$$\boxed{\mathbb{A}(K)=\{\mathbf{x} \in \mathbf{V};\ \forall f \in K:\ f(\mathbf{x})=0\}.}$$

Přímo z definice 1 plyne[30]):

2. Věta

(1) Buďte $S, U \subseteq \mathbf{V}$. *Pak platí:*

$$S \subseteq U \Rightarrow \mathbb{A}(U) \subseteq \mathbb{A}(S).$$

(2) Buďte $K, L \subseteq \tilde{\mathbf{V}}$. *Pak platí:*

$$K \subseteq L \Rightarrow \mathbb{A}(L) \subseteq \mathbb{A}(K).$$

Uvažujme nyní $U \subseteq \mathbf{V}$ a nechť f, g jsou lineární formy na **V** náležící $\mathbb{A}(U)$. Je-li **x** libovolný vektor z U, pak můžeme psát:

---

[29]) můžeme se též setkat s pojmenováním *anulátor množiny*

[30]) v této větě *nelze* obecně nahradit implikace ekvivalencemi. Uvažme např. situaci, kdy $U=\{\mathbf{a}\}$, $S=[\mathbf{a}]$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$. Pak zřejmě $\mathbb{A}(U)=\mathbb{A}(S)$, tedy $\mathbb{A}(U) \subseteq \mathbb{A}(S)$, avšak $S \not\subseteq U$.

Jsou-li uváděné podmnožiny současně *podprostory*, bude situace jiná - viz větu 9.

$$(f+g)(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})+g(\mathbf{x})\overset{(a)}{=}0+0=0,$$

což s ohledem na def.1 značí, že $f+g$ taktéž náleží $\mathbb{A}(U)$.
Přitom v rovnosti (a) jsme využili, že $f,g\in\mathbb{A}(U)$.
Podobně bychom ukázali, že pro libovolné $t\in\mathbb{T}$ obsahuje $\mathbb{A}(U)$ s každou formou f i formu tf (proveďte!).
Ukázali jsme platnost následující věty (případ $K\subseteq\tilde{\mathbf{V}}$ přenecháváme čtenáři).

3.Věta

(1) jestliže $U\subseteq\mathbf{V}$, *pak* $\mathbb{A}(U)\subseteq\subseteq\tilde{\mathbf{V}}$,

(2) jestliže $K\subseteq\tilde{\mathbf{V}}$, *pak* $\mathbb{A}(K)\subseteq\subseteq\mathbf{V}$.

Uvažujme nyní případ, kdy podmnožiny, k nimž sestrojujeme anihilátory, jsou současně *podprostory* příslušných vektorových prostorů a zabývejme se vztahem mezi dimenzí podprostoru a dimenzí jeho anihilátoru.

(i) Buď $\mathbf{U}\subseteq\subseteq\mathbf{V}$, $\langle\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_k\rangle$ nechť je báze $\mathbf{U}$. Tuto lze doplnit na bázi $\mathcal{B}$ prostoru $\mathbf{V}$

$$\mathcal{B}=\langle\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_k,\mathbf{u}_{k+1},\dots,\mathbf{u}_n\rangle.$$

Zřejmě pro vektor $\mathbf{x}$ z $\mathbf{V}$, $\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\mathbf{u}_i$, platí:

$$\mathbf{x}\in\mathbf{U}\Leftrightarrow x_{k+1}=\dots=x_n=0. \tag{4-1}$$

Pak pro lineární formu f na $\mathbf{V}$ můžeme psát:

$$f\in\mathbb{A}(\mathbf{U})\overset{(a)}{\Leftrightarrow}\forall\mathbf{x}\in\mathbf{U}:\ f(\mathbf{x})=0\overset{(b)}{\Leftrightarrow}\forall x_1,\dots,x_k\in\mathbb{T}:\ f(\sum_{i=1}^{k}x_i\mathbf{u}_i)=0\overset{(c)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\forall x_1,\dots,x_k\in\mathbb{T}:\ \sum_{i=1}^{k}x_if(\mathbf{u}_i)=0\overset{(d)}{\Leftrightarrow}f(\mathbf{u}_1)=\dots=f(\mathbf{u}_k)=0, \tag{4-2}$$

