



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Rozšíření akreditace učitelství matematiky a učitelství deskriptivní geometrie
na PŘF UP v Olomouci o formu kombinovanou

CZ.1.07/2.2.00/18.0013

ROTAČNÍ PLOCHY

Lenka JUKLOVÁ

Obsah

1	Obecné rotační plochy	7
1.1	Základní konstrukce na rotačních plochách	7
1.2	Řez rotační plochy rovinou.	17
1.2.1	Průsečíky přímky s rotační plochou.	19
1.3	Průniky rotačních ploch.	23
1.3.1	Průnik rotačních ploch s rovnoběžnými osami	23
1.3.2	Průnik rotačních ploch s různoběžnými osami	25
1.3.3	Průnik rotačních ploch s mimoběžnými osami	26
1.4	Osvětlení rotačních ploch.	29
1.4.1	Metody konstrukce meze vlastního stínu	30
1.4.2	Osvětlení rotační plochy.	34
1.5	Zobrazení rotačních ploch v různých projekcích.	42
1.5.1	Obrys plochy v Mongeově projekci	42
1.5.2	Obrys plochy v ortogonální axonometrii	44
1.5.3	Obrys plochy v kosoúhlém promítání	45
1.6	Technické osvětlení rotačních ploch.	51
1.6.1	Metody konstrukce bodů meze stínu vlastního a vrženého	51
1.6.2	Technické osvětlení rotační plochy	55
2	Rotační kvadriky	61
2.1	Definice rotačních kvadrik a jejich vlastnosti	61
2.2	Řezy rotačních kvadrik	69
2.2.1	Rotační elipsoidy	69
2.2.2	Rotační paraboloid	70
2.2.3	Rotační hyperboloidy	73
2.3	Průsečíky přímky s rotační kvadrikou	78
2.3.1	Průsečíky přímky s rotačními elipsoidy.	78
2.3.2	Průsečíky přímky s rotačním paraboloidem.	79
2.3.3	Průsečíky přímky s rotačními hyperboloidy.	79
2.4	Tečné roviny rotační kvadriky procházející přímkou	82
2.4.1	Tečné roviny bodových kvadrik	82
2.4.2	Tečné roviny přímkových kvadrik	85
2.5	Průniky rotačních kvadrik	88
2.6	Rovnoběžné osvětlení rotačních kvadrik	92
2.7	Zobrazení rotačních kvadrik v různých projekcích	101
2.7.1	Obrys rotační kvadriky v Mongeově projekci	101
2.7.2	Obrys rotační kvadriky v kótovaném promítání	103
2.7.3	Obrys rotační kvadriky v pravoúhlé axonometrii	104

3	Přibližné konstrukce na empirických křivkách	107
3.1	Konstrukce tečny ke křivce v jejím bodě	107
3.2	Konstrukce tečny ke křivce z bodu neležícího na křivce	108
3.3	Konstrukce paty normály na křivku z bodu na ní neležícího	108

Úvod

Rotační plochy jsou všude kolem nás. Rotační plochy či jejich části vidíme na věcech běžné denní potřeby, tvoří různé stavební prvky, využívají se ve strojírenství, objevují se v umění a v mnoha dalších oborech. Často je třeba přesně zkonstruovat části rotačních ploch, jejich průniky a vše přesně zakreslit v různých zobrazovacích metodách. Nejen proto jsou rotační plochy podrobně studovány v mnoha oborech.

Předložený učební text je věnován především studiu rotačních ploch. Text je rozdělen do tří kapitol. První dvě kapitoly jsou stěžejní a jsou věnovány právě rotačním plochám. První kapitola podrobně popisuje obecné rotační plochy, tedy plochy, které vzniknou rotací prostorové křivky kolem osy rotace. Nejprve se čtenář seznámí se základními vlastnostmi a konstrukcemi rotačních ploch, tj. zavedení pojmů souvisejících s rotačními plochami jako jsou například rovnoběžky, meridiány, rovník, hrdlo apod. Jsou zde uvedeny konstrukce rotačních ploch ze zadaných prostorových křivek. Dále jsou ukázány řezy rotačních ploch a průniky rotačních ploch. Závěr první kapitoly je věnován osvětlení rotačních ploch a využití osvětlení při zobrazování rotačních ploch v různých projekcích.

Druhá kapitola studuje regulární rotační kvadriky, jejich definice a vlastnosti (včetně polárních), dále řezy rotačních kvadrik a průsečíky přímky s kvadrikou. Na rozdíl od obecných rotačních ploch je pro rotační kvadriky ukázána konstrukce tečných rovin procházejících přímkou. S využitím znalostí z první kapitoly se pak řeší průniky rotačních kvadrik, osvětlení rotačních kvadrik a jejich zobrazení v různých zobrazovacích metodách.

Vzhledem k tomu, že v první kapitole jsou probírány obecné rotační plochy zadané obecnými křivkami, je ve skriptu zařazena třetí kapitola, ve které je přehled konstrukcí na empirických křivkách. V kapitole je stručně zopakováno učivo z bakalářského studia, konstrukce tečen a normál obecných rovinných křivek.

Pro usnadnění konstrukcí je ve skriptu většina obecných rotačních ploch zadána meridiány, které jsou složeny z oblouků kružnic. V obrázku je v takových případech vyznačen střed příslušného oblouku a tak je usnadněna konstrukce normál i tečen meridiánů.

Skriptum je určeno především posluchačům navazujícího dvouoborového magisterského studia učitelství deskriptivní geometrie, pokrývá učivo předmětu Plochy technické praxe 1. Mohou jej však využít i studenti jiných oborů, především tam, kde potřebují získat názornou představu o rotačních kvadrikách a jejich vlastnostech.

Pro názornost výkladu je text je doplněn ikonami, jejichž význam je uveden na následující straně.

Na závěr děkuji i oběma recenzentkám RNDr. Miloslavě Sedlářové, CSc. a Mgr. Marii Chodorové, Ph.D za cenné rady a připomínky.

Autorka

Olomouc, květen 2012

Seznam ikon užívaných v textu



Průvodce studiem

Pasáž, v níž zbavíme studenta strachu z nového učiva, poukážeme na propojenost učiva s předchozí kapitolou, uvedeme, co již student zná z předmětu v předchozím ročníku, ze SŠ, s čím se setkal v praxi.



Pasáž pro zájemce

Tato část textu je určena těm z vás, kteří máte zájem o hlubší studium problematiky, nebo se chcete dozvědět i nějaké zajímavé podrobnosti vztahující se k tématu. Vše, co najdete v této pasáži, je zcela dobrovolné.



Upozornění

Slouží pro upozornění na nějakou chybu, které se studenti často (a úplně zbytečně) zejména pro nepozornost dopouštějí.



Odkazy na on-line zdroje

Slouží jako místo pro odkazy na další zdroje, které lze nalézt na netu.



Úlohy k procvičení

Tyto pasáže mají za úkol učivo procvičit, zopakovat, upevnit.



Literatura

V této části najdete přehled všech zdrojů a literatury, ze které jsem čerpala při zpracování textu. Tento seznam slouží také jako zdroj informací pro zájemce o další podrobnější studium a doplnění poznatků.

Kapitola 1

Obecné rotační plochy

1.1 Základní konstrukce na rotačních plochách



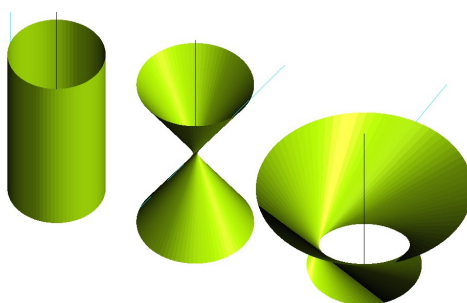
Rotační plochy vznikají rotačním pohybem kolem osy. Máme-li v prostoru dānu pŕímku o a orientovaný ůhel, máme zadāno otāčení - shodnĕ zobrazenĕ trojrozmĕrnĕho eukleidovskĕho prostoru. Pŕímka o se nazŕvā osa otāčení, jejĕ body jsou samodruŕnĕ. Mnoŕina vĕch otāčení kolem osy se nazŕvā rotační pohyb nebo rotace kolem osy o . Trajektorie (drāha) kaŕdĕho bodu A neleŕícího na ose je kruŕnice.

Definice 1.1.1 Mĕjme dānu prostorovou kŕivku k , kterā není čāstĕ osy o ani ŕādĕnĕ trajektorie pŕi rotaci kolem o . Rotací kŕivky k kolem o vznikā rotační plocha $\Phi(o, k)$. Pŕímka o se nazŕvā *osa rotační plochy*, kŕivka k se nazŕvā *tvoŕící kŕivka*.

Poznāмка 1.1.1 Leŕĕ-li kŕivka k v rovinĕ kolmĕ k o , pak rotací vznikne čāst roviny kŕivky a tento pŕĕpad budeme vylučovat.

Definice 1.1.2 Nechĕ A je bod tvoŕící kŕivky k rotační plochy $\Phi(o, k)$ neleŕící na ose. Trajektorie bodu A se nazŕvā *rovnobĕŕzkovā kruŕnice*, krātce *rovnobĕŕŕka*.

Podĕvejme se, jakĕ rotační plochy vzniknou rotací pŕĕmky p kolem osy o rotace.

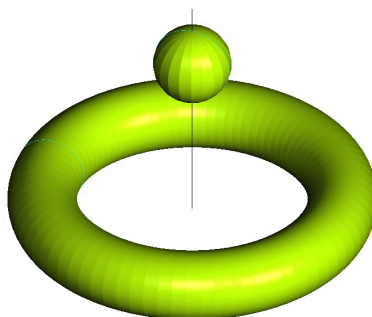


Obr. 1.1.1

Zāleŕĕ na vzājemnĕ poloze pŕĕmky p a osy o rotace. Leŕĕ-li pŕĕmka p a osa o v jednĕ rovinĕ, pak vzniknou plochy, se kterĕmi byl jĕŕ čtenāŕ podrobnĕ seznāmen v kurzu zobrazovacĕch metod. Pŕĕmka p rovnobĕŕznā s osou o vytvoŕĕ rotační plochu vālcovou. Pŕĕmka

p různoběžná s osou vytvoří rotační plochu kuželovou. Je-li přímka p mimoběžná s osou, opíše rotační jednodílný hyperboloid. Tato plocha bude podrobněji studována v druhé kapitole.

Další známou plochu získáme rotací kružnice k , pro niž je osa rotace osou souměrnosti. Kružnice k pak rotačním pohybem opíše plochu kulovou. Jiná plocha v praxi často užívaná je *anuloid*. Plocha vzniká rotací kružnice k , jejíž rovina obsahuje osu rotace a současně osa rotace neprotíná kružnici k , viz. obr. 1.1.2



Obr. 1.1.2

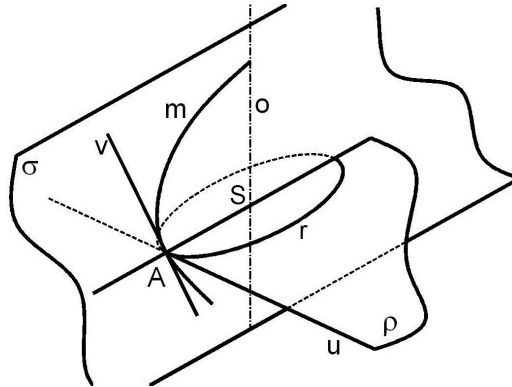
V navazující části textu bude čtenář seznámen s rotačními plochami, které vzniknou rotací kuželosečky kolem její osy, tzv. *rotačními kvadrikami*.

Mějme rotační plochu $\Phi(o, k)$, která vznikne rotací obecné křivky k . Každá křivka m , která protíná všechny rovnoběžky a obsahuje všechny body plochy ležící na ose, vytváří při rotaci tutéž rotační plochu, tvořící křivka tedy není určena jednoznačně. Proto rotační plochu obvykle zadáváme rovinnou křivkou, jejíž rovina prochází osou o . Tato tvořící křivka se nazývá *meridián*. Všechny meridiány rotační plochy jsou shodné křivky. Rotací přechází jeden meridián v druhý, což znamená, že každý meridián je souměrný podle osy rotace. K zadání rotační plochy pak stačí část meridiánu ležící v jedné polorovině určené osou o (včetně bodů ležících na o), tato křivka se nazývá *polomeridián*. Polomeridián je opět tvořící křivkou. Každým bodem plochy neležícím na ose prochází právě jeden (polo)meridián a právě jedna rovnoběžka, rovnoběžky a (polo)meridiány tvoří síť plochy. Nadále budeme předpokládat, že polomeridiány rotační plochy jsou regulární křivky.

Věta 1.1.1 *Je-li meridián m rotační plochy $\Phi(o, k)$ regulární křivka, pak tečné roviny τ v bodech tohoto meridiánu obalují válcovou plochu, jejíž řídící křivka je m a jejíž povrchové přímky jsou kolmé k rovině σ meridiánu m .*

Důkaz: Nechť je dána rotační plocha $\Phi(o, k)$, kde o je osa rotace a k je regulární křivka. Nechť bod A je bod této plochy neležící na ose. Tímto bodem prochází právě jeden meridián m a právě jedna rovnoběžka r . Rovinu meridiánu označme σ a rovinu rovnoběžky ρ . Předpokládejme, že bod A je regulární bod meridiánu m . Existuje tečna v meridiánu m v bodě A a tečna u rovnoběžky r v bodě A . Přímky u, v tvoří tečnou rovinu τ rotační plochy Φ v bodě A . Nechť S je střed rovnoběžky r ($S \in o$). Z vlastností kružnice víme, že u je kolmá na SA . Rovina ρ rovnoběžky je kolmá k ose a tedy každá přímka roviny ρ je kolmá k ose o . Proto u je kolmá na o . Přímka SA je průsečnice rovin ρ a σ , osa o leží v rovině σ . Z toho plyne, že přímka u je kolmá na rovinu σ . Bod A je obecný bod rotační plochy Φ , u je tečna plochy Φ v bodě A . Uvažujeme-li všechny body meridiánu

m , pak u vytvoří dotykovou válcovou plochu s řídicí křivkou m , jejíž povrchové přímky jsou kolmé k rovině tvořící křivky.¹

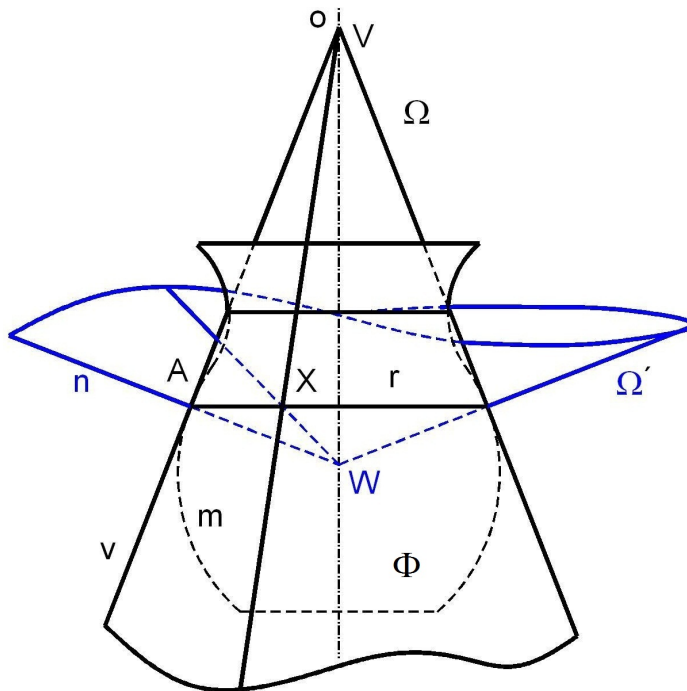


Obr. 1.1.3

□

Mějme dánu rotační plochu $\Phi(o, k)$, nechť A je její regulární bod. Bodem A prochází meridián m ležící v rovině σ a rovnoběžka r ležící v rovině ρ . V bodě A uvažujme tečnu v meridiánu m a přímku n kolmou k přímce v . Přímka n je normála plochy Φ v bodě A (tj. přímka kolmá na tečnou rovinu plochy v bodě A).

