

Příklady z Lineární algebry 1

Je-li zadání formulováno slovy *najděte xxx (parametr, homomorfismus, projekci, řešení, závislost, apod.) daných vlastností* – tj. hledaný objekt je uveden v čísle jednotném, je třeba najít vždy **všechny** takové objekty, pokud zadání výslovně neříká, že stačí najít jen jeden (tj. např. *najděte některou bázi*).

Pro všechny příklady platí, že součástí řešení musí být vždy zdůvodnění postupu. Uvádějte vždy i všechny pomocné výpočty.

1

Nechť pro libovolná reálná čísla a, b platí

$$a \square b = a + b + 1, \quad a \Delta b = a + b + ab.$$

Dokažte, že

1. $(\mathbb{R}, \square)$ je abelovská grupa;
2. $(\mathbb{R}, \Delta)$ je abelovská pologrupa s neutrálním prvkem, která ale není grupou.

2

Zjistěte, je-li následující uspořádaná trojice okruhem. Pokud se jedná o okruh, zjistěte jeho vlastnosti (komutativnost, existenci jednotkového prvku, existenci netriviálních dělitelů nuly, je-li oborem integrity, popř. tělesem):

1. $(2\mathbb{Z} + 1, +, \cdot)$ ($2\mathbb{Z} + 1$ množina všech celých lichých čísel)
2. $(\mathbb{Q}_0, +, \cdot)$
3. $(3\mathbb{Z}, +, \cdot)$
4. $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, +, \cdot)$
5. $(\{1, -1\}, +, \cdot)$
6. $(\mathbb{R}, \square, \Delta)$ ($\square$ a Δ mají stejný význam jako v předešlém příkladu č. 1).

3

Zjistěte (a zdůvodněte), je-li okruh $\mathbb{Z}_6 = (\mathbb{Z}_6, \oplus, \otimes)$, kde $\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ a operace $\oplus$ a $\otimes$ jsou dány tabulkami

$\oplus$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

$\otimes$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

oborem integrity, popř. tělesem.

4

Vypočítejte determinant

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 5 & 9 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

5

Vypočítejte determinant matice H:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

6

Určete všechny hodnoty $\lambda \in \mathbb{R}$, pro které je vektor $\vec{v}$ lineární kombinací vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$:

a) $\vec{u}_1 = (3, 2, 5), \vec{u}_2 = (2, 4, 7), \vec{u}_3 = (5, 6, \lambda), \vec{u}_4 = (1, 3, 5)$

b) $\vec{u}_1 = (4, 4, 3), \vec{u}_2 = (7, 2, 1), \vec{u}_3 = (4, 1, 6), \vec{u}_4 = (5, 9, \lambda)$

c) $\vec{u}_1 = (3, 2, 6), \vec{u}_2 = (7, 3, 9), \vec{u}_3 = (5, 1, 3), \vec{u}_4 = (\lambda, 2, 5)$

7

Vyšetřete lineární závislost či nezávislost následujících vektorů prostoru $\mathbb{R}^n$ v závislosti na parametrech a, b, c, d .

a) $\vec{a}_1 = (a, b, c, d)$

$$\vec{a}_2 = (b, -a, d, -c)$$

$$\vec{a}_3 = (c, -d, -a, b)$$

$$\vec{a}_4 = (d, c, -b, -a)$$

b) $\vec{b}_1 = (2, 3, -1)$

$$\vec{b}_2 = (a, 4, 2)$$

c) $\vec{c}_1 = (1, 1, 1)$

$$\vec{c}_2 = (1, a, 1)$$

$$\vec{c}_3 = (2, 2, a)$$

8

Najděte dimenzi lineárního obalu množin vektorů uvedených v předešlém cvičení v závislosti na parametrech.

9

Zjistěte dimenzi a najděte některou bázi průniku $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ jestliže:

- a) $\mathcal{W}_1 = [(1, 2, 0, 0), (1, 0, 0, -1)]$, $\mathcal{W}_2 = [(0, 1, 1, 0), (1, 1, -1, 1)]$;
- b) $\mathcal{W}_1 = [(1, 2, 3, 4)]$, $\mathcal{W}_2 = [(1, 5, 1, 2), (1, 1, 2, 3)]$;
- c) $\mathcal{W}_1 = [(1, 0, 2, -3), (3, 2, 1, -5), (-1, 2, 1, -2)]$, $\mathcal{W}_2 = [(-3, 0, 2, 0)]$;
- d) $\mathcal{W}_1 = [(3, 1, 5, 4), (2, 2, 3, 3)]$, $\mathcal{W}_2 = [(1, -1, 2, 1), (1, 3, 1, 2)]$;
- e) $\mathcal{W}_1 = [(5, 7, -1, 3), (1, -3, 8, 2), (-2, 6, -16, -4)]$, $\mathcal{W}_2 = [(9, 17, -10, 4)]$.