přičemž v ekvivalenci (a) jsme užili definici anihilátoru, v (b) pak relace (4-1), v (c) větu 1.11. V kroku (d) je implikace „⇐" evidentní a implikaci „⇒" získáme postupnou volbou

$$(x_1,\dots,x_k)=(1,0,\dots,0),\ (x_1,\dots,x_k)=(0,1,\dots,0),\ \dots,\ (x_1,\dots,x_k)=(0,0,\dots,1).$$

Výsledek (4-2) za použití věty 8.14 značí, že lin.forma f náleží do $\mathbb{A}(\mathbf{U})$, právě když pro její souřadnice v bázi $\tilde{\mathcal{B}}$ platí:

$$\{f\}_{\tilde{\mathcal{B}}}=(0,\dots,0,a_{k+1},\dots,a_n),$$

kde $a_{k+1},\dots,a_n\in\mathbb{T}$ jsou libovolné.
Odtud bezprostředně plyne tvrzení (1) ve větě 4.

(ii) Buď $\mathbf{K}\subseteq\subseteq\tilde{\mathbf{V}}$, $\langle g_1,\dots,g_k\rangle$ nechť je báze $\mathbf{K}$. Tuto lze doplnit na bázi $\mathcal{G}$ prostoru $\mathbf{V}$

$$\mathcal{G}=\langle g_1,\dots,g_k,g_{k+1},\dots,g_n\rangle.$$

Pro lineární formu f na $\mathbf{V}$, $f=\sum_{i=1}^{n} a_i g_i$, zřejmě platí:

$$f\in\mathbf{K} \Leftrightarrow a_{k+1}=\dots=a_n=0. \qquad (4\text{-}3)$$

Pro vektor $\mathbf{x}$ z $\mathbf{V}$ můžeme psát (analogicky jako v odst.(i)):

$$\mathbf{x}\in\mathbb{A}(\mathbf{K}) \Leftrightarrow \forall f\in\mathbf{K}\colon\ f(\mathbf{x})=0 \Leftrightarrow \forall a_1,\dots,a_k\in\mathbb{T}\colon\ \Big(\sum_{i=1}^{k} a_i g_i\Big)(\mathbf{x})=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall a_1,\dots,a_k\in\mathbb{T}\colon\ \sum_{i=1}^{k} a_i g_i(\mathbf{x})=0 \Leftrightarrow g_1(\mathbf{x})=\dots=g_k(\mathbf{x})=0. \qquad (4\text{-}4)$$

Zvolme nyní ve $\mathbf{V}$ bázi $\mathcal{B}$, k níž je duální bází báze $\mathcal{G}$[31]) a jejíž existenci zaručuje věta 8.13. Pak s ohledem na (4-4) použitím věty 8.16 dostáváme, že vektor $\mathbf{x}$ náleží $\mathbb{A}(\mathbf{K})$, právě když pro jeho souřadnice v bázi $\mathcal{B}$ platí:

$$\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}}=(0,\dots,0,x_{k+1},\dots,x_n),$$

kde $x_{k+1},\dots,x_n\in\mathbb{T}$ jsou libovolné.
Odtud bezprostředně dostáváme tvrzení (2) následující věty:

4.Věta *Buďte* $\mathbf{U}\subseteq\subseteq\mathbf{V}$, $\mathbf{K}\subseteq\subseteq\tilde{\mathbf{V}}$. *Pak platí:*

(1) $\dim\mathbb{A}(\mathbf{U})=\dim\mathbf{V}-\dim\mathbf{U}$,

(2) $\dim\mathbb{A}(\mathbf{K})=\dim\mathbf{V}-\dim\mathbf{K}$.