Definice 1.1.3 Přímka v opíše při rotaci rotační přímkovou plochu Ω , která se dotýká Φ podél rovnoběžky r bodu A a nazývá se *dotyková rotační kuželová plocha*. Přímka n při rotaci opíše rotační přímkovou plochu Ω' , která se nazývá *normálová rotační kuželová plocha*.

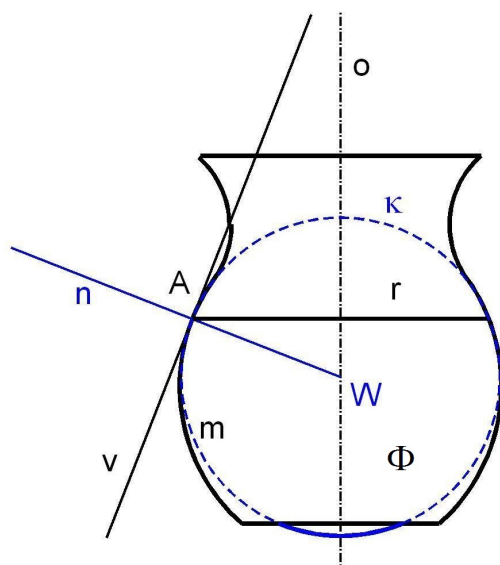


Obr. 1.1.4

¹Věta platí i v případě, že rotační plocha Φ obsahuje singulární bod na ose rotace a regulární křivkou je polo-meridián.

Poznámka 1.1.2 Protíná-li přímka v osu o v bodě V , je Ω rotační kuželová plocha s vrcholem V a osou o . Přímka n potom protne osu o v bodě W , což je vrchol normálové kuželové rotační plochy. Spojnice vrcholu V dotykové rotační kuželové plochy s libovolným bodem X rovnoběžky r je tečna meridiánu m_X procházejícího bodem X , a přímka WX je normála plochy Φ v bodě X .

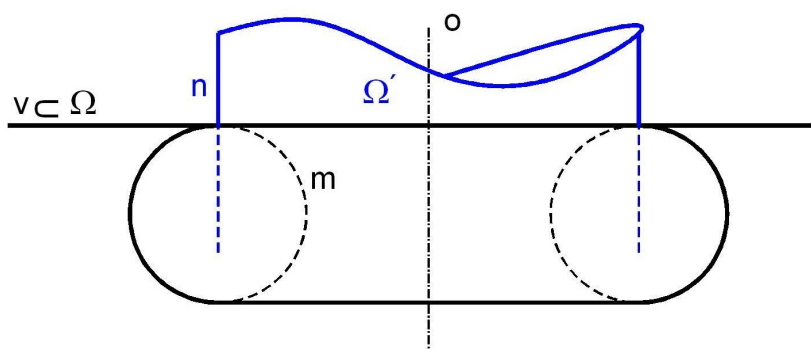
Definice 1.1.4 Nechť A je regulární bod plochy Φ ležící na rovnoběžce r takový, že normála n plochy Φ v bodě A protíná osu rotace v bodě W . Kulová plocha $\kappa = (W, |WA|)$ se nazývá *dotyková kulová plocha* plochy Φ podél rovnoběžky r .



Obr. 1.1.5

Definice 1.1.5 Nechť je dána rotační plocha $\Phi(o, k)$. Rovnoběžka, která má v každém bodě A tečnu v meridiánu m procházejícího bodem A kolmou k ose o se nazývá *kráterová rovnoběžka (kráter)*.

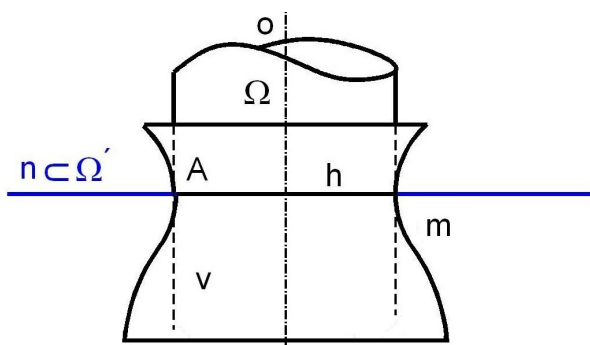
Poznámka 1.1.3 V případě kráterové rovnoběžky tečna v meridiánu m opíše při rotaci svazek přímek ležící v rovině ρ a normály vyplní rotační válcovou plochu (viz. obr. 1.1.6 - kráterová rovnoběžka na anuloidu).



Obr. 1.1.6

Definice 1.1.6 Nechť je dána rotační plocha $\Phi(o, k)$. Rovnoběžka, kterou opíše bod R tvořící křivky k , který má ve svém okolí největší vzdálenost od osy, se nazývá *rovníková rovnoběžka (rovník)*. Rovnoběžka, kterou opíše bod H tvořící křivky k , který má ve svém okolí nejmenší vzdálenost od osy, se nazývá *hrdelní rovnoběžka (hrdlo)*.

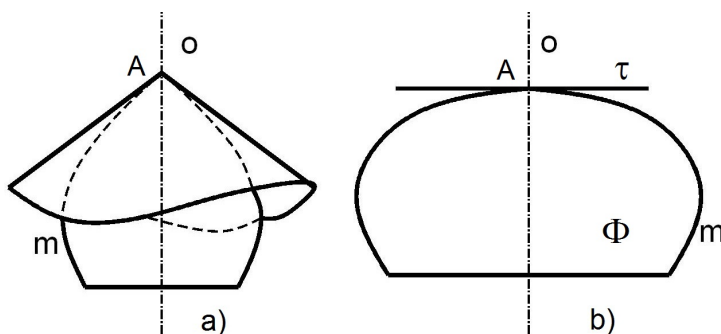
Poznámka 1.1.4 V případě rovníkové, resp. hrdelní rovnoběžky je v jejím bodě A tečna v meridiánu m procházejícího tímto bodem rovnoběžná s osou o , vrchol V dotykové kuželové plochy je nevlastní a přímka v opíše rotační válcovou plochu, která se rotační plochy Φ dotýká podél rovníku, resp. hrdla a přímka n opíše svazek přímek v rovině ρ , což je rovina rovníku, resp. hrdla.



Obr. 1.1.7

Definice 1.1.7 Nechť je dána rotační plocha $\Phi(o, k)$. Rovnoběžky, které při rotaci vytvoří krajní body tvořící křivky k se nazývají *hraniční rovnoběžky*.

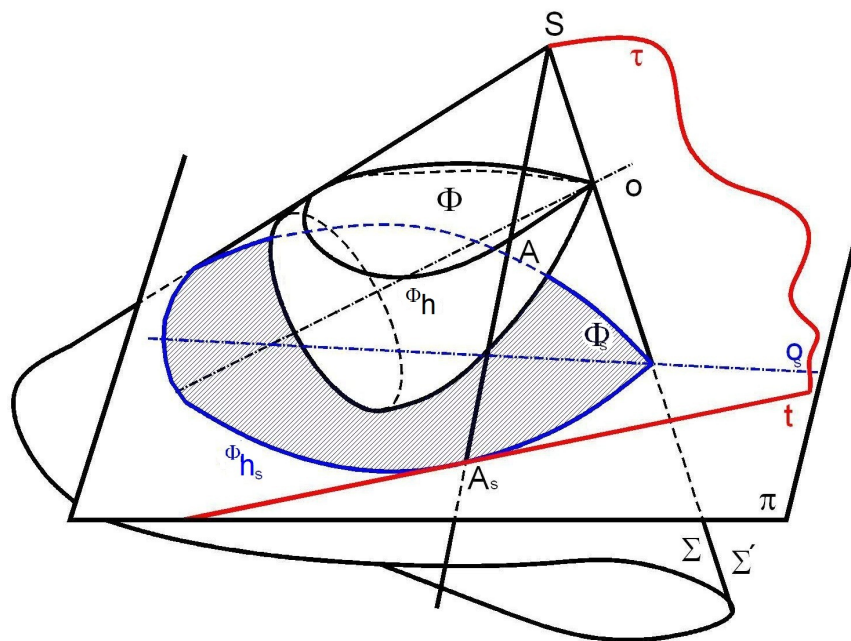
Poznámka 1.1.5 Je-li A bod meridiánu m ležící na ose o , pak tečna v meridiánu m je k ose buď kosá nebo kolmá. V případě a) obalují tečné roviny v bodě A rotační kuželovou plochu a bod A je singulární bod plochy Φ . Ve případě b) existuje právě jedna tečná rovina τ plochy Φ v bodě A a je kolmá k o , bod A je regulárním bodem plochy Φ .



Obr. 1.1.8

Mějme dáno promítání středem S a průmětnou π , předpokládejme, že S neleží na ploše Φ . Označme Σ množinu všech spojnic bodu S se všemi body plochy, Σ' hranici množiny Σ , A bod plochy Φ .

Definice 1.1.8 Průnik Φ_s množiny Σ s rovinou π nazýváme *průmět plochy*. Přímkou AS nazýváme *styčná přímka plochy Φ vzhledem k S* , jestliže AS leží v množině Σ' . Množina ${}^{\Phi}h$ všech bodů plochy ležících na styčných přímkách se nazývá *skutečný obrys plochy*, množina ${}^{\Phi}h_s$, která je průnikem Σ' a π se nazývá *zdánlivý obrys plochy*.



Obr. 1.1.9

Poznámka 1.1.6 Tvoří-li množina Σ trs přímek v třírozměrném eukleidovském prostoru (vyplní celý eukleidovský prostor), pak plocha nemá obrys (např. leží-li S uvnitř kulové plochy).

Je-li A bod skutečného obrysu, A_s bod zdánlivého obrysu, tj. AA_s prochází bodem S , pak tečná rovina τ plochy Φ v bodě A obsahuje přímku AS , proto průsečnice t roviny τ a roviny π je tečnou zdánlivého obrysu ${}^{\Phi}h_s$ v bodě A_s . Může nastat zvláštní případ (na obrázku tato situace nenastane), že v bodě U skutečného obrysu ${}^{\Phi}h$ je přímka SU tečnou skutečného obrysu ${}^{\Phi}h$. Pak průsečík U_s přímky SU s rovinou π je bodem vratu křivky ${}^{\Phi}h_s$.

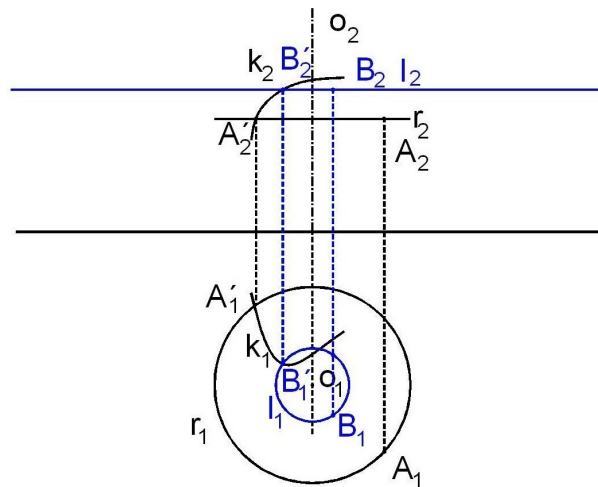
Budeme řešit v Mongeově promítání některé úlohy na rotačních plochách $\Phi(o, k)$ zadaných prostorovou křivkou k , osou o kolmou k π . Meridián n plochy Φ , který bude ležet v rovině μ rovnoběžné s nárysnou budeme nazývat *hlavní meridián*.

Příklad 1.1.1 Je dán půdorys bodu A a nárys bodu B rotační plochy $\Phi(o, k)$. Sestrojte zbývající průměty.

Bod A je zadán půdorysem A_1 , A leží na rovnoběžce r . Půdorys r_1 této rovnoběžky je kružnice se středem o_1 a poloměrem $|A_1o_1|$. Průsečík r_1 s k_1 označme A'_1 . Je to bod plochy Φ , ležící na křivce k a současně na rovnoběžce r . Sestrojíme nárys A'_2 . Nárys r_2 rovnoběžky r je úsečka procházející A'_2 . A_2 leží na r_2 .

Bod B je zadán nárysem, prochází jím rovnoběžka l plochy. Jejím nárysem je úsečka, ležící na kolmici k o_2 . Poloměr rovnoběžky l zatím neznáme. Průsečík B'_2 přímek l_2 a k_2

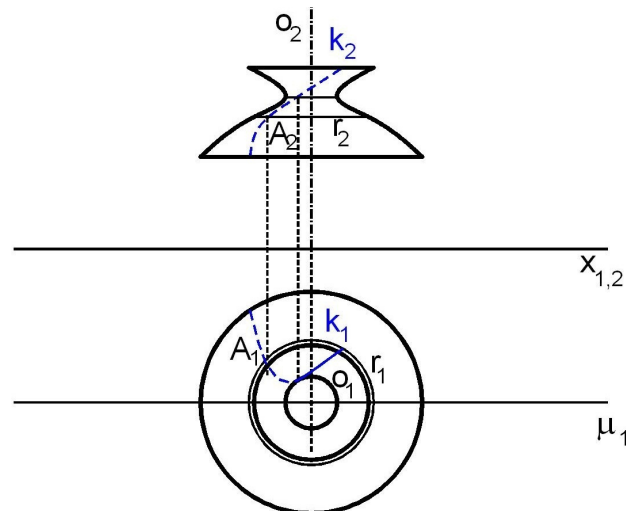
je narysem bodu B' plochy. Půdorys B'_1 leží na k_1 , můžeme sestrojít l_1 . B_1 leží na l_1 , není jednoznačně dán, B_2 je narysem dvou bodů rovnoběžky l .



Obr. 1.1.10

Příklad 1.1.2 Sestrojte hlavní meridián rotační plochy $\Phi(o, k)$.

Body hlavního meridiánu leží v rovině μ procházející osou a rovnoběžné s ν . Budeme je sestrovovat bodově. Zvolíme libovolný bod A křivky k , sestrojíme jeho rovnoběžku r a body této rovnoběžky ležící v μ jsou body hlavního meridiánu. Půdorysy jsou průsečíky půdorysů r_1 rovnoběžek r a půdorysu μ_1 roviny hlavního meridiánu. Koncové body křivky k opíší hraniční rovnoběžky, body lokálně nejbližší (nejdále) od osy opíší hrdelní (rovníkové) rovnoběžky.