10

Určete dimenzi a najděte některou bázi součtu podprostorů v $\mathbb{R}^4$ generovaných po řadě vektory

$$\vec{u}_1 = (1, 1, 1, 1), \vec{u}_2 = (1, -1, 1, -1), \vec{u}_3 = (1, 3, 1, 3)$$

a vektory

$$\vec{v}_1 = (1, 2, 0, 2), \vec{v}_2 = (1, 2, 1, 2), \vec{v}_3 = (3, 1, 3, 1).$$

Rozhodněte, zda vektory $\vec{x}$, $\vec{y}$ náleží součtu těchto podprostorů; $\vec{x} = (1, 4, 0, 2)$, $\vec{y} = (1, 1, 1, 0)$.

11

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou dány vektory $\vec{u} = (2, 0, 1)$, $\vec{v} = (3, 1, 3)$ a vektor $\vec{e}_1 = (1, 1, 0)$. Najděte některé vektory $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ doplňující vektor $\vec{e}_1$ na bázi $\mathcal{B} = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$, v níž bude platit:

$$\{\vec{u}\}_{\mathcal{B}} = (1, -1, 2), \quad \{\vec{v}\}_{\mathcal{B}} = (0, 1, 1).$$

12

Určete množinu řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned}\lambda\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 &= 1, \\ \xi_1 + \lambda\xi_2 + \xi_3 + \xi_4 &= 1, \\ \xi_1 + \xi_2 + \lambda\xi_3 + \xi_4 &= 1, \\ \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \lambda\xi_4 &= 1.\end{aligned}$$

v závislosti na parametru λ .

13

Najděte obecné řešení soustavy rovnic v závislosti na parametru λ .

$$\begin{array}{ll} 5\xi_1 - 3\xi_2 + 2\xi_3 + 4\xi_4 = 3, & 2\xi_1 + 5\xi_2 + \xi_3 + 3\xi_4 = 2, \\ \text{a) } 4\xi_1 - 2\xi_2 + 3\xi_3 + 7\xi_4 = 1, & \text{b) } 4\xi_1 + 6\xi_2 + 3\xi_3 + 5\xi_4 = 4, \\ 8\xi_1 - 6\xi_2 - \xi_3 - 5\xi_4 = 9, & 4\xi_1 + 14\xi_2 + \xi_3 + 7\xi_4 = 4, \\ 7\xi_1 - 3\xi_2 + 7\xi_3 + 17\xi_4 = \lambda. & 2\xi_1 - 3\xi_2 + 3\xi_3 + \lambda\xi_4 = 7. \end{array}$$

14

Zjistěte, tvoří-li řádky matice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \\ 1 & -11 & 2 & 13 & 4 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

fundamentální systém řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 3\xi_1 + 4\xi_2 + 2\xi_3 + \xi_4 + 6\xi_5 &= 0, \\ 5\xi_1 + 9\xi_2 + 7\xi_3 + 4\xi_4 + 7\xi_5 &= 0, \\ 4\xi_1 + 3\xi_2 - \xi_3 - \xi_4 + 11\xi_5 &= 0, \\ \xi_1 + 6\xi_2 + 8\xi_3 + 5\xi_4 - 4\xi_5 &= 0. \end{aligned}$$

15

Zjistěte, tvoří-li vektor $(1, -2, 0, 1)$ fundamentální systém řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} \xi_1 + \xi_2 + \xi_4 &= 0, \\ 2\xi_1 + \xi_2 &= 0, \\ \xi_1 - \xi_4 &= 0. \end{aligned}$$

16

Určete hodnoty λ , pro které má matice

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

nejmenší hodnot.

17

Vypočítejte hodnotu matice

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

v závislosti na parametru λ .

18

Určete $\text{Ker } f$ a $\text{Im } f$, je-li $f : V_3 \rightarrow W_4$ homomorfismus daný ve zvolených bázích maticí A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rozhodněte o jeho injektivitě, surjektivitě a bijektivitě.

19

Určete $\text{Ker } f$ a $\text{Im } f$, je-li $f : V_4 \rightarrow W_4$ homomorfismus daný ve zvolených bázích maticí A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rozhodněte o jeho injektivitě, surjektivitě a bijektivitě.

20

Určete $\text{Ker } f$ a $\text{Im } f$, je-li $f : V_3 \rightarrow W_4$ homomorfismus daný ve zvolených bázích maticí A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Rozhodněte o jeho injektivitě, surjektivitě a bijektivitě.

21

Pokud k některému z homomorfismů v úloze 18 až 20 existuje inverzní zobrazení f^{-1} , najděte jeho analytické vyjádření.

