C v i č e n í

Ve všech cvičeních třetí kapitoly je v daném euklidovském prostoru $\mathcal{E}_n$ zvolená soustava souřadnic kartézská, tj. vektory její báze jsou ortonormální.

3.1. Najděte množinu všech bodů $X \in \mathcal{E}_2$, pro které platí

$$\frac{\rho(X,B)}{\rho(X,C)} = \varkappa \ , \quad \text{kde } B, C \text{ jsou libovolné různé body roviny } \mathcal{E}_2 \ , \quad \varkappa > 0 \ , \ \varkappa \neq 1 \ .$$

Řešení : V dané KASS nechť $B = [b_1, b_2]$, $C = [c_1, c_2]$, $X = [x, y]$.

Z podmínky úlohy platí :

$$\rho^2(X,B) = \varkappa^2 \rho^2(X,C) \ , \quad \text{což dává}$$

$$(x - b_1)^2 + (y - b_2)^2 = \varkappa^2 [(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2] \ , \quad \text{neboli}$$

$$x^2(1 - \varkappa^2) + y^2(1 - \varkappa^2) + 2x(\varkappa^2 c_1 - b_1) + 2y(\varkappa^2 c_2 - b_2) + b_1^2 + b_2^2 - \varkappa^2 c_1^2 - \varkappa^2 c_2^2 = 0$$

a po úpravě

$$\left(x - \frac{b_1 - \varkappa^2 c_1}{1 - \varkappa^2} \right)^2 + \left(y - \frac{b_2 - \varkappa^2 c_2}{1 - \varkappa^2} \right)^2 = \frac{\varkappa^2 [(b_1 - c_1)^2 + (b_2 - c_2)^2]}{(1 - \varkappa^2)^2} \ .$$

Hledaná množina bodů je tedy kružnice $k = (S, r)$, kde

$$S = \left[\frac{b_1 - \varkappa^2 c_1}{1 - \varkappa^2} \ , \ \frac{b_2 - \varkappa^2 c_2}{1 - \varkappa^2} \right] \quad \text{a} \quad r = \frac{\varkappa}{|1 - \varkappa^2|} \cdot \rho(BC) \ .$$

Tato kružnice se nazývá Apolloniova kružnice.

3.2. Odvoďte podmínky pro to, aby přímka p byla a) sečnou, b) tečnou, c) nesečnou kružnice k.

Řešení : Nechť přímka p je v dané KASS dána rovnicí $ax + by + c = 0$ a kružnice $k = (S, r)$, $S = [s_1, s_2]$, $r > 0$ a např. $a \neq 0$.

Rovnice kružnice je

$$(x - s_1)^2 + (y - s_2)^2 = r^2 \ .$$

Násobme obě strany nenulovým číslem a^2. Dostaneme

$$(ax - as_1)^2 + (ay - as_2)^2 = a^2 r^2 \ .$$

Do této rovnice dosadíme z rovnice přímky : $ax = -c - by$ a po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici pro druhou souřadnici y hledaného společného bodu :

$$y^2(b^2 + a^2) + 2y(-a^2 s_2 + bc + abs_1) + 2as_1 c + a^2 s_1^2 + a^2 s_2^2 - a^2 r^2 + c^2 = 0 \ .$$

Pro diskriminant této rovnice obdržíme

$$\frac{1}{4} D = a^2 \{ r^2(a^2 + b^2) - (as_1 + bs_2 + c)^2 \} \ .$$

Z vlastnosti kvadratické rovnice plyne, že rovnice má

(a) 2 reálná řešení právě když $D > 0 \iff (a^2 + b^2) r^2 > (as_1 + bs_2 + c)^2$.

tj., když $\dfrac{|as_1 + bs_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} < r$,

(b) 1 reálné řešení právě když $D = 0 \iff \dfrac{|as_1 + bs_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = r$,

(c) žádné reálné řešení právě když $D < 0 = \dfrac{|as_1 + bs_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} > r$.

Jelikož výraz $\dfrac{|as_1 + bs_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ vyjadřuje vzdálenost středu S od přímky p , lze uzavřít :

Přímka p je sečnou kružnice k, je-li $\rho(S,p) < r$.
Přímka p je tečnou, platí-li $\rho(S,p) = r$.
Přímka p je nesečnou kružnice k , platí-li $\rho(S,p) > r$.

3.3. Každým bodem kružnice k prochází právě jedna její tečna. Má-li kružnice $k = (S,r)$ rovnici $(x - s_1)^2 + (y - s_2)^2 = r^2$ a její daný bod $T = [x_o, y_o]$, pak tato tečna má rovnici $(x - s_1)(x_o - s_1) + (y - s_2)(y_o - s_2) = r^2$. Dokažte.

Řešení : Přímka jdoucí bodem T je $x = x_o + u_1 t$, $y = y_o + u_2 t$. Hledáme její průsečíky s kružnicí k :

$$t^2(u_1^2 + u_2^2) + 2t(u_1 x_o - u_1 s_1 + u_2 y_o - u_2 s_2) + (x_o - s_1)^2 + (y_o - s_2)^2 - r^2 = 0 .$$

Číslo t musí být dvojnásobným kořenem této rovnice, u níž je absolutní člen v důsledku podmínky $T \in k$ roven nule, tj.

$$u_1 x_o - u_1 s_1 + u_2 y_o - u_2 s_2 = 0 \quad \text{a tedy} \quad \frac{u_1}{u_2} = -\frac{(y_o - s_2)}{(x_o - s_1)} .$$

Tečna je přímka $x(x_o - s_1) + y(y_o - s_2) - (x_o^2 - x_o s_1 + y_o^2 - y_o s_2) = 0$

a opět proto, že $T \in k$, platí $x_o^2 + y_o^2 - x_o s_1 - y_o s_2 = r^2 + x_o s_1 + y_o s_2 - s_1^2 - s_2^2$;

dosadíme do předchozí rovnice , upravíme a dostaneme

$$(x - s_1)(x_o - s_1) + (y - s_2)(y_o - s_2) = r^2 .$$

3.4. Určete společné body kružnice $k : x^2 - 2x + y^2 + 8y - 3 = 0$ a přímky $p : 3x - y + 3 = 0$.

Řešení : Hledáme společná řešení soustavy dvou rovnic. Z rovnice přímky vypočítáme $y = 3x + 3$ a dosadíme do rovnice kružnice. Dostaneme

$x^2 + 4x + 3 = 0$, což dává kořeny $x_1 = -1$, $x_2 = -3$.

Hledané průsečíky jsou body $X_1 = [-1,0]$, $X_2 = [-3,-6]$.

3.5. Nalezněte společné body kružnic $k_1 : (x - 1)^2 + y^2 = 4$ a $k_2 : x^2 + (y - 2)^2 = 9$.

Řešení : Jsou to body, které vyhovují také rovnici

$$(x - 1)^2 + y^2 - 4 = x^2 + (y - 2)^2 - 9 ,$$

což po úpravě dává rovnici chordály $x - 2y - 1 = 0$.