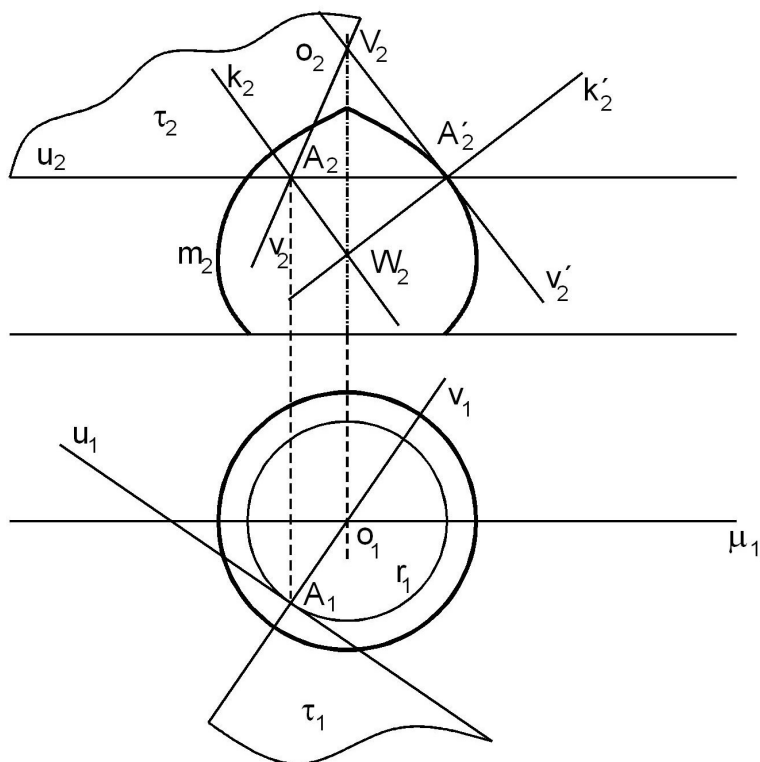


Obr. 1.1.11

Nadále budeme předpokládat, že rotační plocha $\Phi(o, m)$ je zadaná osou a (polo)meridiánem. Polomeridiány budou většinou složeny z oblouků kružnic, abychom pro konstrukci tečny a normály nemuseli využívat přibližných konstrukcí a sestrojovali je přesně (viz. kapitola 3).

Příklad 1.1.3 V regulárním bodě plochy $\Phi(o, m)$ sestrojte tečnou rovinu a normálu.

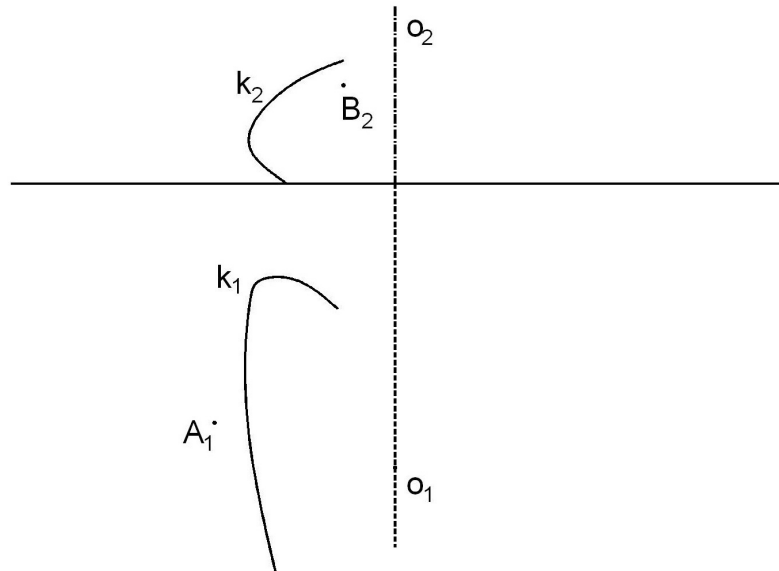
Nechť je dán regulární bod A plochy. Bodem A prochází rovnoběžka r a meridián m . Tečná rovina τ v bodě A je dána tečnou u rovnoběžky r v bodě A a tečnou v meridiánu m v bodě A . Normála plochy Φ v bodě A je kolmice k tečné rovině τ procházející bodem A . Půdorys u_1 přímky u je tečnou půdorysu r_1 rovnoběžky r , nárys u_2 je přímka rovnoběžná se základnicí a obsahuje nárys r_2 rovnoběžky r . Půdorys v_1 přímky v je přímka A_1o_1 , protože meridiány prochází osou rotace a tedy leží v rovinách kolmých k π . Pro konstrukci nárysu v_2 využijeme toho, že rotací kolem osy přechází jeden meridián v druhý. Otočíme rovinu σ meridiánu m kolem osy o do roviny μ . Meridián n se otočí do hlavního meridiánu m , bod A se otočí do bodu A' . Sestrojíme tečnu v' hlavního meridiánu n v bodě A' . Nárys v'_2 přímky v' je tečnou nárysu m_2 v A'_2 . Přímka v' protne osu v bodě V , ve vrcholu dotykové rotační kuželové plochy Ω . Tato plocha se dotýká plochy Φ podél rovnoběžky r . Každá její povrchová přímka je tečnou některého meridiánu, tedy i přímka $v = VA$ je tečnou meridiánu n . Nárys přímky v je tedy $v_2 = V_2A_2$. (Nárys n_2 meridiánu n není třeba sestrovat a v obr. 1.1.12 sestrogen není.) Přímky v, u tvoří tečnou rovinu τ . Normálu k plochy Φ v bodě A sestrojíme pomocí normálové kuželové plochy. K rovnoběžce r máme sestrogenou dotykovou kuželovou plochu s vrcholem V , sestrojíme vrchol W normálové kuželové plochy. Tuto plochu opiše např. přímka k' , kolmice k tečně v' hlavního meridiánu n v bodě A' . Protože normála k leží v rovině meridiánu m je $k_1 = A_1o_1 = v_1$. Nárys k_2 je pak spojnice W_2A_2 .



Obr. 1.1.12

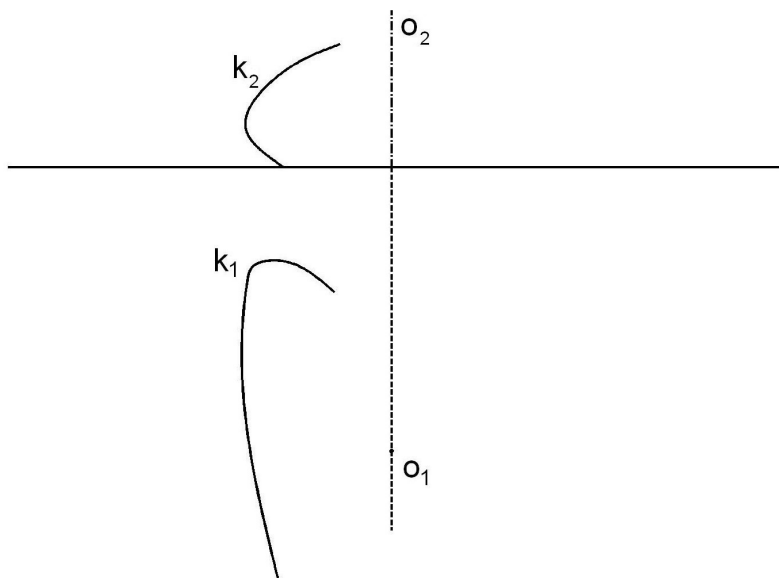


1.1.1 Sestrojte chybějící průměty bodů A, B rotační plochy $\Phi(o, k)$.



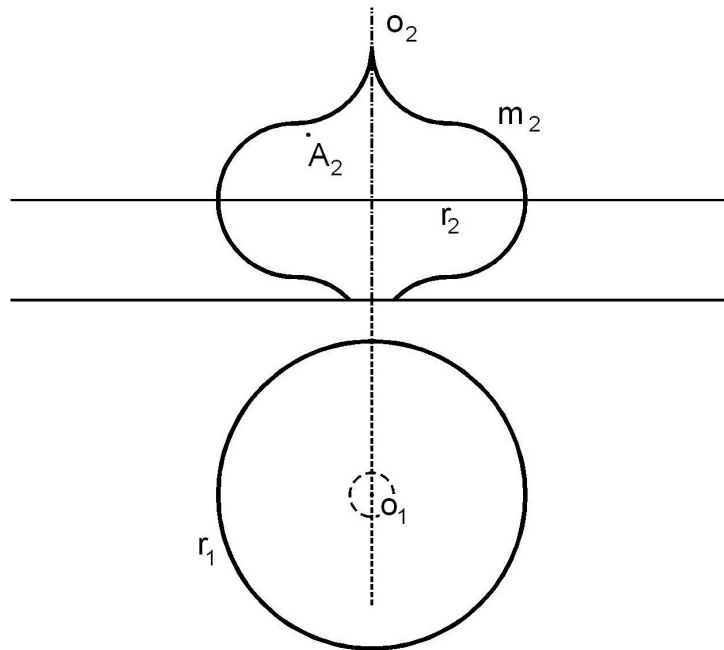
Obr. 1.1.13

1.1.2 Sestrojte hlavní meridián rotační plochy $\Phi(o, k)$.



Obr. 1.1.14

1.1.3 V bodě A plochy $\Phi(o, m)$ sestrojte tečnou rovinu a normálu.

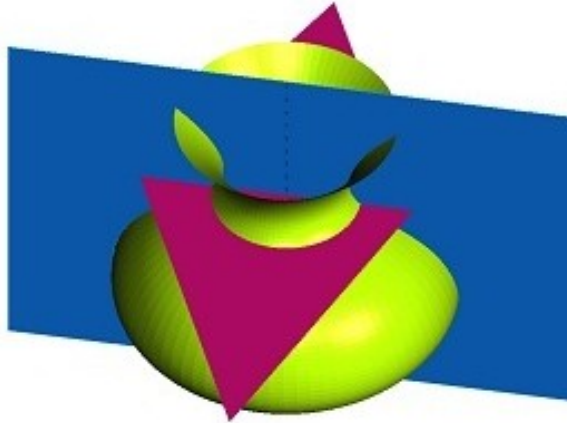


Obr. 1.1.15

1.2 Řez rotační plochy rovinou.



Nechť je dána rotační plocha $\Phi(o, m)$. Rovina α , která je kolmá k ose o , pak s plochou buď nemá společné body nebo má právě jeden společný bod nebo plochu protíná v rovnoběžkové kružnici. Rovina σ , která obsahuje osu rotace, protne plochu Φ v meridiánu.



Obr. 1.2.1

Rovina ρ , která není kolmá k ose rotace ani ji neobsahuje, protne plochu Φ v prostorové křivce k . Křivku k sestrojíme bodově. V celé kapitole budou rotační plochy v Mongeově projekci zadány osou o kolmou k půdorysně a hlavním meridiánem m .

Příklad 1.2.1 Sestrojte řez rotační plochy $\Phi(o, m)$ rovinou ρ .

1. Konstrukce obecného bodu řezu:

Vedeme rovinu α rovnoběžnou s π , která plochu protne v rovnoběžce a . Rovina α protne rovinu ρ v hlavní přímce $^1h_\rho$ první osnovy. Společné body přímky $^1h_\rho$ a kružnice a jsou body X, Y řezu. Tečna t křivky k řezu je průsečnice tečné roviny τ plochy Φ v bodě X a roviny ρ řezu. Tečnou rovinu τ v bodě X sestrojíme podle příkladu 1.1.3.

2. Body souměrnosti řezu:

Rotační plocha Φ je souměrná podle každé roviny procházející osou rotace. Rovina ρ řezu je souměrná podle každé roviny k ní kolmé. Z toho plyne, že rovina λ kolmá k ρ a obsahující o je rovinou souměrnosti křivky k řezu, průsečnice roviny ρ a λ (spádová přímka $^1s^\rho$ první osnovy roviny ρ) je osou souměrnosti křivky k . V rovině λ leží body křivky k , které jsou samodružné v osové souměrnosti s osou $^1s^\rho$. Jsou to body, které jsou v prostoru ve svém okolí vzhledem k π nejnižší příp. nejvyšší. Tyto body sestrojíme pomocí otočení roviny λ kolem osy o do roviny μ hlavního meridiánu. Sestrojíme přímku $^1s^\rho$ a otočíme ji kolem o do polohy rovnoběžné s nárysnou. Přímka $^1s^\rho$ se otočí do přímky $^0s^\rho$ (otočíme např. její půdorysný stopník, bod na ose je samodružný). Meridián n , ve kterém λ protne Φ se otočí do hlavního meridiánu m . Společný bod 0C přímky $^0s^\rho$ a meridiánu m je otočený bod ležící v λ . Otočíme jej zpět na přímku $^1s^\rho$ a získáme hledaný bod na ose souměrnosti. Bod C se při otáčení pohybuje po rovnoběžce plochy, její nárys je rovnoběžný se základnicí a bod C leží na přímce $^1s^\rho$. Tečná rovina v tomto bodě protne rovinu řezu v hlavní

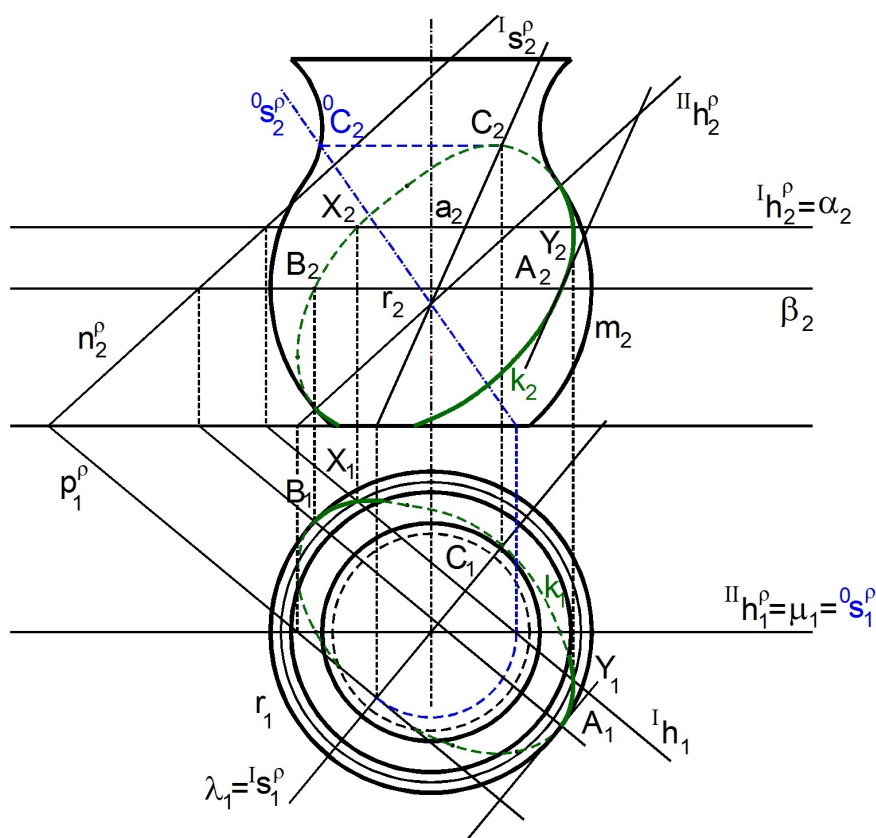
přímce první osovy, tj. nárys tečny v bodě C je rovnoběžný se základnicí, půdorys je rovnoběžný s půdorysnou stopou roviny řezu.

3. Body na druhém obrysu:

Body, ve kterých se mění viditelnost v náryse patří druhému obrysu. Leží na hlavním meridiánu, který je druhým skutečným obrysem plochy. Rovina μ hlavního meridiánu protíná rovinu ρ řezu v hlavní přímce $^I h_\rho$ druhé osovy. Společné body $^I h_\rho$ a m jsou body řezu, ve kterých se bude měnit viditelnost v náryse. K druhému obrysu ještě patří hraniční či kráterové rovnoběžky (procházejí jimi styčné přímky), je proto třeba sestrojít (pokud existují) i body řezu na těchto rovnoběžkách. Sestrojíme je jako bod na obecné rovnoběžce.

