INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ
Rozšíření akreditace učitelství matematiky a učitelství deskriptivní geometrie na PřF UP v Olomouci o formu kombinovanou
CZ.1.07/2.2.00/18.0013

Aplikace deskriptivní geometrie

Základy kartografie a cyklografie

Lenka JUKLOVÁ

Oponenti: Mgr. Marie Chodorová, Ph. D.
RNDr. Martina Štěpánová, Ph. D.

1. vydání

ISBN 978-80-244-3600-5

Obsah

Úvod

Učební text je věnován základům kartografie a cyklografie. Tyto dvě disciplíny jsou hlavní náplní kurzu Aplikace deskriptivní geometrie 2 určeného posluchačům bakalářského studia deskriptivní geometrie.

První kapitola je věnována kartografii, tedy způsobům zobrazování kulové plochy do roviny. Nejprve jsou zde vysvětleny základní kartografické pojmy – sférické souřadnice, poledníky a rovnoběžky, zeměpisná délka a šířka apod. Dále je uvedeno rozdělení kartografických projekcí na rovinné (kulovou plochu promítáme přímo do vhodné roviny z daného středu), válcové (kulovou plochu nejprve zobrazíme na vhodnou rotační válcovou plochu a tu poté rozvineme do roviny) a kuželové (kulovou plochu nejprve zobrazíme na vhodnou rotační kuželovou plochu a tu poté rozvineme do roviny). Rovinné kartografické projekce jsou pak děleny na gnómonické (střed promítání splývá se středem kulové plochy), stereografické (střed promítání leží na kulové ploše), scénografické (průmět kulové plochy z vlastního středu ležícího vně kulové plochy) a ortografické (pravoúhlý průmět kulové plochy). Každá z výše uvedených projekcí je dále ještě dělena podle vzájemné polohy průmětny a kulové plochy.

Z válcových projekcí jsou uvedeny dvě – normální válcová projekce (kulovou plochu promítne-me na jistou válcovou plochu ze středu kulové plochy) a nepravá Lambertova válcová projekce (body kulové plochy jsou jistým způsobem – ne promítáním – přiřazeny bodům rotační válcové plochy).

Závěr první kapitoly je věnován Braunově kuželové projekci (kulovou plochu promítneme z jednoho pólu na rotační kuželovou plochu dotýkající se kulové plochy podél třicáté rovnoběžky opačné šířky než pól, ze kterého promítáme).

Druhá kapitola je věnována nelineární zobrazovací metodě – cyklografii. V této zobrazovací metodě je každému bodu přiřazen tzv. cykl, tj. orientovaná kružnice a její střed. Orientace udává polohu bodu vzhledem k průmětně (nad průmětnou, pod průmětnou), poloměr cyklu určuje vzdálenost bodu od průmětny (body ležící v průmětně jsou tzv. nulové cykly, tj. kružnice s nulovým poloměrem) a střed cyklu je pravoúhlým průmětem daného bodu do průmětny. Je ukázáno zobrazení bodu, přímky a roviny a také jsou objasněny pojmy – dotyk cyklů a dotyk cyklu a paprsku. Každému bodu v prostoru je přiřazen tzv. cyklografický kužel, tj. rotační kuželová plocha s vrcholem v daném bodě a povrchovými přímkami, jejichž odchylka od průmětny je $45°$. S využitím takto zavedených pojmů jsou pak pomocí prostorových interpretací řešeny rovinné úlohy – Pappovy a Apolloniovy úlohy.

Učebnice je určena především posluchačům bakalářského dvouoborového studia matematika – deskriptivní geometrie, pokrývá většinu učiva předmětu Aplikace deskriptivní geometrie 2, mohou ji však využít i studenti jiných oborů.

Na závěr děkuji oběma recenzentkám Mgr. Marii Chodorové, Ph.D, a RNDr. Martině Štěpánové, Ph.D. za cenné rady a připomínky.

Autorka

Olomouc, duben 2013

Kapitola 1

Kartografie

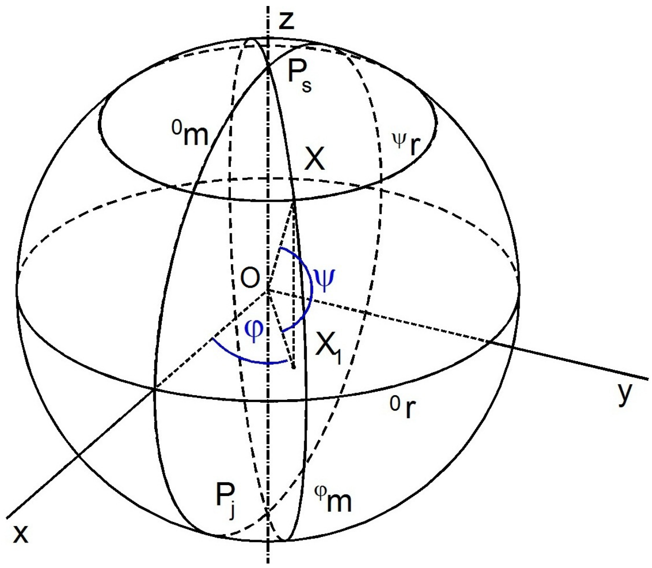
Kartografie se zabývá zobrazováním zemského povrchu. Zemský povrch (geoid) nahrazujeme plochou kulovou a tu zobrazujeme. Délky zmenšujeme v daném měřítku $1 : m$, kde 1 je jednotka na zobrazené kulové ploše a m je odpovídající délka na kulové ploše o poloměru rovném průměrnému poloměru Země.

Uvažujme kulovou plochu κ se středem O a poloměrem r, která nahrazuje zemský povrch. Na kulové ploše κ zavedeme souřadnice následujícím způsobem:
Mějme dánu kartézskou soustavu souřadnic. Její střed umístíme do středu O kulové plochy κ. Označme $X = [x_0, y_0, z_0]$ libovolný bod kulové plochy κ, $X_1 = [x_{10}, y_{10}, 0]$ jeho průmět do roviny určené osami x, y. Označme φ velikost úhlu, který svírá kladná poloosa x s polopřímkou OX_1, a ψ úhel, který svírají polopřímky OX_1 a OX. Aby byl takto jednoznačně určen bod X kulové plochy κ, omezíme intervaly, ve kterých se mohou pohybovat velikosti úhlů φ, ψ. Úhel $\varphi \in \langle -\pi, \pi)$ a úhel $\psi \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Takto zavedené souřadnice se nazývají *sférické souřadnice*.
Každému bodu oblasti $\Delta = \langle -\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ je jednoznačně přiřazen bod X kulové plochy κ, jehož sférické souřadnice jsou φ, ψ. Body, ve kterých $\psi = \pm\frac{\pi}{2}$ nemají jednoznačně určeno φ, označíme je P_s pro $\psi = \frac{\pi}{2}$ a P_j pro $\psi = -\frac{\pi}{2}$.

Body P_s, P_j nazýváme po řadě *severní* a *jižní pól* kulové plochy, přímku P_sP_j nazýváme *zemská osa*. Souřadnici ψ *nazýváme zeměpisná šířka* a souřadnici φ nazýváme *zeměpisná délka*. Body X kulové plochy κ, pro něž je souřadnice ψ pevně zvolena a φ proběhne celý interval, vyplní kružnici kulové plochy κ, která leží v rovině rovnoběžné s rovinou xy, označujeme ji ${}^{\psi}r$ a nazýváme *rovnoběžka zeměpisné šířky* ψ. Rovnoběžka zeměpisné šířky 0 se nazývá *rovník*, leží v rovině xy její poloměr je roven poloměru kulové plochy κ. Rovnoběžky, pro něž je ψ záporné, udávají *jižní* zeměpisnou šířku, rovnoběžky pro kladné ψ udávají *severní* zeměpisnou šířku.

Body X kulové plochy κ, pro něž je pevně zvolena souřadnice φ a souřadnice ψ proběhne celý interval, vyplní hlavní půlkružnici kulové plochy nad průměrem P^sP^j, označujeme ji ${}^{\varphi}m$ a nazýváme *poledník zeměpisné délky* φ. Poledník zeměpisné délky 0 leží v rovině xz a nazývá se *nultý* poledník. Poledníky, pro něž je φ záporné, udávají *západní* zeměpisnou délku, poledníky pro kladné φ udávají *východní* zeměpisnou délku. Sestrojíme-li tečny poledníků v některém z pólů, je zřejmé, že zeměpisná délka φ je velikost úhlu, který spolu svírají tečny poledníků ${}^0m$ a ${}^{\varphi}m$.

Rovnoběžky a poledníky vytváří na kulové ploše pravoúhlou souřadnou síť, kterou nazýváme *kartografická síť*.



Obr. 1.0.1

Zobrazení zemského povrchu se nazývá *mapa*. Mapy vytváříme buď pomocí geometrického zobrazení, tj. projekcí z daného středu do dané roviny nebo na danou plochu nebo kartografickým zobrazením, tj. předepsaným předpisem. Kulovou plochu nelze rozvinout do roviny, protože neexistuje izometrické zobrazení, které by zachovávalo délky úseček, velikosti úhlů apod. Dochází ke zkreslení kartografické sítě. Neexistuje ideální mapa, tj. mapa, která by zachovávala (v daném měřítku) současně délky oblouků křivek, obsahy plošných útvarů, úhly křivek apod. Ovšem existují mapy, které některé vlastnosti zachovávají buď globálně nebo v okolí nějakého bodu. Podle vlastnosti, která se promítáním zachovává, se mapy dělí. Mapy *ekvidistantní (délkojevné)* zachovávají délku oblouku, mapy *konformní (úhlojevné)* zachovávají úhly křivek, mapy *ekvivalentní (plochojevné)* zachovávají obsah obrazců.

Na mapě sestrojujeme některé významné křivky, která se používají např. při navigaci. Nejkratší spojnice dvou bodů na ploše se nazývají *geodetické křivky*, v případě kulové plochy se jim také říká *ortodromy*. Ortodromy jsou části hlavních kružnic kulové plochy, tj. kružnic, které mají stejný střed a poloměr jako kulová plocha, na níž leží. Další významné křivky, které se na mapách užívají, jsou *loxodromy*. Loxodromy jsou křivky, které protínají všechny poledníky pod konstantním úhlem.

Kartografické projekce dělíme podle plochy, na niž promítáme, a dále podle polohy středu promítání a průmětny. Promítáme-li do roviny, nazývá se projekce *rovinná*, promítáme-li na rotační válcovou plochu, dostáváme projekce *válcové*, a promítáním na rotační kuželovou plochu obdržíme projekci *kuželovou*. V případě válcových a kuželových projekcí dostaneme mapu tak, že kulovou plochu nejprve promítneme na danou rotační válcovou či kuželovou plochu, a tu pak rozvineme do roviny.

1.1 Rovinné kartografické projekce

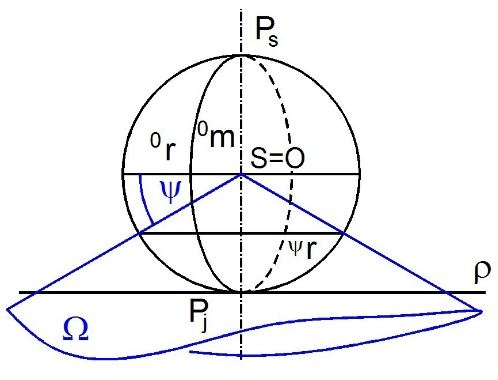
Rovinné projekce zobrazují kulovou plochu přímo na rovinu ρ do mapy. Rovina ρ je buď tečnou rovinou plochy, nebo ji posuneme tak, aby procházela středem kulové plochy. Pokud je střed S promítání různý od středu O kulové plochy, vždy volíme rovnu ρ tak, aby přímka SO byla k rovině kolmá. Rovinné projekce dále dělíme podle polohy středu promítání vzhledem ke kulové ploše a podle polohy roviny, do níž promítáme. Splyne-li střed S promítání se středem O kulové plochy, dostáváme projekci *gnómonickou*, leží-li střed S na kulové ploše, nazývá se projekce *stereografická*, leží-li střed promítání vně kulové plochy a je vlastní, nazývá se projekce *scénografická*, a pro nevlastní střed promítání se projekce nazývá *ortografická*. Jestliže se rovina ρ, do níž promítáme, dotýká kulové plochy v pólu, nazývá se projekce *pólová*, dotýká-li se rovina ρ v bodě rovníku, nazývá se projekce *rovníková*, a dotýká-li se ρ v obecném bodě, je projekce *obecná*. Rovinu ρ vždy ztotožníme s nákresnou.

1.1.1 Gnómonické projekce

Střed kulové plochy a střed každé hlavní kružnice ležící na této ploše splývá se středem promítání, proto se každá hlavní kružnice kulové plochy v gnómonických projekcích zobrazí jako přímka. Průměty poledníků jsou přímky a průměty ortodrom jsou části přímek.

Pólová gnómonická projekce

Střed S promítání splývá se středem O kulové plochy, promítáme do roviny ρ, která se dotýká kulové plochy v pólu. Uvažujme rovnoběžku zeměpisné šířky ψ ležící v rovině α.

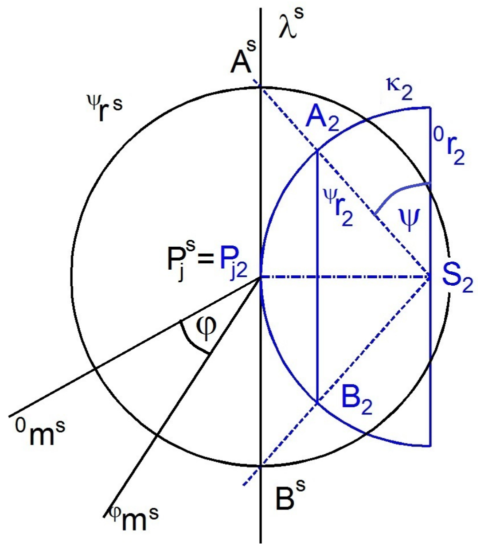


Obr. 1.1.1

Spojnice bodů této rovnoběžky se středem promítání vytvoří rotační kuželovou plochu Ω s osou kolmou k rovině ρ. Středový průmět ${}^{\psi}r^{s}$ rovnoběžky zeměpisné šířky ψ, je řez rotační kuželové plochy Ω rovinou α, ${}^{\psi}r^{s}$ je tedy kružnice. Rovník leží v rovině, která obsahuje střed promítání, středově promítací přímka každého bodu rovníku je rovnoběžná s rovinou ρ, průmětem rovníku je nevlastní přímka roviny ρ. Oba póly leží na téže středově promítací přímce, zobrazí se do jednoho bodu a poledníky se zobrazí jako svazek polopřímek se středem bodě $P_s^s = P_j^s$. Průmětem kulové plochy je celá rovina ρ.

(a) Konstrukce průmětů rovnoběžek

Zvolíme rovinu λ procházející póly a do ní pravoúhle promítneme všechny rovnoběžky. Rovina λ je kolmá k rovině ρ, obsahuje střed S promítání a do roviny ρ se z bodu S promítne jako přímka λ^s. Rovinu λ sklopíme, sklopené průměty útvarů označíme dolním indexem 2. Ve sklopení máme dán pravoúhlý průmět kulové plochy κ do roviny λ (v daném měřítku). Kulová plocha κ se dotýká roviny ρ (průmětny) v bodě P_j.



Obr. 1.1.2

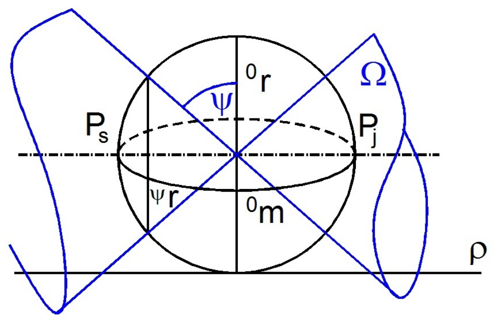
Rovnoběžky se do roviny λ pravoúhle promítnou jako rovnoběžné úsečky rovnoběžné se středovým průmětem roviny λ. Mějme dánu rovnoběžku zeměpisné šířky ψ. Krajní body A_2, B_2 úsečky ${}^{\psi}r_2$ leží na κ_2 a jsou to body A, B rovnoběžky ${}^{\psi}r$, které leží v rovině λ. Jejich středové průměty A^s, B^s leží na λ^s, určíme je ve sklopení, $A^s = \lambda^s \cap S_2A_2$. Středový průmět ${}^{\psi}r^s$ rovnoběžky ${}^{\psi}r$ je kružnice sestrojená nad průměrem A^sB^s (viz obr. 1.1.2).

(b) Konstrukce průmětů poledníků

Průměty poledníků tvoří svazek polopřímek o středu P_j^s. Zvolíme nultý poledník, polopřímku ${}^{0}m^s$ s počátkem v bodě P_j^s. Protože poledníky leží v rovinách kolmých k průmětně, zachovává se velikost úhlu, který svírají roviny poledníků. Polopřímka, která svírá s polopřímkou ${}^{0}m^s$ úhel φ, je středovým průmětem poledníku zeměpisné délky ${}^{\varphi}m^s$ (jak ukazuje obr. 1.1.2).

Rovníková gnómonická projekce

Rovina ρ se dotýká kulové plochy v bodě rovníku. Promítací přímky bodů rovnoběžek leží na rotačních kuželových plochách Ω s osou rotace rovnoběžnou s průmětnou ρ. Středový průmět rovnoběžky ${}^{\psi}r$ je řez plochy Ω rovinou ρ. Průmětem rovnoběžky ${}^{\psi}r$ je tedy hyperbola. Rovník leží v rovině kolmé k průmětně a obsahující střed promítání, jeho středovým průmětem je přímka ${}^{0}r^{s}$.