Průsečíky obou kružnic mají ke každé z kružnic k_1, k_2 mocnost nula a jsou to tedy také průsečíky chordály s oběma kružnicemi (pokud existují). Úloha se dál řeší jako předchozí. Výsledným řešením jsou body

$$X_1 = \left[1 + \frac{4\sqrt{5}}{5} , \frac{2\sqrt{5}}{5}\right] , \quad X_2 = \left[1 - \frac{4\sqrt{5}}{5} , -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right] .$$

3.6. Jsou dány tři kružnice $k_1 = (S_1,r_1)$, $k_2 = (S_2,r_2)$, $k_3 = (S_3,r_3)$. Nalezněte bod $X \in \mathcal{E}_2$, který má stejnou mocnost ke všem třem kružnicím (tzv. potenční střed); v dané KASS je $S_1 = [1,2]$, $S_2 = [-1,1]$, $S_3 = [0,0]$, $r_1 = 1$, $r_2 = 3$, $r_3 = 6$.

Řešení : Mocnost m bodu $X = [x,y]$ ke kružnicím k_1,k_2,k_3 je dána
$m_1 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 1$, $m_2 = (x + 1)^2 + (y - 1)^2 - 9$,
$m_3 = x^2 + y^2 - 36$. Porovnáním dostaneme

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 1 = (x + 1)^2 + (y - 1)^2 - 9 ,$$
$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 - 9 = x^2 + y^2 - 36 .$$

Po úpravě dostaneme chordály p_1 resp. p_2 dvojic kružnic k_1 a k_2 resp. k_2 a k_3.

$$p_1 : 4x + 2y - 11 = 0 , \quad p_2 : 2x - 2y + 29 = 0 .$$

Jejich společným bodem je bod $X = \left[-3, \frac{23}{2}\right]$, jehož mocnost m ke všem třem kružnicím je $m = \frac{421}{4}$.

3.7. Napište rovnici kružnice k procházející body A,B, jejíž střed leží na přímce p.

a) $A = [3,1]$, $B = [-1,3]$, $p : 3x - y - 2 = 0$,
b) $A = [-1,1]$, $B = [0,2]$, $p : x + 2y - 2 = 0$,
c) $A = [2,0]$, $B = [5,-2]$, $p : x + 2y + 1 = 0$.

3.8. Napište rovnici kružnice procházenící body A, B, C.

a) $A = [1,1]$, $B = [1,-1]$, $C = [2,0]$,
b) $A = [0,1]$, $B = [1,0]$, $C = [1,1]$,
c) $A = [-1,-1]$, $B = [2,2]$, $C = [-1,5]$,
d) $A = [9,3]$, $B = [-3,3]$, $C = [11,1]$.

3.9. Nalezněte rovnici kružnice, která se dotýká dvou přímek p_1 a p_2 a její střed leží na přímce q . p_1 : $2x - 3y - 10 = 0$, p_2: $3x - 2y + 5 = 0$,

q : a) $4x - 5y - 3 = 0$,

b) $3x - 2y = 0$.

c) Určete rovnice všech kružnic, které procházejí bodem $A = [1,2]$, dotýkají se osy y a mají střed na přímce o rovnici $x + y - 4 = 0$.

3.10. Rozhodněte, leží-li body $A = [1,-2]$, $B = [-1,0]$, $C = [-2,3]$ uvnitř, vně nebo na kružnici k_1 : $x^2 + y^2 = 1$,

k_2 : $x^2 + y^2 = 9$,

k_3 : $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0$.

3.11. Nechť k_1, k_2 jsou dvě nesoustředné kružnice a ch jejich chordála. Ukažte, že pokud $\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 = 0$ je rovnicí kružnice k , je přímka ch chordálou i kružnic $k_1 k$ (tedy i $k_2 k$).
Obráceně, je-li k kružnice taková, že k_1, k mají chordálu ch , má kružnice k rovnici $\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 = 0$.

3.12. Na základě předchozí úlohy napište rovnici kružnice, která prochází bodem A a průsečíky kružnic k_1 , k_2 .
k_1 : $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0$, k_2 : $x^2 + y^2 - 6x + 12y - 35 = 0$,
a) $A = [1,-1]$, b) $A = [-2,1]$.

3.13. Je dána kružnice $k = (S,r)$, $S = [3,2]$, $r = 5$. Nalezněte rovnici tečny kružnice k v jejím bodě $A = [0,y]$, $y > 0$.

Řešení : Rovnice kružnice je $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$. $A \in k$ a tedy $(0 - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$ a odtud $A = [0,6]$. Bodem A vedeme přímku p , $p = \{A;\underline{u}\}$, $\underline{u} = (u_1,u_2)$. Její parametrické rovnice jsou $x = tu_1$, $y = 6 + tu_2$; dosadíme do rovnice kružnice a určíme podmínku pro existenci jediného společného bodu,tj. jediného řešení pro t . Dostáváme tedy

$$t^2(u_1^2 + u_2^2) - 2t(3u_1 - 4u_2) = 0 \quad , \quad \text{tj. } t = 0 \quad \text{a tedy}$$

$3u_1 - 4u_2 = 0 \Rightarrow \underline{u} = (4,3)$ a hledaná tečna má rovnice
$$\begin{aligned} x &= 4t \\ y &= 6 + 3t \end{aligned} \quad .$$

Druhý způsob řešení : užijeme rovnice pro tečnu kružnice v daném bodě odvozenou v úloze 3.3. . Tj. $(x - 3)(0 - 3) + (y - 2)(6 - 2) = 25$ a po úpravě $-3x + 4y - 24 = 0$.

3.14. Napište rovnice tečen kružnice v bodech A,B,C .
a) $x^2 + y^2 = 5$, $A = [-1,2]$, $B = [1,2]$, $C = [2,1]$;

b) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$, $A = [-5,7]$, $B = [1,-1]$, $C = [2,0]$;

c) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$, $A = [-1,-1]$, $B = [2,2]$, $C = [-1,5]$;

d) $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, $A = [1,1]$, $B = [1,-1]$, $C = [2,0]$.

3.15. V $\mathcal{E}_2$ je dána kružnice $k = (S,r)$; $S = [-1,2]$, $r = 7$. Bodem $A = [6,1]$ veďte tečny ke kružnici k .

Řešení : Kružnice k má rovnici $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 49$, mocnost bodu A vzhledem ke kružnici k je rovna 1 a bod A je tedy vnějším bodem a existují tedy dvě tečny ke k, které jím procházejí. Přímka $p = \{A;\underline{u}\}$, $\underline{u} = (u_1,u_2)$ bude tečnou k, bude-li s ní mít společný jediný bod a z této podmínky určíme vektor $\underline{u}$. p : $x = 6 + tu_1$, $y = 1 + tu_2$ a pro průsečík máme rovnici

$$t^2(u_1^2 + u_2^2) - 2t(u_2 - 7u_1) + 1 = 0 .$$

Pro její diskriminant D platí :

$$\frac{1}{4} D = (u_2 - 7u_1)^2 - (u_1^2 + u_2^2) = u_2^2 - 14u_1u_2 + 49u_1^2 - u_1^2 - u_2^2 .$$

Pro dvojnásobný kořen musí být $D = 0$, tj. $u_1(24u_1 - 7u_2) = 0$

a dostáváme 1) $\underline{u} = (0,1)$ 2) $\underline{u}' = (7,24)$.

Tečny z bodu $A = [6,1]$ ke kružnici k tedy jsou :

1) $x = 6$ 2) $x = 6 + 7t$

$y = 1 + t$, $y = 1 + 24t$.

3.16. V rovině $\mathcal{E}_2$ je dána kružnice $k = (S,r)$ a bod A . Bodem A veďte tečny ke kružnici k .

a) k : $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, $A = [2,1]$;

b) k : $(x + \frac{34}{5})^2 + (y + \frac{41}{5})^2 = 13$, $A = [-7,-8]$;

c) k : $(x + \frac{1}{3})^2 + (y - \frac{5}{3})^2 = \frac{104}{9}$, $A = [4,6]$;

d) k : $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 100$, $A = [5,9]$.