4. Body na prvním obryse:

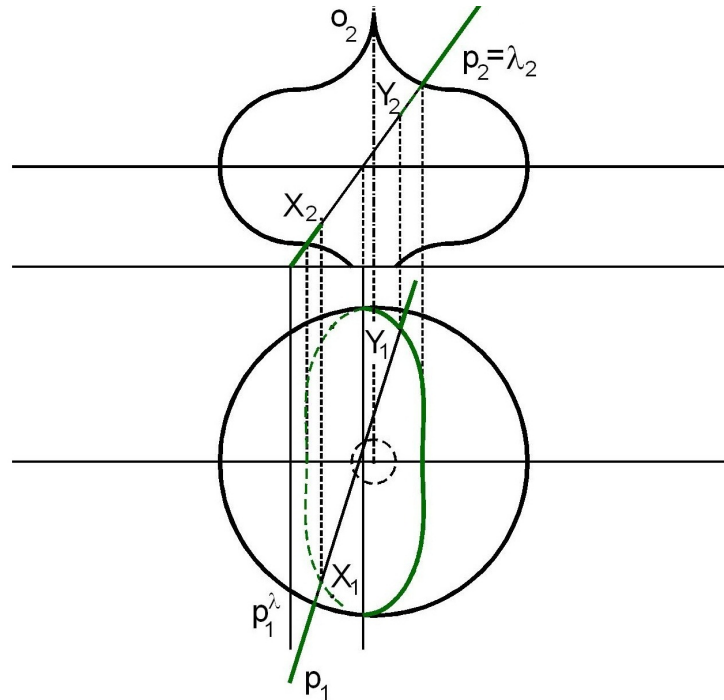
První skutečný obrys je tvořen hrdelními a rovníkovými rovnoběžkami. Konstrukce je obdobná jako pro obecné body - rovníkem r (resp. hrdlem) prokládáme rovinu β a určujeme společné body A, B rovníku r (resp. hrdla) a hlavní přímky první osovy, ve které rovina β protíná rovinu ρ řezu. Tečné roviny plochy Φ v bodech rovníku a hrdla obalují dotykovou rotační válcovou plochu Ω , tj. jsou kolmé k π . Z jejich konstrukce (podle příkladu 1.1.3) je zřejmé, že jsou také kolmé k rovině řezu. Tečny průnikové křivky k v bodech rovníku a hrdla jsou zřejmě spádové přímky první osovy roviny ρ .



Obr. 1.2.2

1.2.1 Průsečíky přímky s rotační plochou.

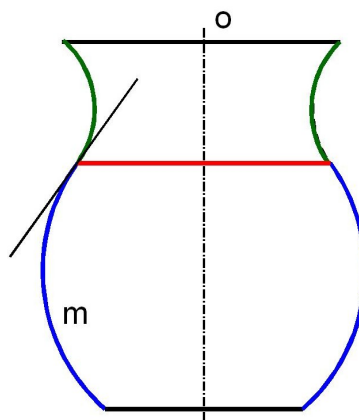
Průsečíky přímky a rotační plochy se sestavují stejně, jako pro jiná tělesa a plochy. Přímkou p proložíme vhodnou rovinu λ , určíme řez k plochy Φ rovinou λ a společné body přímky p a řezu k jsou hledané průsečíky. Většinou volíme rovinu λ kolmou k π nebo ν , aby jeden z průmětů řezu byl částí přímky. Viditelnost průsečíků se určí pomocí viditelnosti řezu.



Obr. 1.2.3



Víme, že na ploše mohou existovat tři typy bodů eliptický (kruhový), hyperbolický a parabolický. Na obr. 1.2.4 je hlavní meridián rotační plochy a na něm znázorněny typy bodů na ploše.

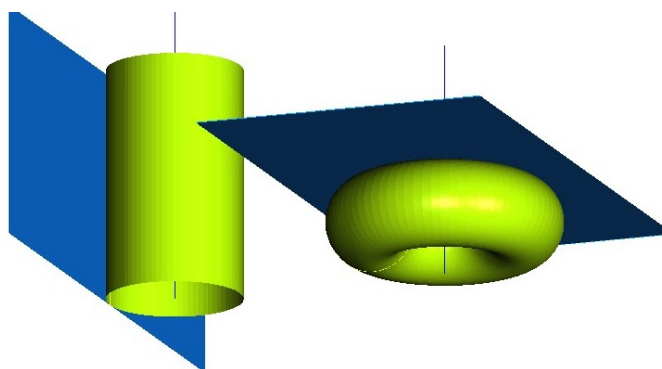


Obr. 1.2.4

Modrá část meridiánu obsahuje eliptické body, každý eliptický bod rotací vytvoří rovnoběžku tvořenou pouze eliptickými body. Zelená část je tvořena hyperbolickými body,

rovněž každý hyperbolický bod při rotaci vytvoří rovnoběžku, která obsahuje pouze hyperbolické body plochy. Hyperbolické a eliptické body meridiánu jsou odděleny parabolickým bodem plochy, ten při rotaci vytvoří rovnoběžku parabolických bodů, tzv. *parabolickou křivku* plochy Φ .

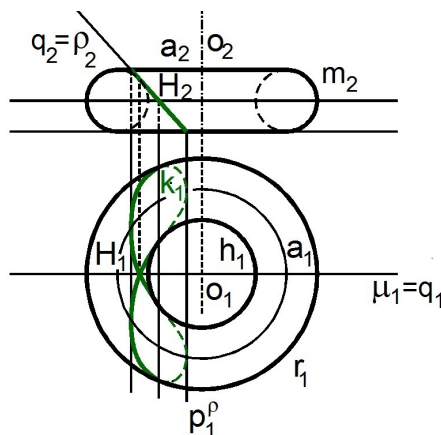
Sestrojíme-li tečné roviny plochy Φ - v eliptickém (kruhovém) bodě tečnou rovinu α , v hyperbolickém bodě tečnou rovinu β a v parabolickém bodě tečnou rovinu γ , pak v eliptickém (kruhovém) bodě má Φ s α společný pouze bod dotyku, v hyperbolickém bodě protíná rovina β plochu Φ v křivce, která má v bodě dotyku dvojnásobný bod a v parabolickém bodě tečná rovina γ buď protíná plochu v křivce, která má v bodě dotyku bod vratu, nebo se dotýká plochy podél celé přímky (např. rotační válcová plocha) nebo se dotýká podél kráterové rovnoběžky (např. anuloid).



Obr. 1.2.5

Příklad 1.2.2 Sestrojte řez rotační plochy $\Phi(m, o)$ tečnou rovinou v hyperbolickém bodě anuloidu.

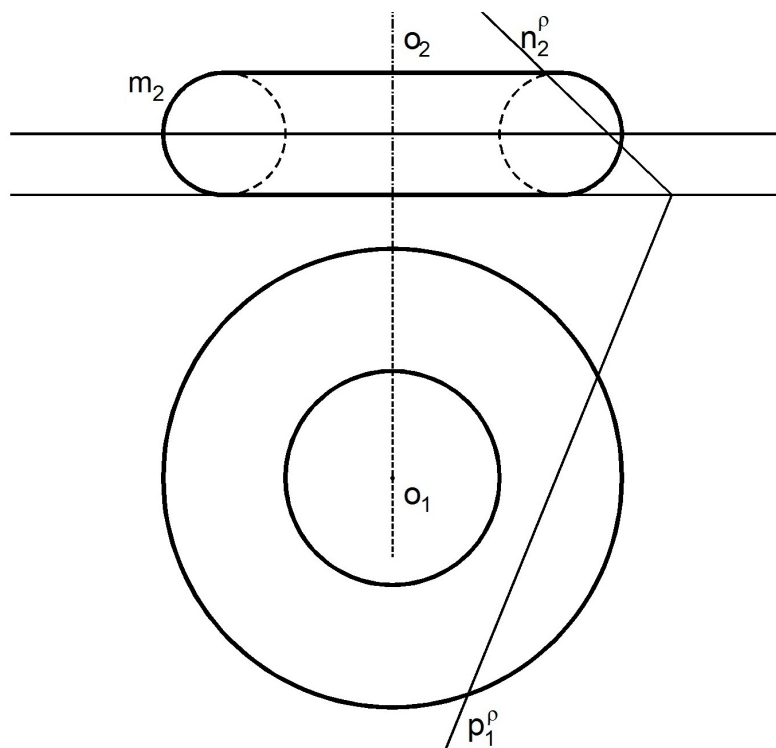
Mějme dán hyperbolický bod H na hlavním meridiánu m . Tečná rovina ρ v bodě hlavního meridiánu je kolmá k nárysně, proto se do nárysu zobrazí jako tečna m_2 v bodě H_2 . Do nárysu se řez zobrazí jako úsečka. V bodě H bude dvojnásobný bod křivky k řezu, je to současně bod na ose souměrnosti řezu. Osa q ouměrnosti řezu je průsečnice roviny μ hlavního meridiánu a roviny ρ řezu. Body řezu sestrojíme podle příkladu 1.2.1. Body, ve kterých se mění viditelnost v půdoryse jsou na hrdle a rovníku, musíme sestrojit i body řezu ležící v rovině obsahující rovník a hrdlo.



Obr. 1.2.6

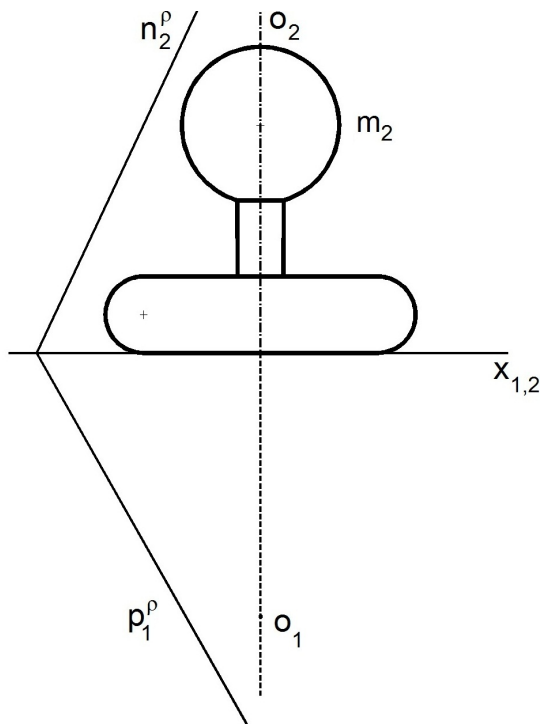


1.2.1 Sestrojte řez rotační plochy $\Phi(o, m)$ rovinou ρ .



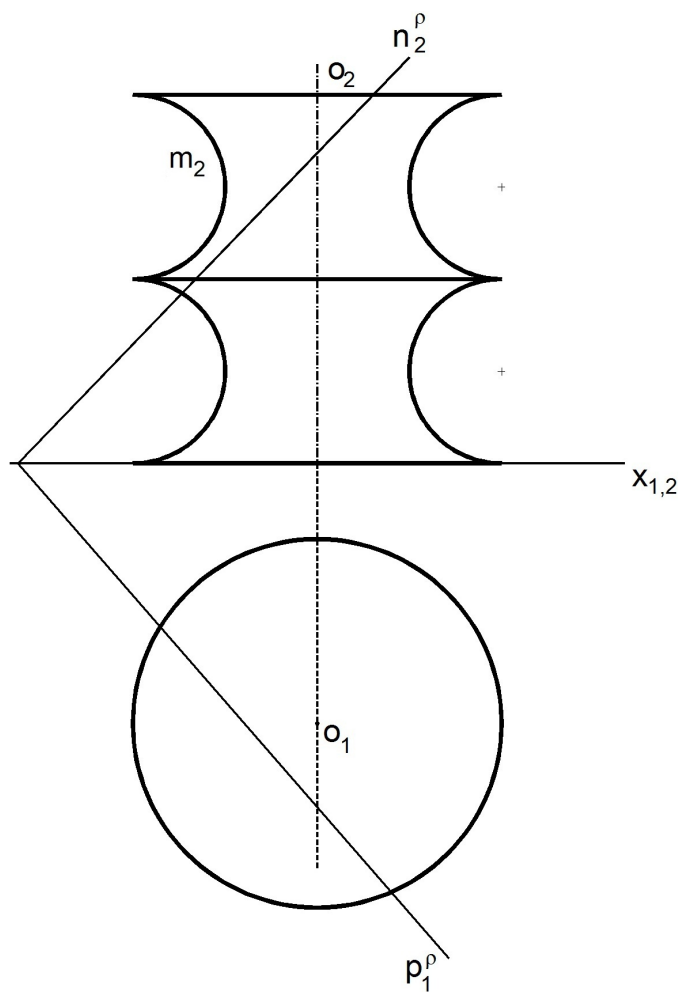
Obr. 1.2.7

1.2.2 Sestrojte řez rotační plochy $\Phi(o, m)$ rovinou ρ .



Obr. 1.2.8

1.2.3 Sestrojte řez rotační plochy $\Phi(o, m)$ rovinou ρ . (Plocha je shora uzavřená.)



Obr. 1.2.9

1.3 Průniky rotačních ploch.

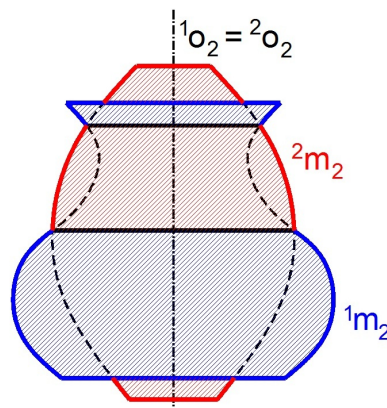


Průniková křivka k dvou rotačních ploch ${}^1\Phi({}^1o, {}^1m), {}^2\Phi({}^2o, {}^2m)$ je množina společných bodů těchto ploch. Ke konstrukci průnikové křivky, většinou využijeme vhodně zvolených pomocných ploch, jejichž průniky s danými rotačními plochami jsou co nejjednodušší a snadno sestrojitelné. Volba pomocné plochy závisí na vzájemné poloze os rotačních ploch.

V každém regulárním bodě X průnikové křivky k existuje její tečna t a normálová rovina ω . Tečnu průnikové křivky lze vždy určit dvěma způsoby, buď jako průsečnici tečných rovin ${}^1\tau, {}^2\tau$ ploch ${}^1\Phi, {}^2\Phi$ v bodě X nebo jako přímkou kolmou k normálové rovině v bodě X . Normálová rovina ω v bodě X je tvořena normálami ${}^1WX, {}^2WX$ ploch ${}^1\Phi, {}^2\Phi$, kde ${}^1W, {}^2W$ jsou vrcholy normálových kuželových ploch příslušných k rovnoběžkám bodu X . Druhá konstrukce bývá v některých případech výhodnější.

1.3.1 Průnik rotačních ploch s rovnoběžnými osami

Mají-li dvě rotační plochy společnou osu rotace, pak je jejich průnik tvořen rovnoběžkami, které vytvoří například společné body hlavních meridiánů.



Obr. 1.3.1

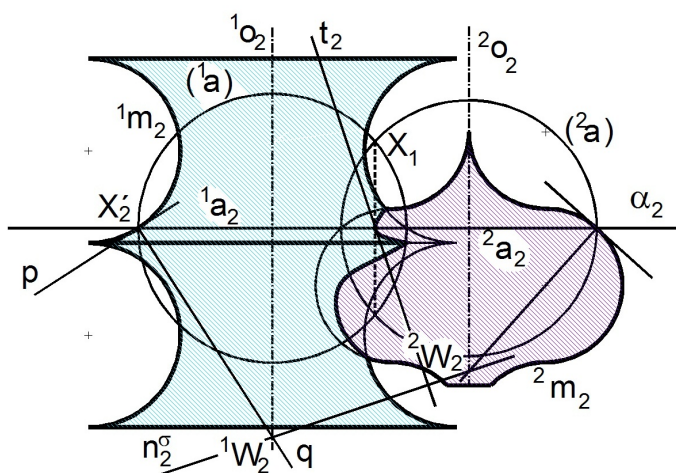
Jestliže jsou osy rotačních ploch ${}^1\Phi, {}^2\Phi$ rovnoběžné různé, pak každá rovina α kolmá k osám rotace protne rotační plochy ${}^1\Phi, {}^2\Phi$ po řadě v rovnoběžkách ${}^1a, {}^2a$. Existují-li společné body těchto rovnoběžek, pak patří průnikové křivce. Jako pomocné plochy se tedy v tomto případě používají roviny kolmé k rovině os.