Z (4-4) rovněž plyne:

5.Věta *Buď* $\mathbf{K}\subseteq\subseteq\tilde{\mathbf{V}}$, $\mathbf{K}=[g_1,\dots,g_k]$. *Pak platí:*

$$\boxed{\mathbb{A}(\mathbf{K})=\bigcap_{1\le i\le k}\operatorname{Ker} g_i\,.}$$

---

[31]) tj. $\tilde{\mathcal{B}}=\mathcal{G}$

Zabývejme se nyní vztahem mezi množinou $U\subseteq\mathbf{V}$ a $\mathbb{A}(\mathbb{A}(U))$, což je podprostor rovněž ve $\mathbf{V}$. Zvolme $\mathbf{x}\in U$. Pak můžeme psát[32]:

$$\mathbf{x}\in U \Rightarrow \forall f\in\mathbb{A}(U): f(\mathbf{x})=0 \Rightarrow \mathbf{x}\in\mathbb{A}(\mathbb{A}(U)),$$

platí tedy

$$U\subseteq\mathbb{A}(\mathbb{A}(U)). \qquad (6\text{-}1)$$

Je-li $\mathbf{U}$ libovolný *podprostor* ve $\mathbf{V}$, pak dle věty 4 dostáváme:

$$\dim\mathbb{A}(\mathbb{A}(\mathbf{U}))=\dim\mathbf{V}-\dim\mathbb{A}(\mathbf{U})=\dim\mathbf{V}-(\dim\mathbf{V}-\dim\mathbf{U})=\dim\mathbf{U},$$

odkud za použití (6-1) plyne, že

$$\mathbb{A}(\mathbb{A}(\mathbf{U}))=\mathbf{U}. \qquad (6\text{-}2)$$

Analogicky bychom postupovali pro množinu, resp. podprostor, ve $\tilde{\mathbf{V}}$. Platí proto věty následující:

6. Věta *Buďte* $U\subseteq\mathbf{V}$ *a* $K\subseteq\tilde{\mathbf{V}}$. *Pak platí*

(1) $U\subseteq\mathbb{A}(\mathbb{A}(U))$,

(2) $K\subseteq\mathbb{A}(\mathbb{A}(K))$.

7. Věta *Buďte* $\mathbf{U}\subseteq\subseteq\mathbf{V}$ *a* $\mathbf{K}\subseteq\subseteq\tilde{\mathbf{V}}$. *Pak platí*

(1) $\mathbb{A}(\mathbb{A}(\mathbf{U}))=\mathbf{U}$,

(2) $\mathbb{A}(\mathbb{A}(\mathbf{K}))=\mathbf{K}$.

Odtud ihned plyne[33]:

8. Důsledek *Každý podprostor ve* $\tilde{\mathbf{V}}$, *resp. ve* $\mathbf{V}$, *je anihilátorem právě jednoho podprostoru ve* $\mathbf{V}$, *resp. ve* $\tilde{\mathbf{V}}$.

Z věty 7 a věty 2 dostáváme (promyslete si!):

---

[32]) v obou implikacích se užije definice anihilátoru

[33]) zobrazení, přiřazující každému podrostoru ve $\mathbf{V}$ jeho anihilátor ve $\tilde{\mathbf{V}}$, je tedy s ohledem na větu 2 *antiizomorfizmem* množin podprostorů ve $\mathbf{V}$ a ve $\tilde{\mathbf{V}}$ uspořádaných inkluzí.

9. Věta

(1) Buďte $\mathbf{S},\mathbf{U}\subseteq\subseteq\mathbf{V}$. *Pak platí:*

$$\mathbf{S}\subseteq\mathbf{U} \Leftrightarrow \mathbb{A}(\mathbf{U})\subseteq\mathbb{A}(\mathbf{S}).$$

(2) Buďte $\mathbf{K},\mathbf{L}\subseteq\subseteq\tilde{\mathbf{V}}$. *Pak platí:*

$$\mathbf{K}\subseteq\mathbf{L} \Leftrightarrow \mathbb{A}(\mathbf{L})\subseteq\mathbb{A}(\mathbf{K}).$$