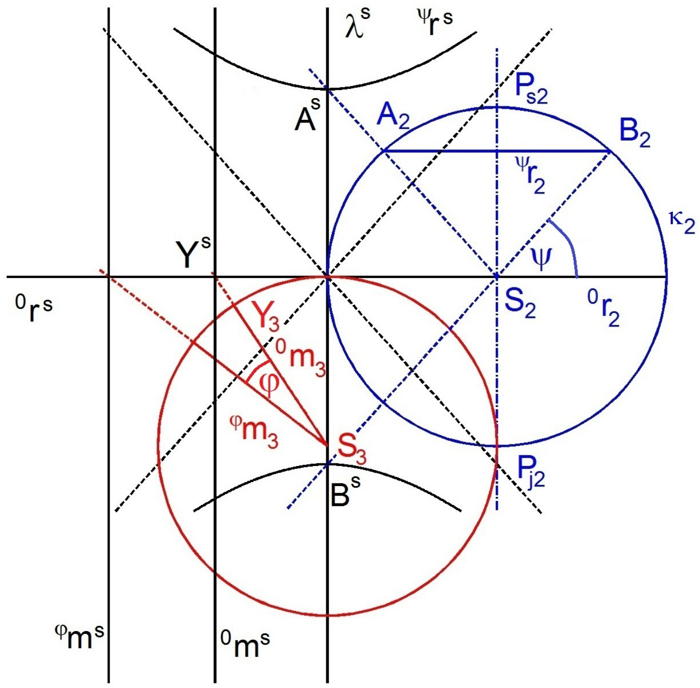


Obr. 1.1.3

Protože je zemská osa rovnoběžná s průmětnou, zobrazí se póly do nevlastního bodu. Průměty poledníků tvoří svazek rovnoběžek. Středovým průmětem kulové plochy je opět celá rovina ρ.

(a) Konstrukce průmětů rovnoběžek

Zvolíme rovinu λ procházející póly a kolmou k rovině ρ a do ní pravoúhle promítneme všechny rovnoběžky. Rovina λ obsahuje střed S promítání, do roviny ρ se z bodu S promítne jako přímka λ^{s}. Rovinu λ sklopíme, sklopené průměty útvarů označíme dolním indexem 2. Ve sklopení máme dán pravoúhlý průmět kulové plochy κ do roviny λ (v daném měřítku).



Obr. 1.1.4

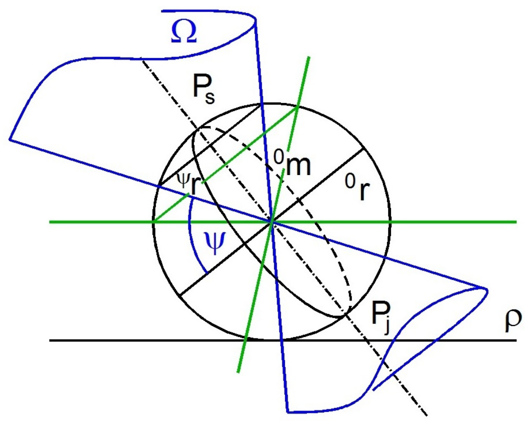
Kulová plocha κ se dotýká roviny ρ (průmětny) v bodě rovníku. Rovník leží v rovině kolmé k rovině λ, jeho středový průmět je přímka kolmá k λ^s procházející bodem dotyku s rovinou ρ. Rovnoběžky se do roviny λ pravoúhle promítnou jako rovnoběžné úsečky kolmé ke středovému průmětu roviny λ. Mějme dánu rovnoběžku zeměpisné šířky ψ. Krajní body A_2, B_2 úsečky ${}^{\psi}r_2$ leží na κ_2 a jsou to body A, B rovnoběžky ${}^{\psi}r$, které leží v rovině λ. Jejich středové průměty A^s, B^s leží na λ^s, určíme je ve sklopení, $A^s = \lambda^s \cap S_2A_2$. Středový průmět ${}^{\psi}r^s$ rovnoběžky ${}^{\psi}r$ je hyperbola s vrcholy A^s, B^s. Z Quételetovy-Dandelinovy věty víme, že vedlejší osa této hyperboly je rovna poloměru dané kulové plochy, proto asymptoty hyperboly ${}^{\psi}r^s$ jsou přímky rovnoběžné s přímkami S_2A_2, S_2B_2.

(b) Konstrukce průmětů poledníků

Poledníky pravoúhle promítneme do roviny σ rovníku a tu sklopíme, sklopené útvary označíme indexem 3. Poledníky se do roviny rovníku pravoúhle promítnou jako poloměry kružnice ${}^{0}r_3$. Libovolný poledník zvolíme za nultý, jeho bod Y ležící na rovníku promítneme ze středu S do roviny ρ. Středový průmět poledníku je přímka kolmá k ${}^{0}r^s$ procházející středovým průmětem bodu Y. Ve sklopení zvolíme poledník zeměpisné délky φ, jeho středový průmět sestrojíme stejně jako ${}^{0}m^s$.

Obecná gnómonická projekce

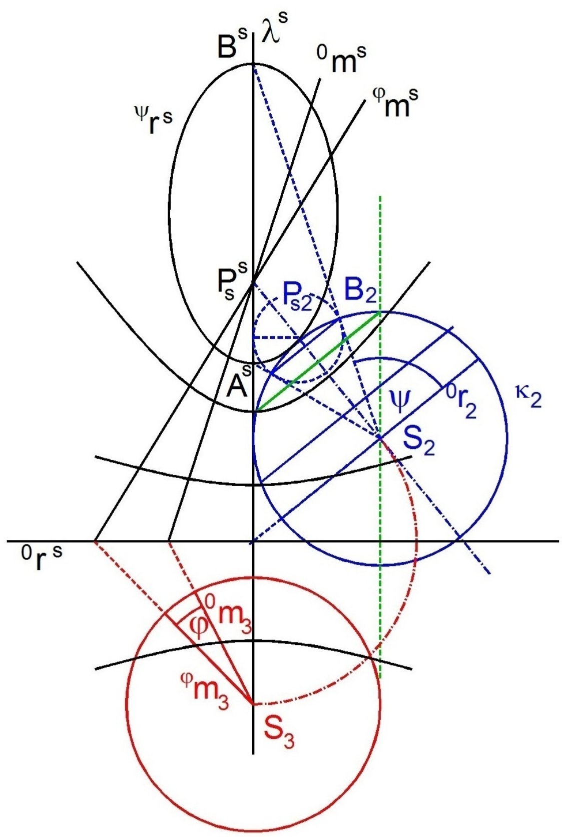
Průmětna ρ se dotýká kulové plochy v obecném bodě. Promítací přímky bodů každé rovnoběžky ${}^{\psi}r$ leží na rotační kuželové ploše Ω, průmět rovnoběžky ${}^{\psi}r$ do rovinyρ je řez kuželové plochy Ω rovinou ρ. Zemská osa je v obecné poloze vzhledem k průmětně, proto jsou průměty rovnoběžek, s výjimkou rovníku, elipsy, paraboly i hyperboly. Rovina rovníku obsahuje střed promítání, průmětem rovníku je přímka. Průmětem poledníků je svazek přímek se středem v bodě $P_s^s = P_j^s$. Průmětem kulové plochy je celá průmětna.



Obr. 1.1.5

(a) Konstrukce průmětů rovnoběžek

Zvolíme rovinu λ procházející póly a kolmou k rovině ρ a do ní pravoúhle promítneme všechny rovnoběžky. Rovina λ obsahuje střed S promítání, do roviny ρ se z bodu S promítne jako přímka λ^s. Rovinu λ sklopíme, sklopené průměty útvarů označíme dolním indexem 2. Ve sklopení máme dán pravoúhlý průmět kulové plochy κ do roviny λ (v daném měřítku). Kulová plocha κ se dotýká roviny ρ v obecném bodě. Rovník leží v rovině kolmé k rovině λ, jeho středový průmět je proto přímka kolmá k λ^s. Zobrazíme bod rovníku ležící v rovině λ, jím prochází ${}^0r^s$ kolmo k λ^s. Rovnoběžky se do roviny λ pravoúhle promítnou jako rovnoběžné úsečky. Mějme dánu rovnoběžku zeměpisné šířky ψ. Krajní body A_2, B_2 úsečky ${}^\psi r_2$ jsou pravoúhlými průměty bodů A, B rovnoběžky ${}^\psi r$, které leží v rovině λ. Jejich středové průměty A^s, B^s leží na λ^s, určíme je ve sklopení, $A^s = \lambda^s \cap S_2A_2$. Středový průmět ${}^\psi r^s$ rovnoběžky ${}^\psi r$ je regulární kuželosečka s vrcholy A^s, B^s (pokud je průmětem parabola, je jeden z těchto bodů nevlastní). Z Quételetovy-Dandelinovy věty víme, že ohnisko této kuželosečky je bodem dotyku kulové plochy vepsané kuželové ploše a dotýkající se roviny řezu.



Obr. 1.1.6

(b) Konstrukce průmětů poledníků

Poledníky pravoúhle promítneme do roviny rovníku a tu otočíme do roviny ρ. Průměty do roviny rovníku označíme dolním indexem 3. Pro konstrukci středových průmětů poledníků využijeme afinity s osou ${}^0r^s$ a směrem $S_3P^s_s$. Do roviny rovníku se poledníky zobrazí jako poloměry rovníku. Zvolíme nultý poledník, jeho bod ležící v rovině rovníku promítneme ze středu promítání na ${}^0r^s$. Tímto bodem a průmětem pólu je dán středový průmět nultého poledníku. Konstrukce středového průmětu ${}^{\varphi}m^s$ poledníku zeměpisné délky φ je zřejmá.

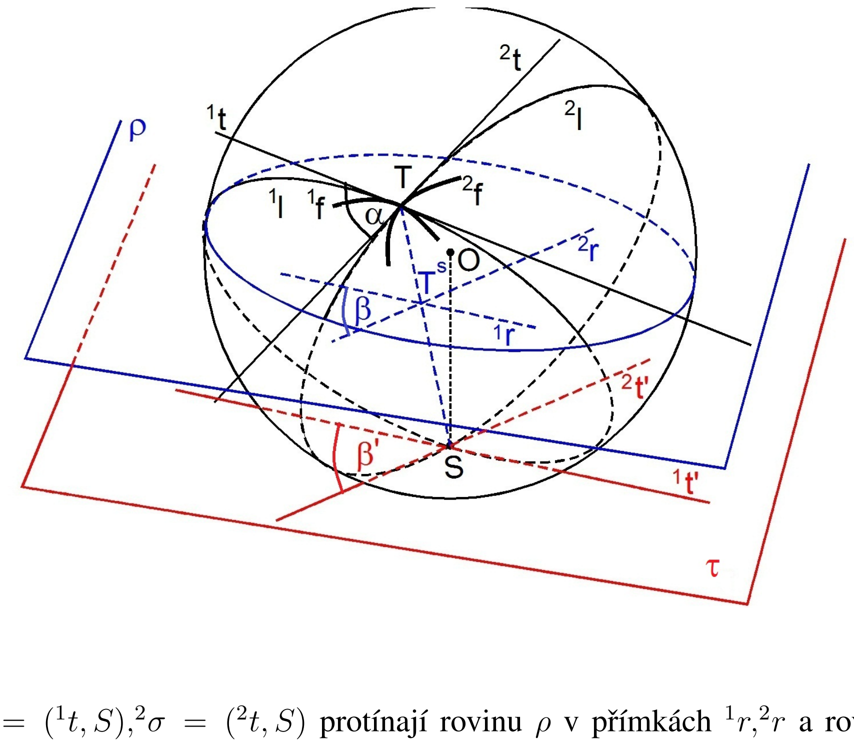
1.1.2 Stereografické projekce

Střed promítání leží na kulové ploše. Promítáme z něj do roviny ρ procházející středem kulové plochy a přímka SO, kde O je střed kulové plochy, je kolmá na rovinu ρ. Průmětem kulové plochy je vždy celá rovina ρ. Pro určení typu stereografické projekce uvažujeme rovinu ρ' rovnoběžnou s rovinou ρ a dotýkající se kulové plochy. Rovina ρ' se kulové plochy dotýká průsečíku přímky SO s kulovou plochou, který je různý od bodu S. Často zobrazujeme jen polokouli ležící v opačném poloprostoru (určeném průmětnou) než střed promítání.

Pro stereografické projekce si dokážeme dvě věty.

Věta 1.1.1 *Stereografická projekce je projekce konformní (úhlojevná).*

Důkaz: Nechť ${}^1f, {}^2f$ jsou dvě křivky na dané kulové ploše protínající se pod úhlem α. Označme ${}^1t, {}^2t$ tečny křivek ${}^1f, {}^2f$ v jejich průsečíku T.



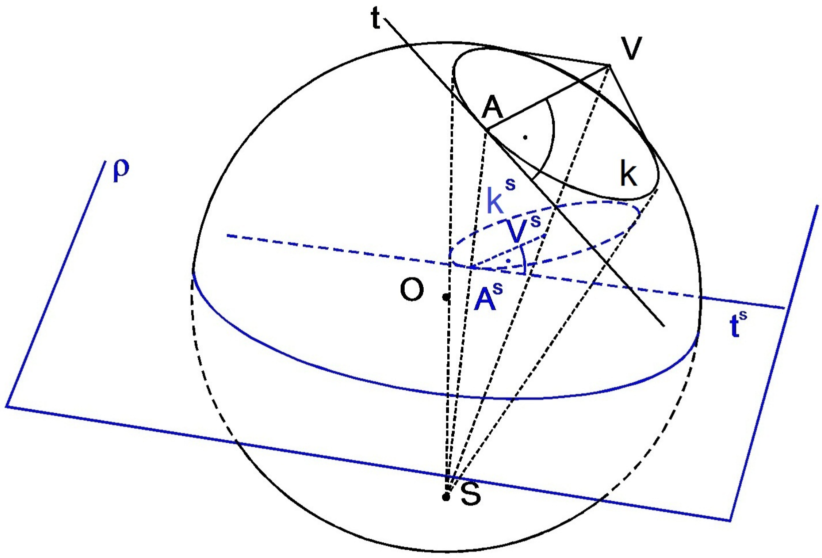
Obr. 1.1.7

Roviny ${}^1\sigma = ({}^1t, S), {}^2\sigma = ({}^2t, S)$ protínají rovinu ρ v přímkách ${}^1r, {}^2r$ a rovinu τ (tečná rovina kulové plochy v bodě S) v přímkách ${}^1t', {}^2t'$. Protože roviny ρ a τ jsou rovnoběžné, jsou úhly $\beta = |\measuredangle {}^1r, {}^2r|$ a $\beta' = |\measuredangle {}^1t', {}^2t'|$ stejné. Roviny ${}^1\sigma, {}^2\sigma$ protínají také kulovou plochu

v kružnicích ${}^1l, {}^2l$, které procházejí body S, T. Uvažujme rovinu ω, která prochází středem O kulové plochy kolmo k úsečce TS.
Tato rovina je rovinou souměrnosti bodů T a S, proto i úhly α, β', ve kterých se protínají kružnice ${}^1l, {}^2l$ v bodech T, S, jsou stejné. Odtud plyne i rovnost úhlů α, β. □

Věta 1.1.2 *Stereografický průmět kružnice neprocházející středem promítání je opět kružnice.*

Důkaz: Uvažujme libovolnou kružnici k kulové plochy neprocházející středem S promítání. Označme V vrchol rotační kuželové plochy, která se kulové plochy dotýká podél k. Je-li A libovolný bod kružnice k, potom je přímka AV kolmá na tečnu t kružnice k v bodě A. Podle věty 1.1.1 je stereografická projekce zobrazení konformní, a proto jsou k sobě kolmé i středové průměty t^s (tečna křivky k^s) a A^sV^s.



Obr. 1.1.8

Stereografické průměty všech povrchových přímek rotační kuželové plochy tvoří svazek o středu V^s. Všechny přímky tohoto svazku jsou kolmé k tečnám t^s křivky k^s, proto je k^s kružnice o středu V^s. □

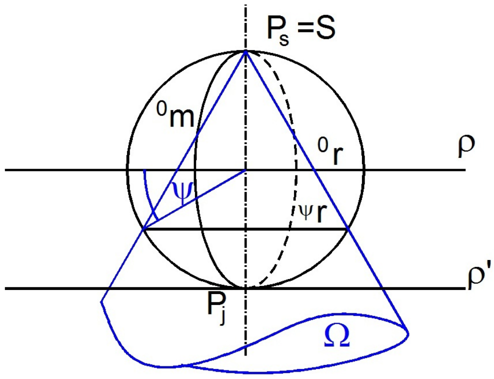
V důkazu věty 1.1.2 jsme odvodili i následující větu:

Věta 1.1.3 *Střed V^s kružnice k^s je stereografickým průmětem vrcholu V rotační kuželové plochy, která se kulové plochy dotýká podél kružnice k.*

Poznámka 1.1.1 Z vět 1.1.2 a 1.1.3 přímo plyne, že se ortodroma ve stereografických projekcích zobrazí jako část kružnice nebo přímky.

Pólová stereografická projekce

Rovina ρ' rovnoběžná s rovinou ρ se dotýká kulové plochy v pólu, střed promítání splývá s druhým pólem. Průměty rovnoběžek jsou řezy rotačních kuželových ploch rovinami kolmými k zemské ose, která splývá s osami těchto rotačních kuželových ploch. Rovnoběžky se zobrazí jako soustředné kružnice. Rovina obsahující poledník obsahuje i střed promítání, poledníky se zobrazí jako svazek polopřímek. Zobrazíme pouze tu polokouli, na které neleží střed promítání.



