Lineární perspektiva

Lineární perspektiva je významnou aplikací středového promítání. V technické praxi se používá především k zobrazování objektů větších rozměrů, napodobuje tak lidské vidění. Ze středu promítání (oka) se objekty promítají do roviny (nahrazuje sítnici). Perspektivní obrazy jsou například fotografie. Abychom dostali názorný obraz odpovídající tomu, co vidí lidské oko, je třeba zavést na středové promítání jisté omezující podmínky.

1. Pozorovaný objekt leží uvnitř rotační kuželové plochy, která má vrchol ve středu promítání, osu kolmou k průmětně a vrcholový úhel v rozmezí $40° - 50°$. Tato kuželová plocha se nazývá *zorné pole (zorná kuželová plocha)*. Průmětnu protíná v *zorné kružnici* k_z o středu v hlavním bodě a její poloměr je maximálně $r = d \cdot \operatorname{tg} 25°$, což je přibližně $\frac{d}{2}$. Jelikož objekt leží v zorném poli, tak průmět objektu leží uvnitř zorné kružnice. Dále označíme-li n největší průčelný rozměr objektu a v vzdálenost objektu od střed promítání, pak $n < v < 3n$. První nerovnost plyne z toho, že objekt leží v zorném poli. Kdyby neplatila druhá nerovnost, byl by pozorovatel od objektu příliš daleko a průmět by se blížil rovnoběžnému promítání.

2. Pozorovatel je od objektu vzdálen aspoň 21 cm (mez zřetelného vidění).

3. Je dána pevná vodorovná rovina π, na které stojí pozorovaný předmět a většinou i pozorovatel.

Středové promítání, které splňuje podmínky 1, 2, 3 se nazývá *lineární perspektiva*.

Zavedeme následující označení:

- *průmětna* ρ – většinou svislá;
- *oko* S – střed promítání;
- *hlavní bod* H[1] – pravoúhlý průmět S do ρ;
- *distance* d – velikost úsečky SH;

[1] V lineární perspektivě bývá obvyklé značit hlavní bod H na rozdíl od středového promítání, kde jej většinou označujeme S_2.

- *osa perspektivy* s – přímka SH;
- *základní rovina* π – pomocná rovina z podmínky 3;
- *základnice* z – průsečnice ρ a π;
- *stanoviště* S_1 – pravoúhlý průmět S do π;
- *obzorová rovina* π' – směrová rovina roviny π;
- *horizont* h – průsečnice π' a ρ, tj. úběžnice všech vodorovných rovin;
- *hlavní vertikála* v – přímka v ρ procházející hlavním bodem H kolmo k zákadnici;
- *základní bod* Z – průsečík hlavní vertikály a základnice;
- *výška perspektivy* – vzdálenost základnice a horizontu;
- *levý, resp. pravý, resp. horní, resp. dolní, distančník* D^l, resp. D^p, resp. D^h, resp. D^d – průsečíky distanční kružnice s h, resp. v;
- *hloubkové přímky* – přímky kolmé k ρ;
- středový průmět bodu A do ρ označíme A^s[2] a budeme ho nazývat *perspektiva bodu* A;
- středový průmět bodu A_1, tj. středový průmět pravúhlého průmětu (půdorysu) bodu A do π, označíme A_1^s a nazveme ho *perspektiva půdorysu*.[3]

Daný objekt můžeme perspektivně zobrazit buď s využitím jiné zobrazovací metody, pak se lineární perspektiva nazývá *vázáná*, nebo jen s využitím metod středového promítání, pak se perspektiva nazývá *volná*.

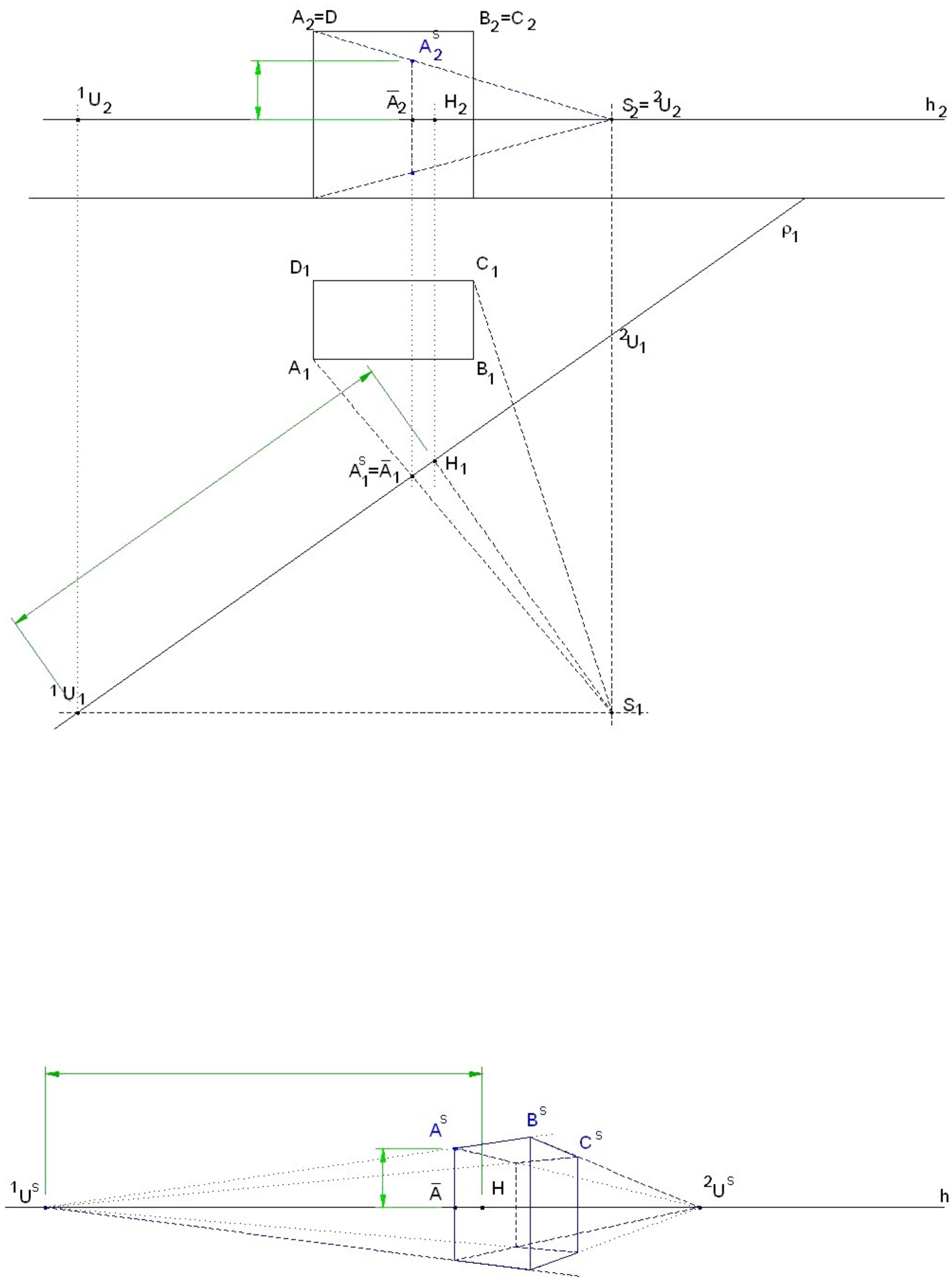
1 Vázaná perspektiva (nepřímé metody)

1.1 Průsečná metoda

Historicky nejstarší nepřímou metodou je *průsečná metoda*. Objekt je zadán pomocí Mongeovy projekce a perspektiva objektu se sestrojuje rovněž využitím prostředků Mongeovy projekce. Daný objekt je postaven na π, perspektiva je dána průmětnou ρ, okem a základní rovinou, kterou je půdorysna. Průmětnu volíme podle toho, která část objektu má být viditelná. Oko S volíme tak, aby půdorys osy s ležel uvnitř ostrého úhlu daného styčnými přímkami vedenými z S_1 k půdorysu objektu. Výška perspektivy by měla odpovídat výšce pozorovatele a vzdálenost oka od objektu je větší než největší průčelný rozměr objektu.

[2] Na rozdíl od středového promítání, kde jsme středový průmět bodu značili dolním indexem s.

[3] Nezaměňujte s půdorysem perspektivy!



Obr. 1

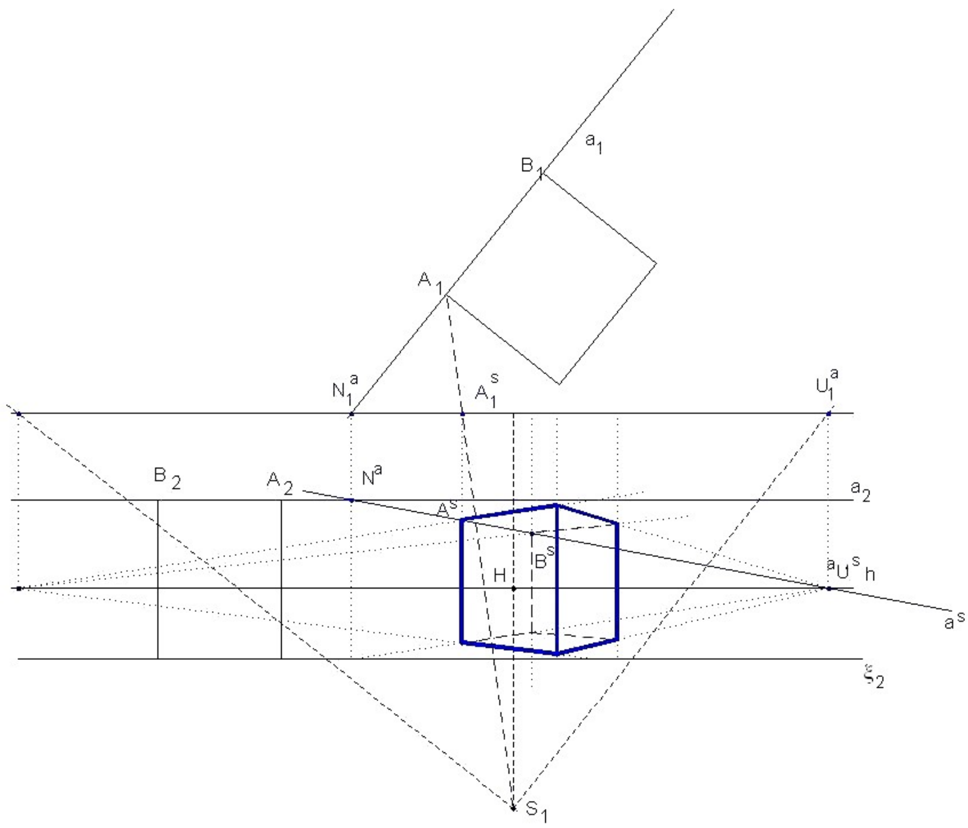
Perspektivní obraz objektu tvoří perspektivy všech jeho bodů, tj. středové průměty z S do ρ. Průmětnu ρ přemístíme.[4] V nákresně zvolíme horizont h a hlavní bod H na h, rovinu ρ pak

[4]Perspektivní průmětna není rovnoběžná s π ani ν, proto žádný pravoúhlý průmět perspektivy nesplývá s perspektivou.

přemístíme tak, aby horizont, resp. hlavní bod přešel do zvolené přímky, resp. bodu. Středový průmět bodu A z S do roviny ρ označíme A^s. Středovým průmětem prochází první a druhá pravoúhle promítací přímka. Označme $\overline{A}$ průsečík první promítací přímky bodu A^s s horizontem h. Vzhledem k poloze první promítací přímky a horizontu vzhledem k průmětnám platí $|H_1A_1| = |H\overline{A}|$, $|A_2(A^s)_2| = |\overline{A}^s A^s|$. Odtud vyplývá i konstrukce perspektivy. Sestrojíme na h bod $\overline{A}$ tak, aby platilo $|H_1\overline{A}_1| = |H\overline{A}|$ (zachováme orientaci) a na kolmici k h v bodě $\overline{A}$ sestrojíme bod A^s tak, aby $|\overline{A}_2A^s_2| = |\overline{A}A^s|$. Další body sestrojíme stejně. Ke konstrukci můžeme také využít úběžníků přímek rovnoběžných s π.[5] Sestrojíme například úběžníky ${}^1U$, ${}^2U$ přímek AB, BC a při konstrukci perspektiv dalších bodů můžeme využít toho, že středové průměty navzájem rovnoběžných přímek mají společný úběžník.