Jaký význam má podprostor $\mathbb{A}(\mathbb{A}(U))$?
Buď $\mathbf{W}$ libovolný podprostor ve $\mathbf{V}$, pro nějž:

$$U\subseteq\mathbf{W}\subseteq\mathbb{A}(\mathbb{A}(U)). \qquad (10\text{-}1)$$

Užijeme-li větu 2, obdržíme:

$$\mathbb{A}(U)\supseteq\mathbb{A}(\mathbf{W})\supseteq\mathbb{A}(\mathbb{A}(\mathbb{A}(U))).$$

Dle věty 3 je $\mathbb{A}(\mathbb{A}(U))$ *podprostorem* ve $\mathbf{V}$, a tedy užitím věty 7 odtud plyne:

$$\mathbb{A}(U)\supseteq\mathbb{A}(\mathbf{W})\supseteq\mathbb{A}(U),$$

což ovšem značí, že: $\mathbb{A}(U)=\mathbb{A}(\mathbf{W})$,

odkud (opět dle 7) plyne:

$$\mathbf{W}=\mathbb{A}(\mathbb{A}(\mathbf{W}))=\mathbb{A}(\mathbb{A}(U)).$$

S ohledem na (10-1) to znamená, že $\mathbb{A}(\mathbb{A}(U))$ je nejmenší podprostor obsahující množinu U - je tedy jejím lineárním obalem.
Odvodili jsme tak následující větu (tvrzení (2) je triviálním důsledkem (1) (proč?).
Tvrzení (3) a (4) se dokáží analogicky (proveďte).

10. Věta *Buďte* $U\subseteq\mathbf{V}$ *a* $K\subseteq\tilde{\mathbf{V}}$. *Pak platí:*

(1) $\mathbb{A}(\mathbb{A}(U))=[U]$,

(2) $\mathbb{A}(U)=\mathbb{A}([U])$[34],

(3) $\mathbb{A}(\mathbb{A}(K))=[K]$,

(4) $\mathbb{A}(K)=\mathbb{A}([K])$.

---

[34]) jaká je tedy dimenze $\mathbb{A}(U)$?

Vlastnosti anihilátorů doplňuje následující věta[35]).

11.Věta *Buďte* $\mathbf{U},\mathbf{W}\subseteq\subseteq\mathbf{V}$ *a* $\mathbf{K},\mathbf{L}\subseteq\subseteq\tilde{\mathbf{V}}$. *Pak platí:*

(1) $\mathbb{A}(\mathbf{U}+\mathbf{W})=\mathbb{A}(\mathbf{U})\cap\mathbb{A}(\mathbf{W})$,

(2) $\mathbb{A}(\mathbf{U}\cap\mathbf{W})=\mathbb{A}(\mathbf{U})+\mathbb{A}(\mathbf{W})$,

(3) $\mathbb{A}(\mathbf{K}+\mathbf{L})=\mathbb{A}(\mathbf{K})\cap\mathbb{A}(\mathbf{L})$,

(4) $\mathbb{A}(\mathbf{K}\cap\mathbf{L})=\mathbb{A}(\mathbf{K})+\mathbb{A}(\mathbf{L})$.

Důkaz:

Ad (1):

(i) Protože $\mathbf{U},\mathbf{W}\subseteq\mathbf{U}+\mathbf{W}$, dostáváme z věty 2:

$$\mathbb{A}(\mathbf{U}+\mathbf{W})\subseteq\mathbb{A}(\mathbf{U}) \wedge \mathbb{A}(\mathbf{U}+\mathbf{W})\subseteq\mathbb{A}(\mathbf{W}),$$

což značí, že $\mathbb{A}(\mathbf{U}+\mathbf{W})\subseteq(\mathbb{A}(\mathbf{U})\cap\mathbb{A}(\mathbf{W}))$.