3.17. Elipsa o rovnici $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ prochází body $P = [6 ; 6,4]$, $Q = [-8 ; 4,8]$. Určete její poloosy.

3.18. Určete souřadnice ohnisek elipsy v rovině $\mathcal{E}_2$, která má rovnici

a) $x^2 + \frac{y^2}{5} = 1$; b) $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$;

c) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; d) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$.

3.19. Je dán střed $S = [8,5]$, hlavní vrchol $A = [0,9]$ a vedlejší vrchol

$C = [7,3]$ elipsy. Určete souřadnice zbývajících vrcholů a nalezněte extentricitu e elipsy.

3.20. Buď dána elipsa o poloosách a, b. Dokažte, že tečny v bodech elipsy, které leží na průměru elipsy, jsou rovnoběžné s průměrem sdruženého směru.

Řešení: Nechť elipsa je dána parametrickými rovnicemi $x = a.\cos t$, $y = b.\sin t$, průměr p má rovnici $y = kx$, $k \neq 0$. Označme P, Q průsečíky elipsy s přímkou p. Pro společné body tedy platí $b.\sin t = k.a.\cos t$, tedy $(\sin t) : (\cos t) = ka : b$, přičemž $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$. Dostáváme tedy $\sin t = \pm \dfrac{ka}{\sqrt{k^2a^2 + b^2}}$, $\cos t = \pm \dfrac{b}{\sqrt{k^2a^2 + b^2}}$.

Tedy $P = \left[\dfrac{ab}{\sqrt{k^2a^2 + b^2}}, \dfrac{kab}{\sqrt{k^2a^2 + b^2}} \right]$ a analogicky bod Q.

Tečna elipsy v bodě P je tvaru (7) (str. 63), kde $\vartheta = 1$, tj. $\dfrac{ab.x}{a^2\sqrt{k^2a^2 + b^2}} + \dfrac{kab.y}{b^2\sqrt{k^2a^2 + b^2}} = 1$. Z této rovnice vypočítáme směrnici $k_1 = (-b^2):(ka^2)$. Platí tedy $k.k_1 = -\dfrac{b^2}{a^2}$ což podle (8) znamená rovnoběžnost se sdruženým průměrem. Analogicky pro tečnu v bodě Q.

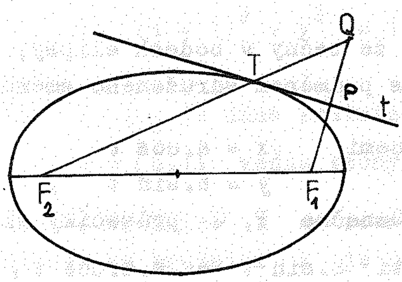
Poznámka. Je-li $k = 0$, jde o hlavní osu elipsy, tečna např. v bodě $A = [a,0]$ je $x = a$ a tedy je rovnoběžná se sdruženým průměrem. Je-li elipsa kružnicí, pak $a = b$ a pro sdružené průměry platí $k.k_1 = -1$ a tedy tečna je na průměr PQ kolmá.

3.21. Dvě tečny elipsy jsou rovnoběžné, právě když spojnice jejich bodů dotyku je průměrem elipsy. Dokažte.

3.22. Najděte součin vzdáleností ohniska elipsy od dvou rovnoběžných tečen elipsy.

3.23. Nechť elipsa $\mathcal{E}$ má střed S a hlavní poloosu a. Pro patu P kolmice spuštěné na tečnu t elipsy z jednoho jejího ohniska F_1 platí $\rho(P,S) = a$. Pro bod Q souměrně sdružený s ohniskem F_1 podle libovolné tečny platí $\rho(Q,F_2) = 2a$, kde F_2 je druhé ohnisko elipsy. Označíme-li T dotykový bod tečny t s elipsou, pak bod T leží na přímce QF_2. Dokažte. (Obr. 21)

Řešení: V dané KASS nechť je elipsa $\mathcal{E}$ dána rovnicí (3). Označme $T = [x_0, y_0]$ bod dotyku tečny s elipsou. Tečna v bodě T pak má rovnici (7) pro $\vartheta = 1$, a ohniska $F_1 = [-e,0]$, $F_2 = [e,0]$, kde e je excentricita elipsy. Nechť $\underline{n}$ je vektor normály tečny v bodě T, pak $\underline{n} = (x_0b^2, y_0a^2)$ a kolmice z bodu F_1 na tečnu t má parametrické



Obr.21

rovnice

$$x = -e + t.x_o b^2$$
$$y = t.y_o a^2 \quad .$$

Dosazením do rovnice (7) dostaneme průsečík $P = [-e + t_o x_o b^2 \ , \ t_o y_o a^2]$, kde

$$t_o = \frac{a^2b^2 + ex_o b^2}{x_o^2 b^4 + y_o^2 a^4} \quad .$$ Pak platí

$$\rho(S,P) = \sqrt{e^2 - 2t_o ex_o b^2 + t_o^2(x_o^2 b^4 + y_o^2 a^4)} \quad .$$

Dosadíme-li za t_o a přihlédněme-li k tomu, že bod $T = [x_o, y_o]$ je bodem elipsy, tj. $b^2x_o^2 + a^2y_o^2 = a^2b^2$ a že platí $e^2 = a^2 - b^2$, dostaneme po úpravě $\rho(S,P)=a$.

Pro bod Q souměrně sdružený s bodem F_1 podle tečny t pak platí $Q - P = P - F_1$ a tedy $Q = P + (P - F_1)$, tj. $Q = [-e + 2t_o x_o b^2 \ , \ 2t_o y_o a^2]$, pak $\rho(Q,F_2) = \sqrt{4e^2 - 8t_o ex\, b^2 + 4t_o^2(x_o^2 b^4 + y_o^2 a^4)} = 2\rho(S,P) = 2a$.

Ověřit poslední tvrzení znamená ukázat, že vektory $Q - F_2$ a $T - F_2$ jsou kolineární, tj. že

$$\begin{vmatrix} -e + t_o x_o b^2 & t_o y_o a^2 \\ x_o - e & y_o \end{vmatrix} = 0 \quad ,$$

což je pouze mechanická záležitost.

3.24. Najděte množinu všech bodů souměrně sdružených s jedním ohniskem elipsy podle všech jejích tečen (viz 3.23.).

3.25. Najděte množinu pat kolmic spuštěných z jednoho ohniska na všechny tečny elipsy.

3.26. Buď dána kanonická rovnice elipsy. Nalezněte směry dvou sdružených průměrů elipsy, jejichž úhel je 45^o .

3.27. Napište rovnice tečny k elipse

a) $\dfrac{x^2}{400} + \dfrac{y^2}{225} = 1$ v bodě $P = [12,12]$,

b) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ v bodě $A = [1, y > 0]$.

3.28. K elipse veďte tečny z bodu Q .

a) $Q = [7, -2]$, $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{100} = 1$;

b) $\frac{x^2}{1156} + \frac{y^2}{289} = 1$, $Q = [16,-15]$;

c) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, $Q = [-3,2]$.

3.29. Napište rovnice všech elips, které mají stejná ohniska $F_1 = [-e,0]$, $F_2 = [e,0]$.

3.30. a) Napište rovnice všech elips, které mají stejné hlavní vrcholy A,B . $A = [a,0]$, $B = [-a,0]$.

b) Napište rovnice všech elips, které mají stejné vedlejší vrcholy C,D . $C = [0,b]$, $D = [0,-b]$.