1.2 Stopníková metoda

Další nepřímou metodou je *stopníková metoda*. Opět vycházíme z Mongeovy projekce, ovšem tentokrát volíme objekt vzhledem k soustavě souřadnic tak, aby půdorys byl nad osou x a nárys pod osou x. Objekt stojí na základní rovině [6] rovnoběžné s π.



Obr. 2

[5]Úběžníky přímek rovnoběžných s π leží na horizontu.

[6]Tentokrát ji označíme ξ.

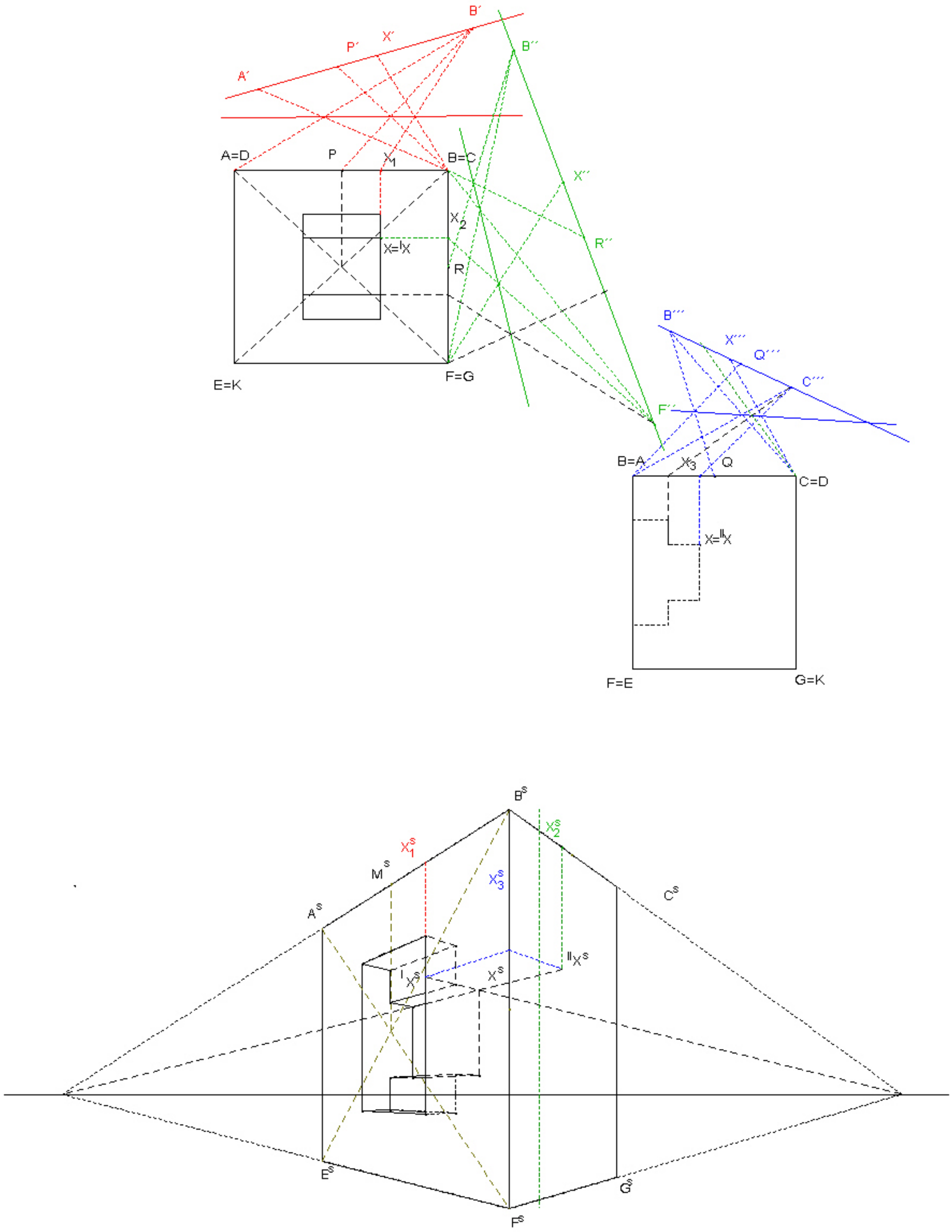
Průmětnu π ztotožníme s nárysnou, perspektiva tedy tentokrát splyne se svým nárysem. Dále zvolíme oko S a horizont h, výška perspektivy by opět měla odpovídat výšce pozorovatele. Aby se nepřekrýval nárys objektu v Mongeově projekci s perspektivou, posuneme nárys ve směru osy x a otočíme do průčelné polohy. Nárys a půdorys si sice neodpovídají v Mongeově projekci, ale pro konstrukce má nárys jen pomocnou roli. Půdorys objektu umístíme tak, aby úběžník aspoň jednoho směru ležel v nákresně. (Například úběžník ${}^aU$ přímky $a = AB$.) Sestrojíme hlavní bod a úběžníky některých vodorovných přímek. Sestrojíme perspektivu bodu A. Bod A leží na vodorovné přímce a, její nárys je rovnoběžný s osou x. Určíme nárysný stopník N^a přímky a. N^a leží v ν (tedy i v ρ) a splývá se středovým průmětem. Perspektiva a^s přímky a je přímka ${}^aU^sN^a$. Na ní leží perspektiva bodu A. Tu sestrojíme takto: Promítneme bod A z S do ρ, půdorys $(A^s)_1$ perspektivy A^s leží na ose x, a protože nárys perspektivy splývá s perspektivou leží A^s na ordinále a na přímce a^s. Další body doplňujeme stejně, pokud máme na nákresně úběžníky dalších přímek, můžeme využít i jich.

1.3 Incidenční měřítko

Pro konstrukci složitějších půdorysů můžeme využít další nepřímou metodu a to tzv. *incidenční měřítko*. Tato metoda využívá Pappovy věty[7] Objekt uzavřeme do kvádru a do jeho stěn pravoúhle objekt promítneme. Kvádr je dán nárysem a bokorysem libovolně v průmětně. Bod X objektu nejprve pravoúhle promítneme do bodu ${}^1X$ ležícího ve stěně $ABFE$ a do bodu ${}^{II}X$ ležícího ve stěně $BCGF$. Bod ${}^IX$ pravoúhle promítneme do bodu X_1 na přímce AB a do bodu X_2 na přímce BF. Bod ${}^{II}X$ pravoúhle promítneme do bodu X_3 na přímce BC. Sestrojíme perspektivu kvádru pomocí některé nám zatím známé metody. (V obrázku není znázorněno.) Sestrojíme vhodně přímky $A'B', B''F'', B'''C'''$, které jsou po řadě projektivní s přímkami AB, BF, BC, tak, aby platilo $|A'B'| = |A^sB^s|$ atd. Víme, že projektivita je dána třemi odpovídajícími si páry bodů, sestrojíme proto ještě perspektivy středů P, R, Q úseček AB, BF, BC. (Například pomocí úhlopříček). Můžeme sestrojit bod X' odpovídající v dané projektivitě bodu X_1, bod X'' odpovídající bodu X_2 i bod X''' odpovídající bodu X_3.[8] Protože platí Pappova věta, platí $|A^sX_1^s| = |A'X'|$ atd. Na perspektivě hran kvádru získáme perspektivy bodů X_i. Body X_i jsme získali pravoúhlým promítáním bodu X do stěn a hran kvádru, a jelikož známe úběžníky hran můžeme sestrojit perspektivu bodu X.

[7] Dvojpoměr se středovým promítáním zachovává.

[8] Projektivity v obrázku jsou doplňovány užitím direkční osy, průsečíky přímek AB' a $A'B$, BP' a $B'P$ atd. leží na direkční ose.



Obr. 3

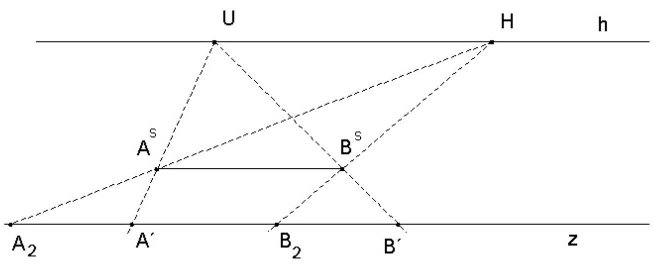
Nepřímé metody se používají především v případech, kdy známe sdružené průměty objektu. Neznáme-li je podrobně a chceme-li perspektivní obraz průběžně doplňovat, opravovat apod., používáme přímé metody.

2 Volná perspektiva (přímé metody)

Volná perspektiva využívá středového promítání (přizpůsobenému podmínkám 1, 2, 3) a jeho vlastností ke konstrukcím perspektiv objektů. Některé konstrukce středového promítání jsou přizpůsobeny. Často je třeba nanést úsečku dané délky na danou přímku, většinou horizontální nebo vertikální. Ze středového promítání známe konstrukci pro určení skutečné velikosti úsečky, tuto konstrukci aplikujeme na lineární perspektivu.

Nejprve určíme skutečnou velikost úsečky ležící v základní rovině π. Úběžníky všech přímek rovnoběžných s π leží na horizontu, stopníky přímek ležících v π leží na základnici. Mohou nastat dva případy.

1. Přímka, na níž úsečka leží, je rovnoběžná se základnicí z, tj. její úběžník a stopník jsou nevlastní. Jestliže je úsečka rovnoběžná se základnicí, je rovnoběžná i s průmětnou ρ, proto velikost pravoúhlého průmětu úsečky AB do ρ je skutečnou velikostí úsečky AB. Pravoúhle promítací přímky do ρ jsou hloubkové přímky, jejich úběžník je hlavní bod. Zřejmě, promítneme-li z H body A^s, B^s na základnici do bodů A_2, B_2, je úsečka A_2B_2 pravoúhlým průmětem AB do ρ.[9]
   Nechť nyní U je libovolný bod ležící na horizontu h. Promítneme-li z U body A^s, B^s na z do bodů A', B'[10], je zřejmé, že $|A'B'| = |A_2B_2| = |AB|$.