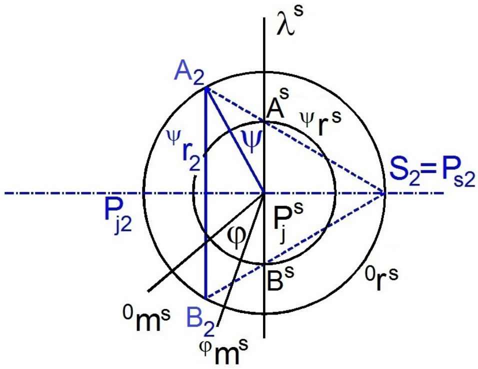
Obr. 1.1.9

(a) Konstrukce průmětů rovnoběžek

Rovník leží v průmětně, zobrazí se v daném měřítku. Zvolíme rovinu λ procházející póly a do ní pravoúhle promítneme rovnoběžky. Rovinu λ sklopíme, sklopené útvary označíme indexem 2. Rovnoběžky se do roviny λ zobrazí jako rovnoběžné úsečky. Sestrojíme středový průmět rovnoběžky $^\psi r$. Středové průměty bodů A, B rovnoběžky $^\psi r$, které leží v rovině λ, leží na λ^s. Úsečka $A^s B^s$ je průměr kružnice $^\psi r^s$.

(b) Konstrukce průmětů poledníků

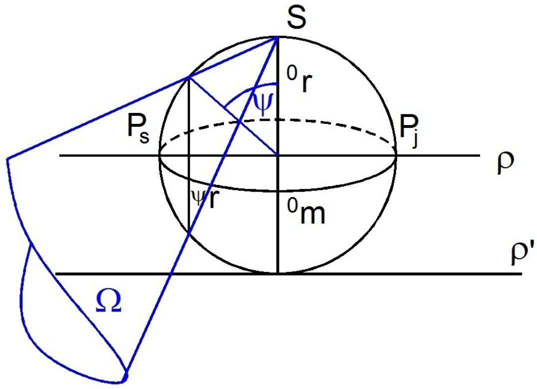
Průměty poledníků sestrojíme stejně jako v pólové gnómonické projekci, promítají se jako polopřímky a velikost úhlů, které poledníky svírají, se zachovává.



Obr. 1.1.10

Rovníková stereografická projekce

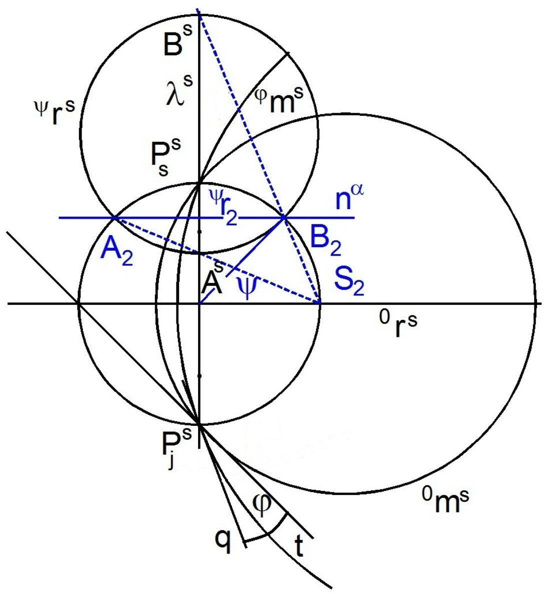
Rovina ρ' rovnoběžná s rovinou ρ se dotýká kulové plochy v bodě na rovníku, střed promítání leží rovněž na rovníku. Rovník, resp. dva poledníky ležící v rovině obsahující střed S promítání, se zobrazí jako přímka, resp. polopřímky, ostatní rovnoběžky, resp. poledníky, se podle věty 1.1.2 zobrazí jako kružnice, resp. oblouky kružnic.



Obr. 1.1.11

(a) Konstrukce průmětů rovnoběžek

Rovnoběžky pravoúhle promítneme do roviny λ poledníku procházejícího středem promítání. Rovinu λ sklopíme, sklopené útvary označíme indexem 2. Rovnoběžky se do roviny λ zobrazí jako rovnoběžné úsečky. Sestrojíme středový průmět ${}^{\psi}r^s$ rovnoběžky ${}^{\psi}r$.



Obr. 1.1.12

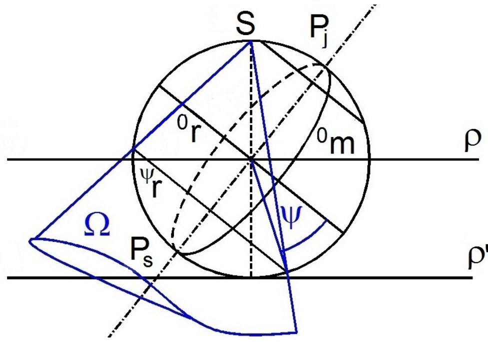
Středové průměty bodů A, B rovnoběžky ${}^{\psi}r$, které leží v rovině λ, leží na λ^s, $A^s = A_2S_2 \cap \lambda^s$. Úsečka A^sB^s je průměr kružnice ${}^{\psi}r^s$. Často se jeden z bodů A^s, B^s nevejde na nákresnu a je třeba najít další body kružnice ${}^{\psi}r^s$, nejlépe body ležící v průmětně ρ, tj. body na obrysové kružnici Uvažujme rovinu α rovnoběžky ${}^{\psi}r$, α protne rovinu ρ v přímce n^α. Zřejmě n^α je kolmá k λ^s a prochází průsečíkem ${}^{\psi}r_2 \cap \lambda^s$ (tj. v případě rovníkové projekce ${}^{\psi}r_2 \subset n^\alpha$).

(b) Konstrukce průmětů poledníků

Podle věty 1.1.1 se velikost úhlů, které poledníky svírají, zachovává. Poledníky procházejí póly, proto středy průmětů poledníků leží na přímce ${}^{0}r^s$, která je osou úsečky $P_s^sP_j^s$. Zvolíme libovolný bod přímky ${}^0r^s$ za střed průmětu nultého poledníku a sestrojíme poledník ${}^0m^s$ jako oblouk kružnice se zvoleným středem a procházející průměty pólů. V některém z průmětů pólů, například v bodě P_j^s sestrojíme tečnu t kružnice, na níž leží ${}^0m^s$. Sestrojíme přímku q, která prochází bodem P_j^s a s přímkou t svírá úhel φ. Přímka q je tečnou oblouku kružnice ${}^{\varphi}m^s$, který je průmětem poledníku zeměpisné délky φ. Průmět poledníku ${}^{\varphi}m$ prochází póly, v jednom z pólů je sestrojená tečna, konstrukce oblouku kružnice ${}^{\varphi}m^s$ je zřejmá.

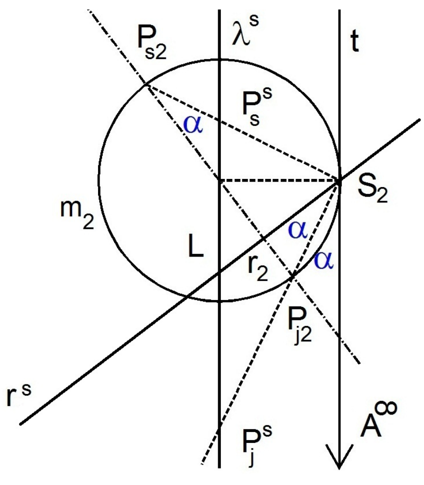
Obecná stereografická projekce

Rovina ρ' se dotýká kulové plochy v obecném bodě. Průmětem rovnoběžky procházející středem promítání, resp. poledníků ležících v rovině obsahující střed promítání, je přímka, resp. polopřímky, ostatní poledníky a rovnoběžky se podle věty 1.1.2 zobrazí jako kružnice.



Obr. 1.1.13

Uvažujme rovinu λ danou póly a středem promítání a označme m poledník ležící v rovině λ. Do roviny λ pravoúhle promítneme rovnoběžky a rovinu sklopíme. Sklopené útvary označíme indexem 2. V rovině λ leží promítací přímky SP_s, SP_j pólů, průměty P_s^s, P_j^s pólů jsou po řadě průsečíky přímek SP_s, SP_j s průmětnou ρ, tj. leží na λ^s.



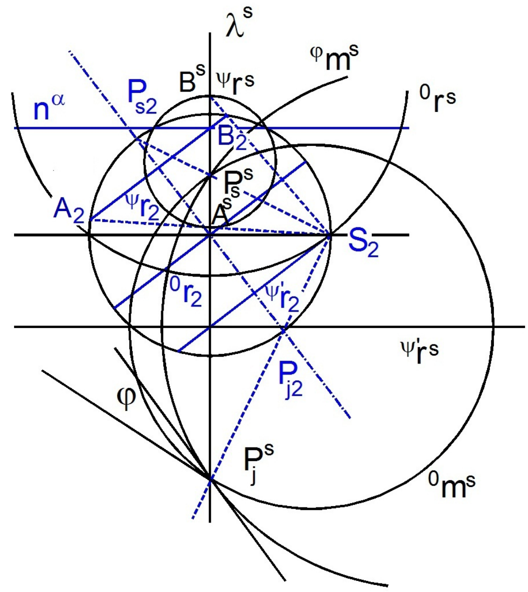
Obr. 1.1.14

Označme L průsečík průmětu rovnoběžky r procházející bodem S s λ^s. Sestrojme v bodě S_2 tečnu t kružnice m_2. Označme α úhel $S_2P_{s_2}P_{j_2}$. Z pravoúhlého trojúhelníku $P_{s_2}P_{j_2}S_2$

je vidět, že úhel α je rovněž úhel $P_{j_2}S_2L$. Z vlastností obvodových a úsekových úhlů odvodíme, že α je také úhel $P_{j_2}S_2A^{\infty}$, kde A^{∞} je nevlastní bod přímky t. Znamená to, že přímky $S_2P_{s_2}, S_2P_{j_2}$ jsou osami úhlů přímek S_2L, S_2A^{∞}. Přímky S_2L, S_2A^{∞} a $S_2P_{s_2}, S_2P_{j_2}$ se harmonicky oddělují. Protneme-li tuto čtveřici přímkou $P_s^sP_j^s$ vytvoří průsečíky harmonickou čtveřici, což znamená, že bod L je středem úsečky $P_s^sP_j^s$. Středový průmět rovnoběžky r procházející bodem S je přímka r^s kolmá k přímce $P_s^sP_j^s$ a procházející středem úsečky $P_s^sP_j^s$. Na této přímce také leží středy všech průmětů poledníků.

(a) Konstrukce průmětů rovnoběžek

Zvolíme kružnici kulové plochy, která leží v průmětně a zobrazí se v daném měřítku. Rovina λ určená póly a středem promítání je kolmá k rovině ρ. Promítneme do ní rovnoběžku, rovinu λ sklopíme. Sklopený střed promítání leží na obrysové kružnici.



Obr. 1.1.15

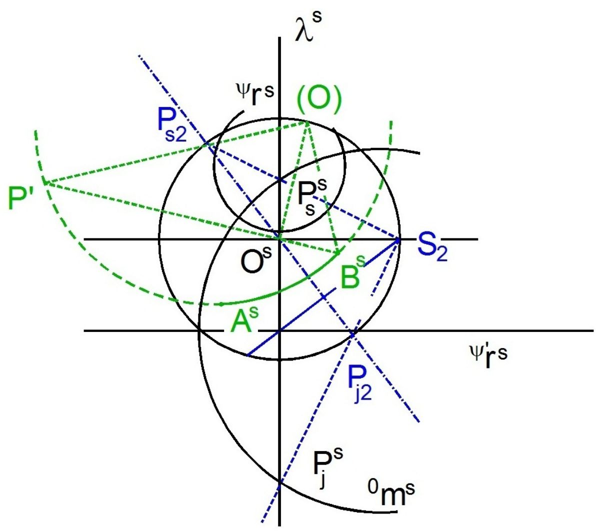
Podle předchozího určíme průměty pólů a rovnoběžky procházející bodem S. Středové průměty ostatních rovnoběžek jsou kružnice. Sestrojíme středový průmět rovnoběžky ${}^{\psi}r$. Středové průměty bodů A, B rovnoběžky ${}^{\psi}r$, které leží v rovině λ, leží na λ^s, $A^s = A_2S_2 \cap \lambda^s$. Úsečka A^sB^s je průměr kružnice ${}^{\psi}r^s$. Často je jeden z bodů A^s, B^s nedostupný a abychom našli střed této kružnice, sestrojujeme ještě body na obryse. Označme α rovinu rovnoběžky ${}^{\psi}r$. Rovina α protíná rovinu obrysu (tj. průmětnu ρ) v přímce n^{α}. Přímka n^{α} je kolmá k λ^s a prochází společným bodem rovin λ, α, ρ, tj. průsečíkem λ^s s ${}^{\psi}r_2$. Společné body n^{α} a obrysové kružnice patří kružnici ${}^{\psi}r^s$.

(b) Konstrukce průmětů poledníků

Osa úsečky $P_s^sP_j^s$ je středový průmět rovnoběžky procházející středem promítání, na této přímce leží středy všech průmětů poledníků. Zvolíme libovolný poledník za nultý. Stereografická projekce je úhlojevné zobrazení, takže poledník zeměpisné šířky φ sestrojíme pomocí tečny v jednom z pólů jako ve stereografické rovníkové projekci.

Poznámka 1.1.2 Ve stereografické rovníkové i obecné projekci tvoří středové průměty rovnoběžek a poledníků dva sdružené svazky kružnic.

Poznámka 1.1.3 Konstrukce ortodromy ve stereografických projekcích:
Ortodroma je částí hlavní kružnice kulové plochy. Lze proto jeden z bodů, např. B, kterým prochází, považovat za pól. Tímto bodem prochází svazek hlavních kružnic. Póly proložíme rovinu, tu sklopíme, získáme druhý pól P' (spojnice středu kulové plochy s póly jsou na sebe kolmé). Průmět ortodromy je částí kružnice určené body A^s, B^s, P'.



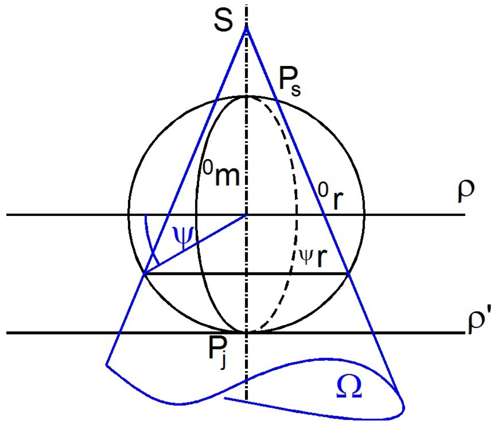
Obr. 1.1.16

1.1.3 Scénografické projekce

Střed promítání leží vně kulové plochy a je vlastní. Kulové ploše lze proto ze středu S promítání opsat dotykovou kuželovou plochu Ω, která se dotýká kulové plochy podél kružnice. Řez rotační kuželové plochy Ω rovinou ρ je průmětem této kružnice do roviny ρ a průmětem celé kulové plochy je ve všech scénografických projekcích kruh, nikoli celá průmětna jako v předchozích projekcích. Abychom dosáhli jednoznačnosti, tak většinou zobrazujeme jen kulový vrchlík, tj. tu část kulové plochy, která je viditelná ze středu promítání.

Pólová scénografická projekce

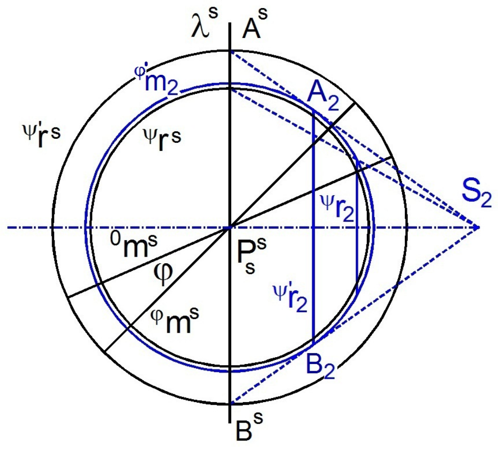
Střed promítání leží na zemské ose, rovnoběžky ze středu S promítáme rotačními kuželovými plochami s vrcholem S. Průměty rovnoběžek jsou řezy těchto ploch rovinou kolmou k ose rotace, proto jsou průměty rovnoběžek soustředné kružnice. Rotační kuželová plocha Ω opsaná kulové ploše ze středu S se dotýká kulové plochy podél rovnoběžky ${}^{\psi'}r$, průmět ${}^{\psi'}r^s$ ohraničuje průmět kulové plochy. Střed promítání leží v rovině každého poledníku, průměty poledníků jsou úsečky (na rozdíl od předchozích projekcí, kde se poledníky, jejichž rovina obsahovala střed promítání, zobrazovaly jako polopřímky). Roviny poledníků jsou kolmé k průmětně, proto se velikost úhlů, které spolu roviny poledníků svírají, zachovává.



Obr. 1.1.17

(a) Konstrukce průmětů rovnoběžek

Zvolíme rovinu λ procházející póly, do ní pravoúhle promítneme rovnoběžku a rovinu λ sklopíme. Sklopené útvary označíme indexem 2. V rovině λ máme zadán poledník ${}^{\varphi'}m$ v daném měřítku a střed promítání. Obrysovou rovnoběžku ${}^{\psi'}r$ určíme ve sklopení, krajní body A_2, B_2 pravoúhlého průmětu ${}^{\psi'}r_2$ jsou body dotyku tečen kružnice ${}^{\varphi'}m_2$ vedených z S_2.