3.31. Hyperbola o rovnici $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ prochází body $[-25, \frac{7}{6}]$, $[-30, 3]$. Určete její poloosy.

3.32. Napište rovnice asymptot dané hyperboly a vypočítejte velikost toho jejich úhlu, ve kterém se nachází hyperbola

a) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 1$, b) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

3.33. Nepatří-li vektor $\underline{u}$ do zaměření asymptot hyperboly, pak existuje přímka směru $[\underline{u}]$, která má s hyperbolou dva různé společné body. Dokažte .

Řešení : Nechť hyperbola $\mathcal{H}$ je dána rovnicí $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, přímka p parametrickými rovnicemi $x = x_0 + u_1 t$, $y = x_0 + u_2 t$, $\underline{u} = (u_1,u_2) \neq \neq (a, \mp b)$. Dále předpokládejme, že bod $P = [x_0,y_0]$ je bodem hyperboly . Pro průsečíky přímky s hyperbolou dostáváme rovnici :

$$t^2(u_1^2b^2 - a^2u_2^2) + 2t(x_0u_1b^2 - y_0u_2a^2) + b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0 .$$

Vzhledem k tomu, že $P \in \mathcal{H}$, je absolutní člen roven nule a protože $\underline{u}$ není vektor asymptotického směru, tak koeficient u t^2 je různý od nuly. Rovnici lze psát :

$$t.\left[t(u_1^2b^2 - u_2^2a^2) + 2(x_0u_1b^2 - y_0u_2a^2)\right] = 0 .$$

Rovnice má tedy vždy řešení (alespoň $t = 0$ pro bod $P = [x_0,y_0]$). Dále

a) pro $x_0u_1b^2 - y_0u_2a^2 \neq 0$ existuje další řešení a přímka p má s hyperbolou $\mathcal{H}$ společný další bod různý od P ,

b) pro $x_0u_1b^2 - y_0u_2a^2 = 0$ je $t = 0$ jediné řešení a platí $\frac{u_2}{u_1} = \frac{x_0b^2}{y_0a^2}$ a přímka p má s hyperbolou společný právě jen bod $[x_0,y_0]$.

Potom přímka $q \parallel p$ procházející např. ohniskem $F_1 = [e,0]$ ($x = e + t$,

$y = t\cdot\frac{x_o b^2}{y_o a^2}$) má s hyperbolou $\mathcal{H}$ dva různé společné body. Získáme je řešením rovnice $t^2(1 - \frac{b^2 x_o^2}{a^2 y_o^2}) + 2et + b^2 = 0$.

V obou případech jsme dokázali existenci přímky obyčejného směru $[\underline{u}]$, která má s hyperbolou právě dva různé společné body.

3.34. Nechť p,q jsou asymptoty hyperboly $\mathcal{H}$, M její libovolný bod. Bodem M proložíme přímku s kolmou na hlavní osu. Její průsečíky s asymptotami označíme P,Q. Pak platí $\rho(P,M).\rho(Q,M) = b^2$, kde b má stejný význam jako v (5). Dokažte.

Důkaz : Bod $M = [x,y]$ je bodem hyperboly o rovnici (5), tj. $y^2 = b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})$, asymptoty mají rovnice $bx - ay = 0$, $bx + ay = 0$. Potom $P = [x, \frac{b}{a}x]$, $Q = [x, -\frac{b}{a}x]$. Zvolíme M, na př. $M = [x, b\sqrt{-1 + \frac{x^2}{a^2}}]$. Pak

$$\rho(P,M) = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{-a^2 + x^2} = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) ,$$

$$\rho(Q,M) = \frac{b}{a}x + \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}(x + \sqrt{x^2 - a^2}) ,$$

$$\rho(P,M) . \rho(Q,M) = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - (x^2 - a^2)) = b^2 .$$

Poznamenejme, že této vlastnosti používáme při konstrukci hyperboly, známe-li jeden bod a asymptoty.

3.35. Pro bod Q souměrně sdružený s jedním ohniskem F_1 hyperboly podle její tečny t platí $\rho(Q,F_2) = 2a$, kde F_2 je druhé ohnisko a $2a$ je délka hlavní osy hyperboly. Pro patu P kolmice spuštěné na tečnu hyperboly z ohniska F_1 platí $\rho(P,S) = a$, kde S je střed hyperboly . Označíme-li T dotykový bod tečny t s hyperbolou, pak body Q,T,F_2 jsou kolineární. Dokažte.

3.36. Určete množinu pat kolmic spuštěných z jednoho ohniska na tečny hyperboly.

3.37. Určete množinu bodů souměrně sdružených s jedním ohniskem podle všech tečen hyperboly.

3.38. Nalezněte průsečíky přímky p s hyperbolou $\mathcal{H}$.

a) $\mathcal{H}: x^2 - y^2 = 9$, p: $x = 1 + 4t$, $y = 3 + t$;

b) $\mathcal{H}: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$, p: $x - 2y = 0$;

c) $\mathcal{H}: \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$, p: $x = 2 + t$, $y = 1 + t$;

d) $\mathcal{K}: \quad \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \,, \qquad p: \quad x = 1 - 3t \,, \quad y = 2 + 2t \,.$

3.39. Napište rovnice tečny k hyperbole $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ v bodě Q.

a) $Q = [-2\sqrt{3}\,,\, -\sqrt{2}\,]$, b) $Q = [2,0]$.

3.40. Veďte tečny k hyperbole rovnoběžné s danou přímkou .

$\mathcal{H}: \quad \frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{36} = 1 \,, \qquad p: \quad 10x - 12y + 5 = 0 \,.$

3.41. Bodem Q proložte tečny k hyperbole $\mathcal{H}: \ x^2 - 4y^2 = 1 \,, \ Q = [4,4]$.

průměru! $S = O \cap o$

3.42. Napište rovnici hyperboly, jejíž hlavní osa je v ose x , střed S v počátku KASS, prochází bodem $A = [2,-1]$ a sdružený průměr k průměru AS je dán rovnicí $y = -2x$.

3.43. Na přímce $2x - y - 3 = 0$ nalezněte bod, který je stejně vzdálen od bodu $A = [2,0]$ jako od přímky $p: \ x + 2 = 0$.

3.44. Je dána parabola o rovnici $y^2 - 6x = 0$. Nalezněte tečnu paraboly v bodě $T = [?\ ,\ 2]$.

3.45. Určete množinu pat kolmic spuštěných na tečny paraboly z jejího ohniska F.

Řešení : V dané KASS nechť má parabola rovnici $y^2 = 2px$. Pak $F = [\frac{p}{2}\,,\, 0]$ a tečna v bodě $[x_0, y_0]$ má rovnici $yy_0 - p(x + x_0) = 0$ a $\underline{n} = (-p, y_0)$ je její normálový vektor. Určíme průsečík kolmice $x = \frac{p}{2} - pt$, $y = y_0 t$ s tečnou. Potom $y_0^2 t - \frac{p^2}{2} + p^2 t - px_0 = 0$ a odtud $t = \frac{1}{2}$, neboť $2px_0 = y_0^2$, tedy $P = [0, \frac{y_0}{2}]$. Množina pat kolmic na tečny je tedy vrcholová tečna o rovnici $x = 0$. Obráceně snadno ukážeme, že průsečík libovolné tečny s tečnou vrcholovou je pata kolmice spuštěné z ohniska paraboly na tuto tečnu.