Příklad 1.3.1 Sestrojte nárys průnikové křivky k rotačních ploch ${}^1\Phi({}^1o, {}^1m), {}^2\Phi({}^2o, {}^2m)$, jejichž osy ${}^1o, {}^2o$ jsou rovnoběžné a leží v nárysně.

Hlavní meridiány ${}^1m, {}^2m$ obou ploch leží v nárysně, proto jejich společné body patří průnikové křivce k . Pro konstrukci dalších bodů průnikové křivky volíme pomocné roviny α kolmé k nárysně, které protnou rotační plochy ${}^1\Phi, {}^2\Phi$ v rovnoběžkách ${}^1a, {}^2a$. Nárysy těchto rovnoběžek jsou úsečky. Rovinu α sklopíme do náryсны kolem nárysné stopy a určíme společné body rovnoběžek ${}^1a, {}^2a$. V bodě X průnikové křivky určíme tečnu t průnikové křivky k . Tečnu sestrojíme jako přímkou kolmou k normálové rovině v bodě X . Bod X leží na rovnoběžkách ${}^1a, {}^2a$. Krajní body nárysů těchto rovnoběžek leží v nárysně (tj. v rovině hlavního meridiánu). Označme X' bod rovnoběžky 1a ležící v nárysně (tj.

X'_2 je krajní bod úsečky 1a_2). V bodě X' sestrojíme tečnu p k 1m , vrchol 1W normálové kuželové plochy je průsečík kolmice q sestrojené k přímce p bodem X' s osou 1o . Stejně sestrojíme bod 2W pro plochu $^2\Phi$. Body $^1W, ^2W$ leží na osách rotačních ploch, tj. leží v nárysně. Protože jsou to současně body normál procházejících bodem X průnikové křivky k , leží oba body rovněž v normálové rovině ω v bodě X křivky k . Přímka $^1W^2W$ je tedy nárysnou stopou roviny ω . Tečna t je kolmá k rovině ω a prochází bodem X , proto $t_2 \perp ^1W_2^2W_2$ a $X_2 \in t_2$.

Každý bod nárysu k_2 průnikové křivky k neležící v nárysně je nárysem dvou bodů v prostoru souměrných podle náryсны, protože osy ploch leží v nárysně a obě plochy jsou souměrné podle náryсны. V nárysně tak je k_2 celá viditelná.



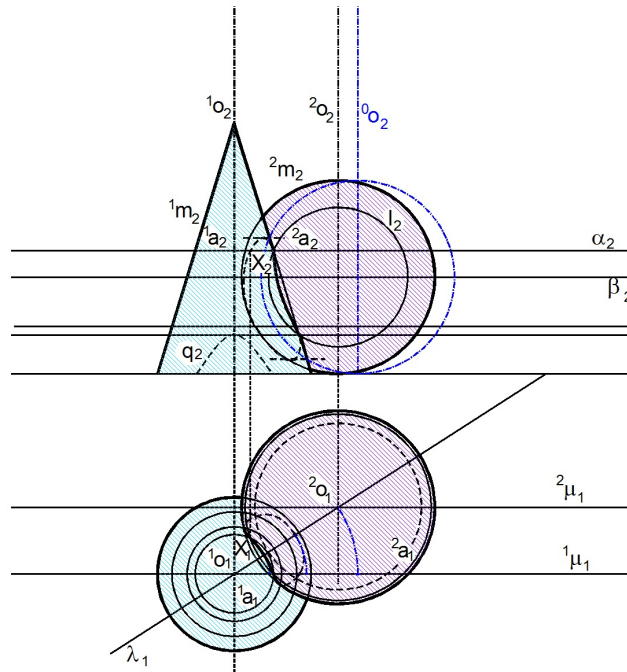
Obr. 1.3.2

Jestliže jsou osy rotace rovnoběžné, ale rovina jimi určená není rovnoběžná s nárysnou, je třeba sestrojít i půdorysy ploch a řešit viditelnost průnikové křivky.

Příklad 1.3.2 Sestrojte průnik rotačního kužele s podstavou v π a vrcholem V a plochy kulové dané středem O a poloměrem r .

Osu kulové plochy zvolíme tak, aby byla rovnoběžná s osou rotačního kužele. Konstrukce obecného bodu X průnikové křivky je stejná jako v příkladě 1.3.1. Hlavní meridiány obou ploch leží v rovnoběžných různých rovinách, proto nemají společné body. Rovina λ obsahující osy obou ploch je rovinou souměrnosti obou ploch a tedy i rovinou souměrnosti průnikové křivky. Rovina λ protíná plochy $^1\Phi, ^2\Phi$ po řadě v meridiánech $^1m, ^2m$, jejich společné body patří průniku. Sestrojíme je otočením roviny λ např. kolem 1o do roviny $^1\mu$ rovnoběžné s nárysnou a procházející 1o .

Body na prvním obryse určíme stejnou konstrukcí jako obecné body, pomocnou rovinu β proložíme rovníkem kulové plochy. Druhý obrys (hlavní meridián) 1m rotačního kužele leží v rovině $^1\mu$. Určíme řez l kulové plochy rovinou $^1\mu$, společné body 1m a l patří druhému obrysu rotačního kužele. Podobně druhý obrys (hlavní meridián) 2m kulové plochy leží v rovině $^2\mu$. Určíme řez q rotačního kužele rovinou $^2\mu$, společné body 2m a q v tomto případě neexistují. Pokud by existovaly, patřily by druhému obrysu kulové plochy. Viditelnost průnikové křivky se určí podle viditelnosti obou ploch, bod průnikové křivky je viditelný, jestliže je viditelný současně na obou plochách.



Obr. 1.3.3

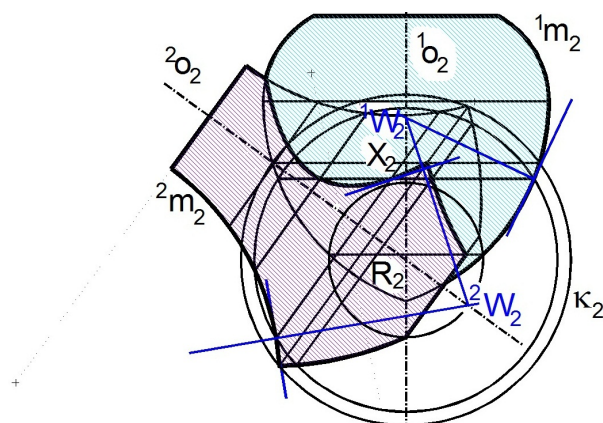
Poznámka 1.3.1 Každou přímku, která prochází středem kulové plochy, lze označit jako její osu. Sestrojíme-li průnik dvou rotačních ploch, z nichž jedna je kulová plocha, lze vždy zvolit osu rotace tak, aby byla rovnoběžná s osou druhé plochy.

1.3.2 Průnik rotačních ploch s různoběžnými osami

Jsou-li osy rotačních ploch různoběžné, volíme jako pomocné plochy kulové plochy, které mají střed v průsečíku R os 1o a 2o . Takto zvolená kulová plocha má s oběma plochami společné rovnoběžkové kružnice, protože má s každou z ploch společnou osu. Vzhledem k tomu, že jsou osy různoběžné, lze je volit tak, aby byly obě rovnoběžné s nárýsnou, ale už ne obě současně tak, aby byly kolmé k půdorysně. Půdorysy rovnoběžek plochy, která nemá osu kolmou k půdorysně, jsou pak elipsy. Proto volíme osy rotačních ploch v nárýsně nebo rovinně rovnoběžné s nárýsnou a sestrojíme pouze nárýs průnikové křivky.

Příklad 1.3.3 Sestrojte nárýs průnikové křivky k rotačních ploch ${}^1\Phi({}^1o, {}^1m), {}^2\Phi({}^2o, {}^2m)$, jejichž osy ${}^1o, {}^2o$ jsou různoběžné a leží v nárýsně.

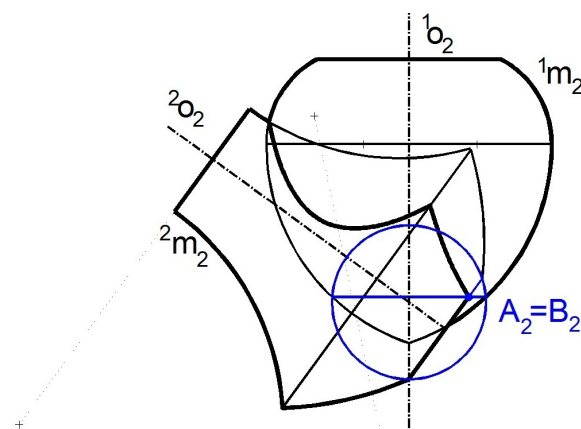
Konstrukce je obdobná jako v příkladě 1.3.1. Hlavní meridiány ${}^1m, {}^2m$ obou ploch leží v nárýsně, jejich společné body opět patří průnikové křivce k . Pro konstrukci dalších bodů průnikové křivky volíme pomocné kulové plochy κ se středem $R = {}^1o \cap {}^2o$, které protnou rotační plochy ${}^1\Phi, {}^2\Phi$ v rovnoběžkách, společné body těchto rovnoběžek patří průnikové křivce. Obě plochy a tedy i průniková křivka, jsou souměrné podle roviny os . Tečnu opět sestrojíme jako přímku kolmou k normálové rovině v bodě průnikové křivky podle příkladu 1.3.1.



Obr. 1.3.4



Jestliže osy rotačních ploch leží v nárysně (nebo v rovině rovnoběžné s nárysnou), pak průnikové křivce patří společné body hlavních meridiánů. Ovšem hraniční rovnoběžky neleží v rovině os (pouze krajní body jejich nárysu), proto by bylo chybou určit jako bod průnikové křivky průsečík nárysu hlavního meridiánu jedné plochy s nárysem hraniční rovnoběžky druhé plochy. Tento průsečík je nárysem dvou různých bodů v prostoru. Body A, B průnikové křivky ležící na hraniční rovnoběžce určíme stejnou konstrukcí jako jiný obecný bod, pomocnou kulovou plochu volíme tak, aby na ní ležela hraniční rovnoběžka.



Obr. 1.3.5



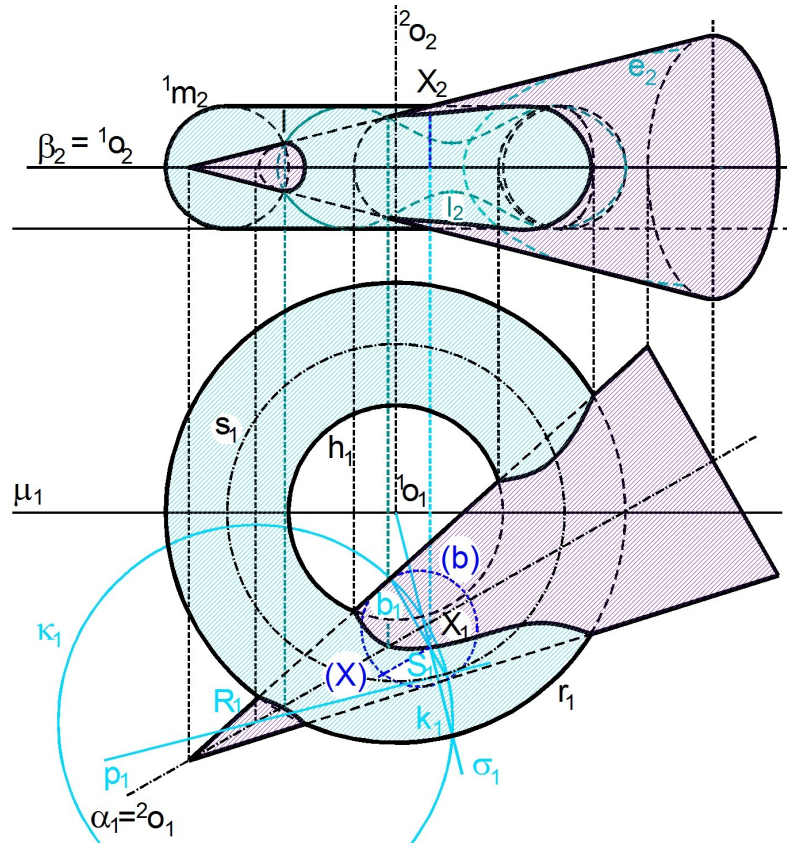
1.3.3 Průnik rotačních ploch s mimoběžnými osami

Pro mimoběžné osy není jednoznačně určeno, jak se volí pomocné plochy. Ty volíme podle tvaru rotační plochy nebo také podle polohy os vzhledem k průmětnám.

Příklad 1.3.4 Sestrojte průnik rotačního kužele, jehož osa je rovnoběžná s půdorysnou, s anuloidem, jehož osa je k půdorysně kolmá. Rovina β rovníku anuloidu obsahuje osu rotačního kužele.

Uvažujme libovolný polomeridián k anuloidu ležící v rovině σ , označme S jeho střed. Kružnice s , kterou vytvoří bod S při rotaci, leží v rovině β , která obsahuje rovník a hrdlo anuloidu a anuloid je souměrný podle roviny této β . Uvažujme v bodě S tečnu p kružnice s . Přímka p je kolmá k rovině σ , je tedy množinou středů kulových ploch

procházejících polomeridiánem k . V každém bodě kružnice s existuje taková přímka p . Protože osa rotačního kužele leží v rovině β , existují průsečíky osy rotačního kužele s tečnami kružnice s (s výjimkou přímek rovnoběžných). Při konstrukci průnikové křivky můžeme tedy využít pomocných kulových ploch, které (na rozdíl od příkladu 1.3.1) budou mít různé středy.



Obr. 1.3.6

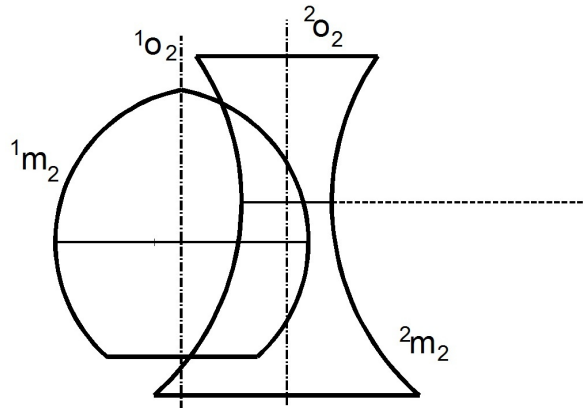
Zvolíme tedy střed S libovolného polomeridiánu k anuloidu, v něm sestrojíme tečnu p kružnice s , určíme její průsečík R s osou 2o rotačního kužele. Sestrojíme kulovou plochu κ se středem R a procházející polomeridiánem k . Kulová plocha κ protne rotační kuželovou plochu v rovnoběžkových kružnicích, jejich společné body s kružnicí k patří průnikové křivce. Označme např. b jednu z kružnic, ve kterých κ protne rotační plochu kuželovou. Sklopíme-li kružnici b do roviny β , určíme vzdálenost bodu X průnikové křivky od roviny β a můžeme se sestrojit jeho nárys.

První obrys obou ploch leží v rovině β , první obrys anuloidu je tvořen rovínkem r a hrdlem h , první obrys rotačního kužele je tvořen rovnoramenným trojúhelníkem. Společné body těchto útvarů jsou body průnikové křivky na prvním obryse obou ploch.