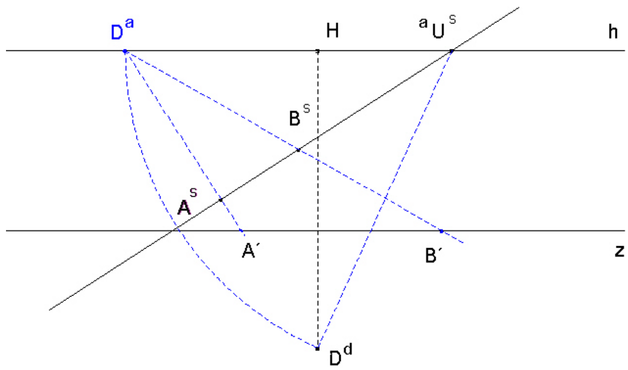


Obr. 4

2. Úsečka AB leží na přímce, která není rovnoběžná se základnicí, její úběžník i stopník jsou vlastní body, označme ${}^aU^s$ úběžník přímky $a = AB$ a N^a stopník přímky a vlastní. Použijeme konstrukci ze středového promítání pomocí dělicí kružnice, na níž si zvolíme takový dělicí bod, který leží na horizontu. Perspektivu máme zadánu některým z distančníků, předpokládejme např. dolním distančníkem D^d. Směrová přímka a' přímky a leží v obdorové rovině, proto je středový průmět směrové přímky a' horizont. Sklopíme přímku a', známe-li D^d je $(a') =^a U^s D^d$. Kružnice se středem ${}^aU^s$ a poloměrem $r = |aU^s D^d|$ je dělicí kružnice. Zvolíme jeden její průsečík s horizontem.

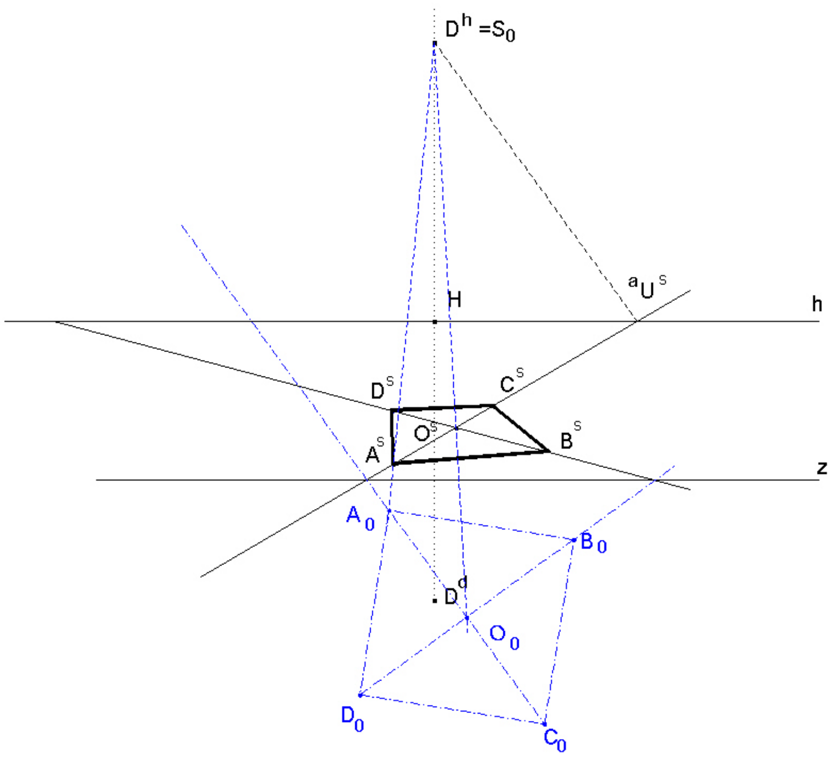
[9]Přímky HA^s, HB^s jsou perspektivy pravoúhle promítacích přímek bodů A, B do roviny ρ.
[10]V prostoru to znamená, že promítáme body A, B na základnicemi přímkami směru US kosými k průmětně.

Označíme jej D^a a nazýváme jej *dělící bod přímky* a. Volíme bod dělící kružnice na horizontu, protože nyní je spojnice bodu D^a a ${}^aU^s$ horizont, rovnoběžka vedená stopníkem je základnice. Promítneme-li z D^a body A^sB^s na základnicí do bodů $A'B'$ je tedy $|AB| = |A'B'|$.



Obr. 5

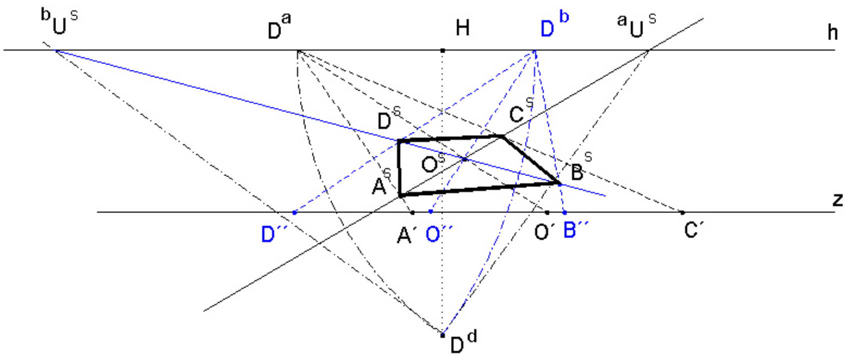
Příklad 1 Sestrojte čtverec v základní rovině π se středem O a vrcholem A. Perspektiva je dána horizontem, základnicí a dolním distančníkem. Řešte konstrukcemi středového promítání otočením roviny π do průmětny.



Obr. 6

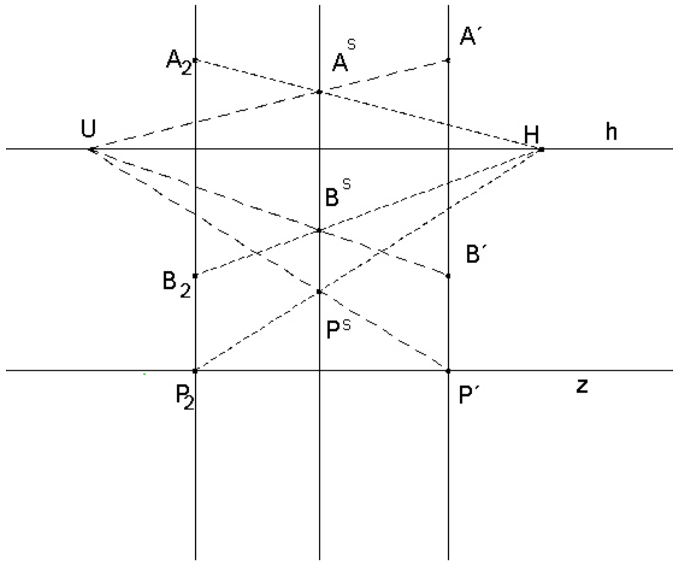
Řešení: Nejprve sestrojíme střed kolineace S_0 – otočíme směrovou roviny π' do průmětny, S_0 zřejmě splyne s horním, resp. dolním, distančníkem. Stopa roviny π je základnice z, úběžnice roviny π je horizont h, kolineace mezi perspektivami bodů a otočenými body je tedy dána středem S_0, osou z, a úběžnicí h. Sestrojíme obrazy A_0, O_0 perspektiv A^s, O^s v dané kolineaci. V otočení doplníme na čtverec a určíme kolineární obrazy zbývajících bodů.

Příklad 2 Sestrojte čtverec v základní rovině π se středem O a vrcholem A. Perspektiva je dána horizontem, základnicí a dolním distančníkem. Řešte metodami volné perspektivy.
Řešení: Přímka $a = OA$ leží v základní rovině, její úběžník ${}^aU^s$ je průsečík a^s s h. Určíme dělicí bod přímky a, z něj promítneme A^s a O^s do bodů A' a O' na základnici. Určili jsme velikost poloviny úhlopříčky, sestrojíme C', z D^a jej promítneme zpět na a^s do bodu C^s. Přímka $b = OB$ je kolmá na A, její úběžník určíme sklopením směrové roviny π' do průmětny. Platí, (a') je kolmá na (b') a $a' =^a U^s D^d$, $b' =^b U^a D^d$. Na přímce b sestrojíme stejnou konstrukcí body B, D tak, aby platilo $|DO| = |BO| = |AO| = |CO|$.



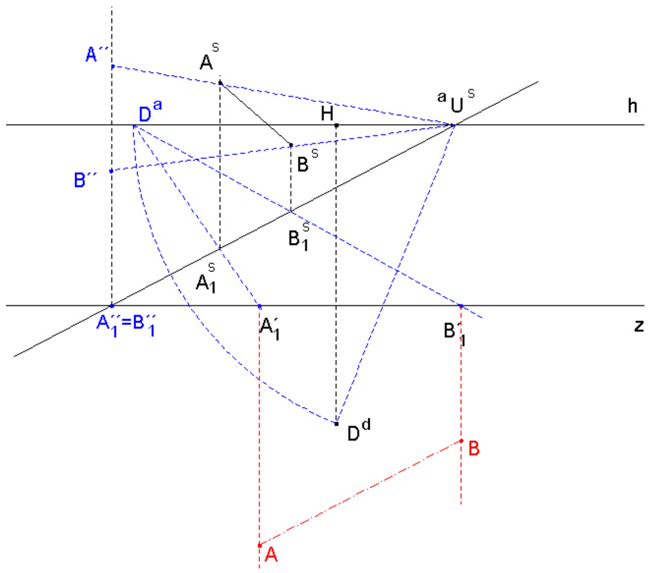
Obr. 7

Leží-li úsečka na svislé přímce, je rovnoběžná s průmětnou a velikost úsečky je rovna velikosti pravoúhlého průmětu. Mějme dánu úsečku AB ležící na svislé přímce a. Pravoúhlé a středové průměty bodů leží na ordinále. Předpokládejme, že známe, resp. sestrojíme, průsečík P přímky a se základní rovinou π. Pravoúhlý průmět P_2 bodu P pak leží na základnici a na ordinále (tj. na přímce P^sH). Protože je přímka a kolmá k π , je pravoúhlý průmět a_2 rovnoběžný s perspektivou a^s. Určíme A_2B_2 a získali jsme skutečnou velikost úsečky AB. Je zřejmé, že pokud vybereme libovolný bod U na horizontu, z něj promítneme P do P' na základnici, sestrojíme přímku a' rovnoběžnou s a^s a na ni promítneme z U perspektivy A^s, B^s do bodů A', B', pak platí $|AB| = |A_2B_2| = |A'B'|$. Jako v případě přímky rovnoběžné se základnicí jsme jen nahradili pravoúhé promítání do průmětny kosoúhlým průmětem.



Obr. 8

Pomocí předchozích konstrukcí můžeme určit skutečnou velikost úsečky AB ležící na obecné přímce A.[11] Máme dán perspektivní průmět a^s přímky a a perspektivu půdorysu a_1^s. Půdorys a_1 leží v π, takže pomocí dělicího bodu určíme skutečnou velikost úsečky A_1B_1, což je pravoúhlý průmět úsečky AB do π. Dále určíme velikost svislých úseček AA_1, BB_1 (například promítnutím z bodu ${}^aU^s$). Sestrojíme ve skutečné velikosti lichoběžník AA_1B_1B a získáme tak skutečnou velikost úsečky AB.