3.46. Určete množinu bodů souměrně sdružených s ohniskem paraboly podle všech tečen paraboly.

3.47. Určete množinu středů kružnic, které se dotýkají dané přímky d a procházejí daným bodem A .

3.48. Nalezněte rovnici tečny paraboly $y^2 = 2x$ kolmé k přímce o rovnici $2x + y - 1 = 0$.

3.49. Napište rovnice tečen paraboly $y^2 = 6x$, které procházejí bodem

a) $A = [0,3]$, b) $B = [2,-2\sqrt{3}\,]$, c) $C = [5,5]$.

3.50. Najděte průměr paraboly $y^2 = 6x$ sdružený ke směru vektoru $\underline{u} = (2,1)$.

Řešení : Proložíme libovolnou přímku rovnoběžnou s vektorem $\underline{u}$, např. $x = 2t,\ y = t$. Parabolu protne v bodech $V = [0,0]$, $R = [24,12]$. Středem Q úsečky VR prochází průměr sdružený ke směru $[\underline{u}]$ rovnoběžně s osou paraboly. $Q = [12,6]$, tj. průměr má rovnici $y = 6$.

3.51. Dokažte, že směr tečny paraboly je sdružen k průměru, který prochází dotykovým bodem tečny.

3.52. Určete typ křivky druhého stupně, jejíž rovnice v dané KASS je

$$5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0 .$$

Řešení : Nalezneme $\delta = 45 > 0$, $\Delta = -2025$, jde tedy o regulární křivku eliptického typu, $a_{11}\cdot\Delta < 0$, křivka je tedy elipsa. Střed je dán soustavou rovnic $5x - 15 = 0$, $9y + 9 = 0$, odkud $S = [3,-1]$. Tento bod zvolíme za počátek nové KASS a posuneme souřadné osy. Potom $a'_{13} = a'_{23} = 0$ a $a'_{33} = \dfrac{\Delta}{\delta} = -45$, tj $5X^2 + 9Y^2 - 45 = 0$ a po úpravě dostaneme

$$\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{5} = 1 ,$$ což je elipsa o poloosách 3 a $\sqrt{5}$.

3.53. Určete typ křivky druhého stupně, jejíž rovnice v dané KASS je

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0 .$$

Řešení : Určíme $\delta = -16$, $\Delta = 128$, $S = [2,-1]$. Posuneme počátek KASS do bodu S; nová rovnice pak bude $$3X^2 + 10XY + 3Y^2 - 8 = 0 .$$

Nyní otočíme KASS kolem počátku o úhel α, pro jehož tangentu platí vztah (24) (str. 70). Odtud dostaneme $\operatorname{tg}\alpha = \pm 1$; zvolíme $\alpha = 45^\circ$ a transformační rovnice jsou tvaru

$$X = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') , \quad Y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') .$$

Po úpravě dostaneme $8x'^2 - 2y'^2 - 8 = 0$, což dává $x'^2 - \dfrac{y'^2}{4} = 1$.

Jde tedy o hyperbolu o poloosách 1 a 2.

3.54. Určete křivku druhého stupně, jejíž rovnice v dané KASS je

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0 .$$

Řešení : Vypočteme $\delta = 0$, $\Delta < 0$, křivka je tudíž parabolou. Její rovnici zjednodušíme volbou nové KASS tím, že otočíme osy kolem počátku o úhel α, kde $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$. Transformační rovnice jsou $x = \dfrac{4X - 3Y}{5}$, $y = \dfrac{3X + 4Y}{5}$.

Pak obdržíme rovnici $Y^2 + 2X + 4Y - 2 = 0$, upravíme ji na tvar $(Y + 2)^2 = -2(X - 3)$ a posunutím KASS o vektor $(-3,2)$ dostaneme $y'^2 = -2x'$, což je parabola, pro niž $p = 1$.

3.55. V dané KASS je křivka druhého stupně dána rovnicí

$7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$. Určete křivku.

Řešení : Vypočítáme $\delta = -16 < 0$, $\Delta = 0$. Křivka je tedy složená ze dvou různoběžek. Střed $S = [-2,0]$ je bodem křivky. Jím prochází obě přímky. Další body přímek získáme například tak, že najdeme průsečíky libovolné přímky, která neprochází bodem S , např. $x = 0$ s danou křivkou. Jsou to body $A = [0,14]$ a $B = [0,-2]$. Křivka je tedy tvořena přímkami SA a SB o rovnicích

$7x + y + 14 = 0$ a $x - y + 2 = 0$.

3.56. Určete typy křivek 2. stupně převedením jejich rovnic na kanonický tvar.

a) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$,

b) $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$,

c) $x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$,

d) $9x^2 + 12xy + 4y^2 + 12x + 8y + 3 = 0$,

e) $x^2 + 6xy - 7y^2 + x = 0$,

f) $9x^2 - 6xy + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$,

g) $6x^2 + xy - 2y^2 + 4x + 5y - 2 = 0$,

h) $x^2 - 2xy + y^2 + 5x - 5y + 6 = 0$,

i) $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 32 = 0$,

j) $2x^2 + 2xy + 4y^2 = 0$,

k) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 6 = 0$,

l) $y^2 - 4x + 4y + 20 = 0$,

m) $x^2 - 4xy + y^2 + 6x - 6y + 15 = 0$,

n) $9x^2 - 82xy + 9y^2 + 800 = 0$.

3.57. Nalezněte hlavní směry křivek druhého stupně, jež jsou dány rovnicemi :

a) $x^2 + 6xy - 7y^2 + x = 0$,

b) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x + 3y = 0$.

Řešení : a) Sdružené směry musí vyhovovat rovnici (22) a být ortogonální. Je-li $[(u_1,u_2)]$ jeden směr, pak kolmý směr je $[(u_2,-u_1)]$ a platí $(u_1 + 3u_2)u_2 + (3u_1 - 7u_2)(-u_1) = 0$, tj. $3u_2^2 + 8u_1u_2 - 3u_1^2 = 0$, což dává $u_2 : u_1 = -3$ resp. $u_2 : u_1 = 1:3$ a hlavní směry jsou určeny vektory $\underline{u} = (1,-3)$ a $\underline{v} = (3,1)$.

b) Analogicky.

3.58. Určete asymptotické směry křivky $7x^2 - 50xy + 7y^2 + 42x = 0$.

Řešení : Asymptotické směry jsou určeny rovnicí $L(u_1,u_2) = 0$ ve vztahu (18),

tj. $7u_1^2 - 50u_1u_2 + 7u_2^2 = 0$, což dává kořeny $u_1:u_2 = 7$ a $u_1:u_2 = 1:7$, tedy asymptotické směry jsou určeny vektory $\underline{u} = (7,1)$, $\underline{v} = (1,7)$.
Analogicky určete asymptotické směry křivek hyperbolického typu ze cvičení 3.56.

3.59. Napište rovnici kulové plochy o středu $S = [1,-2,3]$ jdoucí bodem A , $A = [4,2,3]$.

3.60. Analogicky jako v úloze 3.2. odvoďte podmínku pro to, aby přímka p byla nesečnou, tečnou, sečnou plochy kulové.

3.61. Napište rovnici kulové plochy o středu $S = [3,3,-1]$, která má s rovinou $\{P;\underline{e}_1,\underline{e}_2\}$ jeden společný bod.