Druhý obrys anuloidu je hlavní meridián 1m , leží v rovině μ rovnoběžné s nárysnou a procházející jeho osou 1o . Rovina μ protne rotační kuželovou plochu v elipse e , společné body 1m a e v tomto případě neexistují. Druhý obrys rotačního kužele leží v rovině α kolmé k π a procházející 2o . Rovina α protne anuloid v křivce l . Podle příkladu 1.2.1 sestrojíme řez l anuloidu rovinou α a určíme společné body l a druhého obrysu kuželové plochy. Na závěr určíme viditelnost průnikové křivky, viditelná je vždy ta část křivky, která je na viditelných částech obou ploch současně.

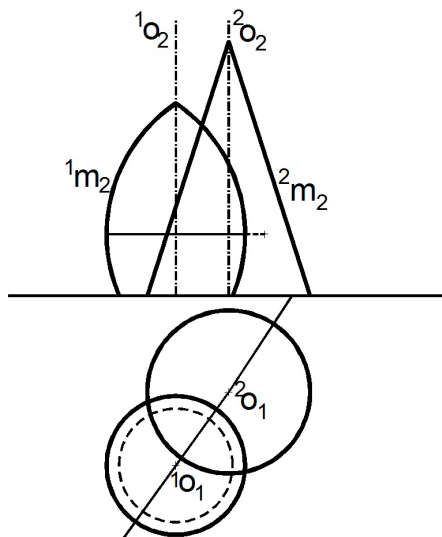


1.3.1 Sestrojte průnik rotačních ploch ${}^1\Phi({}^1o, {}^1m)$ a ${}^2\Phi({}^2o, {}^2m)$.



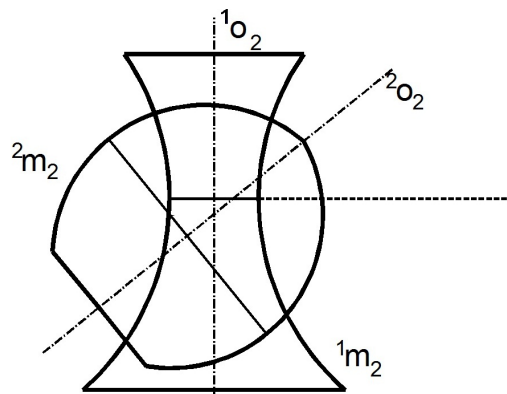
Obr. 1.3.7

1.3.2 Sestrojte průnik rotačních ploch ${}^1\Phi({}^1o, {}^1m)$ a ${}^2\Phi({}^2o, {}^2m)$.



Obr. 1.3.8

1.3.3 Sestrojte průnik rotačních ploch ${}^1\Phi({}^1o, {}^1m)$ a ${}^2\Phi({}^2o, {}^2m)$.



Obr. 1.3.9

1.4 Osvětlení rotačních ploch.



Rotační plochy budeme osvětlovat ze středu S , který je buď vlastní (středové osvětlení) nebo nevlastní (rovnoběžné osvětlení). Vždy sestrojíme mez vlastního stínu a stín vržený na průmětnu. Některé plochy ještě vrhají stín samy na sebe a je tak třeba sestrojít ještě mez stínu vrženého plochou na sebe. Připomeňme si některé pojmy z teorie osvětlování ploch.

Definice 1.4.1 Rovina procházející středem S osvětlení se nazývá *světelná rovina*

Definice 1.4.2 Množina bodů dotyku tečných světelných rovin plochy se nazývá *mez vlastního stínu*

Definice 1.4.3 Kuželová (resp. válcová) plocha Σ , jejíž vrchol je střed S osvětlení a řídicí křivka je mez p vlastního stínu plochy Φ při osvětlení z bodu S se nazývá *světelná kuželová (válcová) plocha*.

Poznámka 1.4.1 Světelná kuželová (válcová) plocha Σ se plochy Φ dotýká podél meze p vlastního stínu.

Definice 1.4.4 Řez p' světelné kuželové (válcové) plochy Σ rovinou ρ se nazývá *mez stínu vrženého do roviny ρ* .

Poznámka 1.4.2 Rozpadá-li se tento řez na dvě části, pak uvažujeme jen tu část kuželové plochy, uvnitř které leží Φ .

Zřejmě platí

Věta 1.4.1 *Mez p' stínu vrženého plochou do roviny je vrženým stínem meze p stínu vlastního.*

Definice 1.4.5 Průnik p^+ světelné kuželové (válcové) plochy Σ s plochou Φ se nazývá *mez stínu vrženého plochou na sebe*.

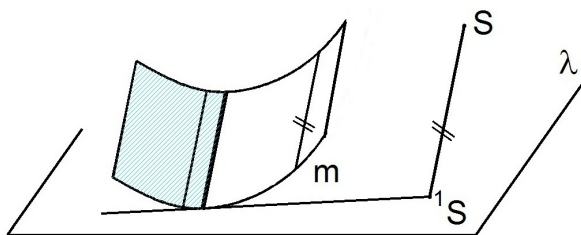
Definice 1.4.6 Je-li k hraniční rovnoběžka plochy a Ψ světelná kuželová (válcová) plocha určená kružnicí k , pak může existovat průnik k^+ světelné kuželové (válcové) plochy Ψ s plochou Φ a nazývá se *mez stínu vrženého hraniční rovnoběžkou na plochu*.

Poznámka 1.4.3 Dotýkají-li se dvě plochy ${}^1\Phi$ a ${}^2\Phi$ podél křivky k , mají podél této křivky společné tečné roviny (včetně světelných, pokud existují), proto pokud existují na křivce k body meze vlastního stínu, jsou společné pro obě plochy.

Věta 1.4.2 Mez d vlastního stínu kulové plochy κ při osvětlení ze středu S leží v polární rovině ρ středu S osvětlení vzhledem ke kulové ploše κ . Rovina ρ je kolmá k přímce SO , kde O je střed kulové plochy κ .

Poznámka 1.4.4 Při rovnoběžném osvětlení kulové plochy prochází rovina ρ meze vlastního stínu d středem O kulové plochy κ , ρ je polární rovina bodu S^∞ .

Poznámka 1.4.5 Mez vlastního stínu válcové plochy s řídicí křivkou m ležící v rovině λ při osvětlení z bodu S sestavujeme tak, že střed S osvětlení (vlastní či nevlastní) promítneme ve směru povrchových přímek válcové plochy do bodu 1S v rovině λ , v rovině λ sestavíme tečny řídicí křivky m jdoucí bodem 1S a body dotyku na křivce m prochází povrchové přímky válcové plochy, které tvoří mez vlastního stínu.

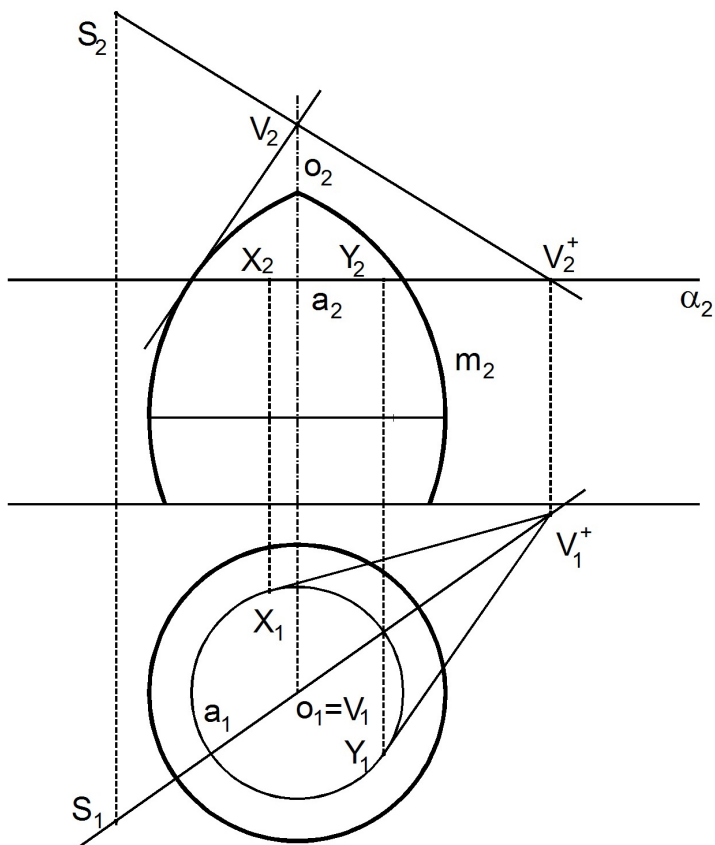


Obr. 1.4.1

1.4.1 Metody konstrukce meze vlastního stínu



Pro konstrukci meze vlastního stínu využíváme vlastnosti uvedené v poznámce 1.4.3.



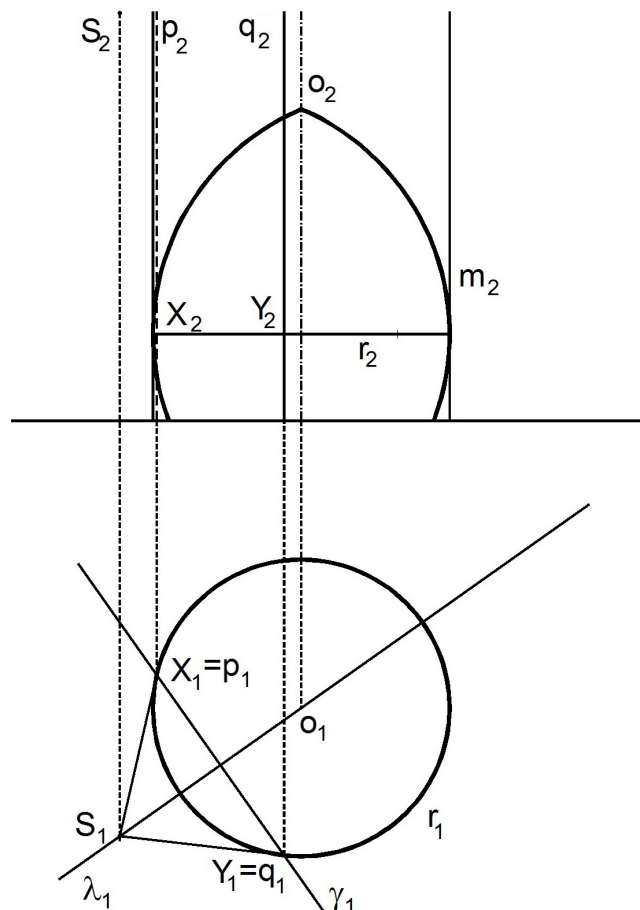
Obr. 1.4.2

Podél rovnoběžky nebo meridiánu opíšeme ploše Φ rotační plochu, na níž umíme jednoduše sestrojít mez vlastního stínu. Podle typu plochy, které rovnoběžce či meridiánu opisujeme rozlišujeme tři metody konstrukce bodů meze vlastního stínu, které při konstrukci osvětlení plochy kombinujeme. Metody mají názvy podle ploch, které se ploše Φ podél některé křivky opisují. Prvními dvěma metodami hledáme body meze vlastního stínu na rovnoběžkách, třetí metodou konstruujeme body meze vlastního stínu na meridiánech.

1. Kuželová metoda

Zvolíme rovnoběžku a plochy Φ ležící v rovině α a podél ní opíšeme dotykovou rotační kuželovou plochu Ω s vrcholem V . Sestrojíme mez vlastního stínu na kuželové ploše Ω . Abychom nemuseli sestrojovat průnik kuželové plochy Ω s půdorysnou, využijeme roviny α rovnoběžky a . Sestrojíme vržený stín V^+ bodu V do roviny α . Tečny z V^+ ke kružnici a se jí dotýkají v bodech X, Y , kterými prochází mez vlastního stínu plochy Ω . Body X, Y jsou (podle poznámky 1.4.3) body meze vlastního stínu na rovnoběžce a , viz. obr. 1.4.2.

Jelikož vrchol dotykové kuželové plochy Ω velice často vychází mimo nákresnu, používá se tato metoda především na hrdla a rovníky.



Obr. 1.4.3

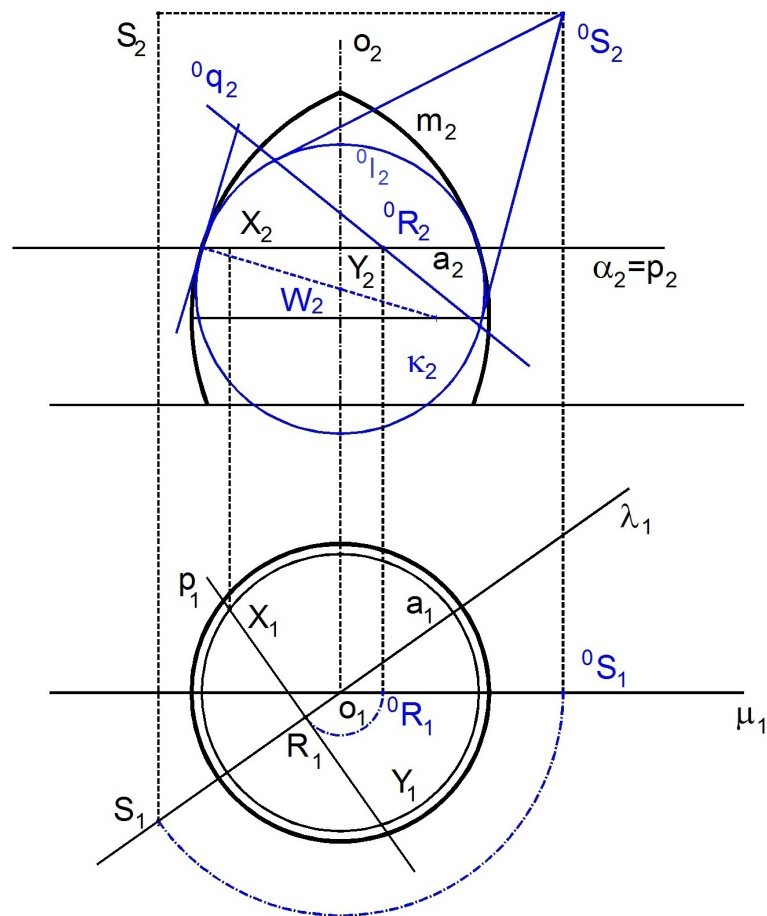
V tomto případě je Ω rotační válcová plocha, mez vlastního stínu rotační válcové plochy Ω je tvořena dvojicí povrchových přímek p, q plochy Ω , leží v rovině γ . Rovina γ je kolmá ke světelné rovině λ procházející osou rotační plochy a je tedy také kolmá k π . Půdorys

p_1, q_1 jsou body dotyku tečen sestrojených z S_1 ke kružnici r_1 a splynou tedy s půdorysy X_1, Y_1 bodů X, Y meze vlastního stínu rotační plochy Φ ležící na rovníku, viz. obr. 1.4.3 Aplikací této metody na kráterové rovnoběžky zjistíme, že na kráterových rovnoběžkách neexistují body meze vlastního stínu nebo celá rovnoběžka patří mezi vlastního stínu.

2. Kulová metoda

Zvolíme rovnoběžku a plochy Φ ležící v rovině α a podél ní opíšeme dotykovou kulovou plochu κ se středem W (vrchol normálové kuželové plochy, viz. definice 1.1.4.) Určíme mez d vlastního stínu na κ . Ta leží v polární rovině ρ bodu S vzhledem ke κ (věta 1.4.2).