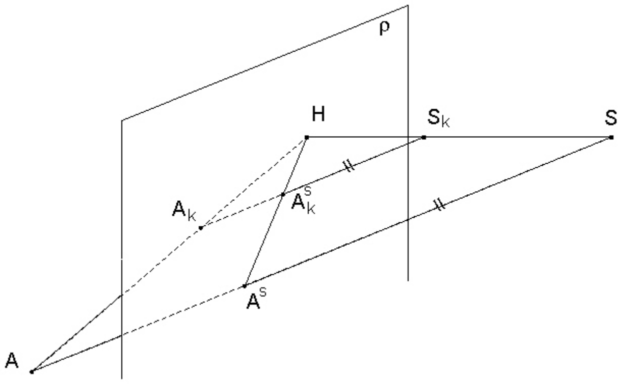


Obr. 9

[11] V praxi se však většinou ve volné perspektivě nevyužívá, většinou se sestrojují půdorysy v základní rovině a poté se vynášejí výšky.

2.1 Redukce distance

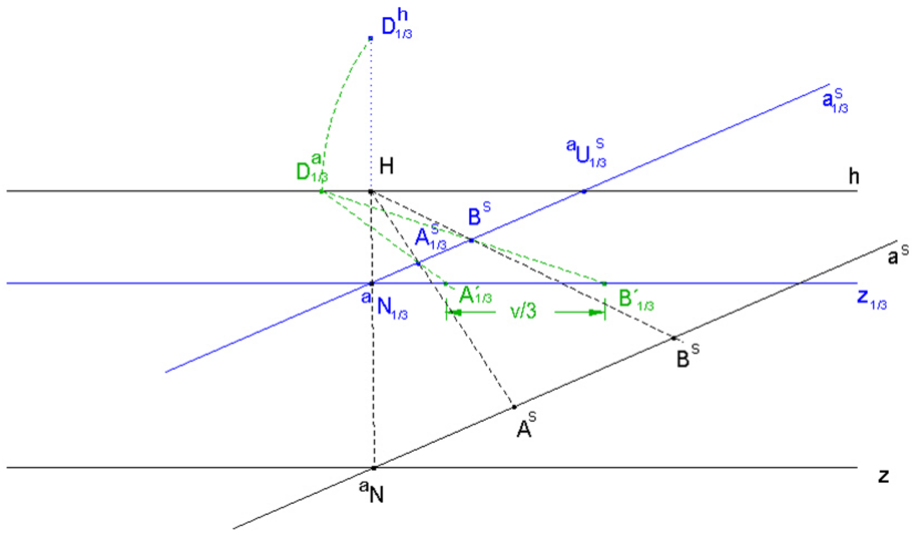
Abychom pro perspektivní obraz využili co největší část nákresny, je třeba volit větší distanci a pak vychází distančníky i dělící body mimo nákresnu. Tento problém řešíme pomocí tzv. *redukce distance*. V prostoru uvažujeme *stejnolehlost* se středem H a koeficientem k.[12] V této stejnolehlosti se střed promítání S zobrazí do bodu S_k bod A do bodu A_k a perspektiva A^s bodu A se zobrazí do A_k^s. Z vlastností stejnolehlosti je zřejmé, že A_k^s je také průmět bodu A_k do průmětny ρ z bodu S_k.



Obr. 10

Této metody využíváme především pro konstrukci perspektiv půdorysů objektů nebo pro konstrukci dělících bodů a pomocí nich pak konstrukci provádíme v původní perspektivě.

Příklad 3 Na přímku a ležící v π naneste od bodu A úsečku dané velikosti v, úběžník ${}^aU^s$ přímky a leží mimo nákresnu.

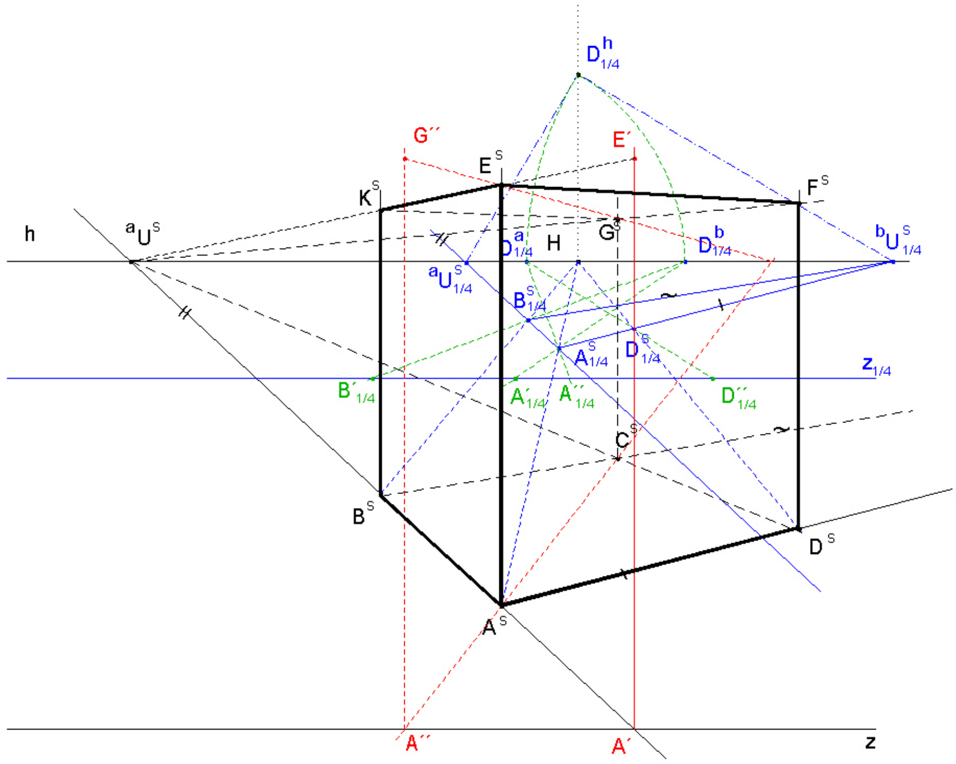


Obr. 11

[12] Aby metoda měla požadovaný efekt je k větší než nula a menší než 1.

Řešení: Zvolíme vhodnou stejnolehlost, např. s koeficientem $k = \frac{1}{3}$, střed stejnolehlosti je H. Sestrojíme obraz daných objektů v této stejnolehlosti – základnici $z_{\frac{1}{3}}$, přímku $a_{\frac{1}{3}}$. Pro přímku $a_{\frac{1}{3}}$ sestrojíme dělící bod a naneseme pomocí něj na přímku $a_{\frac{1}{3}}$ od bodu $A_{\frac{1}{3}}$ úsečku délky $v_{\frac{1}{3}}$. Její druhý koncový bod $B_{\frac{1}{3}}$ zobrazíme ve stejnolehlosti do bodu B^s na přímku a^s, úsečka AB má požadovanou délku v.

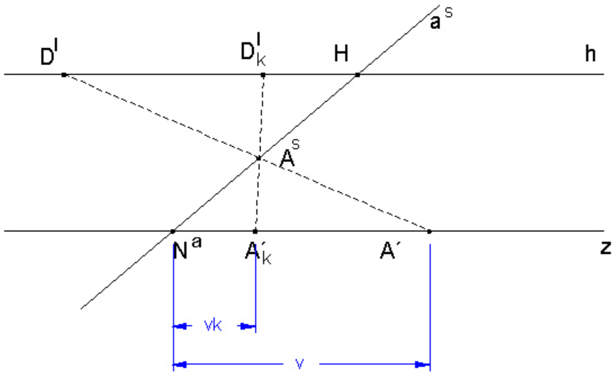
Příklad 4 Sestrojte perspektivu krychle, jejíž stěna $ABCD$ leží v π, jsou-li dány vrcholy A, B, perspektiva je dána horizontem, základnicí a distancí.
Řešení: Užijeme například redukce s koeficientem $k = \frac{1}{4}$ a určíme horní distančník $D^{h}{}_{\frac{1}{4}}$. Pro přímku $a = AB$ známe úběžník ${}^aU^s$, sestrojíme přímku $a_{\frac{1}{4}}$, její úběžník i dělící bod a body $A_{\frac{1}{4}}$, $B_{\frac{1}{4}}$. Sklopením obzorové roviny π' určíme úběžník přímky $b_{\frac{1}{4}}$, která prochází bodem $A_{\frac{1}{4}}$ a je kolmá na přímku $a_{\frac{1}{4}}$. Na ní určíme bod $D_{\frac{1}{4}}$ – vrchol podstavy. Sestrojíme přímku ${}^bU^sA^s$ – je rovnoběžná s ${}^bU^s_{\frac{1}{4}}A^s_{\frac{1}{4}}$ – a přímku ${}^bU^sB^s$ – je rovnoběžná s ${}^bU^s_{\frac{1}{4}}B^s_{\frac{1}{4}}$. Užitím stejnolehlosti sestrojíme bod D^s na a^s. Bod C je průsečíkem přímek DC a BC, přímka DC je rovnoběžná s přímkou AB – mají tedy společný úběžník. Užitím redukce distance jsme sestrojili stěnu krychle ležící v základní rovině, hrany kolmé k π sestrojíme už v původní perspektivě. Hranu A^sE^s promítneme například z bodu ${}^aU^s$ do úsečky $A'E'$ – platí $|A'E'| = 4|A'_{\frac{1}{4}}B'_{\frac{1}{4}}|$. Protože úběžník přímky AD je nedostupný, je třeba ještě nanést velikost hrany krychle na některou další svislou přímku – například procházející bodem C, na obrázku 12 je sestrojen bod G, hrana CG se promítá z průsečíku perspektivy přímky AC s horizontem.



Obr. 12

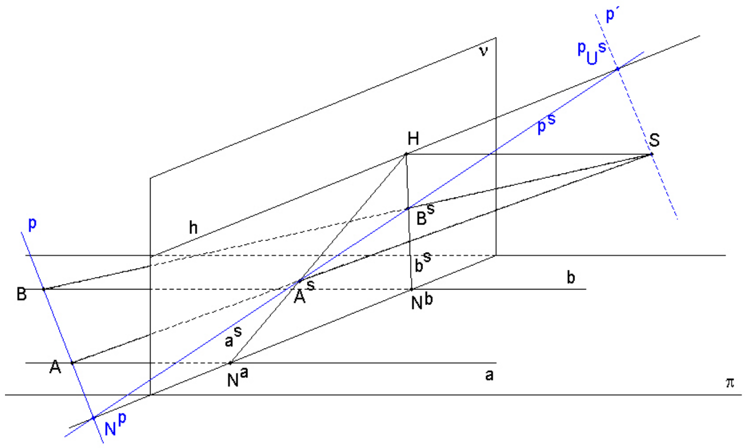
2.2 Metoda hloubkových přímek

Aplikujeme-li metodu redukce distance na hloubkové přímky, konstrukce se zjednoduší. Předpokládejme, že a je hloubková přímka, N^a její stopník, A její další bod. Perspektiva je dána horizontem, základnicí a levým distančníkem. Zvolme stejnolehlost se středem H a koeficientem k. D^l se zobrazí do D^l_k, perspektiva a^s prochází středem stejnolehlosti, v dané stejnolehlosti je tedy slabě samodružná. Sestrojme přímku $D^l_k A^s$ a označme A'_k její průsečík se základnicí. Označíme-li A' průsečík $D^l A^s$ se základnicí, určuje úsečka $N^a A'$ skutečnou velikost úsečky $N^a A$. Platí $\triangle N^a A'_k A^s \sim \triangle H D^l_k A^s$ a $\triangle N^a A' A^s \sim \triangle H D^l A^s$, tedy $|HD^l| = k|HD^l_k|$, a proto také $|N^a A'| = k|N^a A'_k|$. Na hloubkovou přímku lze tedy úsečku dané délky nanášet z redukovaného distančníku. Chceme-li úsečku délky v od daného bodu A, promítneme A^s z redukovaného distančníku do A'_k na základnici, naneseme úsečku délky v_k a koncový bod promítneme zpět.