Obr. 1.1.18

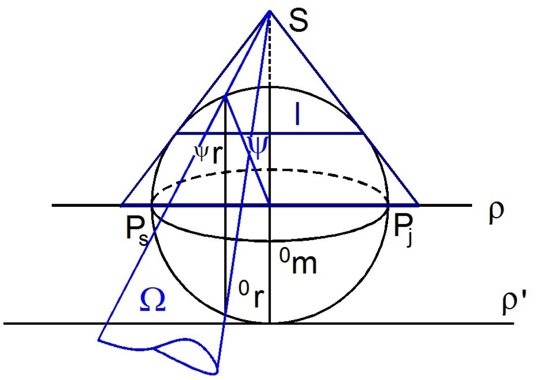
Body A, B leží v rovině λ, a proto můžeme přímo sestrojit jejich středové průměty A^s, B^s ležící na λ^s. Středový průmět ${}^{\psi'}r^s$ je kružnice sestrojená nad průměrem A^sB^s. Stejně určíme průmět kterékoli další rovnoběžky zeměpisné šířky ψ. Zvolíme rovnoběžku ${}^{\psi}r$ tak, aby byla viditelná ze středu S promítání. Její průmět sestrojíme stejně jako v případě rovnoběžky ${}^{\psi'}r$, tj. sestrojíme průměty jejích bodů ležících v rovině λ.

(b) Konstrukce průmětů poledníků

Libovolný poloměr kružnice ${}^{\psi'}r^s$ zvolíme za průmět nultého poledníku, velikost úhlů poledníků se v této projekci zachovává.

Rovníková scénografická projekce

Střed promítání leží v rovině rovníku, průmětem rovníku je úsečka, průměty ostatních rovnoběžek jsou části elips. Zemská osa leží v průmětně. Dva poledníky, v jejichž rovině leží střed promítání, se zobrazí jako úsečky. Průměty ostatních poledníků jsou elipsy. Dotyková kuželová plocha Ω opsaná kulové ploše ze středu promítání se této kulové plochy dotýká podél obrysové kružnice l.



Obr. 1.1.19

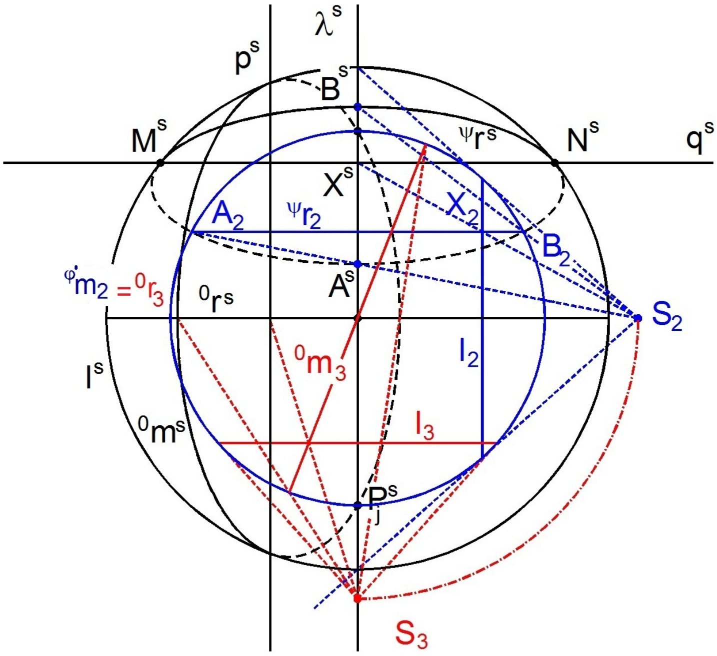
(a) Konstrukce průmětů rovnoběžek

Rovina λ obsahující střed promítání a zemskou osu protne kulovou plochu ve dvou polednících, z nichž jeden označíme ${}^{\varphi'}m$. Do roviny λ pravoúhle promítneme rovnoběžky a rovinu sklopíme. Sklopené útvary označíme indexem 2. Ve sklopení máme zadán poledník ${}^{\varphi'}m$ v daném měřítku a střed promítání. Sestrojíme středový průmět l^s kružnice l, který ohraničí středový průmět kulové plochy. Z bodu S_2 vedeme tečny k ${}^{\varphi'}m_2$, body dotyku promítneme na λ^s, průměty určí průměr kružnice l^s. Rovina rovníku obsahuje střed promítání, zřejmě se rovník zobrazí jako průměr kružnice l^s kolmý k λ^s. Zvolíme libovolnou rovnoběžku ${}^{\psi}r$. Rovina λ je rovinou souměrnosti rovnoběžky ${}^{\psi}r$ a prochází středem promítání, proto se body A, B rovnoběžky ${}^{\psi}r$ ležící v rovině λ zobrazí jako (vedlejší) vrcholy elipsy ${}^{\psi}r^s$. Pro konstrukci elipsy ${}^{\psi}r^s$ potřebujeme znát ještě další bod. Určíme průsečíkyM, N kružnice ${}^{\psi}r$ s obrysovou kružnicí l. V těchto bodech se mění viditelnost rovnoběžky ${}^{\psi}r$. Označme β rovinu kružnice l a α rovinu rovnoběžky ${}^{\psi}r$. Na průsečnici $q = \alpha \cap \beta$ leží body rovnoběžky ${}^{\psi}r$, v nichž se mění viditelnost. Rovina α je kolmá k rovině λ, proto i q je kolmá k λ, a protože $S \in \lambda$, je $q^s \perp \lambda^s$. Průsečík X přímky q s rovinou λ určíme přímo ve sklopení, zřejmě

$X_2 = l_2 \cap {}^{\psi}r_2$ a můžeme sestrojit q^s a určit M^s, N^s. Elipsa ${}^{\psi}r^s$ a kružnice l^s mají v bodech M^s, N^s společné tečny, elipsa je tak dostatečně určena. Je rovněž možné ji sestrojit proužkovou konstrukcí nebo využitím pravoúhlé afinity.

(b) Konstrukce průmětů poledníků

Postupujeme podobně jako při konstrukci rovnoběžek. Poledníky pravoúhle promítneme do roviny σ rovníku a sklopíme. Sklopené útvary značíme indexem 3. Poledníky se do roviny σ promítají jako poloměry kružnice ${}^0r_3$. Libovolný poledník zvolíme za nultý a sestrojíme středový průmět obou poledníků, které leží v téže rovině (v případě nultého poledníku je to i poledník ${}^{180°}m$). Středové průměty bodů poledníků ${}^0m, {}^{180°}m$ ležících v rovině σ jsou vedlejšími vrcholy elipsy, jejíž polovina je ${}^0m^s$. Elipsa, která je průmětem obou poledníků, prochází ještě body P_s^s, P_j^s, je tedy dostatečně určena. Je však třeba ještě určit body, ve kterých se mění viditelnost jednoho z poledníků. Sestrojíme průsečnici p roviny σ rovníku a roviny β obrysové kružnice l, konstrukce průsečnice je podobná jako u rovnoběžek. Body, ve kterých se mění viditelnost, jsou průsečíky kružnice l a přímky p, viditelná je část ${}^0m^s$ neobsahující póly.



Obr. 1.1.20

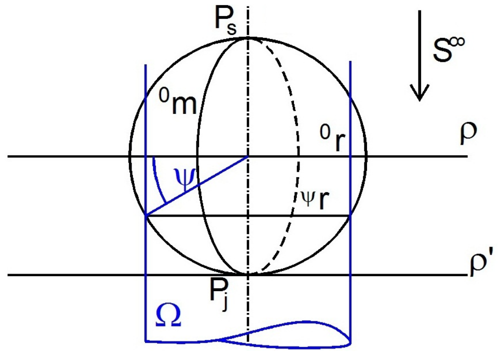
Poznámka 1.1.4 Zvolíme-li vzdálenost SO středu promítání od středu kulové plochy rovnu trojnásobku poloměru kulové plochy, pak se mapa blíží mapě ekvidistantní.

1.1.4 Ortografické projekce

Střed promítání je nevlastní, a protože spojnice středu kulové plochy a středu promítání je kolmá k průmětně, sestrojujeme pravoúhlý průmět kulové plochy. Průmětem celé kulové plochy je kruh, dotyková plocha Ω opsaná kulové ploše ze středu promítání je rotační válcová plocha, která se kulové plochy dotýká podél hlavní kružnice. Pro jednoznačnost většinou zobrazujeme jen jednu polokouli.

Pólová ortografická projekce

V průmětně ρ leží rovník ^0r, podél kterého se současně dotýká kulové plochy dotyková rotační válcová plocha opsaná kulové ploše ze středu promítání, rovník tvoří obrys kulové plochy. Zemská osa patří směru promítání.

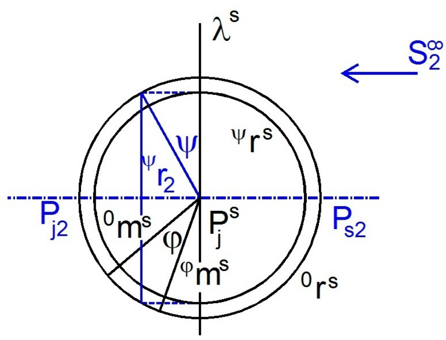


Obr. 1.1.21

Rovnoběžky se promítají rotačními válcovými plochami Ω, jejich průměty jsou soustředné kružnice. Střed promítání leží v rovině každého poledníku, průměty poledníků jsou úsečky. Velikost úhlů, které spolu svírají roviny poledníků se zachovává, protože roviny poledníků jsou kolmé k průmětně.

(a) Konstrukce průmětů rovnoběžek

V daném měřítku je zadán rovník, který leží v průmětně. Zvolíme rovinu λ procházející póly, do ní pravoúhle promítneme rovnoběžky a rovinu λ sklopíme. Sklopené útvary označíme indexy 2. Ve sklopení zvolíme rovnoběžku $^\psi r_2$, její body ležící v rovině λ promítneme ze sklopeného středu promítání. Středové průměty bodů roviny λ leží na λ^s, pro středový průmět $^\psi r^s$ rovnoběžky $^\psi r$ jsme sestrojili průměr.



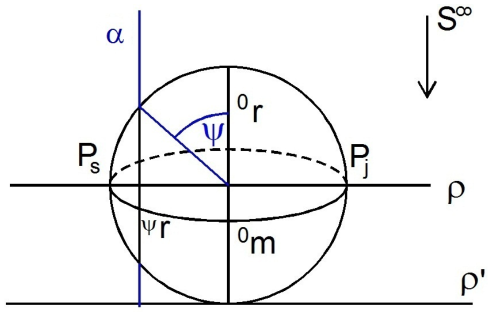
Obr. 1.1.22

(b) Konstrukce průmětů poledníků

Poledníky se zobrazí jako úsečky, tvoří poloměry obrysové kružnice. Libovolný poloměr zvolíme za průmět nultého poledníku, velikost úhlů, které poledníky svírají se zachovává, konstrukce poledníku zeměpisné délky φ je zřejmá.

Rovníková ortografická projekce

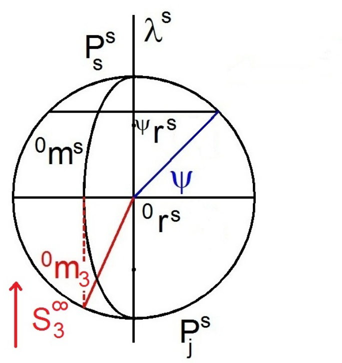
V průmětně leží zemská osa a dva poledníky, které tvoří obrysovou kružnici, podél které se dotýká opsaná rotační válcová plocha ze středu promítání. Roviny α rovnoběžek obsahují střed promítání, proto se rovnoběžky zobrazí jako rovnoběžné úsečky, které jsou tětivami obrysové kružnice. Poledníky ležící v rovině kolmé k průmětně se zobrazí jako úsečky, ostatní poledníky se zobrazí jako části elips.



Obr. 1.1.23

(a) Konstrukce průmětů rovnoběžek

V průmětně je v daném měřítku daná obrysová kružnice - dva poledníky ležící v průmětně a zemská osa. Rovník se zobrazí jako průměr obrysové kružnice kolmý k zemské ose. Ostatní rovnoběžky se zobrazí jako tětivy obrysové kružnice rovnoběžné s rovníkem, zobrazení rovnoběžky dané zeměpisné šířky je zřejmá (viz obr. 1.1.24).



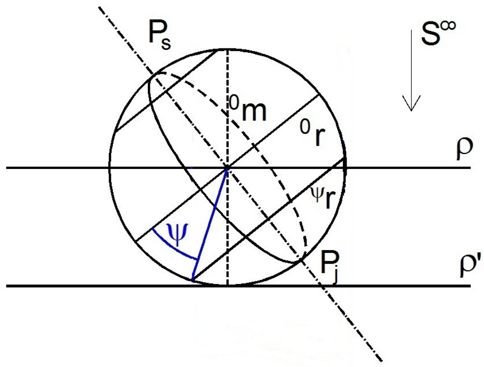
Obr. 1.1.24

(b) Konstrukce průmětů poledníků

Poledníky pravoúhle promítneme do roviny rovníku σ rovníku, kterou sklopíme. Sklopené útvary označíme indexem 3. Body poledníků ležící v rovině σ se zobrazí jako vedlejší vrcholy průmětů těchto poledníků, hlavní vrcholy jsou průměty pólů. Průmětem poledníku je polovina elipsy nad hlavními vrcholy $P_s^s P_j^s$.

Obecná ortografická projekce

Obecná ortografická projekce je pravoúhlý průmět kulové plochy do roviny ρ, která není kolmá ani k zemské ose ani k rovině rovníku. V rovině ρ leží obrysová kružnice k, která není ani rovnoběžkou ani neobsahuje poledník. Obecnou ortografickou projekci můžeme tedy považovat za zobrazení kulové plochy v pravoúhlé axonometrii.



Obr. 1.1.25

Průmět kulové plochy lze sestrojit, aniž bychom měli zadanou axonometrii. Rovnoběžky i poledníky se zobrazí jako elipsy. Dá se ukázat, že pro zobrazování rovnoběžek v obecné ortografické projekci platí následující věty. Kulová plocha je zadána obrysovou kružnicí a průmětem jednoho pólu.

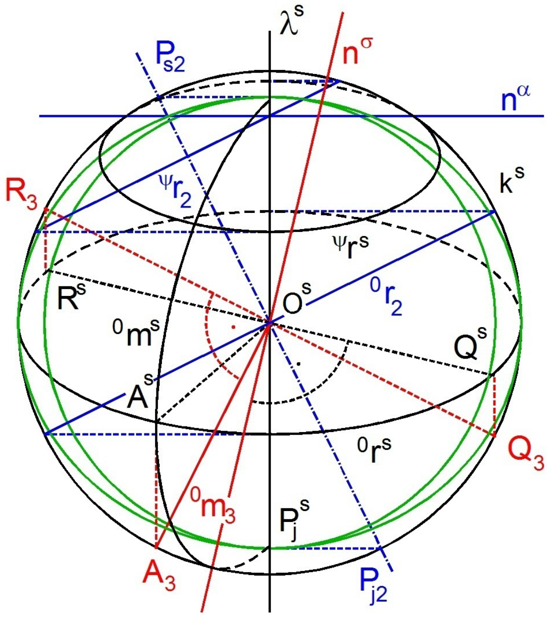
Věta 1.1.4 *Elipsa, která má hlavní osu společnou s průmětem rovníku a jejíž vedlejší osa je úsečka $O^s P_j^s$, je (až na póly) množina hlavních vrcholů průmětů rovnoběžek.*

Věta 1.1.5 *Množina ohnisek průmětů rovnoběžek je tzv.* fokální kružnice *se středem O^s a poloměrem $O^s P_j^s$.*

S využitím uvedených dvou vět již můžeme sestrojit průmět kulové plochy v obecné ortografické projekci.

(a) Konstrukce průmětů rovnoběžek

Rovinu λ obsahující střed promítání a póly sklopíme do průmětny, sklopené útvary označíme indexem 2. V rovině λ je v daném měřítku zadaná kružnice, která po sklopení splyne s obrysovou kružnicí, a zemská osa. Rovnoběžky se do roviny λ pravoúhle promítnou jako úsečky. V rovině λ je průmět ${}^0r_2$ rovníku průměrem obrysové kružnice, který je kolmý k zemské ose. Středovým průmětem ${}^0r^s$ rovníku je elipsa, její vedlejší vrcholy leží na λ^s a jsou to středové průměty bodů rovníku, které leží v rovině λ. Hlavní poloosa elipsy ${}^0r^s$ je rovna poloměru kulové plochy. Body, v nichž se mění viditelnost rovníku, leží na obrysové kružnici, v případě průmětu rovníku jsou to hlavní vrcholy elipsy ${}^0r^s$. Středový průmět rovnoběžky ${}^\psi r$ sestrojíme s využitím vět 1.1.4, 1.1.5. Vedlejší osa elipsy ${}^\psi r^s$ je určena středovými průměty bodů rovnoběžky ležícími v rovině λ. Na fokální kružnici určíme ohniska a sestrojíme hlavní vrcholy. Sestrojíme ještě body na obryse. Rovina α rovnoběžky protíná průmětnu ρ v přímce n^α. Zřejmě $n^\alpha \perp \lambda^s$ a n^α prochází bodem ${}^\psi r_2 \cap \lambda^s$. Přímka n^α protne obrys v bodech, ve kterých se na elipse ${}^\psi r^s$ mění viditelnost.