3.62. Najděte průsečík přímky $p = \{x = 2 + t,\ y = 4 - t,\ z = 1 + 2t\}$ s plochou kulovou o rovnici
$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 = 19 .$$

3.63. Přímka p má s elipsoidem $\mathcal{E}$ nejvýše dva společné body. Dokažte.

3.64. Dokažte, že rovina o rovnici $4x - 3y + 12z - 54 = 0$ má s elipsoidem $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1$ společný právě jeden bod. Určete jej.

3.65. Při kterých hodnotách konstanty m má rovina $x - 2y - 2z + m = 0$ s elipsoidem $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1$ právě jeden společný bod ?

3.66. Nechť $T = [x_0,y_0,z_0]$ je bodem elipsoidu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
Dokažte, že rovina $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + \frac{z_0z}{c^2} = 1$ má s elipsoidem právě jeden společný bod T .

3.67. Určete množinu bodů $X = [x,y,z] \in \mathcal{E}_3$, které mají konstantní součet vzdáleností od dvou bodů $F_1 = [0,0,e]$, $F_2 = [0,0,-e]$ roven $2c$, kde $c > e$.

Řešení : Pro hledané body X platí $\rho(X,F_1) + \rho(X,F_2) = 2c$, čili
$\sqrt{x^2 + y^2 + (z-e)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z+e)^2} = 2c$. Upravíme na tvar $\sqrt{x^2 + y^2 + (z-e)^2} = 2c - \sqrt{x^2 + y^2 + (z+e)^2}$. Umocníme a po úpravě dostaneme $ze + c^2 = c\sqrt{x^2 + y^2 + (z+e)^2}$. Opět umocníme a upravíme $c^2x^2 + c^2y^2 + a^2z^2 = a^2c^2$, kde $c^2 - e^2 = a^2$ a po úpravě $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, což je rotační elipsoid, jehož osa rotace je osa z .

Obráceně musíme dokázat, že každý bod získaného rotačního elipsoidu má danou vlastnost.
Nechť $X = [x,y,z]$ je bodem elipsoidu, pak pro jeho souřadnice platí $|z| \leq c$,
$y^2 = a^2 - x^2 - \frac{a^2 z^2}{c^2}$, je tedy $\rho(X,F_1) = \sqrt{(\frac{e}{c}z - c)^2} = \left|\frac{e}{c}z - c\right|$
a analogicky $\rho(X,F_2) = \left|\frac{e}{c}z + c\right|$. Jelikož $e < c$, platí, že $\frac{e}{c}z - c < 0$,
$\frac{e}{c}z + c > 0$, tedy $\rho(X,F_1) + \rho(X,F_2) = \frac{e}{c}z + c + c - \frac{e}{c}z = 2c$.
Hledanou množinou bodů je tedy rotační elipsoid, jehož osou rotace je osa z.

3.68. Dokažte, že rovina $4x - 5y - 10z - 20 = 0$ protíná jednodílný hyperboloid $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$ v křivce druhého stupně složené ze **dvou různoběžek**. Určete je a najděte jejich průsečík T.

3.69. Nechť bod $T = [x_0,y_0,z_0]$ je bodem hyperboloidu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.
Dokažte, že rovina $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - \frac{z_0 z}{c^2} = 1$ jej protíná ve dvou přímkách se společným bodem $T = [x_0,y_0,z_0]$.

3.70. Napište rovnice přímek jednodílného hyperboloidu o rovnici
$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$ rovnoběžných s rovinou $6x + 4y + 3z - 17 = 0$.

3.71. Určete průsečíky přímky p s dvojdílným hyperboloidem
$p:\ x - y - 2 = 0$
$\quad 3x - z - 3 = 0$
$$\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{9} + 1 = 0 .$$

3.72. Nechť bod $T = [x_0,y_0,z_0]$ je bodem dvojdílného hyperboloidu
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$. Rovina $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} + 1 = 0$
má s hyperboloidem společný právě jen bod $T = [x_0,y_0,z_0]$. Dokažte.

3.73. Napište rovnici roviny, která má s hyperboloidem $\frac{x^2}{9} + y^2 - \frac{z^2}{4} + 1 = 0$ právě jeden společný bod $T = [-6,2,6]$.

3.74. Určete množinu bodů $X = [x,y,z]$ v $\mathcal{E}_3$, pro které platí:
$|\rho(X,F_1) - \rho(X,F_2)| = 2c$, kde v dané KASS $F_1 = [0,0,-e]$,
$F_2 = [0,0,e]$, $e > c > 0$.

Řešení: Má platit $\left|\sqrt{x^2 + y^2 + (z+e)^2} - \sqrt{x^2 + y^2 + (z-e)^2}\right| = 2c$.
a) Nechť $\rho(X,F_1) - \rho(X,F_2) > 0$, pak
$$\sqrt{x^2 + y^2 + (z+e)^2} = 2c + \sqrt{x^2 + y^2 + (z-e)^2} .$$

Umocníme a upravíme : $4ze - 4c^2 = 4c\sqrt{x^2 + y^2 + (z - e)^2}$.

Opět umocníme a po úpravě dostaneme

$$z^2e^2 + c^4 = c^2x^2 + c^2y^2 + c^2z^2 + c^2e^2 ,$$

což dává $\dfrac{x^2 + y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} + 1 = 0$, kde $a^2 = e^2 - c^2$.

b) Nechť $\rho(X,F_1) - \rho(X,F_2) = 0$, pak platí

$$\sqrt{x^2 + y^2 + (z - e)^2} = 2c + \sqrt{x^2 + y^2 + (z + e)^2} ,$$

což dává opět $\dfrac{x^2 + y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} + 1 = 0$. (✱)

Obráceně ukážeme, že každý bod X hyperboloidu (✱) má danou vlastnost.
Nechť $X = [x,y,z]$, pak platí

$$x^2 = - y^2 - a^2 + \frac{a^2z^2}{c^2}$$

a $\rho(X,F_1) = \left|\frac{ez}{c} + c\right|$, $\rho(X,F_2) = \left|\frac{ez}{c} - c\right|$. Snadno ověříme, že když $\frac{ez}{c} + c > 0$, pak také $\frac{ez}{c} - c > 0$ a analogicky, když $\frac{ez}{c} + c < 0$, pak $\frac{ez}{c} - c < 0$, a tedy $\left|\rho(X,F_1) - \rho(X,F_2)\right| = \left|\frac{ez}{c} + c (- \frac{ez}{c} + c)\right| =$ $= \left|- \frac{ez}{c} - c - (- \frac{ez}{c} + c)\right| = 2c$. Hledaná množina bodů dané vlastnosti je tedy dvojdílný hyperboloid .

3.75. Dokažte, že rovina $2x - y - 2z - 10 = 0$ má s eliptickým poraboloidem $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 2z$ právě jeden společný bod.

3.76. Nechť $T = [x_0,y_0,z_0]$ je bodem eliptického paraboloidu $\dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2z$. Dokažte, že rovina $\dfrac{x_0x}{p} + \dfrac{y_0y}{q} = z + z_0$ má s paraboloidem právě jeden společný bod, a to právě bod $T = [x_0,y_0,z_0]$.

3.77. Najděte průsečíky přímky p : $x = 10 + t$, $y = -3 - t$, $z = 2 + t$ s paraboloidem $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{3} = z$.