(ii) nechť $f\in\mathbb{A}(\mathbf{U})\cap\mathbb{A}(\mathbf{W})$. Pak

$$\forall \mathbf{u}\in\mathbf{U}, \forall \mathbf{w}\in\mathbf{W}:\ f(\mathbf{u})=f(\mathbf{w})=0. \tag{11-1}$$

Uvážíme-li libovolné $\mathbf{z}\in\mathbf{U}+\mathbf{W}$, tj. $\mathbf{z}=\mathbf{u}+\mathbf{w}, \mathbf{u}\in\mathbf{U}, \mathbf{w}\in\mathbf{W}$, pak

$$f(\mathbf{z}) = f(\mathbf{u}+\mathbf{w}) \overset{(a)}{=} f(\mathbf{u})+f(\mathbf{w}) \overset{(b)}{=} 0+0 = 0,$$

což značí, že $f\in\mathbb{A}(\mathbf{U}+\mathbf{W})$,

a tedy $(\mathbb{A}(\mathbf{U})\cap\mathbb{A}(\mathbf{W}))\subseteq\mathbb{A}(\mathbf{U}+\mathbf{W})$.

přičemž v rovnosti (a) jsme užili vlastnost lineární formy a v (b) pak relaci (11-1).

Tím je tvrzení (1) dokázáno.

Ad (3): Tvrzení se dokáže analogicky jako (1).

Ad (2):

Protože již víme, čemu je roven průnik anihilátorů podprostorů ve $\tilde{\mathbf{V}}$ (viz tvrzení (3)), položíme

$$\mathbf{K}=\mathbb{A}(\mathbf{U}),\ \mathbf{L}=\mathbb{A}(\mathbf{W}), \tag{11-2}$$

načež můžeme psát:

$$\mathbb{A}(\mathbf{U}\cap\mathbf{W}) \overset{(a)}{=} \mathbb{A}(\mathbb{A}(\mathbf{K})\cap\mathbb{A}(\mathbf{L})) \overset{(b)}{=} \mathbb{A}(\mathbb{A}(\mathbf{K}+\mathbf{L})) \overset{(c)}{=} \mathbf{K}+\mathbf{L} \overset{(d)}{=} \mathbb{A}(\mathbf{U})+\mathbb{A}(\mathbf{W}),$$

čímž je tvrzení (2) dokázáno.

---

[35]) je jí možno rovněž odvodit z poznámky pod čarou k důsledku 8.

Přitom v rovnostech (a) a (d) jsme užili relaci (11-2), v (b) tvrzení (3), v (c) pak větu 7.

Ad (4): Tvrzení se dokáže pomocí (1) analogicky jako (2). ∎

9.2 Princip duality ve vektorových prostorech

Buď $\mathcal{T}$ tvrzení teorie vektorových prostorů o podprostorech jistého vektorového prostoru $\mathbf{V}$, které obsahuje podprostory, jejich dimenze, inkluze mezi podprostory, průnik podprostorů a spojení podprostorů. Pak toto tvrzení platí i o podprostorech duálního vektorového prostoru $\tilde{\mathbf{V}}$ (jde přece o prostor nad týmž tělesem a téže dimenze, tedy izomorfní). Ke každému z uvedených podprostorů ve $\tilde{\mathbf{V}}$ můžeme sestrojit jeho anihilátor, tedy podprostor ve $\mathbf{V}$. Pro takto získané podprostory bude tudíž platit tvrzení označované $\tilde{\mathcal{T}}$, které z tvrzení $\mathcal{T}$ (s ohledem na věty 4, 9 a 11) získáme tak, že:

(1) *dimenzi* k každého z podprostorů nahradíme rozdílem ($\dim\mathbf{V}$-k),

(2) *inkluzi* nahradíme inkluzí obrácenou,

(3) *průnik* podprostorů nahradíme jejich spojením a

(4) *spojení* podprostorů nahradíme jejich průnikem.