Obr. 1.1.26

(b) Konstrukce průmětů poledníků

Poledníky pravoúhle promítneme do roviny rovníku a tu otočíme, otočené útvary označíme indexem 3. Rovník se otočí do obrysové kružnice k^s. Do roviny rovníku se poledníky zobrazí jako poloměry rovníku. Libovolný poloměr A_3O^s kružnice k^s zvolíme za sklopený průmět ${}^0m_3$ nultého poledníku. Úsečka AO je poloměr poledníku ${}^0m$, který leží v rovině rovníku a je tedy kolmý k zemské ose. Protože A je průsečíkem ${}^0m$ a${}^0r$, nalezneme A^s na ${}^0r^s$, a to promítnutím A_3 ve sklopení. Průmětem ${}^0m^s$ nultého poledníku je část elipsy, jejíž sdružené průměry leží na přímkách $A^sO^s, P_s^sP_j^s$, přičemž $P_s^sP_j^s$ je přímo průměr a úsečka A^sO^s polovina průměru. Určíme ještě body na obryse. Hledáme průsečnici n^σ roviny σ poledníku s průmětnou ρ. V rovině rovníku najdeme průměr RQ, který je kolmý k rovině σ poledníku. Z věty o pravoúhlém průmětu pravého úhlu je pak zřejmé, že průsečnice n^σ rovin ρ a σ se zobrazí jako kolmice k přímce R^sQ^s. Přímku RQ určíme v otočení. Známe poloměr AB rovníku, který leží současně v rovině σ poledníku a k němu sestrojíme kolmý průměr RQ rovníku. V otočení tedy R_3Q_3 sestrojíme kolmici na A_3B_3 jdoucí O_3. Body

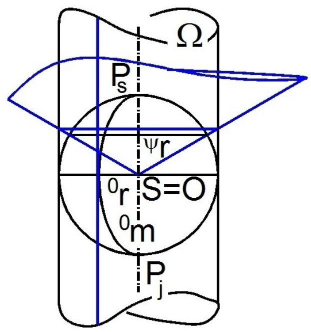
R_3, Q_3 promítneme na ${}^0r^s$ a získáme průměty R^s, Q^s. Střed kulové plochy leží v průmětně, rovina poledníku prochází bodem O, proto $O^s \in n^\sigma$. Průsečíky n^σ a obrysové kružnice k^s jsou body, v nichž se mění viditelnost zobrazovaných poledníků a jsou to hlavní vrcholy průmětů poledníků.

1.2 Válcové kartografické projekce

Ve válcových projekcích je nejprve z daného středu promítání promítnuta kulová plocha na rotační válcovou plochu Ω opsanou kulové ploše. Mapu získáme rozvinutím válcové plochy Ω do roviny ρ.

1.2.1 Normální válcová projekce

Kulové ploše opíšeme podél rovníku rotační válcovou plochu Ω. Střed S promítání ztotožníme se středem O kulové plochy. Rotační plocha válcová má poloměr r stejně jako plocha kulová, délka rovníku, podél kterého je opsaná, je $2\pi r$. Ze středu S promítneme kulovou plochu na rotační válcovou plochu. Rotační válcovou plochu rozvineme do roviny. Kulová plocha se tak zobrazí do rovinného pásu, jehož šířka je $2\pi r$, kde r je poloměr kulové plochy. Rovnoběžky se zobrazí jako rovnoběžné shodné úsečky, poledníky se zobrazí jako navzájem rovnoběžné přímky kolmé k průmětům rovnoběžek.



Obr. 1.2.1

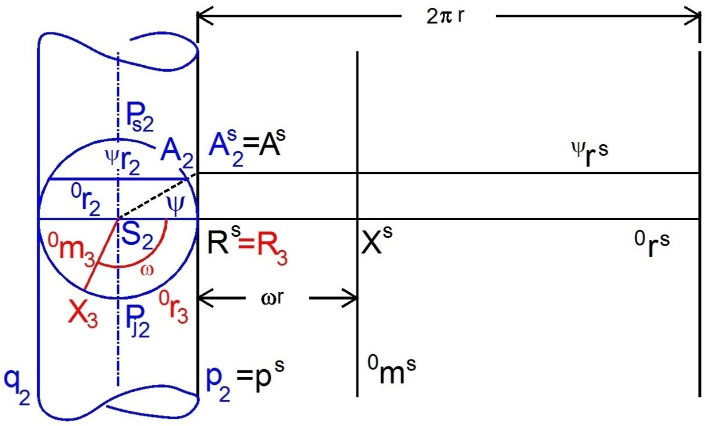
(a) Konstrukce průmětů rovnoběžek

Kulová plocha je zadána tak, aby zemská osa ležela v průmětně. V průmětně tak leží i dva poledníky (jsou zadány v daném měřítku) a povrchové přímky p, q opsané rotační válcové plochy Ω. Pravoúhlé průměty do průmětny označíme dolními indexy 2. Rovnoběžky se do průmětny zobrazí jako rovnoběžné úsečky.
Zvolme rovnoběžku zeměpisné šířky ψ. Rovnoběžku promítneme ze středu S na rotační válcovou plochu Ω. Bod A rovnoběžky, který leží v průmětně, se promítne do bodu A^s, který leží na povrchové přímce p plochy Ω. Všechny rovnoběžky se promítnou do kružnic

rotační válcové plochy Ω, tj. jejich průměty budou mít stejnou délku. Rotační válcovou plochu Ω rozvineme např. od přímky p do průmětny. Rovník se po rozvinutí zobrazí jako úsečka s počátečním bodem R^s, ležící na přímce kolmé k přímce p, jejíž délka je $2\pi r$. Průmět rovnoběžky ${}^{\psi}r$ prochází bodem A^s a je rovnoběžný s průmětem rovníku.

(b) Konstrukce průmětů poledníků

Poledníky pravoúhle promítneme do roviny σ rovníku a tu sklopíme. Sklopené průměty útvarů označíme dolním indexem 3. Sklopené poledníky jsou jako poloměry kružnice ${}^0r_3$. Libovolný poledník vybereme za nultý a určíme jeho bod X ležící v rovině σ. Oblouk R_3X_3 sklopeného rovníku se rozvine na průmět rovníku do úsečky R^sX^s, která má stejnou délku jako R_3X_3. Poledníky se zobrazí jako přímky kolmé k průmětu rovníku, proto je ${}^0m^s$ přímka kolmá k ${}^0r^s$ a procházející X^s.

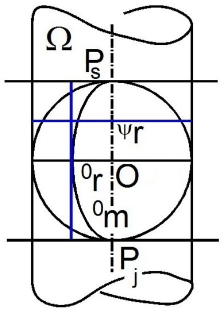


Obr. 1.2.2

Poznámka 1.2.1 Rotační válcovou plochu opisujeme podél rovníku. Kdybychom ji opsali podél libovolné hlavní kružnice, pak by průmětem rovnoběžky byla obecně křivka čtvrtého stupně, vzniklá jako průnik opsané rotační válcové plochy a rotační kuželové plochy, kterou se rovnoběžka promítá.

1.2.2 Nepravá Lambertova válcová projekce

Nepravá Lambertova projekce je zobrazení kulové plochy, které není promítáním kulové plochy na rotační válcovou plochu. Bodům kulové plochy jsou předepsaným zobrazením přiřazeny body rotační válcové plochy Ω opsané kulové ploše podél rovníku. Rovnoběžce zeměpisné šířky ψ ležící v rovině α přiřadíme kružnici rotační válcové plochy Ω ležící ve stejné rovině. Délka obrazů všech rovnoběžek je opět $2\pi r$. Poledníky se sestrojí jako množina průsečíků rovin, které poledníky obsahují, s rovnoběžkami a zobrazí se tedy na části povrchových přímek plochy Ω jako úsečky délek $2r$. Celá kulová plocha se promítne na část rotační válcové plochy jí opsané, která je ohraničená tečnými rovinami kulové plochy sestrojenými v pólech. Tato část rotační válcové plochy se rozvine do průmětny do obdélníku, jehož strany mají délky $2r$ a $2\pi r$.



Obr. 1.2.3

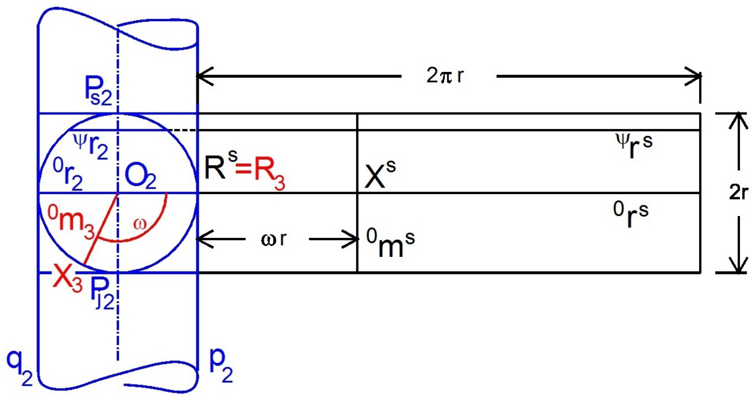
Obsah tohoto obdélníku je $4\pi r^2$, což je rovněž povrch dané kulové plochy. Tato mapa je ekvivalentní (plochojevná).

(a) Konstrukce obrazů rovnoběžek

Konstrukce obrazů rovnoběžek i poledníků je podobná jako v případě normální válcové projekce. Zvolíme zemskou osu v průmětně a v daném měřítku dvojici poledníků ležících v průmětně. Opsaná rotační válcová plocha Ω obsahuje povrchové přímky p, q ležící v průmětně, do které rozvineme plochu Ω např. od přímky p. Obraz rovníku sestrojíme tak, že jej rozvineme do úsečky délky $2\pi r$ kolmé k p. Obraz rovnoběžky zeměpisné šířky ψ leží ve stejné rovině jako rovnoběžka ${}^{\psi}r$, konstrukce ${}^{\psi}r^s$ je zřejmá.

(b) Konstrukce průmětů poledníků

Postupujeme stejně jako v normální válcové projekci, průmětem poledníku je tentokrát pouze úsečka, nikoli celá přímka.



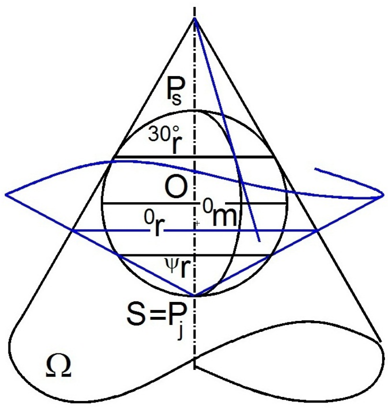
Obr. 1.2.4

1.3 Kuželová kartografická projekce

V kuželových projekcích je kulová plocha nejprve promítnuta z daného středu promítání na rotační kuželovou plochu Ω opsanou kulové ploše. Mapu získáme rozvinutím kuželové plochy Ω do roviny ρ.

1.3.1 Braunova kuželová projekce

Podél rovnoběžky zeměpisné šířky třicet (severní nebo jižní) opíšeme rotační kuželovou plochu Ω a střed promítání ztotožníme s pólem opačné zeměpisné šířky než je zvolená třicátá rovnoběžka. Ze středu promítání promítneme kulovou plochu na rotační kuželovou plochu Ω a tu potom rozvineme. Rovnoběžky se tak zobrazí do oblouků soustředných kružnic a poledníky do polopřímek.



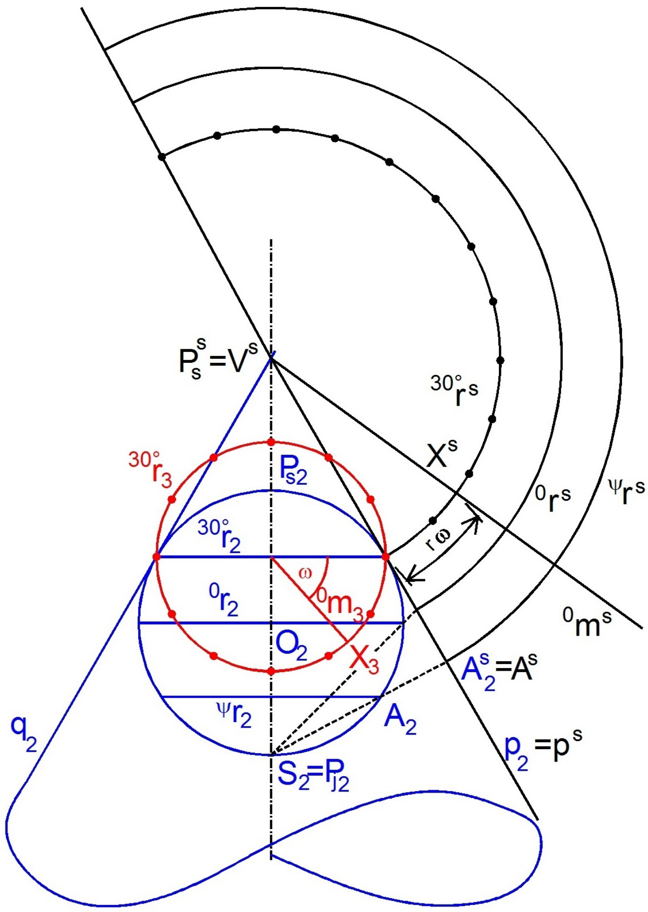
Obr. 1.3.1

(a) Konstrukce průmětů rovnoběžek

V průmětně je dána zemská osa a v daném měřítku dvojice poledníků ležících v průmětně. Kulová plocha je pravoúhle promítnuta do průmětny, pravoúhlé průměty do průmětny označíme dolními indexy 2. Podél rovnoběžky ${}^{30^\circ}r$ severní šířky opíšeme rotační kuželovou plochu Ω, jejíž vrchol V leží v průmětně. Střed promítání splyne s jižním pólem. Do průmětny nejprve rozvineme kuželovou plochu Ω (např. od povrchové přímky p ležící v průmětně). Sestrojíme rozvinutí dotykové třicáté rovnoběžky, rovinu rovnoběžky sklopíme, rovnoběžku rozdělíme na dostatečný počet dílků a ty přeneseme na oblouk kružnice se středem V^s a procházející bodem, ve kterém se přímka p a rovnoběžka ${}^{30^\circ}r$ dotýkají. Rovnoběžku libovolné zeměpisné šířky nejprve promítneme ze středu S na rotační kuželovou plochu a potom sestrojíme (obdobným způsobem jako u ${}^{30^\circ}r$) rozvinutý kruhový oblouk.

(b) Konstrukce průmětů poledníků

Průměty poledníků sestrojujeme podobně jako ve válcových projekcích. Poledníky pravoúhle promítneme do roviny rovnoběžky ${}^{30^\circ}r$ severní šířky (na rozdíl od válcových projekcí, kde promítáme do roviny rovníku) a přenášené oblouky měříme na ní ve sklopení. Sklopené útvary značíme dolním indexem 3.



Obr. 1.3.2

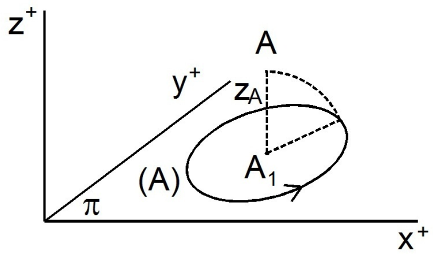
Kapitola 2

Cyklografie

Dosud studované zobrazovací metody zobrazovaly prostorové útvary do roviny užitím pravoúhlého, kosoúhlého nebo středového promítání. Bodům v prostoru byla vždy jednoznačně přiřazena nějaká dvojice (dva body, bod a číslo) v průmětně a naopak, z dané dvojice bylo možné jednoznačně určit příslušný bod v prostoru. Například v kótovaném promítání je bodu v prostoru přiřazen jeho pravoúhlý průmět do roviny a jeho kóta, v Mongeově projekci je obrazem bodu v prostoru dvojice jeho pravoúhlých průmětů do půdorysny a do nárysny apod. Tyto metody se nazývají lineární zobrazovací metody. V této kapitole ukážeme základy nelineární zobrazovací metody, která byla poprvé popsána již v 19. století.

2.1 Cyklický průmět bodu, přímky a roviny

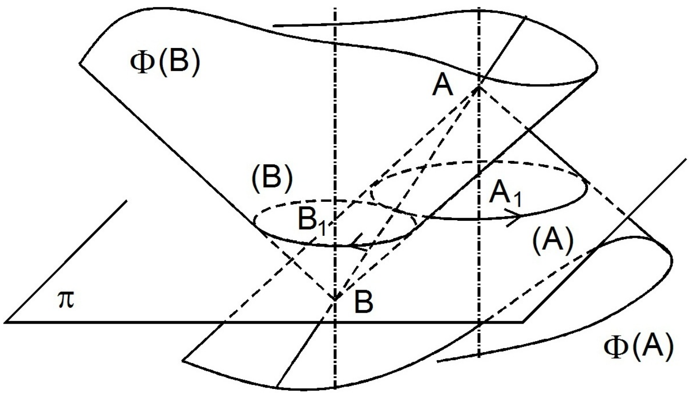
Uvažujme eukleidovský prostor E_3. V E_3 nechť je dána rovina π, do ní budeme zobrazovat body v prostoru. Každému bodu v prostoru přiřadíme jeho pravoúhlý průmět A_1 do roviny π a kružnici k se středem A_1 a poloměrem $|AA_1|$. Naopak, je-li dána kružnice k v průmětně, jejímu středu odpovídají dva body v opačných poloprostorech určených průmětnou, jejichž vzdálenost od průmětny je rovna poloměru kružnice. Tuto nejednoznačnost odstraníme tím, že kružnici orientujeme.