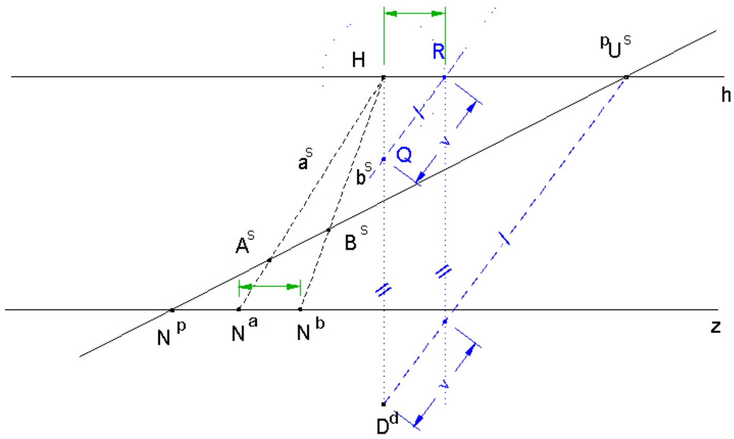
Obr. 13

Z uvedeného zjednodušení pro hloubkové přímky je pak uvedena další metoda pro nanášení úsečky dané délky na přímku ležící v základní rovině, tzv. *metoda hloubkových přímek*. Nechť p je přímka ležící v π, A, B dva její body. Body A, B vedeme hloubkové přímky a, b a sestrojíme perspektivy přímek i bodů. Označme p' směrovou přímku přímky p, ${}^pU^s$ úběžník přímky p, N^a, N^b po řadě stopníky přímek a, b. Platí $\triangle N^p N^a A \sim \triangle N^p N^b B \sim \triangle^p U^s HS$.



Obr. 14

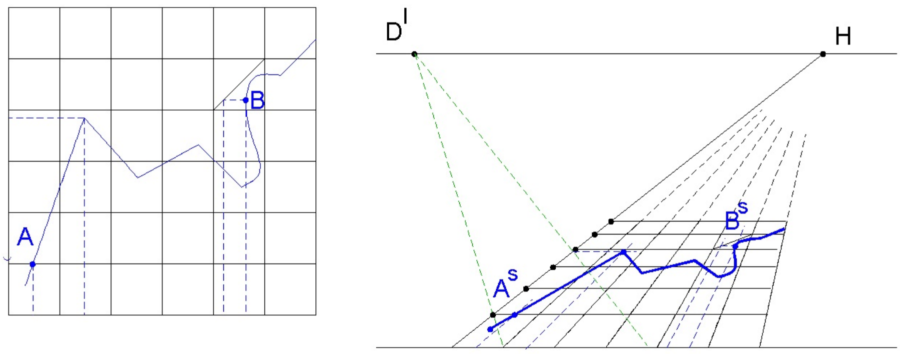
Perspektivu mějme dánu horizontem, základnicí a dolním distančníkem. Platí $|^pU^sS| = |^pU^sD^d|$, z podobnosti trojúhelníků zřejmě $|AB| : |N^aN^b| = |^pU^sS| : |^pU^sH|$ a tedy také $|AB| : |N^aN^b| = |^pU^sD^d| : |^pU^sH|$. Sestrojíme trojúhelník HRQ podobný trojúhelníku $H^pU^sD^d$ tak, aby platilo $|N^aN^b| = |HR|$. Pak také bude platit $|RQ| = |AB|$. Známe-li body A, B a hledáme skutečnou velikost úsečky AB je konstrukce trojúhelníku HRQ triviální, nanášíme-li od bodu A úsečku dané délky v, musíme sestrojit pravoúhlý trojúhelník HRQ, známe-li pravý úhel a velikost přepony.



Obr. 15

2.3 Perspektiva složitějších půdorysů

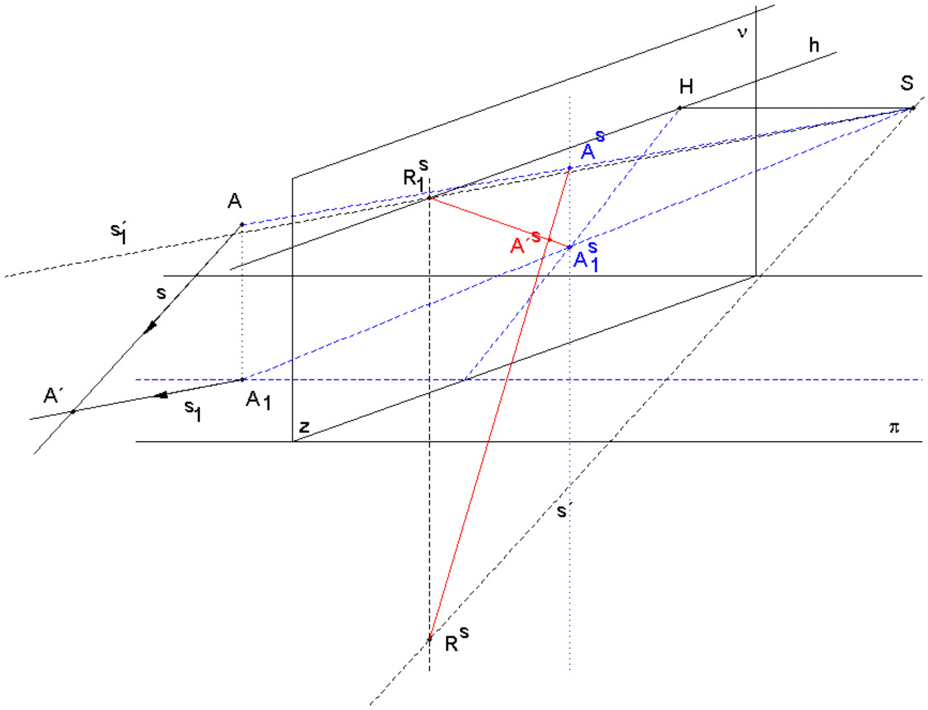
Pro složitější půdorysy jsou někdy uvedené metody příliš náročné, proto se používá tzv. *gratikoláž*. Půdorys pokryjeme dostatečně hustou čtvercovou sítí a sestrojíme perspektiva této sítě. Perspektiva půdorysu se pak určuje bodově. Body půdorysu můžeme promítat například hloubkovými přímkami na průčelné přímky sítě (bod A), promítnutím průčelnou přímkou na hloubkovou přímku, případně promítnutím na úhlopříčku čtverce sítě a poté hloubkovou přímkou na průčelnou přímku (bod B), nebo kombinací těchto metod.



Obr. 16

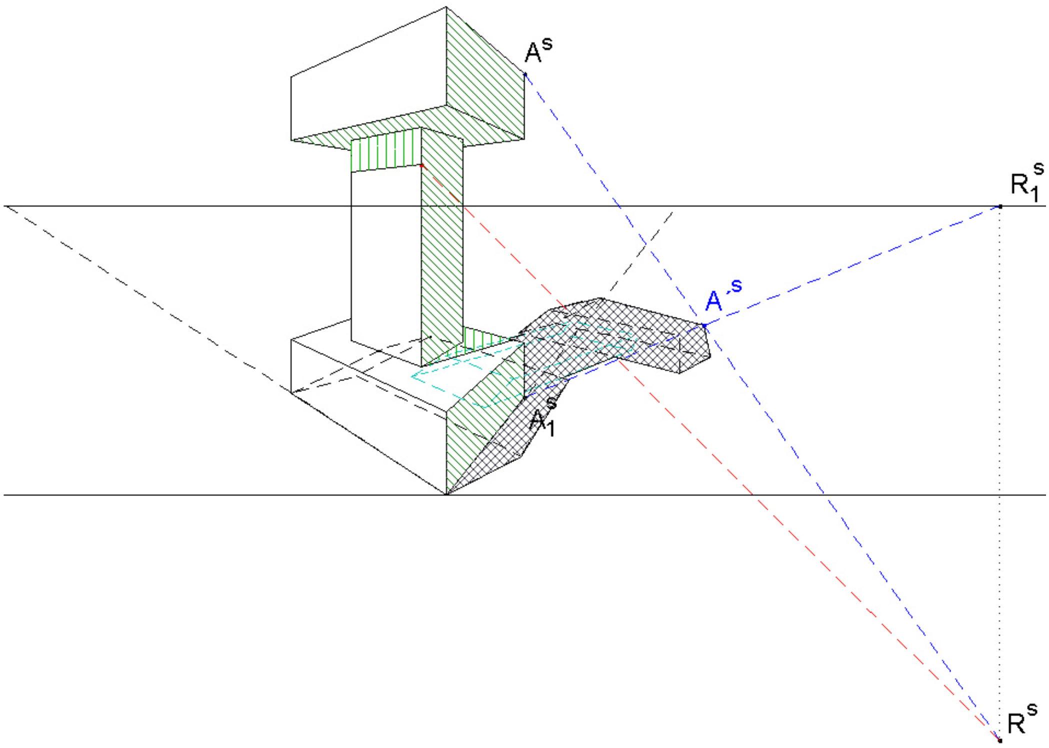
2.4 Osvětlení a zrcadlení v perspektivě

Pro zvětšení názornosti perspektivního obrazu používáme rovnoběžného osvětlení (nejčastěji sestrojujeme vržený stín do základní roviny) nebo zrcadlení.
Uvažujme rovnoběžné osvětlení, které je dáno směrem s a sestrojme pravoúhlý průmět s_1 směru s do základní roviny π. Úběžníky přímek směrů s a s_1 po řadě označíme R^s a R_1^s. Je zřejmé, že R_1^s leží na horizontu a přímka $R^s R_1^s$ je kolmá na h. Sestrojujeme-li vržený stín A' bodu A do π, vedeme bodem A přímku směru s a určíme její průsečík s π, tzn., že A' je průsečík přímek směrů s a s_1 vedených body A a A_1. Pro perspektivní průměty je tedy A'^s průsečík přímek $A^s R^s$ a $A_1^s R_1^s$.



Obr. 17

Na obrázku 18 je sestrojeno osvětlení jednoduchého útvaru, mez stínu vrženého útvarem na sebe se, jako vždy, určí pomocí zpětných paprsků. Konstrukce je obdobná jako u rovnoběžných projekcí, pouze navzájem rovnoběžné přímky prochází jedním úběžníkem.