22

Najděte analytické vyjádření homomorfismu $f : V_3 \rightarrow W_3$, je-li dáno:

$$\vec{u}_1 = (1, 2, -1) \mapsto f(\vec{u}_1) = (-2, -4, 4)$$

$$\vec{u}_2 = (-2, 0, 2) \mapsto f(\vec{u}_2) = (4, 0, -4)$$

$$\vec{u}_3 = (3, -1, 0) \mapsto f(\vec{u}_3) = (-3, 2, 2)$$

23

Najděte analytické vyjádření endomorfismu $f : V_3 \rightarrow V_3$, platí-li pro vektory báze $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$ prostoru V_3 :

$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

$$f(\vec{e}_1) + 2f(\vec{e}_3) = \vec{e}_2$$

$$f(\vec{e}_2) + f(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

24

Buďte V, W vektorové prostory. Nechť $\mathcal{B} = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$ je báze prostoru V a $\mathcal{C} = \langle \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3 \rangle$ je báze prostoru W . Najděte analytické vyjádření homomorfismu $f: V \rightarrow W$, jestliže platí:

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_1) + 2f(\vec{e}_2) &= \vec{b}_1 + 4\vec{b}_2 + 3\vec{b}_3 \\ f(\vec{e}_1) - f(\vec{e}_2) + f(\vec{e}_3) &= \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + 2\vec{b}_3 \\ f(\vec{e}_2) + f(\vec{e}_3) &= \vec{b}_2 - \vec{b}_3. \end{aligned}$$

25

Najděte analytické vyjádření homomorfismu $f: V_3 \rightarrow W_4$, je-li dáno:

$$\vec{u}_1 = (1, 1, 0) \quad f(\vec{u}_1) = (2, 1, 1)$$

$$\vec{u}_2 = (0, 1, 2) \quad f(\vec{u}_2) = (1, 1, 0)$$

Kolik takových homomorfizmů existuje?

26

Najděte analytické vyjádření projekce $f: V_3 \rightarrow U_2$, je-li dáno:

$$\vec{u}_1 = (1, 1, 2) \quad f(\vec{u}_1) = (0, 2, 1)$$

$$\vec{u}_2 = (1, 0, 1) \in U_2$$

Jedná se o ortogonální projekci?

27

Zjistěte, zda existuje ortogonální projekce $f: V_4 \rightarrow U_2$, je-li dáno:

$$\vec{u}_1 = (2, -1, 0, 0) \quad f(\vec{u}_1) = (1, 0, 1, 0)$$

$$\vec{u}_2 = (0, 0, 0, 1) \in f.$$

V kladném případě ji najděte a napište její analytické vyjádření.

28

Je dán endomorfismus f prostoru V_4 analytickým vyjádřením:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{2}{3}x_1 && + \frac{1}{3}x_3 && + \frac{1}{3}x_4 \\ y_2 &= \frac{2}{3}x_1 && + 2x_2 + \frac{1}{3}x_3 && - \frac{5}{3}x_4 \\ y_3 &= && -x_2 && + x_4 \\ y_4 &= \frac{2}{3}x_1 && + x_2 + \frac{1}{3}x_3 && - \frac{2}{3}x_4 \end{aligned}$$

Rozhodněte, zda jde o projekci. V kladném případě najděte podprostory $\mathcal{U}, \mathcal{W} \subseteq V$ pro něž platí, že f je projekce V na $\mathcal{W}$ rovnoběžné $\mathcal{U}$.

27

Najděte analytické vyjádření izometrie f (ortogonální automorfismus) euklidovského vektorového prostoru V_2 , pro niž platí:

$$\vec{u} = (1, 1), f(\vec{u}) = (1, 1).$$

Kolik takových izometrií existuje?

29

V aritmetickém vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou dány vektory

$$\vec{e}_1 = (1, 1, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 1), \vec{e}_3 = (0, 0, 1).$$

Najděte skalární součin $\cdot$ na $\mathbb{R}^3$ tak, aby $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$ byla ortonormální báze.

30

Bud' $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^4$ a uvažujme $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem.

$$\mathcal{K} = [(1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 2), (-1, 1, 1, 1)]$$

Najděte některou ortogonální bázi podprostoru $\mathcal{K}$.

31

Následující tabulka jsou výsledky měření jevu y v závislosti na x . Jde o kvadratickou závislost

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

x	0	1	2	3	3
y	1	4	9	15	16

Najděte hledanou závislost; je-li třeba použít metodu přibližnou, užíjte metodou nejmenších čtverců.

32

Následující tabulka jsou výsledky měření jevu y v závislosti na (x_1, x_2, x_3, x_4) . Jde o lineární závislost

$$y = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

x_1	1	2	1	0
x_2	1	1	0	1
x_3	1	0	-1	1
x_4	0	1	1	0
y	1	1	1	0

Najděte hledanou závislost; je-li třeba použít metodu přibližnou, užíjte metodou nejmenších čtverců.

33

Nechť ve zvolené bázi prostoru V_3 nad $\mathbb{R}$ je dán endomorfismus f maticí A

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte, zda je endomorfismus f diagonalizovatelný, a v kladném případě najděte bázi, v níž bude mít diagonální matici, a najděte i tuto matici.

34

Nechť ve zvolené bázi prostoru V_3 nad $\mathbb{R}$ je dán endomorfismus f maticí A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Existuje báze prostoru V_3 , v níž by měl tento endomorfismus diagonální matici? Své rozhodnutí odůvodněte.

35

Nechť je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte o její definitnosti a stanovte její signaturu.

36

Nechť je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte, zda k této matici existuje odmocninová matice; v kladném případě matici $A^{\frac{1}{2}}$ najděte.