Obr. 2.1.1

Máme-li v prostoru dánu pravotočivou kartézskou soustavu souřadnic, pak zvolíme za průmětnu π rovinu xy a pro body s kladnou z-ovou souřadnicí orientujeme kružnici proti směru hodinových ručiček (smysl otáčení je kladný) a pro zápornou z-ovou souřadnici kružnici orientujeme po směru hodinových ručiček (smysl otáčení je záporný). Orientovanou kružnici se středem A_1 a poloměrem $|AA_1|$ pak značíme (A). Považujeme-li body P roviny π za kružnice s nulovým poloměrem, tj. $(P) = P_1$, pak lze jednoznačně ke každé orientované kružnici v rovině π přiřadit bod v prostoru E_3. Máme tak dáno jednoznačné zobrazení bodů prostoru E_3 na množinu orientovaných kružnic ležících v rovině π. Orientovaná kružnice se nazývá *cykl*. Každá kružnice roviny π je nositelkou dvou cyklů. Dvojici $A_1, (A)$ nazveme *cyklický průmět bodu* A a zobrazení, které bodům prostoru E_3 přiřazuje jejich cyklické průměty se nazývá *cyklické promítání*. Studiem cyklického promítání se zabývá *cyklografie*. Nyní uvažujme vlastní bod A v rozšířeném Eukleidovském prostoru $\bar{E}_3$ a rotační kuželovou plochu $\Phi(A)$ s vrcholem A, jejíž povrchové přímky mají od roviny π odchylku $45°$. Rovina π protíná $\Phi(A)$ v nositelce cyklu (A), orientace nositelky závisí opět na z-ové souřadnici bodu A. Pro všechny vlastní body prostoru $\bar{E}_3$ jsou takto sestrojené kuželové plochy shodné, mají navzájem rovnoběžné povrchové přímky a všechny takové kuželové plochy mají společnou kuželosečku c^∞ ležící v nevlastní rovině ω^∞ prostoru $\bar{E}_3$. Všem vlastním bodům prostoru $\bar{E}_3$ lze takto přiřadit cyklický průmět do roviny π a naopak, ke každému cyklickému průmětu (A) lze jednoznačně přiřadit rotační kuželovou plochu $\Phi(A)$. Kuželovou plochu $\Phi(A)$ nazýváme *cyklografický kužel* bodu A a kuželosečku c^∞ nazýváme *základní kuželosečka*. Nadále budeme pracovat v rozšířeném eukleidovském prostoru $\bar{E}_3$ a jeho vlastní body budeme zobrazovat v cyklickém promítání do roviny π.

Mějme dány dva různé body A, B tak, aby bod B ležel na cyklografickém kuželi $\Phi(A)$ bodu A. Přímka AB leží také na cyklografickém kuželi $\Phi(B)$ bodu B, a proto bod A leží na cyklografickém kuželi $\Phi(B)$ bodu B.

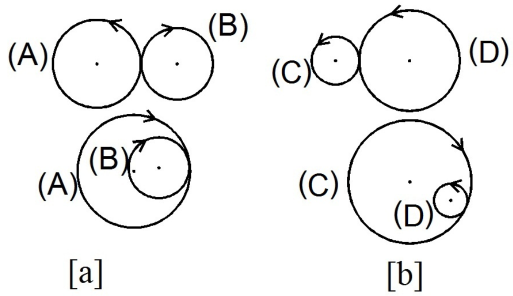


Obr. 2.1.2

Sestrojme cykly $(A), (B)$ bodů A, B a cykly $(C), (D)$ bodů C, D, jejichž nositelky se dotýkají. Orientace cyklů $(A), (B)$ je souhlasná, což znamená, že se v bodě dotyku nemění směr pohybu (viz obr. 2.1.3 [a]). Orientace cyklů $(C), (D)$ je nesouhlasná, v bodě dotyku nositelek se mění směr pohybu (viz obr. 2.1.3 [b]). V prostoru to znamená, že bod A leží na cyklografickém kuželi bodu B a naopak, bod B leží na cyklografickém kuželi bodu A. Bod C neleží na cyklografickém kuželi bodu D a ani bod D neleží na cyklografickém kuželi bodu C.[1]

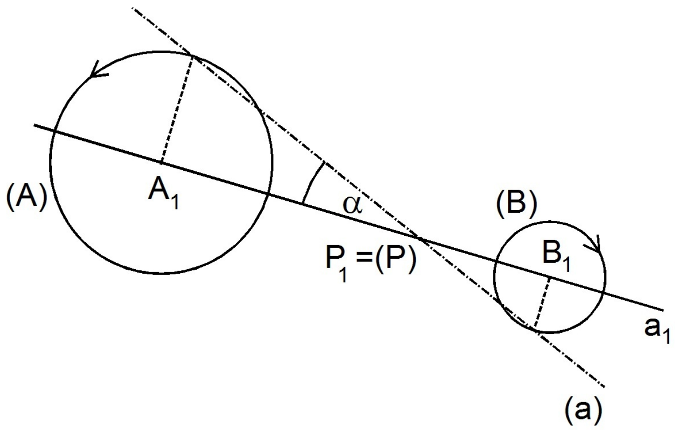
[1] Vymodelujte si situaci v prostoru.

Říkáme, že cykly $(A), (B)$ se *dotýkají*.[2] Dotyk cyklů tak lze interpretovat vzájemnou polohou útvarů v prostoru a toho využíváme při řešení některých úloh v rovině, které převádíme na řešení prostorových úloh. S využitím cyklického promítání tak řešíme převážně Pappovy a Apolloniovy úlohy.



Obr. 2.1.3

Cyklický průmět přímky je dán cyklickými průměty jejích bodů. Cyklický průmět přímky nazýváme *lineární řada cyklů*. Pravoúhlé průměty bodů přímky a vyplní přímku a_1, což je pravoúhlý průmět přímky a do roviny π, přímka a_1 je množina středů cyklů všech bodů přímky a. Na přímce různoběžné s rovinou π existuje bod P ležící v π, který, stejně jako v jiných zobrazovacích metodách, nazýváme stopník. Stopník je středem stejnolehlosti všech cyklů lineární řady cyklů a. Nazýváme ho také *nulový cykl* řady. Známe-li dva různé cykly $(A), (B)$ lineární řady cyklů, můžeme sklopit pravoúhle promítací rovinu přímky a do π a sestrojit libovolný další cykl řady a. Odchylka přímky od roviny π se určí stejně jako v kótovaném promítání, tj. určíme odchylku pravoúhlého průmětu a_1 od sklopené přímky (a).



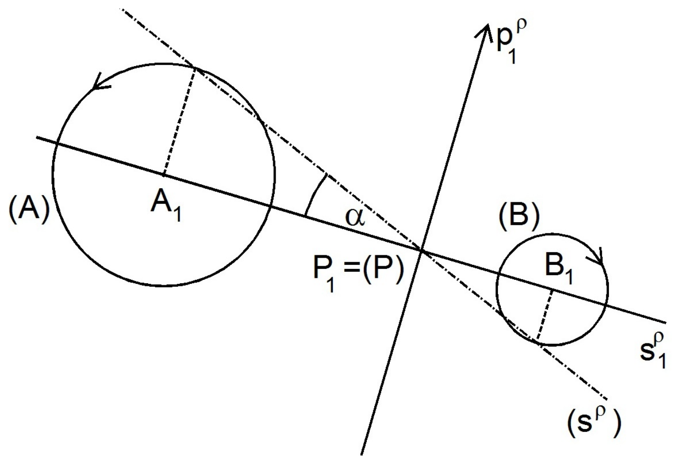
Obr. 2.1.4

Zřejmě, je-li odchylka $0 < \alpha < 45°$, leží nulový cykl (P) vně každého cyklu řady. Je-li $45° < \alpha < 90°$, leží (P) uvnitř každého cyklu řady. Všechny cykly řady, jejíž odchylka od π

[2] Cykly (C) a (D) se nedotýkají.

je $45°$, se dotýkají v bodě (P). Cykly přímky kolmé k π jsou soustředné kružnice[3] se středem (P) a cykly přímky rovnoběžné s π jsou shodné.[4]

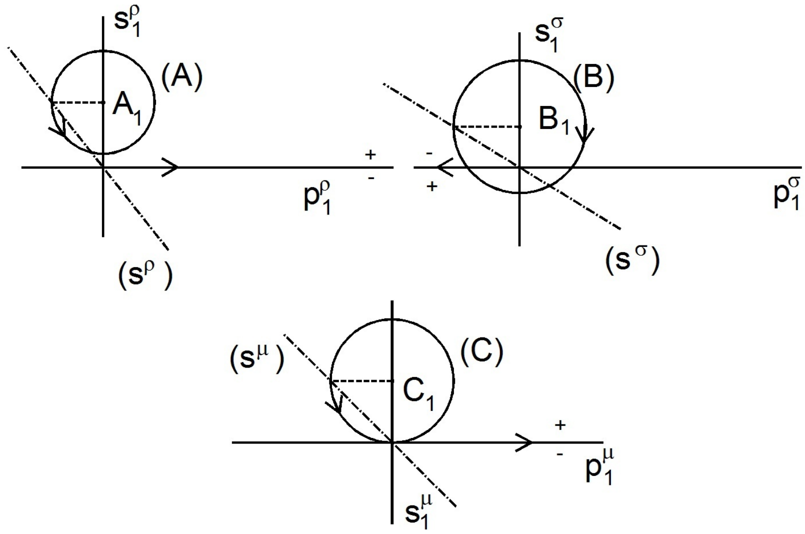
Cyklický průmět roviny nazýváme *cyklické pole*. Rovinu opět zobrazujeme jako množinu jejích cyklů. Stopa roviny ρ, tj. průsečnice roviny ρ s rovinou π, se nazývá *osa cyklického pole* nebo také *paprsek*. Hlavní přímky roviny jsou rovnoběžné se stopou, spádové přímky jsou kolmé ke stopě p^ρ roviny ρ. Odchylka roviny od průmětny je rovna odchylce její spádové přímky od průmětny. Ze zobrazení přímky vyplývá, že pohybuje-li se odchylka roviny od průmětny mezi $0°$ a $45°$, leží stopník spádové přímky vně všech jejích cyklů, tedy žádný cykl roviny neprotíná osu. Je-li odchylka mezi $45°$ a $90°$, pak cykly protínají stopu pod stejným úhlem.[5] Má-li přímka odchylku $45°$ stupňů, dotýkají se všechny cykly osy. Je-li přímka kolmá k průmětně, leží na ose středy všech cyklů cyklického pole. Rovina rovnoběžná s průmětnou nemá osu, všechny její cykly jsou shodné.



Obr. 2.1.5

Stopa p^ρ roviny ρ, která není kolmá k π ani s ní rovnoběžná, rozděluje průmětnu π na dvě poloroviny. V jedné polorovině leží středy cyklů roviny kladně orientovaných a ve druhé polorovině leží středy cyklů roviny záporně orientovaných. Osu cyklického pole (paprsek) můžeme také orientovat. Směr paprsku určíme tak, aby orientace cyklů daného cyklického pole a paprsku byla souhlasná, tj. neměnil se směr pohybu při přechodu z cyklu na paprsek, viz obr. 2.1.6.

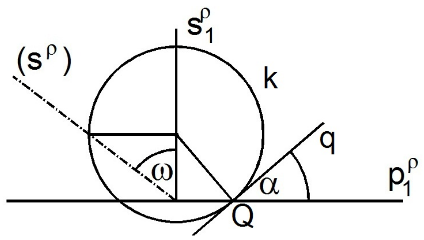
[3] Každá kružnice je nositelkou dvou cyklů přímky kolmé k průmětně.
[4] Ověřte.
[5] Úhel, pod kterým protíná přímka kružnici, se definuje jako úhel, který přímka svírá s tečnou v průsečíku s kružnicí.



Obr. 2.1.6

Úlohu v rovině – sestrojte společnou tečnu dvou daných kružnic – můžeme nyní převést na řešení prostorové úlohy. Dané kružnice orientujeme a hledáme rovinu, která obsahuje dané cykly a jejíž odchylka od průmětny je $45°$. Uvažujeme-li obě orientace každé kružnice, dostaneme odpovídající počet řešení.

Pokud v rovině hledáme kružnice protínající danou přímku pod daným úhlem α, převedeme tuto úlohu opět na prostorovou úlohu. V tomto případě sestrojujeme průmět roviny, jejíž odchylka od průmětny je ω, přičemž pro úhly α a ω platí $\operatorname{cotg} \omega = \cos \alpha$ (viz obr. 2.1.7).[6]

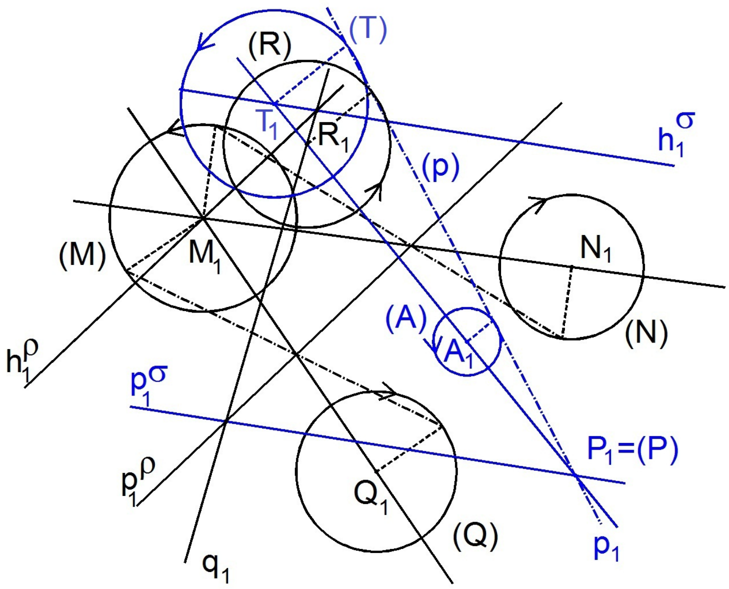


Obr. 2.1.7

Příklad 2.1.1 Určete společný cykl lineární řady cyklů a cyklického pole.

Hledáme průsečík přímky s rovinou. Prostorové řešení je známé, danou přímkou p proložíme vhodnou rovinu σ a určíme průsečnici q roviny σ s danou rovinou ρ. Průsečík R přímky q s přímkou p je hledaný bod. Rovinu máme dánu třemi body M, N, Q a přímku stopníkem P a bodem A. Úlohu řešíme jako v kótovaném promítání, kóty bodů jsou poloměry cyklů, orientace udává, zda je bod nad či pod průmětnou.

[6]Máme dán paprsek p_1^ρ a úhel α. Libovolným bodem Q přímky p_1^ρ vedeme přímku q, která svírá s přímkou p_1^ρ úhel α. Sestrojíme libovolnou kružnici k, která se dotýká přímky q v bodě Q. Středem kružnice k prochází spádová přímka s^ρ roviny ρ, její odchylka od průmětny je ω. Uvažujeme-li různé orientace přímky p_1^ρ a kružnice k, dostaneme všechna řešení.



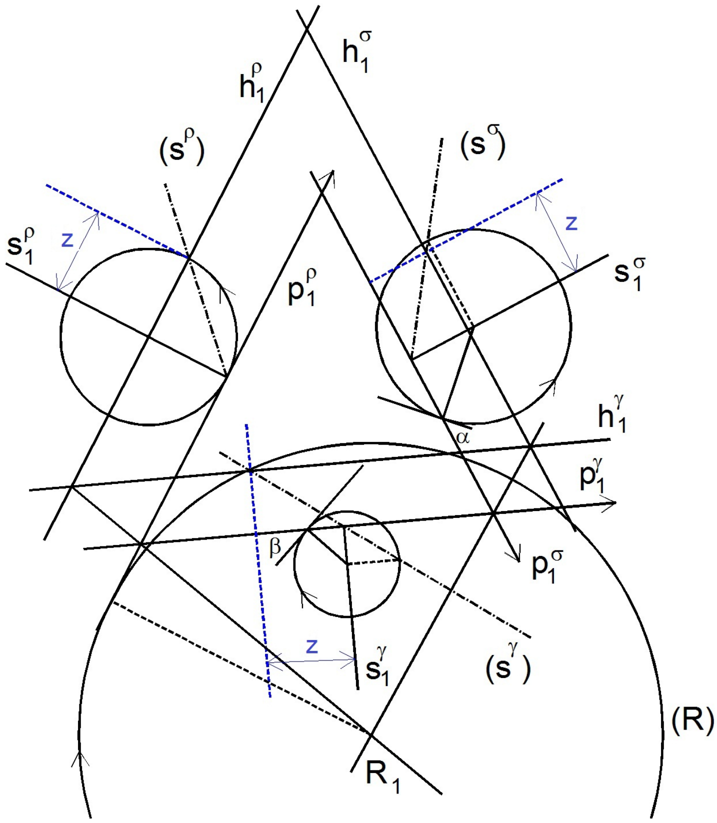
Obr. 2.1.8

Sestrojíme stopu roviny ρ, která je určena například stopníky přímek MN a MQ. Přímkou p vhodně proložíme rovinu σ. V rovině ρ i σ určíme hlavní přímky o stejných kótách.[7] Průmět průsečnice q rovin ρ a σ je dán průsečíkem jejich stop a průsečíkem průmětů hlavních přímek. Společný bod R přímek q, p je hledaný společný bod přímky a roviny. Jeho vzdálenost od průmětny určí poloměr cyklu, orientace cyklu je dána polohou bodu R vzhledem k průmětně.