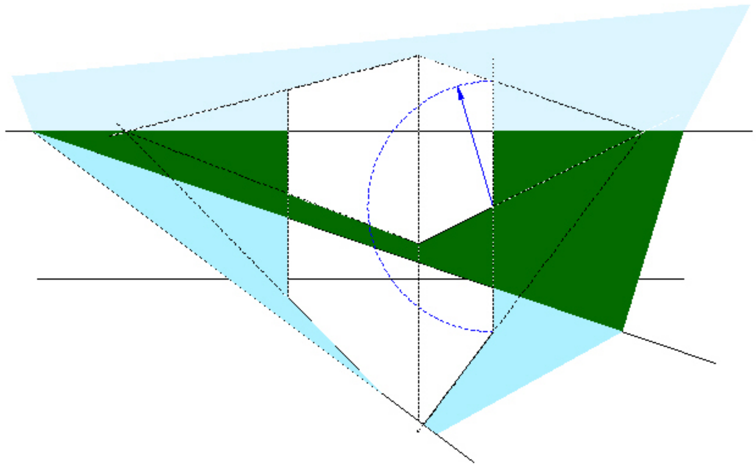
Obr. 18

Zrcadlení v rovinném zrcadle nebo ve vodní hladině je vlastně konstrukce útvaru v rovinové souměrnosti podle roviny zrcadla či vodní hladiny. Nejčastěji se pro zvýšení názornosti používá zrcadlení podle vodorovné roviny – vodní hladina, nebo svislé roviny – zrcadlo. Využíváme známé vlastnosti světelných paprsků, úhel dopadu paprsků jdoucích od předmětu do oka se rovná úhlu odrazu paprsku od roviny zrcadlení, tedy kromě bodu A vidíme z oka S také bod A_z souměrně sdružený s bodem A podle roviny zrcadla.

Pokud je rovina zrcadla vodorovná, jsou kolmice na tuto rovinu svislé a zrcadlené obrazy bodů se v tomto případě sestrojují přímým přenášením délek úseček, tj. platí $|AA_1| = |A_1A_z|$, $|A^sA_1^s| = |A_1^sA_z^s|$. Označíme-li S_z bod souměrně sdružený s okem S podle roviny zrcadla a P průsečík přímky AS_z s rovinou zrcadla, pak perspektivní průmět P^s bodu P splývá s perspektivním průmětem A_z^s zrcadleného bodu A_z.

Na obr. 19 je zobrazen kvádr stojící na π a jeho zrcadlení ve vodní hladině (část roviny). Zobrazujeme jen viditelné části.

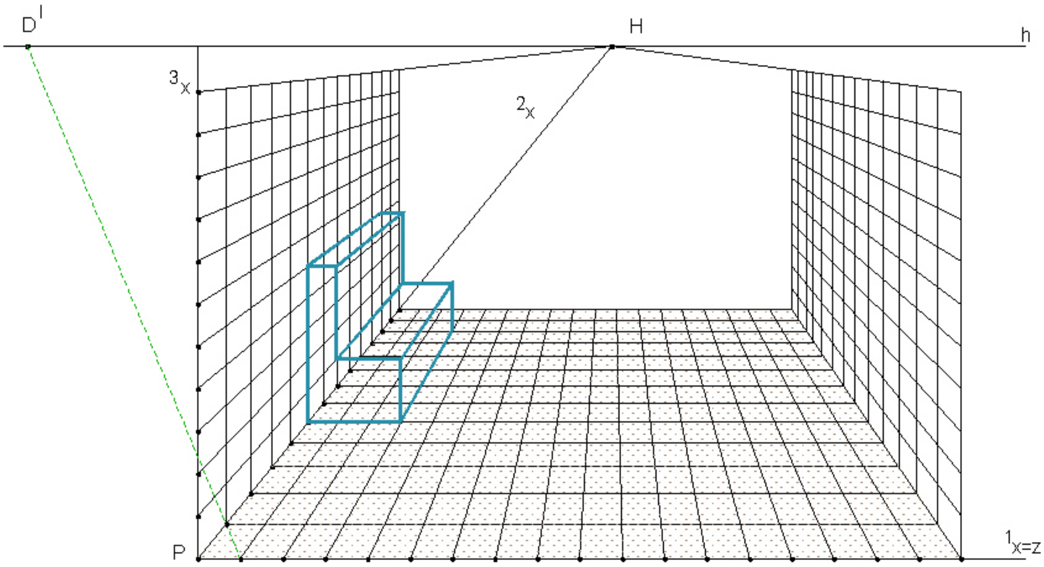
Pokud rovina zrcadla není kolmá na průmětnu, musíme již známými konstrukcemi sestrojit úběžník kolmic na rovinu zrcadla a sestrojit zrcadlený obraz, tj. nalézt na komici k zrcadlu jdoucí bodem A takový bod A_z, pro nějž platí $|AA_1| = |A_1A_z|$, kde A_1 je průsečík kolmice se zrcadlem.



Obr. 19

3 Průčelná perspektiva

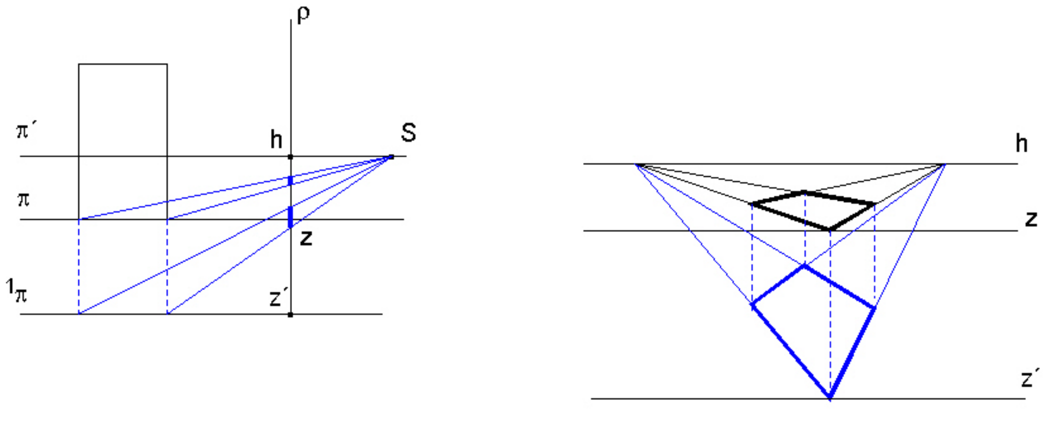
Mějme dán objekt, jehož perspektivu chceme sestrojit a zvolme pravoúhlý souřadnicový systém s osami ${}^1x$, ${}^2x$, ${}^3x$, které jsou rovnoběžné s hranami daného objektu. (Daný objekt můžeme také, podobně jako při použití incidenčního měřítka, obalit vhodným kvádrem, souřadnicové osy pak budou splývat s hranami kvádru.) Perspektiva je dána horizontem, základnicí a některým z distančníků. Osy označme tak, aby ${}^1x$, ${}^2x$ ležely v základní rovině. Takto zvolený souřadnicový systém nazýváme přidružený k danému objektu. Protože průmětna ρ je zatím volena tak, aby byla kolmá k základní rovině , je osa ${}^3x$ rovnoběžná s ρ. Je-li s průmětnou ρ rovnoběžná i další z os (např. ${}^1x$), pak je objekt v průčelné poloze a zobrazujeme jej v tzv. *průčelné perspektivě*. Pouze osa ${}^2x$ má vlastní úběžník (je hloubková přímka, úběžník je H), proto je tato perspektiva také nazývána *jednoúběžníková*. Souřadný systém vytvoří čtvercové sítě, sestrojíme perspektivu některých těchto sítí. Průčelná perspektiva se používá nejčastěji pro zobrazování interiérů v bytové architektuře, sestrojujeme sítě ve třech vhodných rovinách (podlaha a dvě protější stěny kolmé k ρ.) Mějme dánu perspektivu základnicí, horizontem, hlavním bodem a například levým distnčníkem. Osu ${}^1x$ ztotožníme se základnicí z (leží v ρ, jednotky na ni nanášíme ve skutečné velikosti), osu ${}^3x$ vedeme libovolným vhodně zvoleným bodem P na základnici (leží rovněž v ρ, jednotky ve skutečné velikosti.) Osa ${}^2x$ je hloubková přímka, její perspektiva je přímka PH. (Jednotky na ni nanášíme pomocí levého nebo pravého distančníku.) Sestrojíme sítě (jednotkami na osách vedeme rovnoběžky se zbývajícími osami) a s využitím sítí zakreslíme interiér.



Obr. 20

4 Nárožní perspektiva

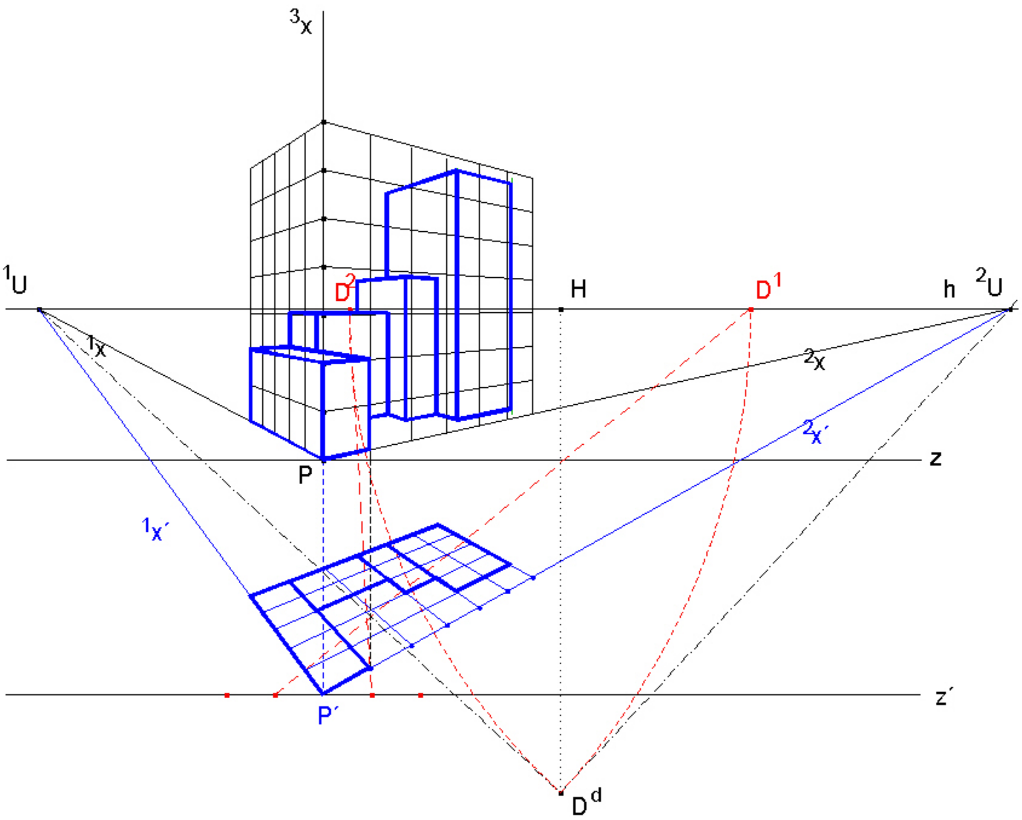
Zobrazovanému objektu opět přiřadíme přidružený souřadnicový systém tak, aby osa ^3x byla rovnoběžná s průmětnou ρ. Osy ^1x a ^2x leží v π, ovšem žádná není rovnoběžná s ρ. Objekt je v nárožní poloze a zobrazujeme jej v tzv. *nárožní perspektivě*. Protože osy ^1x a ^2x mají úběžníky ^1U, ^1U nazýváme někdy tuto perspektivu *dvojúběžníková*. Zobrazujeme opět čtvercové sítě vhodných rovin a pomocí nich sestrojujeme perspektivu objektu. Perspektiva je zadána základnicí, horizontem, hlvním bodem a například dolním distančníkem. Nárožní perspektiva se používá především pro zobrazování budov, ulic, komunikací apod. (rozsáhlejší objekty).