3.78. Nalezněte množinu bodů $X = [x,y,z] \in \mathcal{E}_3$, pro které platí : $\rho(X,F) = \rho(X,d)$, kde v dané KASS $F = [0,0,\frac{p}{2}]$ a d je rovina o rovnici $z = - \frac{p}{2}$.

Řešení : $\rho(X,F) = \rho(X,d) \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + (z - \frac{p}{2})^2} = \left|z + \frac{p}{2}\right|$,
neboli $x^2 + y^2 + (z - \frac{p}{2})^2 = (z + \frac{p}{2})^2$, což po úpravě dává

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{p} - 2z = 0 \ . \qquad (*)$$

Obráceně : Nechť $X = [x,y,z]$ je bodem paraboloidu ($*$) , pak platí : $x^2 = 2zp - y^2$ a $\rho(X,F) = \left|z + \frac{p}{2}\right|$, $\rho(X,d) = \left|z + \frac{p}{2}\right|$, tedy $\rho(X,F) = \rho(X,d)$. Hledanou množinou bodů je tedy rotační $(q = p)$ eliptický paraboloid.

3.79. Dokažte, že rovina $2x - 12y - z + 16 = 0$ protíná hyperbolický paraboloid $x^2 - 4y^2 = 2z$ ve dvou různoběžkách a určete je.

Řešení : Hledáme body, pro které platí současně obě rovnice. Z první vypočítáme $z = 2x - 12y + 16$ a dosadíme do druhé . Dostaneme $x^2 - 4y^2 - 4x + 24y - 32=0$. Tedy průmětem průniku do roviny $\{P;\underline{e}_1,\underline{e}_2\}$ je kuželosečka, pro niž $\delta = -4$, $\Delta = 0$, což jsou dvě různoběžky, jejichž průsečík $S = [2,3]$ je průmětem bodu $T = [2,3,-16]$. Hledané různoběžky jsou pak určeny rovnicemi :

$$\begin{aligned} 2x - 12y - z + 16 &= 0 \\ x - 2y + 4 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{a} \qquad \begin{aligned} 2x - 12y - z + 16 &= 0 \\ x + 2y - 8 &= 0 \ . \end{aligned}$$

3.80. Nechť $T = [x_0,y_0,z_0]$ je bod hyperbolického paraboloidu $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$. Dokažte, že rovina $\frac{x_0x}{p} - \frac{y_0y}{q} = z + z_0$ jej protíná ve dvou různoběžkách se společným bodem právě $T = [x_0,y_0,z_0]$.

3.81. Napište rovnici roviny z předchozí úlohy u hyperbolického paraboloidu $x^2 - 3y^2 - 2z = 0$ v bodě $T = [1,1,-1]$, jakož i rovnice tvořících přímek jdoucích bodem T .

3.82. Určete množinu bodů $X = [x,y,z] \in \mathcal{E}_3$, které mají od osy $\{P,\underline{e}_3\}$ vzdálenost r .

3.83. Dokažte, že plocha druhého stupně daná rovnicí

$$2x^2 + 4y^2 - z^2 - 8xy + 8x - 8y + 4 = 0$$

je plocha kuželová a nalezněte její vrchol.

Řešení : Postupujeme podle věty 3.109. Hledáme, zda existuje KASS tak, aby v rovnici plochy byly pouze kvadratické členy. Označme $V = [x_0,y_0,z_0]$ nový počátek. Transformační rovnice potom jsou :

$$x = x' + x_0 \ , \quad y = y' + y_0 \ , \quad z = z' + z_0 \ .$$

Po dosazení do rovnice plochy a z toho , že V je bodem plochy dostaneme

$$2x'^2 + 4y'^2 - z'^2 - 8x'y' + x'(4x_0 - 8y_0 + 8) + y'(8y_0 - 8) - 2z_0z' = 0 \ .$$

K tomu, aby rovnice obsahovala pouze kvadratické členy stačí, aby platilo

$$4x_0 - 8y_0 + 8 = 0\,, \quad 8y_0 - 8 = 0\,, \quad z_0 = 0\,, \quad \text{tj.} \quad V = [0,1,0]\,.$$

Přesvědčíme se ještě, že determinant δ (viz str 79 (38)) je různý od nuly a že naše plocha kromě bodu V obsahuje ještě další body. Je to na př. bod $[0,0,2]$. Vyšetřovaná rovnice je tedy rovnicí plochy kuželové druhého stupně o vrcholu v bodě $V = [0,1,0]$.

3.84. V prostoru $\mathcal{E}_3$ je dána kvadratická plocha svou rovnicí

a) $\quad 6z^2 - 3x^2 - 12y^2 - 24 = 0\,,$

b) $\quad 20z = 2x^2 - 5y^2\,,$

c) $\quad 5x^2 + 8y^2 + 10z^2 + 40 = 0\,.$

Nalezněte kanonický tvar rovnice plochy a určete její typ.

2.94. Kosiny (resp. siny) úhlů, které svírá přímka p s osami x, y, z (resp. s rovinami $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$) jsou

a) $\frac{6}{11}, \frac{7}{11}, \frac{6}{11}$, b) $\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.95. $\cos \varphi = \frac{2\sqrt{66}}{33}$.

2.96. a) 60°, b) 45°.

2.97. $(1 \pm \sqrt{5})x + (-1 \pm \sqrt{5})y + 2z + (-5 \mp \sqrt{5}) = 0$.

2.98. α_1: $x + 20y + 7z - 12 = 0$, α_2: $x - z + 4 = 0$.

2.99. Kosiny těchto úhlů jsou : $\frac{4}{5\sqrt{10}}, \frac{36}{\sqrt{1530}}, \frac{9}{5\sqrt{153}}$.

2.100. $\cos \varphi = \sqrt{\frac{31}{34}}$.

2.101. $\sin \varphi = \frac{5\sqrt{7}}{14}$.

2.102. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

2.103. 90°.

2.104. $\underline{w} = (0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \mp \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$.

2.105. 150.

3.

3.7. a) $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 10$, b) $x^2 + (y - 1)^2 = 1$,
c) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$.

3.8. a) $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, b) $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$,
c) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$,
d) $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 100$.

3.9. a) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = \frac{81}{13}$ a $(x + 8)^2 + (y + 7)^2 = \frac{25}{13}$,
b) $(x + 6)^2 + (y + 9)^2 = \frac{25}{13}$ a $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = \frac{25}{13}$,
c) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 1$ a $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 25$.

3.10.

	A	B	C
k_1	vně	na	vně
k_2	uvnitř	uvnitř	vně
k_2	na	vně	vně

3.12. a) $x^2 + y^2 + 6x - 9y - 17 = 0$, b) $17x^2 + 17y^2 - 86x + 176y - 571 = 0$.

3.14. a) $x - 2y + 5 = 0$, $x + 2y - 5 = 0$, $2x + y - 5 = 0$;
b) $3x - 4y + 43 = 0$, $3x - 4y - 7 = 0$, $4x - 3y - 8 = 0$;
c) $y + 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $y - 5 = 0$;
d) $y - 1 = 0$, $y + 1 = 0$, $x - 2 = 0$.

3.16. a) $x - 2 = 0$, $y - 1 = 0$; b) $2x - 3y - 10 = 0$, $3x - 2y + 5 = 0$;
c) $5x - y - 14 = 0$, $x - 5y + 26 = 0$;
d) $3x - 4y + 21 = 0$, $4x + 3y - 47 = 0$.

3.17. $a = 10$, $b = 8$.