Příklad 2.1.2 Určete cykl, který se dotýká paprsku p^ρ, paprsek p^σ protíná pod úhlem α a paprsek p^γ pod úhlem β.

Máme určit společný bod R tří rovin ρ, σ a γ. Úloha se opět řeší jako v kótovaném promítání. Je však třeba určit hlavní přímky všech tří rovin o stejné kótě z. Poté snadno sestrojíme alespoň dvě průsečnice dvou dvojic rovin. Hledaný bod R je průsečík těchto průsečnic. Sklopíme spádové přímky jednotlivých rovin. Rovina ρ, jejíž stopa je p^ρ, má od průmětny odchylku $45°$, odchylky rovin σ a γ určíme pomocí konstrukce v obr. 2.1.7. Body nad průmětnou jsou určeny orientací paprsků, takže lze jednoznačně určit na spádových přímkách jednotlivých rovin body, jejichž kóta je rovna z a sestrojit požadované hlavní přímky. (Stopy rovin a hlavní přímky tvoří stejnolehlé trojúhelníky, střed stejnolehlosti je hledaný společný bod.)

[7]Například zvolíme hlavní přímku roviny ρ procházející bodem M a v rovině σ najdeme hlavní přímku o stejné kótě. Tato přímka prochází bodem T přímky p, který má stejnou kótu jako bod M. K nalezení průmětu bodu T využijeme sklopení přímky p.



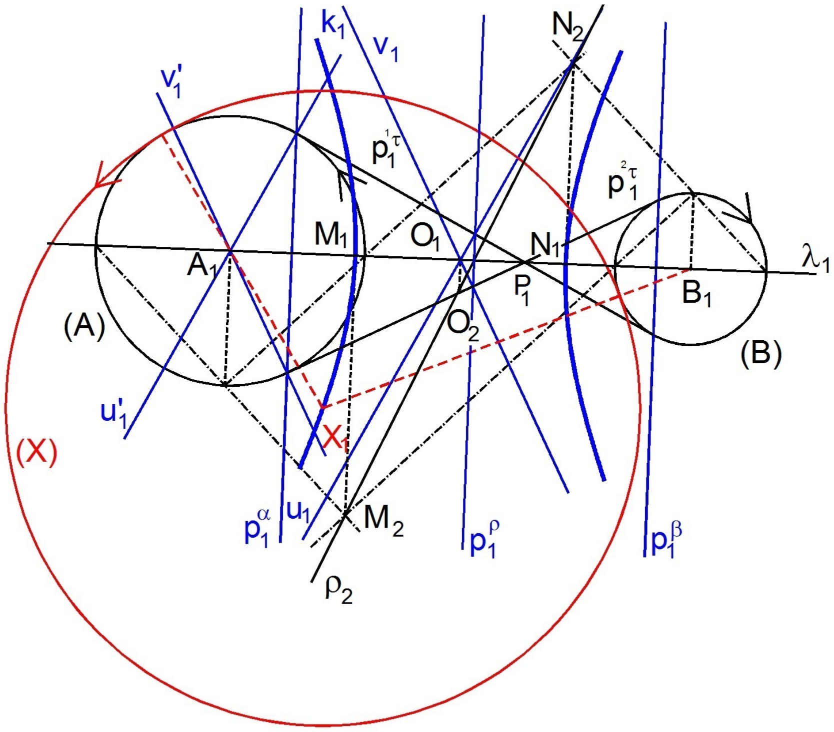
Obr. 2.1.9

2.2 Množiny středů kružnic

V předchozí kapitole jsme ukázali, že se dva cykly dotýkají, leží-li bod, který se zobrazí do jednoho cyklu, na cyklografickém kuželi druhého cyklu. Tedy, že množina středů cyklů, které se dotýkají daného cyklu (A), vyplní v prostoru cyklografický kužel bodu A. V této kapitole budeme hledat množinu středů cyklů dotýkajících se dvou daných různých cyklů (případně daného cyklu a paprsku).

Cyklografický kužel a rovina, která neprochází vrcholem tohoto kužele, mají společnou regulární kuželosečku, nazýváme ji *cyklografická kružnice*. Dva různé cyklografické kužele se vždy protínají. Obecně je jejich průniková křivka čtvrtého stupně. Kužele však mají rovnoběžné povrchové přímky a dotýkají se podél nevlastní kuželosečky c^∞, průnik se rozpadá na dvě kuželosečky, jednu vlastní (cyklografická kružnice) a druhou nevlastní (základní kuželosečka). Cyklografickou kružnicí tak procházejí dva cyklografické kužele. Obecně platí, že dvě různé kuželosečky v prostoru, které mají dva různé body společné, leží na dvou kuželových plochách a spojnice vrcholů těchto kuželových ploch je polárně sdružená s průseč-nicí rovin daných kuželoseček.

Středy cyklů, které se dotýkají dvou daných různých cyklů $(A), (B)$, leží současně na cyklografických kuželech $\Phi(A), \Phi(B)$, tj. patří průnikové křivce obou kuželů. Cykly jsou průměty vlastních bodů prostoru $\bar{E}_3$, takže středy hledaných cyklů vyplní cyklografickou kružnici k. Označme ρ rovinu cyklografické kružnice k. Tedy k je kuželosečka, která je řezem kuželů $\Phi(A), \Phi(B)$ rovinou ρ.



Obr. 2.2.1

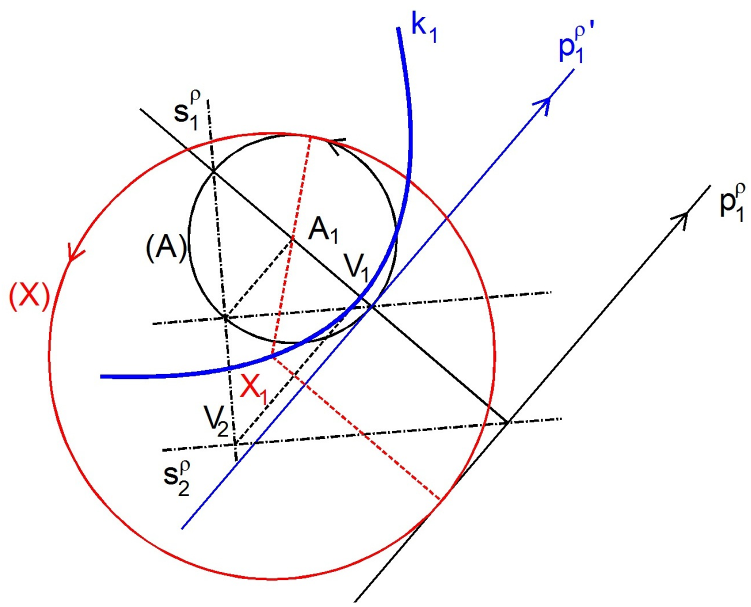
Rovina ρ je kolmá k pravoúhle promítací rovině λ přímky AB. Pravoúhlé průměty do roviny λ označíme indexem 2, rovinu λ sklopíme. V rovině λ leží dvě povrchové přímky každého kužele. Určíme společné body těchto povrchových přímek, tj. body kuželosečky k ležící v rovině λ, které označíme M, N. Přímka M_2N_2 je pravoúhlým průmětem ρ_2 roviny ρ do roviny λ. Podle roviny λ jsou souměrné oba cyklografické kužele, proto je podle roviny λ souměrná i kuželosečka k a v rovině λ leží vrcholy kuželosečky k. Body M, N jsou vrcholy kuželosečky k a kuželosečka není parabola, protože povrchové přímky kuželů ležící v rovině λ vždy vytvoří obdélník. Jejím průmětem k_2 do roviny λ je část přímky ρ_2, střed O_2 úsečky M_2N_2 je průmětem středu O kuželosečky k. Rovina λ obsahuje průsečíky V^∞, W^∞ roviny ρ se základní kuželosečkou c^∞. Přímku $V^\infty W^\infty$ obsahují i vrcholové roviny α, β kuželů $\Phi(A), \Phi(B)$, které jsou rovnoběžné s rovinou ρ. Roviny α, β jsou polární roviny stopníku P přímky AB vzhledem k $\Phi(A), \Phi(B)$.[8] Stopy p_1^α, p_1^β jsou poláry stopníku P přímky AB vzhledem k $(A), (B)$. Tečny z bodu P_1 k cyklům $(A), (B)$ jsou stopy společných tečných rovin kuželů $\Phi(A), \Phi(B)$. Rovina ρ prochází společnými body V^∞, W^∞ kuželů $\Phi(A), \Phi(B)$, takže stopa p_1^ρ roviny ρ je chordála kružnic $(A), (B)$. Typ kuželosečky k určíme podle polohy některé z vrcholových rovin α, β vzhledem ke kuželům. Protíná-li např. p_1^α kružnici

[8]Cyklografické kužele jsou singulární kvadriky a polární roviny singulární kvadriky vždy obsahují vrchol kvadriky.

(A) je k hyperbola a rovina α protíná $\Phi(A)$ v rovnoběžkách s asymptotami. Neprotíná-li p_1^α kružnici (A), je kuželosečka k elipsa. Z Quételetovy-Dandelinovy věty víme, že pravoúhlý průmět vrcholu rotační kuželové plochy do roviny kolmé k ose je ohniskem průmětu řezu tohoto kužele. Průmět kuželosečky k tak máme určen středem, vrcholy, ohnisky a případně asymptotami a kuželosečku již můžeme sestrojit. Odvodili jsme větu:

Věta 2.2.1 *Množina středů cyklů, které se dotýkají dvou cyklů, je elipsa nebo hyperbola, která má středy daných cyklů za ohniska.*

Můžeme také určit množinu středů cyklů, které se dotýkají daného cyklu a paprsku. Středy cyklů, které se dotýkají daného paprsku, vyplní rovinu, jejíž odchylka od průmětny je $45°$. Hledáme řez cyklografického kužele $\Phi(A)$ rovinou ρ rovnoběžnou s některou jeho povrchovou přímkou. Postup konstrukce je podobný jako při odvozování věty 2.2.1.



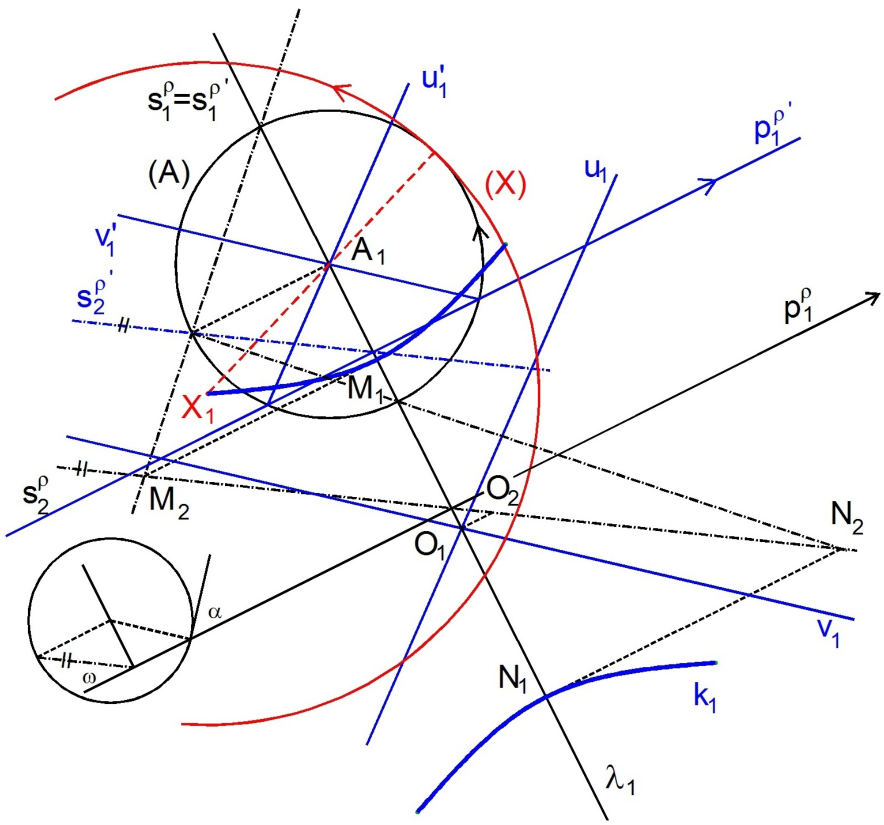
Obr. 2.2.2

Vrcholem cyklografického kužele vedeme rovinu λ kolmou k průmětně i k rovině ρ, rovinu λ sklopíme a najdeme vrchol kuželosečky k. Rovina λ protne rovinu ρ ve spádové přímce. Protože je odchylka roviny ρ od průmětny stejná jako odchylka povrchových přímek cyklografického kužele $\Phi(A)$, je kuželosečka k parabola. V rovině λ leží její vrchol. Pravoúhlý průmět vrcholu rotační kuželové plochy do roviny kolmé k ose je ohniskem průmětu řezu tohoto kužele. Průmět paraboly k máme určen vrcholem a ohniskem. Podobně jako v předchozím příkladě odvodíme větu:

Věta 2.2.2 *Množina středů cyklů, které se dotýkají cyklu a paprsku, je parabola, která má střed cyklu za ohnisko.*

Hledáme-li množinu středů kružnic, které se dotýkají dvou daných kružnic nebo kružnice a přímky, řešíme předchozí úlohy, přičemž uvažujeme veškeré možné kombinace orientací daných útvarů. Řešením jsou pak konfokální kuželosečky, tj. kuželosečky se společnými ohnisky.

Můžeme rovněž hledat množinu středů kružnic, které se dotýkají dané kružnice a danou přímku protínají pod daným úhlem α. Potom sestrojujeme řez kuželové plochy rovinou, jejíž odchylka od průmětny je ω, kde ω určíme podle obr. 2.1.7.

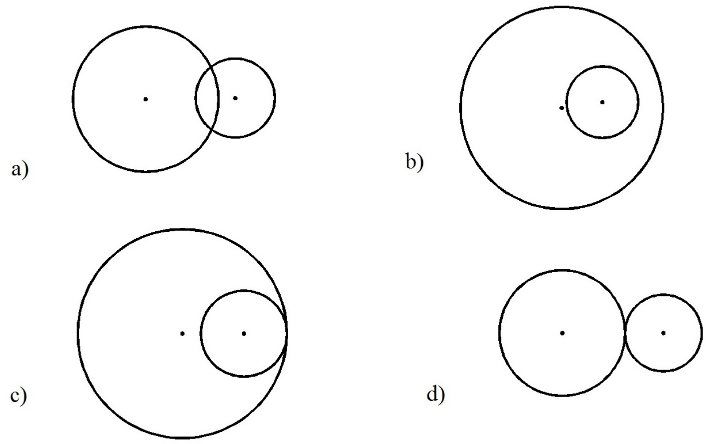


Obr. 2.2.3

Hledanými množinami jsou hyperboly[9] a konstrukce je podobná jako v předchozích případech. V rovině λ leží spádová přímka s roviny ρ i spádová přímka s' vrcholové roviny ρ', které ve sklopení můžeme sestrojit, protože známe jejich odchylky od průmětny.

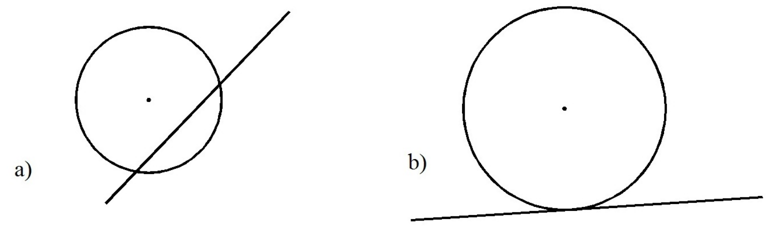
Cvičení 2.2.1 Sestrojte množiny středů kružnic dotýkajících se dvou daných kružnic pro jejich různé vzájemné polohy.

[9]Kružnice, která protíná přímku p pod úhlem α, je nositelkou cyklu roviny ρ se stopou p, která má odchylku od průmětny větší než $45°$, tj. vrcholová rovina ρ' rovnoběžná s rovinou ρ protíná cyklografický kužel ve dvou povrchových přímkách.



Obr. 2.2.4

Cvičení 2.2.2 Sestrojte množiny středů kružnic dotýkajících se kružnice a přímky pro jejich různé vzájemné polohy.



Obr. 2.2.5

2.3 Řešení Pappových a Apolloniových úloh

Výsledků předchozí kapitoly využijeme při hledání množin středů cyklů dotýkajících se tří daných útvarů – cyklů či paprsků. Hledáme například všechny cykly, které se dotýkají tří různých cyklů nebo cykly, které se dotýkají dvou cyklů a paprsku apod. Tyto úlohy lze opět zobecnit, a to tak, že kružnice považujeme za nositelky dvou různých cyklů a přímky za stopy dvou různých rovin a hledáme středy kružnic, dotýkajících se daných útvarů. Mezi cykly samozřejmě patří i nulové cykly, tj. body ležící v průmětně. Jestliže uvažujeme všechny možné kombinace zadání, dostáváme tak soubor úloh, které nazýváme *Apolloniovy* úlohy. V případě, že se v zadání vyskytuje kromě kružnice či přímky i bod (nulový cykl), lze každou takovou úlohu modifikovat tak, že bod bude ležet na přímce či kružnici a hledaná kružnice se bude dotýkat přímky nebo kružnice v daném bodě. Získáme šest dalších úloh, které nazýváme *Pappovy* úlohy.