Obr. 21

Protože pozorovatel a objekt stojí na základní rovině, půdorys objektu je vidět pod malým úhlem a tedy velmi zkresleně a při konstrukcích může docházet k větším nepřesnostem. Pro konstrukci čtvercové sítě v půdorysu (a tím i celého půdorysu) používáme tzv. *sníženého (sklepního) půdorysu*. Zvolíme pomocnou rovinu ${}^1\pi$ rovnoběžnou s π ("pod"rovinou π) a půdorys pravoúhle promítneme do ${}^1\pi$. Je zřejmé, že perspektiva původního půdorysu a sníženého půdorysu si odpovídají v pravoúhlé afinitě s osou h.

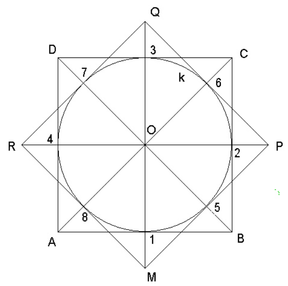
Při konstrukci perspektivy objektu sestrojíme perspektivu sníženého půdorysu (čtvercovou síť) a dále čtvercové sítě dané např. rovinami $({}^1x{}^3x)$ a $({}^2x{}^3x)$. Zvolíme bod P na základnici a sestrojíme osu ${}^3x$ procházející P. (Jednotky na ní budou opět ve skutečné velikosti) Osy ${}^1xx$ a ${}^2x$ budou procházet bodem P, jejich perspektivy budou přímky $P{}^1U$, $P{}^2U$, kde ${}^1U$, ${}^2U$ jsou úběžníky os ${}^1x$, ${}^2x$. Oba leží na horizontu a nelze je samozřejmě volit oba libovolně. Jeden zvolíme, druhý sestrojíme pomocí sklopení obzorové roviny. Jednotky na osách ${}^1x$, ${}^2x$ sestrojujeme s pomocí jejich dělicích bodů D_1, D_2. Čtvercovou síť sklepního půdorysu můžeme sestrojit buď tak, že sestrojíme na ose ${}^1x$ jednotky (pomocí dělicího bodu D_1, promítáním na z) a ty afinně zobrazíme na ${}^1x'$, nebo lze z bodu D_1 promítnout přímo na ${}^1x'$ jednotky ze z'. Z vlastností afinity je zřejmé, že dostáváme tytéž body.



Obr. 22

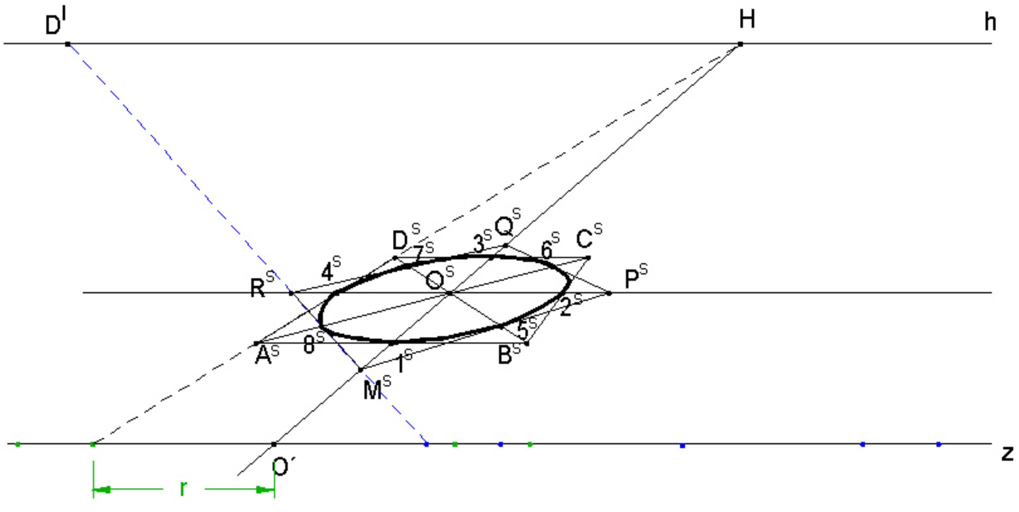
5 Perspektiva kružnice

Ve středovém promítání se kružnice, která neleží ve středově promítací rovině, zobrazí jako regulární kuželosečka. Středový průmět kružnice k je řez kužele, jehož vrchol je S a řídící kružnice k, průmětnou. V lineární perspektivě požadujeme, aby zobrazované objekty ležely v zorném poli, tj. uvnitř zorného kužele. Promítací kužel kružnice k leží uvnitř zorného kužele a jeho řez rovinou ρ (průmětna) je elipsa, příp. kružnice. Kružnici v obecné poloze lze zobrazit stejně jako ve středovém promítání, otočením roviny kružnice do průmětny a užitím kolineace. V lineární perspektivě se nejčastěji zobrazují kružnice ve vodorovné nebo svislé poloze, pro tyto případy ukážeme další konstrukci perspektivy kružnice. Kružnici k opíšeme dva čtverce $ABCD$ a $MPQR$ tak, aby jejich body dotyku (ozn. je $1, 2, ..., 8$) tvořily pravidelný osmiúhelník.



Obr. 23

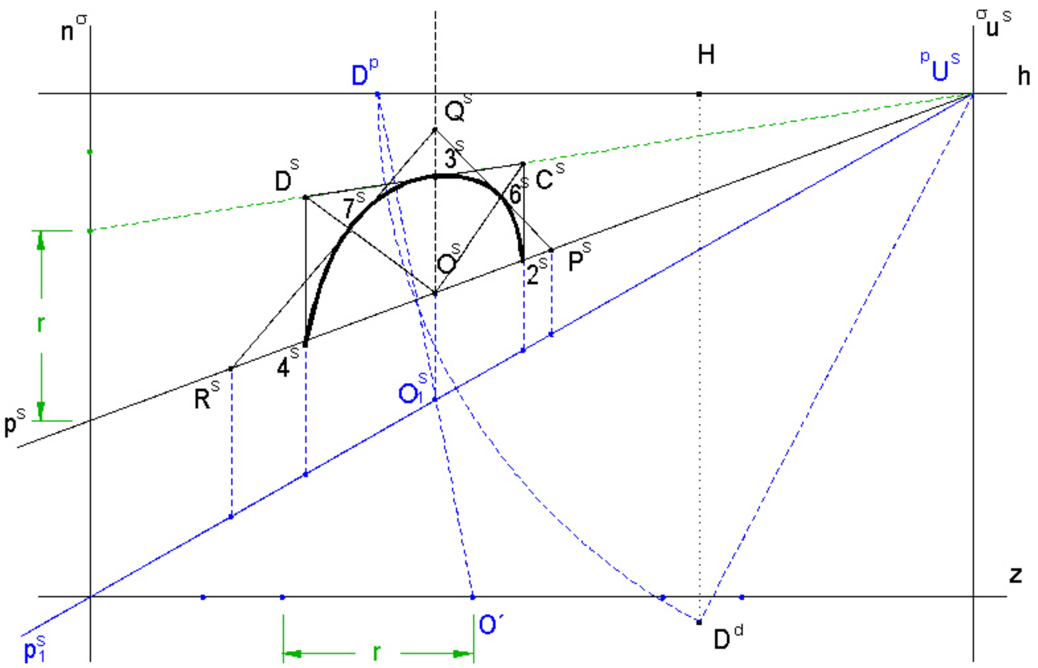
Nejprve zobrazíme kružnici ve vodorovné rovině, např. v základní rovině. Mějme dán střed O kružnice k a poloměr r. Perspektiva je opět zadána horizontem, základnicí a některým distančníkem.



Obr. 24

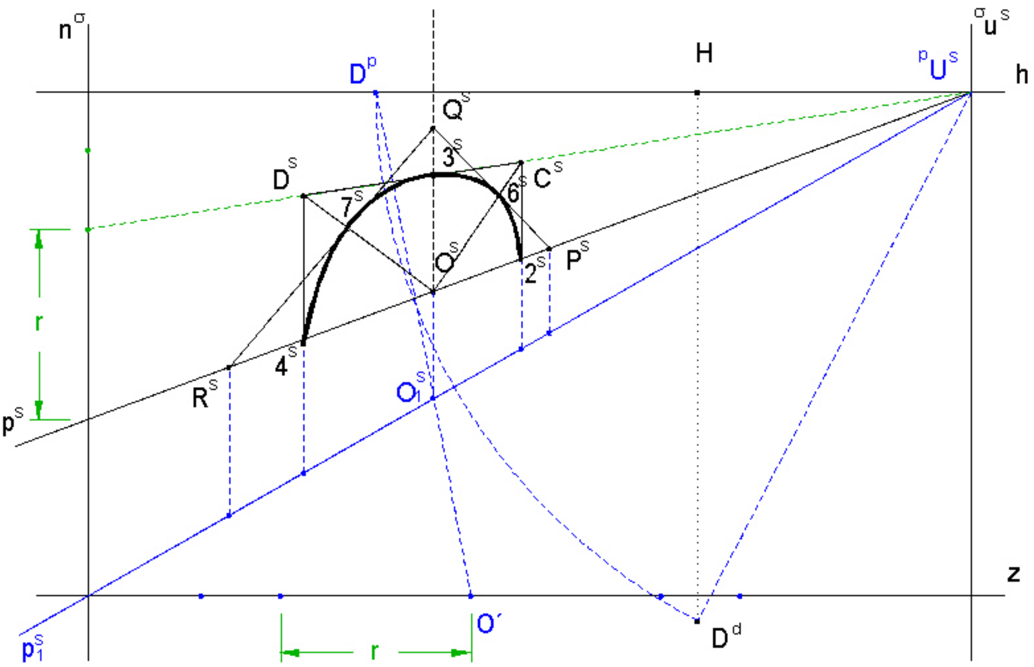
Opsané čtverce sestrojíme tak, aby strana AB byla rovnoběžná se základnicí. Sestrojíme perspektivy obou čtverců a do nich vepíšeme elipsu (Známe pro ni osm tečen s body dotyku.) Strany nebo úhlopříčky zvolených čtverců jsou buď průčelné nebo hloubkové přímky, úsečky dané délky od bodu O na ně nanášíme podle známých konstrukcí.

Ve svislé rovině se většinou nezobrazují celé kružnice, pouze jejich části (např. ozdobné štíty domů). Zobrazíme půlkružnici ve svislé rovině σ, která bude dána stopou a úběžnicí. Protože je σ kolmá k π, je stopa i úběžnice kolmá k h. (Perspektiva je zadána stejně jako v předchozím příkladě.) Čtverce dané kružnici opíšeme tentokrát tak, aby strana CD byla rovnoběžná s π. Kružnice je dána středem O (neleží v π) a poloměrem. Přímka $p = PR$ prochází O a je rovnoběžná s π. Promítneme p pravoúhle do roviny π, pravoúhlý průmět označíme p_1. Úsečky dané délky nanášíme na přímku ležící v π, tedy na p_1 a promítáme zpět na p. Známými konstrukcemi sestrojíme perspektivy čtverců a vepíšeme elipsy.