Označme p průsečnici rovin ρ a α , na této přímce leží body meze vlastního stínu rovnoběžky a (poznámka 1.4.3). Přímku p hledáme (vzhledem k poloze roviny α je to hlavní přímka první osnovy roviny ρ), sestrojíme ji, aniž bychom museli sestrojovat stopy roviny ρ nebo mez d vlastního stínu vepsané kulové plochy κ . Obecně je průmětem d elipsa.



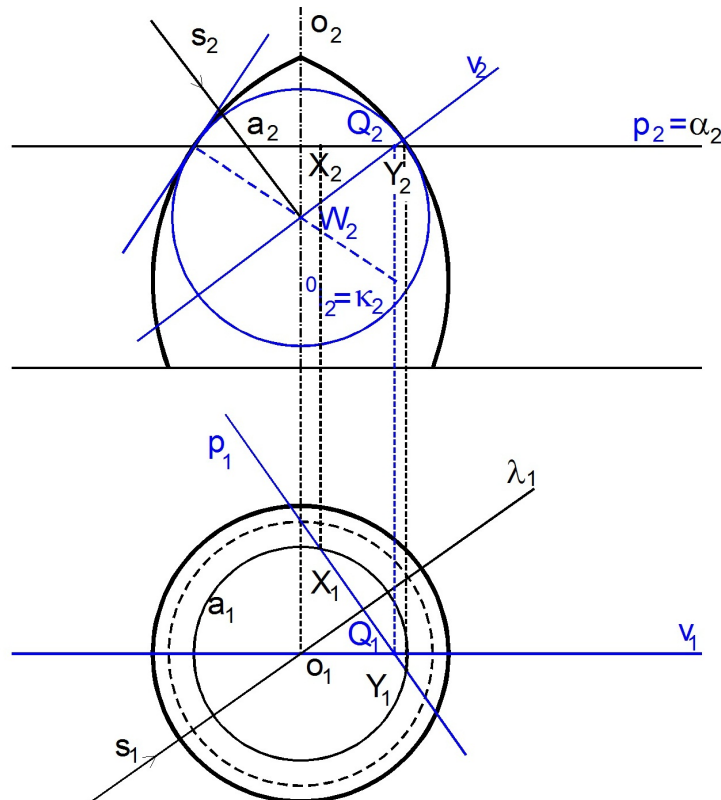
Obr. 1.4.4

Rovina $\lambda = (So)$ protne kulovou plochu κ v hlavní kružnici l a rovinu ρ v poláře q bodu S vzhledem ke kružnici l . Přímku q určíme otočením roviny λ do roviny μ procházející osou a rovnoběžné s nárysnou. V otočení je 0q_2 polára bodu 0S_2 vzhledem ke κ_2 . Určíme průsečík R přímky q a roviny α . Bod R je bodem roviny ρ i roviny α , tj. R je bodem hledané přímky p . Protože ρ je polární rovina bodu S vzhledem ke κ , je ρ kolmá na přímku SW . (Zřejmě $S_1W_1 \perp p_1$ a současně $R_1 \in p_1$.)

Pro rovnoběžné osvětlení se tato konstrukce zjednoduší, protože polární rovina ρ středu osvětlení vzhledem ke κ protíná κ v hlavní kružnici. Uvažujme hlavní přímku v druhé

osnovy roviny ρ procházející středem W kulové plochy κ a přímkou p první osnovy roviny ρ , která je průsečnicí rovin ρ a α . Přímkou v a p se protínají v bodě Q . Vzhledem k tomu, že ρ je kolmá na směr s osvětlení, je v_2 je kolmá na s_2 , p_1 je kolmá na s_1 . Odtud je zřejmá konstrukce bodů X, Y meze vlastního stínu na rovnoběžce a při rovnoběžném osvětlení. Sestrojíme v_2 procházející W_2 , určíme průsečík Q přímkou v a p ($p_2 = \alpha_2$) a půdorysem Q_1 vedeme kolmicí p_1 k s_1 .

Touto metodou sestrojíme body meze vlastního stínu většinou na obecných rovnoběžkách včetně hraničních.

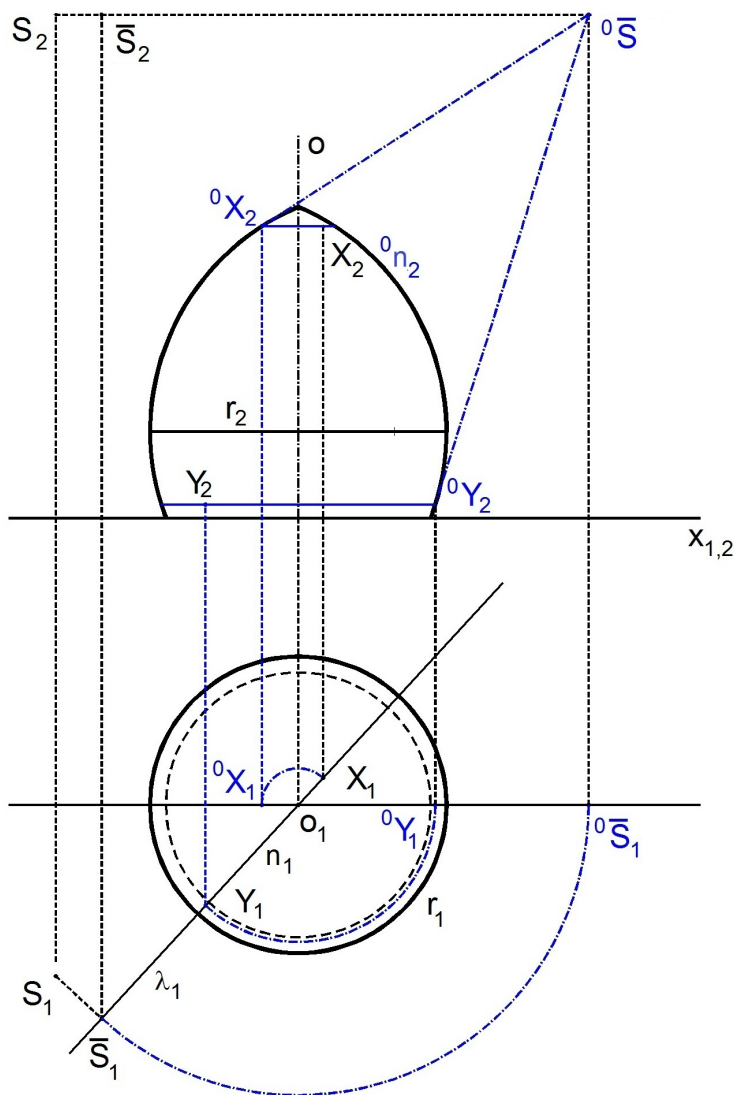


Obr. 1.4.5

3. Válcová metoda

Zvolíme meridián n rotační plochy Φ ležící v rovině λ . Opíšeme ploše Φ dotykovou válcovou plochu Ω podél meridiánu n . Její povrchové přímky jsou kolmé k λ , věta 1.1.1. Sestrojíme mez d vlastního stínu plochy Ω a určíme společné body n a d . Mez d vlastního stínu sestrojíme užitím 1.4.5, střed S osvětlení promítneme pravouhle do bodu \bar{S} v rovině λ a z \bar{S} sestrojíme tečny k meridiánu n . Body dotyku těchto tečen jsou body meze vlastního stínu na meridiánu n .

Válcová metoda se používá pro určení bodů meze na světelném meridiánu, protože rovina světelného meridiánu obsahuje střed osvětlení a odpadá konstrukce pravoúhlého průmětu středu osvětlení do roviny meridiánu. Další meridián, na němž hledáme body meze vlastního stínu válcovou metodou je hlavní meridián, který je druhým obrysem plochy a mění se na něm viditelnost meze vlastního stínu. Nárys pravoúhlého průmětu středu S osvětlení do roviny hlavního meridiánu splývá s nárysem bodu S .



Obr. 1.4.6

! Ačkoli se kuželová metoda používá především pro hrdelní a rovníkové rovnoběžky, kde je opsaná dotyková plocha Ω rotační plocha válcová, přesto jde stále o kuželovou metodu, nepleťte si ji s metodou válcovou, kde opsaná válcová plocha není rotační ani její řídicí křivka obvykle není kružnice.

1.4.2 Osvětlení rotační plochy.

! Sestrojujeme-li osvětlení rotační plochy, určujeme nejprve bodově mez vlastního stínu. Metodou válcovou určíme body meze vlastního stínu ležící v rovině λ světelného meridiánu. Rovina λ je určena středem S osvětlení a osou o rotační plochy Φ . Rovina λ je tedy rovinou souměrnosti rotační plochy Φ i dotykové světelné plochy Σ , proto je i rovinou souměrnosti meze p vlastního stínu. Body ve světelné rovině jsou lokálně nejvyšší či nejnižší body meze vlastního stínu.

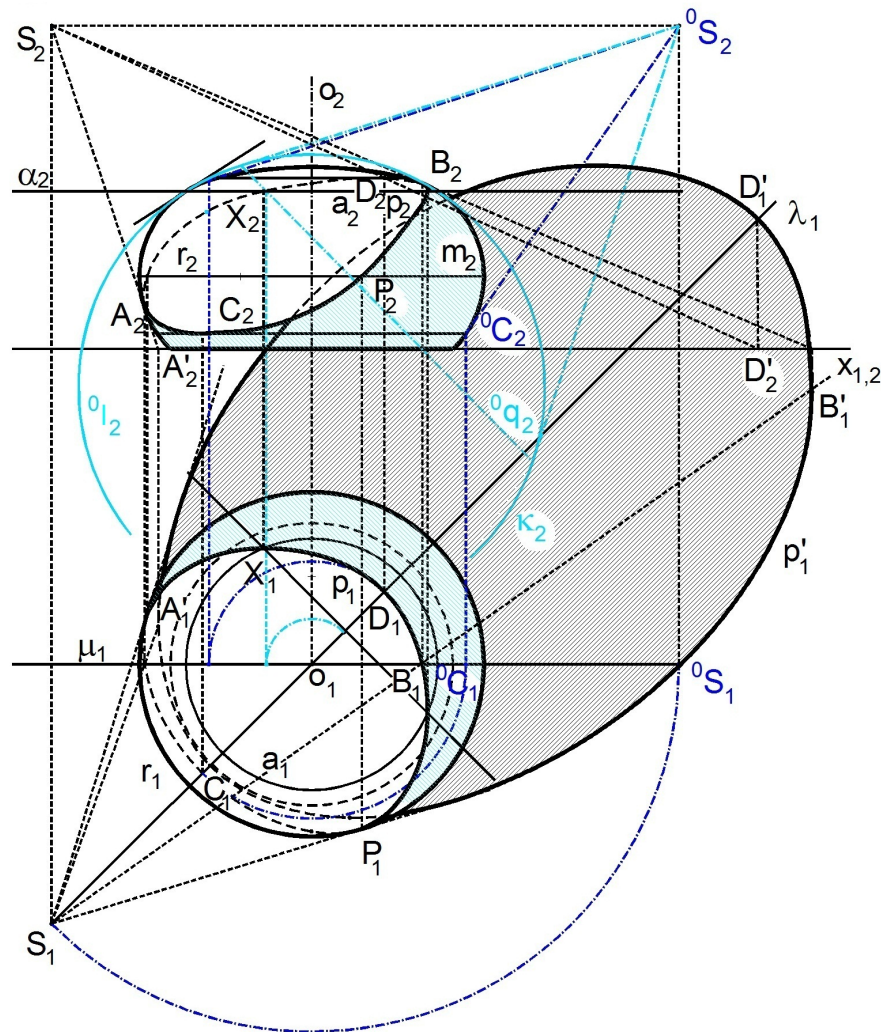
Metodou válcovou ještě určíme body meze vlastního stínu na hlavním meridiánu, tj. body, ve kterých se mění viditelnost meze p vlastního stínu v náryse. Metodu kuželovou využijeme pro konstrukci bodů meze vlastního stínu na rovníku či hrdle. Mez vlastního

stínu doplníme konstrukcí dostatečného počtu bodů na obecných rovnoběžkách metodou kulovou. Pokud existují body meze vlastního stínu na hraničních rovnoběžkách, je třeba sestrojit body meze vlastního stínu i na nich, většinou metodou kulovou.

Mez p' stínu vrženého do roviny ρ sestrojíme rovněž bodově jako množinu průsečíků X' přímkou SX s rovinou ρ , kde X jsou sestrojené body meze p vlastního stínu. Přímkou SX jsou povrchové přímky dotykové světelné plochy Σ (definice 1.4.4).

Příklad 1.4.1 Sestrojte osvětlení rotační plochy $\Phi(o, m)$ z vlastního středu S , vržený stín sestrojte do roviny π .

Mez p vlastního stínu sestrojíme užitím výše uvedených metod. Body meze vlastního stínu ležící na světelném meridiánu v rovině $\lambda = (So)$ sestrojíme válcovou metodou podle 3. Rovinu λ otočíme kolem osy rotační plochy do roviny μ hlavního meridiánu. Z otočeného bodu 0S vedeme tečny k hlavnímu meridiánu m , jejich body dotyku jsou otočené body C, D meze vlastního stínu v rovině λ . Body na hlavním meridiánu určíme rovněž válcovou metodou podle 3, jsou to body dotyku tečen hlavního meridiánu procházejících bodem S_2 . Jsou to body, ve kterých se mění v náryse viditelnost meze vlastního stínu.



Obr. 1.4.7

V půdoryse se mění viditelnost meze vlastního stínu na rovníku, tyto body sestrojíme užitím kuželové metody podle 1.

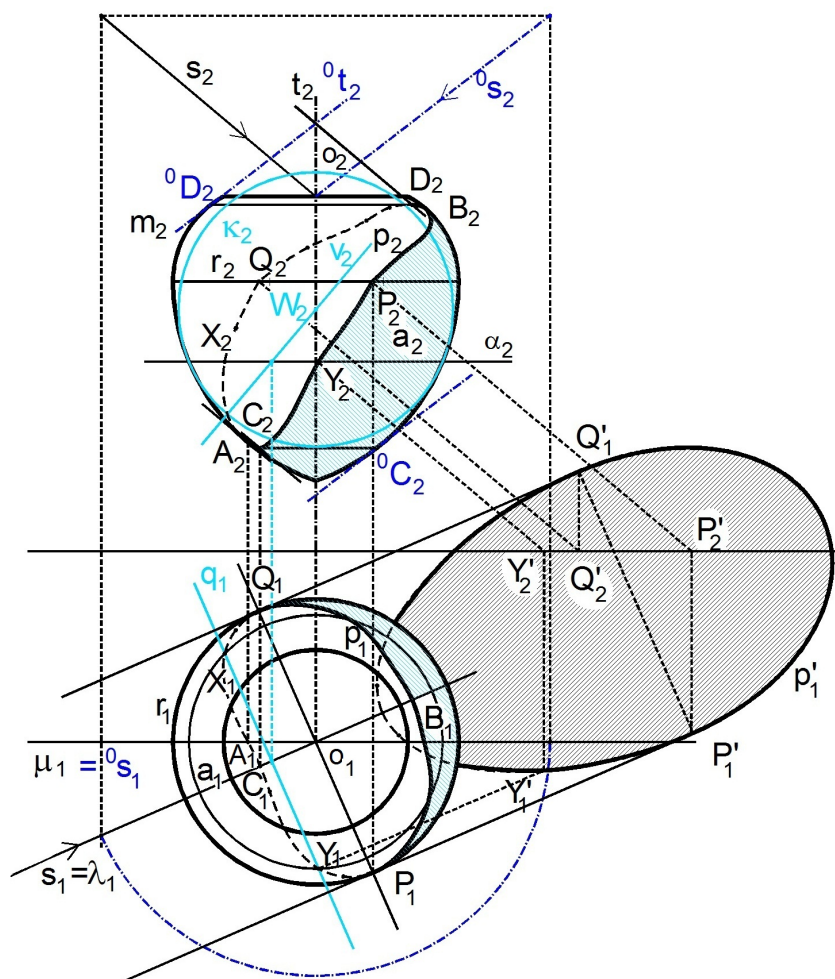
Půdorysy bodů meze vlastního stínu na rovníku r jsou body dotyku tečen r_1 sestrojěných z bodu S_1 .