I. Pappovy úlohy.

1. Sestrojte kružnici, která se v daném bodě T dotýká dané kružnice k a prochází dalším bodem B.
2. Sestrojte kružnici, která se v daném bodě T dotýká dané kružnice k a dotýká se dané přímky p.
3. Sestrojte kružnici, která se v daném bodě T dotýká dané kružnice k a dotýká se další kružnice l.
4. Sestrojte kružnici, která se v daném bodě T dotýká dané přímky p a prochází dalším bodem B.
5. Sestrojte kružnici, která se v daném bodě T dotýká dané přímky p a dotýká se další přímky q.
6. Sestrojte kružnici, která se v daném bodě T dotýká dané přímky p a dotýká se dané kružnice k.

II. Apolloniovy úlohy.

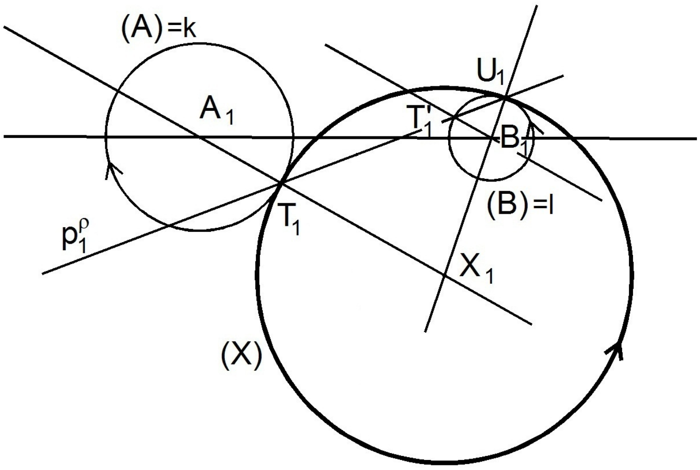
1. Sestrojte kružnici, která prochází danými body A, B, C.
2. Sestrojte kružnici, která prochází danými body A, B a dotýká se dané přímky p.
3. Sestrojte kružnici, která prochází danými body A, B a dotýká se dané kružnice k.
4. Sestrojte kružnici, která prochází daným bodem B a dotýká se daných přímek p, q.
5. Sestrojte kružnici, která prochází daným bodem B a dotýká se dané přímky p a dané kružnice k.
6. Sestrojte kružnici, která prochází daným bodem B a dotýká se daných kružnic k, l.
7. Sestrojte kružnici, která se dotýká daných přímek p, q, r.
8. Sestrojte kružnici, která se dotýká daných přímek p, q a dané kružnice k.
9. Sestrojte kružnici, která se dotýká dané přímky p a daných kružnic k, l.
10. Sestrojte kružnici, která se dotýká daných kružnic k, l, m.

Ukážeme řešení některých úloh.

Příklad 2.3.1 Řešení Pappovy úlohy 3.

Zvolíme libovolně orientaci kružnic. Orientovaná kružnice k je řídící křivkou cyklografického kužele s vrcholem A. Kružnice l je řídící kružnicí cyklografického kužele s vrcholem B. Hledáme bod X, který patří oběma cyklografickým kuželům. Jelikož známe bod dotyku T na kružnici k, známe povrchovou přímku cyklografického kužele $\Phi(A)$, na které bod X

leží. Na cyklografickém kuželi $\Phi(B)$ leží povrchová přímka BT' (T' leží v průmětně)[10], rovnoběžná s přímkou AT. Přímka TT' je stopou roviny ρ určené přímkami AT a BT'. V rovině ρ leží vrcholy A, B cyklografických kuželů $\Phi(A)$, $\Phi(B)$. Rovina ρ protíná kužel $\Phi(B)$ ještě v povrchové přímce BU (U leží v průmětně), která je různoběžná s přímkou AT. Průsečík X přímek AT a BU je vrchol hledaného cyklografického kužele $\Phi(X)$. Získali jsme jedno řešení úlohy, zbývající řešení obdržíme různými kombinacemi orientací kružnic.



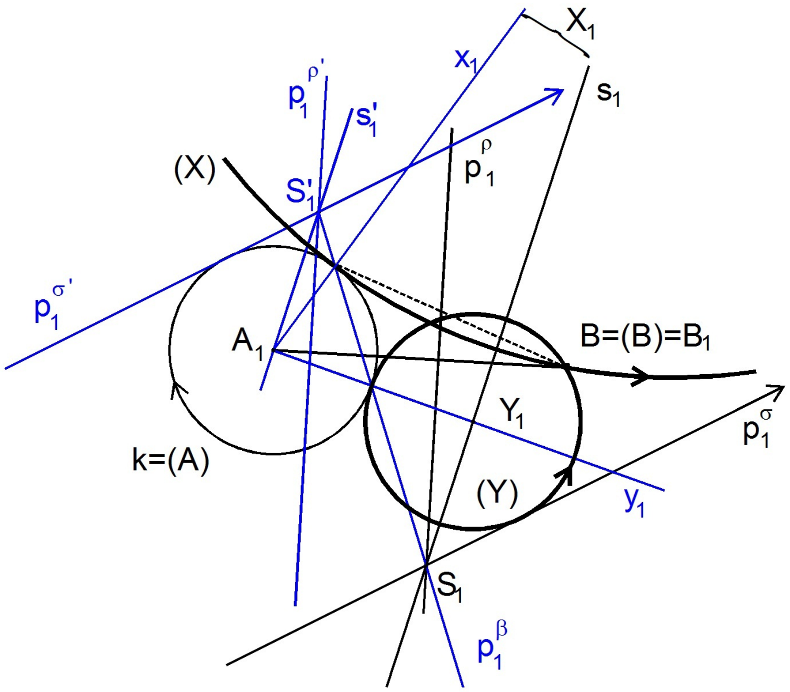
Obr. 2.3.1

Příklad 2.3.2 Řešení Apolloniovy úlohy 5.

Zvolíme orientaci kružnice i přímky. Kružnice k je řídící křivkou cyklografického kužele s vrcholem A, bod B je vrcholem cyklografického kužele $\Phi(B)$ a paprsek p je stopou roviny σ, která má odchylku od průmětny $45°$. Středy hledaných cyklů leží současně na cyklografických kuželích $\Phi(A)$, $\Phi(B)$ a v rovině σ. Hledáme body, které leží v rovině σ a patří průnikové křivce kuželů $\Phi(A)$ a $\Phi(B)$. Kuželosečka, která je částí průniku kuželů $\Phi(A)$, $\Phi(B)$, leží v rovině ρ. Stopa p^ρ roviny ρ je chordála kružnic (A) a (B) (jak je vidět v odvození věty 2.2.1). Středy hledaných cyklů leží na průsečnici s rovin ρ a σ. Uvažujme vrcholové roviny ρ' a σ' cyklografického kužele $\Phi(A)$. Roviny ρ', σ' se protínají v přímce s'. Přímka s' prochází bodem A a průsečíkem S' půdorysných stop $p^{\rho'}, p^{\sigma'}$[11] rovin ρ', σ'. Přímka s prochází průsečíkem S půdorysných stop p^ρ, p^σ rovin ρ, σ a je rovnoběžná s přímkou s'. Uvažujme rovinu β určenou přímkou s a bodem A. V rovině β leží i přímka s' a její stopa je přímka SS'. Rovina β protne cyklografický kužel $\Phi(A)$ v povrchových přímkách x, y, které jsou různoběžné s přímkou s. Průsečíky X, Y přímky s po řadě s přímkami x, y jsou hledané středy cyklů. Zbývající řešení obdržíme různými kombinacemi orientací kružnice a přímky.

[10] Poloha T' je dána volbou orientace cyklu. Jak?

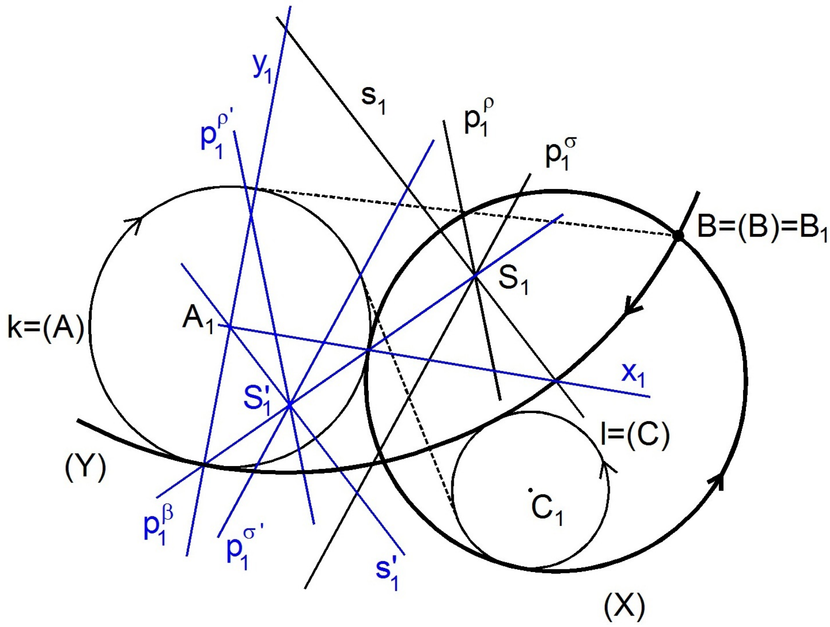
[11] Přímka $p_1^{\rho'}$ je spojnice bodů dotyku tečen vedených z B_1 k (A) a $p_1^{\sigma'}$ je tečna (A) rovnoběžná s p_1^σ tak, aby (A) a $p_1^{\sigma'}$ byly souhlasně orientované.



Obr. 2.3.2

Příklad 2.3.3 Řešení Apolloniovy úlohy 6.

Konstrukce je podobná jako v příkladě 2.3.2. Dané útvary nejprve orientujeme. Kružnice k, l jsou po řadě řídícími křivkami cyklografických kuželů $\Phi(A), \Phi(C)$ a bod B je vrcholem cyklografického kužele $\Phi(B)$.

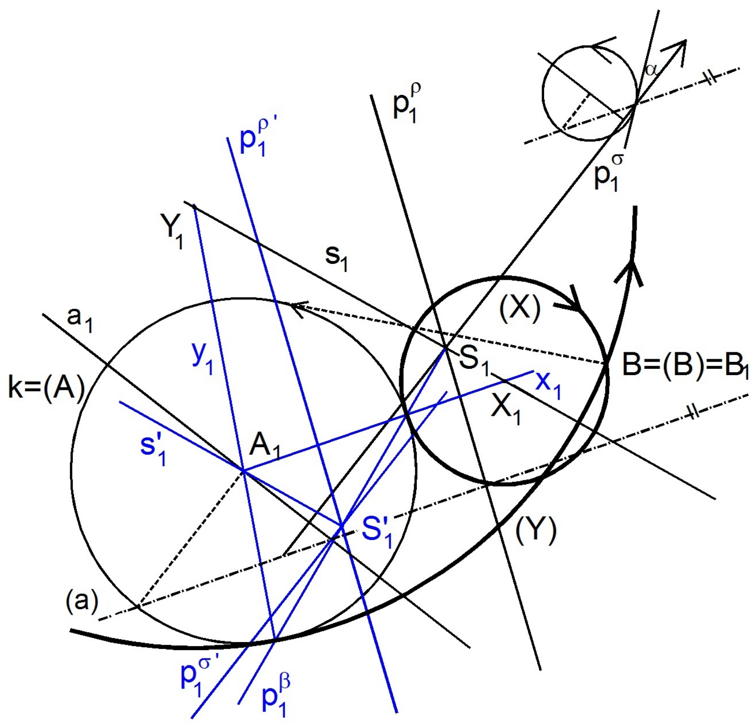


Obr. 2.3.3

Hledáme středy cyklů, dotýkajících se tří daných cyklů $\Phi(A), \Phi(B), \Phi(C)$. Podle věty 2.2.1 leží středy cyklů, dotýkajících se vždy dvou z daných třech cyklů, v rovině. Máme tedy vždy pro každou dvojici cyklů rovinu, v níž leží středy cyklů, které se dotýkají obou cyklů vybrané dvojice, tj. tři roviny. Tyto tři roviny označíme po řadě ρ, σ, μ, kde ρ, resp. σ, resp. μ obsahuje středy cyklů, které se dotýkají cyklů $(A), (B)$, resp. $(A), (C)$, resp.$(B), (C)$. Roviny mají společný bod S, kterým prochází průsečnice každé dvojice rovin.[12] Půdorysné stopy rovin ρ, σ, μ jsou chordály kružnic $(A), (B), (C)$, takže bod S je potenční střed zadaných kružnic, přičemž kružnice (B) má nulový poloměr. Označme ρ rovinu, ve které leží průniková křivka kuželů $\Phi(A), \Phi(B)$ a σ rovinu průnikové křivky kuželů $\Phi(A), \Phi(C)$. Pak hledané středy cyklů leží na přímce $\rho \cap \sigma = s$. Nejprve sestrojíme průsečnici s' vrcholových rovin ρ', σ' cyklografického kužele $\Phi(A)$. Přímka s' prochází bodem A a průsečíkem S' půdorysných stop rovin ρ', σ', přímka s je rovnoběžná s přímkou s' a prochází bodem S. Půdorysná stopa roviny β obsahující přímky s, s' protne cyklografický kužel $\Phi(A)$ v povrchových přímkách x, y, které po řadě protnou přímku s v bodech X, Y, středech hledaných cyklů. Další řešení získáme změnou orientace kružnic k, l.

Apolloniovy úlohy lze ještě modifikovat dalším způsobem, a to tak, že dotyk hledané kružnice a dané přímky nahradíme protínáním pod daným úhlem. Řešíme tak například modifikovanou Apolloniovu úlohu 5.[13]

Příklad 2.3.4 Sestrojte kružnici, která prochází bodem B, dotýká se dané kružnice k a danou přímku p protíná pod úhlem α.



Obr. 2.3.4

[12]V Apolloniově úloze č.1 jsou stopy rovin osami úseček AB, BC, AC, tj. sestrojujeme kružnici opsanou trojúhelníku ABC.

[13]Příklad 2.1.2 je modifikací Apolloniovy úlohy 7.

Postup je stejný jako v příkladě 2.3.2. Kružnice k je řídící křivkou cyklografického kužele s vrcholem A, bod B je vrcholem cyklografického kužele $\Phi(B)$ a přímka p je stopou roviny σ, která má od průmětny odchylku ω, kde velikost úhlu ω sestrojíme pomocí úhlu α podle obr. 2.1.7. Středy hledaných cyklů leží současně na cyklografických kuželích $\Phi(A), \Phi(B)$ a v rovině σ. Průniková křivka kuželů $\Phi(A), \Phi(B)$ leží v rovině ρ. Stopa p^ρ roviny ρ je chordála kružnic (A) a (B), středy hledaných cyklů leží na průsečnici s rovin ρ a σ. Vrcholové roviny ρ' a σ' cyklografického kužele $\Phi(A)$ se protínají v přímce s'. Rovinu σ' určíme pomocí sklopení její spádové přímky a procházející bodem (A). Sklopenou přímku lze sestrojit, protože známe odchylku ω rovinu σ od průmětny. Přímka s prochází průsečíkem S půdorysných stop rovin ρ, σ a je rovnoběžná s přímkou s'. Rovina β obsahující přímky s, s' protíná cyklografický kužel $\Phi(A)$ v povrchových přímkách x, y, které protínají přímku s po řadě v bodech X, Y, tj. středech hledaných cyklů. Zbývající řešení obdržíme různými kombinacemi orientací kružnice a přímky.

Cvičení 2.3.1 Vyřešte zbývající Pappovy a Apolloniovy úlohy, volte různé vzájemné polohy zadaných útvarů.

Cvičení 2.3.2 Apolloniovy úlohy 2, 4, 6, 7, 8, 9 modifikujte tak, aby hledaná kružnice protínala dané přímky pod zvolenými úhly, a vyřešte je. Volte různé vzájemné polohy zadaných útvarů.

Literatura

[1] KADEŘÁVEK, J., KLÍMA, J., KOUNOVSKÝ, F.: *Deskriptivní geometrie I*, ČSAV Praha, 1954.

[2] KOUNOVSKÝ, J., VYČICHLO, F.: *Deskriptivní geometrie*, ČSAV Praha, 1959.

[3] TALANDA, P.: *Deskriptivní geometrie pro obor geodetický*, VUT Brno, 1988.

[4] SEIFERT, L.: *Cyklografie*, JČMF Praha, 1949.

[5] HÁTLE, J.: *Cyklografie a její užití k řešení planimetrických úloh*, diplomová práce, PřF UP Olomouc, 2006.

[6] HAVLÍČEK, K.: *Úvod do projektivní geometrie kuželoseček*, SNTL Praha, 1956.

[7] VOJTĚCH, J.: *Geometrie projektivní. Synthetické i analytické vyšetřování projektivních příbuzností a útvarů*, JČMF Praha, 1932.

[8] BUDINSKÝ, B, KEPR, B.: *Základy diferenciální geometrie s technickými aplikacemi*, SNTL Praha, 1970.

RNDr. Lenka Juklová, Ph.D.

Aplikace deskriptivní geometrie. Základy kartografie a cyklografie

Výkonný redaktor prof. RNDr. Tomáš Opatrný, Dr.
Odpovědná redaktorka Mgr. Hana Pochmanová
Technická redakce RNDr. Lenka Juklová, Ph.D.
Grafické zpracování obálky Ivana Perůtková
Publikace neprošla redakční jazykovou úpravou ve vydavatelství

Vydala a vytiskla Univerzita Palackého v Olomouci
Křížkovského 8, 771 47 Olomouc
www.vydavatelstvi.upol.cz
www.e-shop.upol.cz
vup@upol.cz

1. vydání
Olomouc 2013

ISBN 978-80-244-3600-5

Neprodejná publikace

VUP 2013/431