Platí proto věta následující, nazývaná *princip duality* (je větou o větách dané teorie, tedy tzv. *metavětou).* Jeho význam je v tom, že dokážeme-li tvrzení $\mathcal{T}$, máme zaručenu platnost i tvrzení $\tilde{\mathcal{T}}$, a vzhledem k tomu, že $\tilde{\tilde{\mathcal{T}}}=\mathcal{T}$, tak máme-li dokázáno $\tilde{\mathcal{T}}$, máme zaručenu platnost i tvrzení $\mathcal{T}$.[36])

12.Věta *Buď $\mathcal{T}$ tvrzení teorie vektorových prostorů, které obsahuje podprostory, jejich dimenze, inkluze mezi podprostory, průnik podprostorů a spojení podprostorů. Pak tvrzení $\tilde{\mathcal{T}}$ zkonstruované z $\mathcal{T}$ postupem uvedeným výše je rovněž tvrzením teorie vektorových prostorů.*

---

[36]) tento princip je algebraickým základem platnosti např. *principu duality v projektivní geometrii*

13. Definice Tvrzení $\tilde{\mathcal{T}}$ dle předchozí věty se nazývá *tvrzení duální k tvrzení* $\mathcal{T}$.

Příklad A

Dokažte užitím principu duality platnost následujícího tvrzení: *Pro každé tři podprostory* **U, W, Z** *vektorového prostoru platí:*

$$\mathbf{Z}+(\mathbf{U}\cap\mathbf{W})\subseteq(\mathbf{Z}+\mathbf{U})\cap(\mathbf{Z}+\mathbf{W}).$$

Řešení

Duální tvrzení k dokazovanému tvrzení zní:

$$\mathcal{T}:\ \mathbf{Z}\cap(\mathbf{U}+\mathbf{W})\supseteq(\mathbf{Z}\cap\mathbf{U})+(\mathbf{Z}\cap\mathbf{W}).$$

Zřejmě platí (proč?):

$$(\mathbf{Z}\cap\mathbf{U})\subseteq(\mathbf{Z}\cap(\mathbf{U}+\mathbf{W})),\quad (\mathbf{Z}\cap\mathbf{W})\subseteq(\mathbf{Z}\cap(\mathbf{U}+\mathbf{W})),$$

odkud vzhledem k vlastnosti součtu podprostorů

$$(\mathbf{Z}\cap\mathbf{U})+(\mathbf{Z}\cap\mathbf{W})\subseteq\mathbf{Z}\cap(\mathbf{U}+\mathbf{W}),$$

čímž je dokázána platnost tvrzení $\mathcal{T}$. S ohledem na princip duality platí též tvrzení $\tilde{\mathcal{T}}$, což je tvrzení dokazované.

Další doporučená literatura

1. J. Bečvář: *Sbírka úloh z lineární algebry,* SPN Praha, 1975
2. L. Bican: *Lineární algebra,* SNTL Praha (edice Matematický seminář), 1979
3. L. Bican: *Lineární algebra v úlohách,* SPN Praha, 1979
4. G. Birkhoff, S. Mac Lane: *Algebra,* Alfa Bratislava, 1974
5. G. Birkhoff, S. Mac Lane: *Prehľad modernej Algebry,* Alfa Bratislava, 1974
6. И. М. Гелфанд: *Лекции по линейной алгебре,* Наука, Москва, 1971
7. V. Havel, J. Holenda: *Lineární algebra,* SNTL Praha, 1984
8. Х. Д. Икрамов: *Задачник по линейной алгебре,* Наука, Москва, 1975
9. M. Jukl, *Bilineární a kvadratické formy,* UP Olomouc 2000
10. M. Jukl, *Analytická geometrie lineárních útvarů,* UP Olomouc 2003
11. M. Jukl, *Lineární operátory,* UP Olomouc 2001
12. D. Klucký: *Kapitoly z lineární algebry I.,* UP Olomouc 1989
13. J. Kropáček: *Příklady z matematiky pro fyziky IV.,* SPN Praha, 1979
14. F. Krutský: *Algebra I.,* UP Olomouc 1995
15. S. Lipschutz: *Lineare Algebra,* McGraw-Hill Book Company, 1977
16. J. Rachůnek: *Algebra II,* UP Olomouc 1995
17. J. Rachůnek: *Algebra a teoretická aritmetika I.,* UP Olomouc 1992