Obr. 25

Kružnici lze sestrojit také užitím otočení roviny σ kružnice do průmětny ρ, některé konstrukce se zjednoduší díky tomu, že rovina σ je svislá. Otočené vodorovné přímky jsou rovnoběžné se základnicí, zjistíme vzdálenost bodu O od nárysné stopy (osa kolineace) a sestrojíme na p_0 bod O_0. Vzdálenost opět zjišťujeme na přímce p_1. Sestrojíme otočenou půlkružnici a perspektivu některé další svislé přímky, např. procházející bodem D. Na p_1 naneseme vzdálenost této svislé přímky od nárysné stopy roviny σ. Perspektivy vodorovných přímek mají společný úběžník, můžeme sestrojit D^sC^s, 7^s6^s, odpovídající si přímky se samozřejmě protínají na ose kolineace. Bod D leží na svislé přímce, jejíž vzdálenost od nárysné stopy určíme v otočení, sestrojíme perspektivu svislé přímky. Dále např. bod 3 je průsečík vodorovné přímky CD a svislé přímky jdoucí bodem O. Můžeme sestrojit např. bod Q, jako průsečík vodorovné a svislé přímky, známe průsečík přímky Q_0R_0 s osou kolineace, sestrojíme perspektivu přímky QR atd.



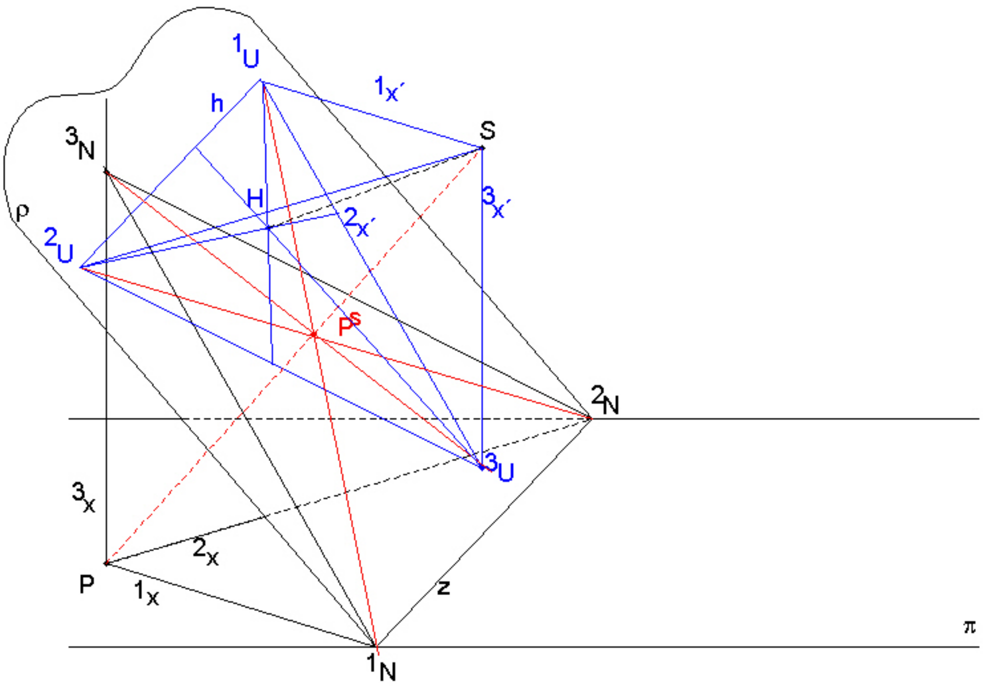
Obr. 26

6 Perspektivní axonometrie

Při konstrukci perspektivy rozsáhlejších komplexů budov, náměstí, objektů s nádvořím apod., metodami dosud používanými, se jednotlivé části překrývají a výsledný obrázek není názorný, nevidíme vše, co potřebujeme. Abychom dostali názornější obrázky, zvolíme tentokrát průmětnu ρ šikmou. Objekt bude opět stát na základní rovině π a přiřadíme mu přidružený souřadnicový systém stejně jako v průčelné a nárožní perspektivě. Na obr. 27 je volen počátek P přidruženého souřadnicového systému v π, osy ${}^1x$ a ${}^2x$ leží rovněž v π a žádná z os není tentokrát rovnoběžná s průmětnou. Označme ${}^iN$ stopníky os ${}^ix$ a ${}^iU^s$ úběžníky os ${}^ix$. Vzhledem k tomu, že průmětna není svislá, neleží hlavní bod na horizontu, horizont je průsečík obzorové roviny s ρ, tj. $h =^1 U^{s2}U^s$. Trojúhelník ${}^1N^2N^3N$ nazýváme stopníkový trojúhelník a trojúhelník ${}^1U^{s2}U^{s3}U^s$ se nazývá úbežníkový trojúhelník. Z ortogonální axonometrie víme, že trojúhelník ${}^1N^2N^3N$ je ostroúhlý a průsečík výšek je pravoúhlý průmět počátku do průmětny, tj. P_2.

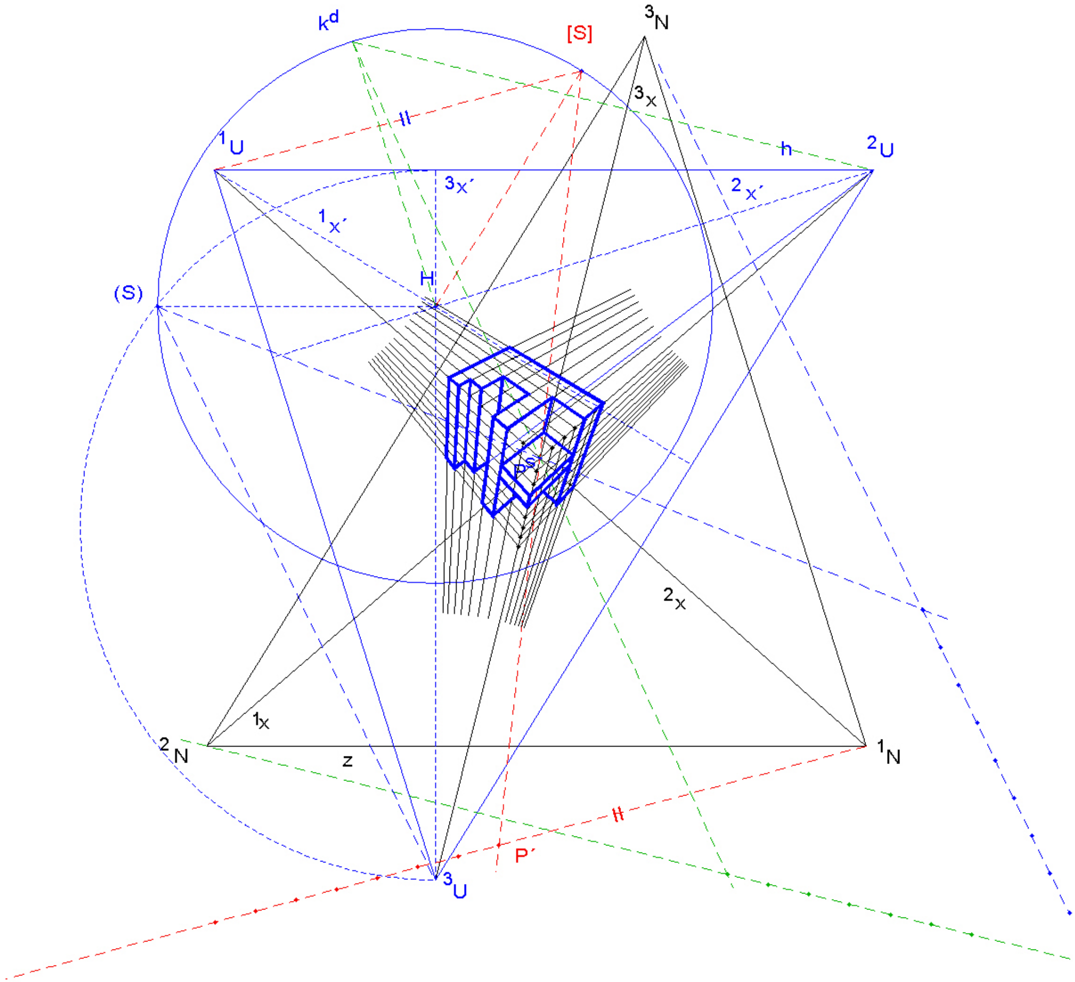
Směrové přímky os ${}^ix$ protínají průmětnu v úběžnících, opět trojúhelník ${}^1U^{s2}U^{s3}U^s$ je ostroúhlý a průsečík jeho výšek je pravoúhlý průmět průsečíku přímek ${}^ix'$, tj. hlavní bod. Protože ${}^ix$ jsou rovnoběžné s ${}^ix'$ jsou odpovídající si strany stopníkového a úběžníkového trojúhelníku rovnoběžné, tzn., že si odpovídají v nějaké homotetii. Protože spojnice odpovídajících si bodů prochází středem homotetie je středový průmět P^s počátku P středem homotetie. (Střed homotetie může být i nevlastní, tak by si ovšem trojúhelníky odpovídaly v posunutí, středový průmět počátku by byl nevlastní, což by znamenalo, že leží v centrální rovině a tedy mimo zorný kužel.

Pokud by $P = S$, pak by trojúhelníky splynuly, průmětem os by byly body a bod P by opět neležel uvnitř zorného kužele. Střed homotetie je tedy vlastní, což znamená, že trojúhelníky si odpovídají ve stejnolehlosti se středem P^s.) Osy protínají průmětnu ve třech bodech, proto se tato perspektiva nazývá buď *trojúbežníková perspektiv*a nebo také *perspektivní axonometrie*.



Obr. 27

Sestrojíme perspektivu přidruženého souřadnicového systému. Zvolme si v nákresně (ztotožníme ji s průmětnou ρ dva stejnolehlé trojúhelníky ${}^1N{}^2N{}^3N$, ${}^1U^s{}^2U^s{}^3U^s$. Průsečík výšek v úběžníkovém trojúhelníku je hlavní bod, jeho vzdálenost od průmětny je distance. Tu určíme stejně jako v ortogonální axonometrii, například sklopením pravoúhle promítací roviny přímky ${}^3x'$. Známe distanci, sestrojíme distanční kružnici k_d. Průsečík přímek ${}^1x$= ${}^1N{}^1U^s$, ${}^2x$=${}^2N{}^2U^s$s a ${}^3x$=${}^3N{}^3U^s$ (střed stejnolehlosti) je bod P^s. Naneseme jednotky na jednotlivé osy a sestrojíme čtvercovou síť. Jednotky nanášíme užitím dělicí kružnice. (Například pro osu ${}^1x$, sklopíme její směrovou přímky ${}^1x'$ do průmětny a dělicí kružnice je kružnice se středem ${}^1U^s$ a poloměrem ${}^1U^s[S]$). Pomocí čtvercové sítě sestrojíme perspektivu podobně jako v průčelné či nárožní perspektivě. Ukázali jsme, že zadáním stopníkového a úběžníkového trojúhelníku je perspektivní axonometrie jednoznačně určena.



Obr. 28