3.18. a) $F_1 = [0,-2]$, $F_2 = [0,2]$, b) $[-2,0]$, $[2,0]$,
c) $[-4,0]$, $[4,0]$, d) $[0,-3]$, $[0,3]$.

3.19. $B = [16,1]$, $D = [9,7]$, $e = 5\sqrt{3}$, $F_1 = [8 + 2\sqrt{15}, 5 - \sqrt{15}]$,
$F_2 = [8 - 2\sqrt{15}, 5 + \sqrt{15}]$.

3.22. $\rho(F_1,t_1) \cdot \rho(F_2,t_2) = b^2$.

3.26. Označíme-li k_1, k_2 směrnice sdružených průměrů, pak

$$k_1 = \pm \frac{(b^2 - a^2) \pm \sqrt{a^4 - 6a^2b^2 + b^4}}{2a^2},$$

$$k_2 = \mp \frac{(b^2 - a^2) \mp \sqrt{a^4 - 6a^2b^2 + b^4}}{2a^2}.$$

3.27. a) $9x + 16y - 300 = 0$, b) $2x + 3\sqrt{2}\,y - 18 = 0$.

3.28. a) 2 tečny : $8x + 3y - 50 = 0$, $3x - 2y - 25 = 0$,
b) 1 tečna : $4x - 15y - 289 = 0$,
c) žádná tečna.

3.29. Označíme-li $F_1 = [-e,0]$, $F_2 = [e,0]$, pak elipsy mají rovnice
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-e^2} = 1$, kde e ke kladná konstanta, $a \in (e, \infty)$.

3.30. a) Označíme-li $A = [-a,0]$, $B = [a,0]$, $a > 0$, hlavní vrcholy, pak
hledané rovnice jsou $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-e^2} = 1$, kde a je konst. a $e \in (0,a)$.

b) Označíme-li $C = [0,b]$, $D = [0,-b]$, $b > 0$, vdelejší vrcholy, pak
jejich rovnice jsou $\frac{x^2}{b^2+e^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, kde b je konstanta, $e \in (0,\infty)$.

3.31. $a = 24$, $b = 4$.

3.32. a) $x - y = 0$, $x + y = 0$, $\alpha = 90^\circ$,
b) $3x - 2y = 0$, $3x + 2y = 0$, $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, $\alpha \doteq 67^\circ 23'$.

3.36. Je to kružnice o středu ve středu hyperboly a poloměru $r = a$.

3.37. Je to kružnice o středu v druhém ohnisku a poloměru $r = 2a$.

3.38. a) 2 průsečíky : $M = [5,4]$, $N = [-\frac{53}{15}, \frac{28}{15}]$,
b) žádný průsečík, jde o asymptotu,
c) 1 průsečík $R = [5,4]$, přímka je tečnou hyperboly,
d) 1 průsečík $R = [\frac{75}{24}, \frac{14}{24}]$, přímka je rovnoběžná s asymptotou.

3.39. $\sqrt{3}\,x - 2\sqrt{2}\,y + 2 = 0$, b) $x - 2 = 0$.

3.40. $5x - 6y + 27 = 0$, $5x - 6y - 27 = 0$.

3.41. t_1 : $x = 4 + 10t$, $y = 4 + 13t$, t_2 : $x = 4 + 6t$, $y = 4 + 5t$.

3.42. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 1$.

3.43. $A = [0{,}5\ ;\ -2]$, $B = [4{,}5\ ;\ 6]$.

3.44. $T = \left[\frac{2}{3}, 2\right]$, $t:\ 2y - 3x - 2 = 0$.

3.46. Řídicí přímka paraboly.

3.47. Je-li $A \in d$, je to kolmice na p v bodě A bez bodu A.
Je-li $A \notin d$, je to parabola o řídicí přímce d a ohnisku A.

3.48. $x - 2y + 2 = 0$.

3.49. a) 2 tečny : $x = 0$, $x - 2y + 6 = 0$,
b) 1 tečna : $3x + 2\sqrt{3}\,y + 6 = 0$,
c) žádná tečna.

3.56. a) hyperbola : $a = 4$, $b = 3$, $S = [2,-1]$,
b) elipsa : $a = 4$, $b = 2\sqrt{3}$, $S = [1,-2]$,
c) parabola : $F = [2,-1]$, $p = \sqrt{2}$, $V = \left[\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right]$,
osa : $x + y - 1 = 0$ řídicí přímka : $x - y - 1 = 0$,
d) dvě přímky : $3x + 2y + 3 = 0$, $3x + 2y + 1 = 0$,
e) hyperbola : $a \doteq 27{,}05$, $b \doteq 13{,}52$, $S \doteq [-0{,}22; -0{,}09]$,
f) dvojnásobná přímka : $3x - y + 1 = 0$,
g) dvě přímky : $3x + 2y - 1 = 0$, $2x - y + 2 = 0$,
h) dvě rovnoběžné přímky : $x - y + 2 = 0$, $x - y + 3 = 0$,
i) elipsa : $a = 4$, $b = 2$, $S = [0,0]$,
j) bod : $[0,0]$,
k) množina prázdná,
l) parabola : $p = 2$, $V = [4,-2]$, $F = [5,-2]$, $d:\ x - 3 = 0$,
m) hyperbola : $a = 3$, $b = 3$, $S = [-1,1]$,
n) hyperbola : $a = 5$, $b = 4$, $S = [0,0]$.

3.57. a) $[\underline{u}] = [(3,1)]$, $[\underline{v}] = [(1,-3)]$, b) $[\underline{u}] = [(2,-1)]$, $[\underline{v}] = [(1,2)]$.

3.59. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$.

3.61. $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 1$.

3.62. $X = [4,2,5]$, $Y = \left[\frac{2}{3}, \frac{16}{3}, -\frac{5}{3}\right]$.

3.64. $T = [6,-2,2]$.

3.65. $m = \pm 18$.

3.68. $4x - 5y - 10z - 20 = x - 5 = 0$,
$4x - 5y - 10z - 20 = y + 4 = 0$, $T = [5, -4, 2]$.

3.70. Tvořící přímky leží ve dvou rovnoběžných rovinách :
1) $\alpha:\ 6x + 4y + 3z - 12 = 0$ a mají rovnice :
$6x + 4y + 3z - 12 = x - 2 = 0$,
$6x + 4y + 3z - 12 = y - 3 = 0$.
2) $\beta:\ 6x + 4y + 3z + 12 = 0$ a mají rovnice :
$6x + 4y + 3z + 12 = x + 2 = 0$,
$6x + 4y + 3z + 12 = y + 3 = 0$.
Jejich průsečíky jsou : $T = [2,3,-4]$, $N = [-2,-3,4]$.

3.71. $M = [4,2,9]$.

3.73. $4x - 12y + 9z - 6 = 0$.
3.75. $T = [9,-2,5]$.
3.77. Neexistují.
3.81. $x - 3y - z + 1 = 0$. Rovnice přímek :

$x - 3y - z + 1 = x - 1 + \sqrt{3}(y - 1) = 0$ resp.
$x - 3y - z + 1 = x - 1 - \sqrt{3}(y - 1) = 0$.

3.82. Rotační plocha válcová : $x^2 + y^2 = r^2$.

3.84. a) dvojdílný hyperboloid : $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{4} + 1 = 0$,

b) hyperbolický paraboloid : $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{2} - 2z = 0$,

c) množina prázdná .

Zdroj:

J. Jachanová, L. Marková, H. Žáková: Cvičení z geometrie. RUP Olomouc, 1986, 157 s.