Abychom mohli sestrojít mez p vlastního stínu, sestrojíme dostatečný počet bodů meze vlastního stínu na obecných rovnoběžkách. Body na obecných rovnoběžkách sestrojíme kulovou metodou podle 2. Podél rovnoběžky a ležící v rovině α sestrojíme vepsanou kulovou plochu κ , určíme v otočení přímky q , (poláru bodu S vzhledem ke kružnici l , kde l leží v λ a je to hlavní kružnice kulové plochy κ). Dále určíme průsečík přímky q s rovinou α a sestrojíme přímku q' - průsečnici polární roviny ρ bodu S vzhledem ke κ s rovinou α . Společné body X, Y přímky q' a rovnoběžky a patří mezi p vlastního stínu.

Půdorysné stopníky přímků určených středem osvětlení a všemi sestrojěnými body meze vlastního stínu určí mez p' stínu vrženého do půdorysny (viz. věta 1.4.1).

Příklad 1.4.2 Sestrojíte osvětlení rotační plochy $\Phi(o, m)$ z nevlastního středu S^∞ , vržený stín sestrojíte do roviny π .

Nevlastní střed osvětlení je dán směrem s , přímka s je zvolena tak, aby protínala osu o . Nejprve sestrojíme mez p vlastního stínu. Stejně, jako v příkladě 1.4.1 sestrojíme body na světelném a hlavním meridiánu válcovou metodou.



Obr. 1.4.8

Světelný meridián n leží v rovině $\lambda = (s, o)$, rovinu λ otočíme kolem o do roviny μ hlavního meridiánu. Světelný meridián se otočí do hlavního meridiánu a směr osvětlení se

otočí do přímky 0s . Vedeme tečny hlavního meridiánu rovnoběžné 0s a získáme v otočení body C, D meze vlastního stínu ležící na světelném meridiánu. V náryse ${}^0C_2, {}^0D_2$ jsou body dotyku tečen m_2 rovnoběžných s 0s_2 . Meridiány m a n si odpovídají v afinitě o ose o , směr této afinity určují body, které přejdou do sebe rotací kolem o , tedy směr afinity leží v rovině kolmé k o . V náryse je mezi křivkami m_2, n_2 pravouhlá osová afinita o ose o_2 . Protože s leží v rovině λ , odpovídají si v afinitě i 0s_2 a s_2 . Nárysy bodů C, D lze také sestavit užitím afinity, aniž bychom museli sestřiovat půdorysy bodů ${}^0C, {}^0D$. Přímka 0t_2 rovnoběžná s 0s_2 a dotýkající se m_2 v bodě 0D_2 protne o_2 v samodružném bodě, kterým prochází přímka t_2 , rovnoběžná s s_2 . Na přímce t_2 a na rovnoběžce bodu 0D_2 leží D_2 .

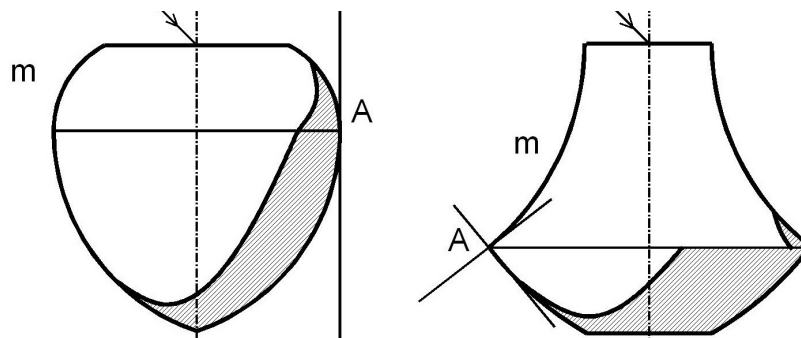
Body dotyku tečen hlavního meridiánu rovnoběžné s s_2 jsou body A, B meze vlastního stínu, ve kterých se mění viditelnost meze vlastního stínu v náryse.

Body P, Q meze vlastního stínu na rovníku sestrojíme využitím kuželové metody, v půdoryse se zřejmě zobrazí jako průsečíky kolmice jdoucí o_1 kolmo k s_1 .

Body na obecných rovnoběžkách sestrojíme užitím kulové metody upravené pro rovnoběžné osvětlení. Podél rovnoběžky a ležící v rovině α vepíšeme kulovou plochu κ , nárysem W_2 jejího středu vedeme kolmici v_2 k s_2 , určíme průsečík s α a půdorysem tohoto průsečíku vedeme kolmici q_1 na s_1 . Průsečíky X_1, Y_1 přímky q_1 s kružnicí a_1 jsou půdorysy bodů meze vlastního stínu na rovnoběžce a .

Mez p' stínu vrženého rotační plochou do půdorysny sestrojíme rovněž bodově, p' je množina půdorysných stopníků přímek rovnoběžných se směrem osvětlení a procházejících body křivky p .

Poznámka 1.4.6 Mez vlastního stínu plochy závisí na tvaru meridiánu m . Existuje-li v bodě A právě jedna tečna, ale mění se v něm křivost, pak mez vlastního stínu na rovnoběžce bodu A je spojitá, ale má dvě různé tečny. Existují-li v bodě A meridiánu m dvě různé tečny k meridiánu m , pak mez vlastního stínu na rovnoběžce bodu A není souvislá.



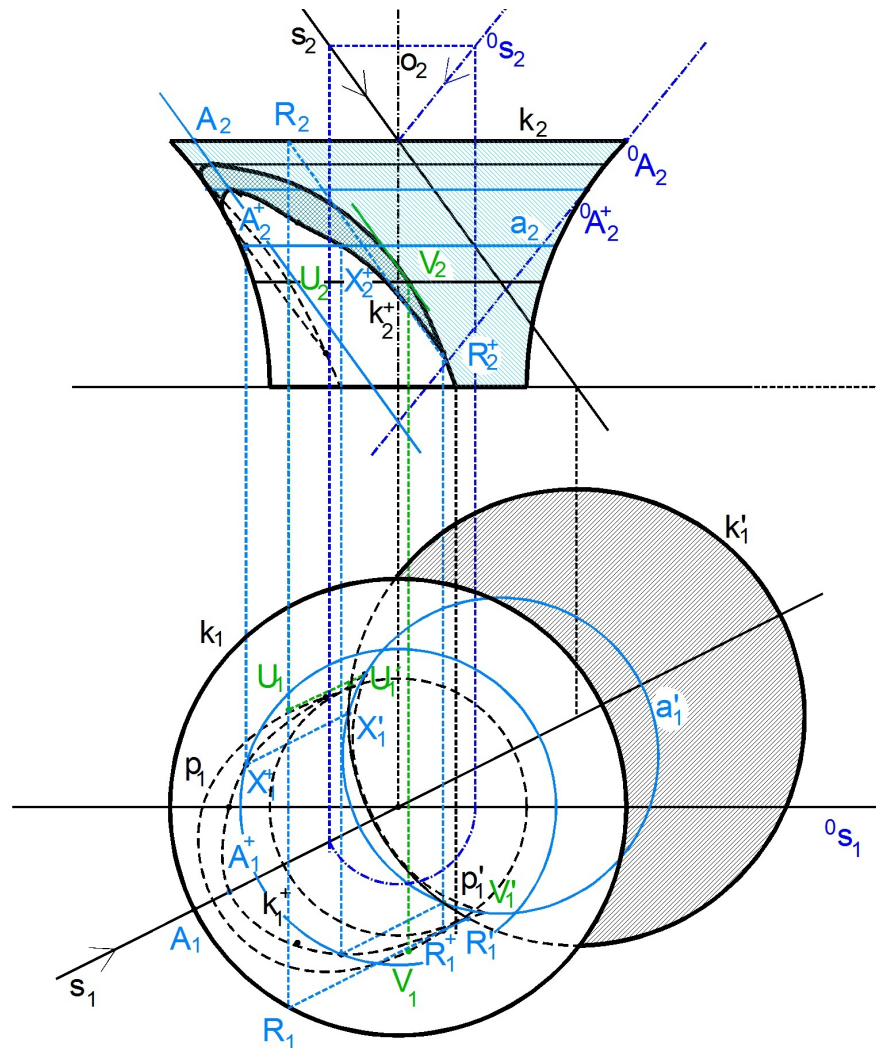
Obr. 1.4.9

Může nastat případ, že světelná válcová plocha Ψ proložená hraniční rovnoběžkou k má neprázdný průnik k^+ s plochou Φ , v tomto případě sestřiováme i mez stínu k^+ vrženého rovnoběžkou na plochu (definice 1.4.6).

Příklad 1.4.3 Sestrojte rovnoběžné osvětlení rotační plochy $\Phi(o, m)$, vržený stín sestrojte do roviny π .

Podle příkladu 1.4.2 sestrojíme mez p stínu vlastního a mez p' stínu vrženého. K mezi p vlastního stínu existují tečny rovnoběžné s s , které se dotýkají p v bodech U, V . Vržený stín U', V' bodů U, V jsou body vratu meze p' stínu vrženého do π .

Uvažujeme-li přímky světelné válcové plochy Ψ procházející hraniční rovnoběžkou k , je zřejmé, že existuje neprázdný průnik této plochy s rotační plochou Φ a hraniční rovnoběžka k vrhá stín na plochu Φ a její vržený stín k' do π patří k celé mezi stínu vrženého plochou do π . Mez k^+ stínu vrženého hraniční rovnoběžkou k na plochu určíme metodou zpětných paprsků. Sestrojíme mez k' stínu vrženého kružnicí k do π . Určíme průsečíky p' a k' a metodou zpětných paprsků je vrátíme zpět na p , tj. v půdoryse průsečíkem R_1^+ křivek p_1' a k_1' vedeme rovnoběžku s s_1 a určíme její průsečík R_1^+ s p_1 a R_1 s k_1 . Bod R kružnice k vrhá stín do bodu R^+ na mezi p vlastního stínu.



Obr. 1.4.10

Ve světelné rovině λ procházející osou plochy Φ leží bod A kružnice k , který vrhá stín A^+ na plochu Φ , rovina λ je rovněž rovinou souměrnosti meze k^+ . Bod A^+ určíme otočením roviny λ kolem osy rotace do roviny μ hlavního meridiánu. A se otočí do 0A , vedeme rovnoběžku s 0s_2 , bod ${}^0A_2^+$ je průsečík této rovnoběžky s m_2 .

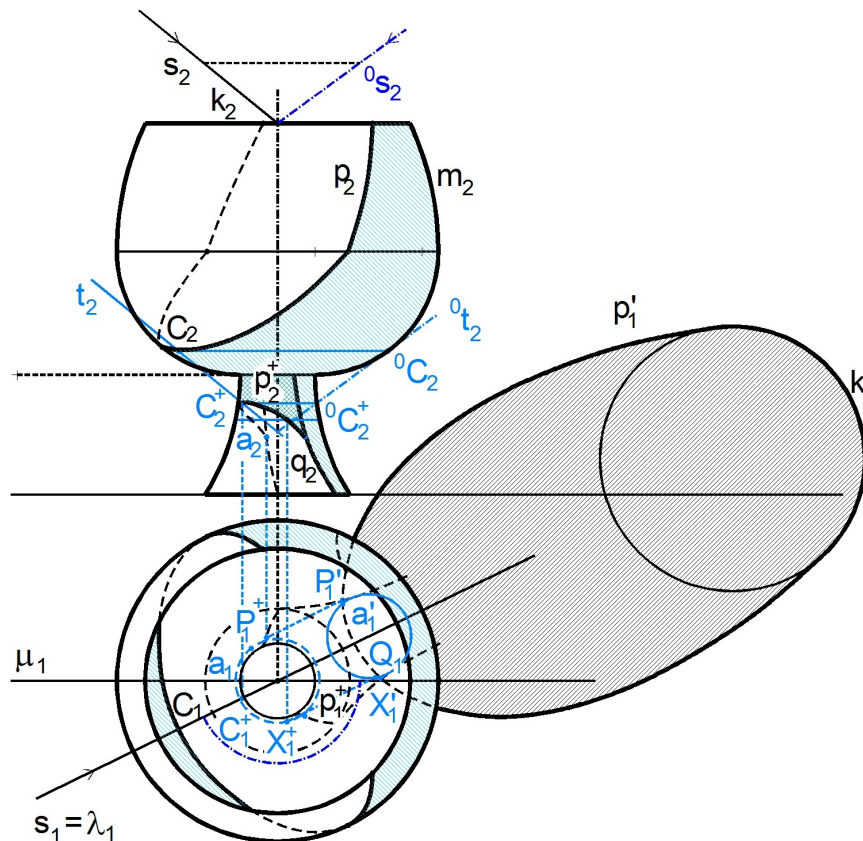
Další body meze k^+ sestrojujeme opět zpětnými paprsky na dostatečném počtu rovnoběžek plochy. Zvolíme libovolnou rovnoběžku a , sestrojíme její vržený stín a' do π a určíme průsečíky s k' , které zpětnými paprsky vrátíme na a .

Dotyková světelná válcová plocha Σ opsaná rotační ploše Φ může mít neprázdný průnik s plochou Φ a plocha tak vrhá stín sama na sebe (definice 1.4.5). Konstrukce je obdobná,

jako v příkladě 1.4.3.

Příklad 1.4.4 Sestrojte rovnoběžné osvětlení rotační plochy $\Phi(o, m)$, vržený stín sestrojte do roviny π .

Podle příkladu 1.4.2 sestrojíme mez stínu vlastního a mez stínu vrženého. Mez vlastního stínu se rozpadá na části p, q . Horní část p vrhá stín p^+ na spodní část plochy. Nejprve určíme průsečíky p' a q' a zpětnými paprsky získáme body P, Q části p vrhající stín na část q .



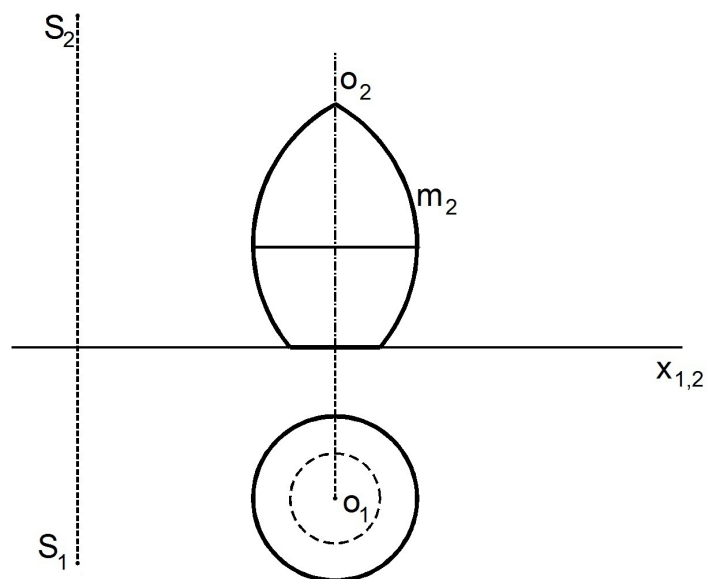
Obr. 1.4.11

Ke světelnému meridiánu n (leží ve světelné rovině λ procházející osou plochy Φ) existuje tečna t rovnoběžná se směrem osvětlení (tj. patří dotykové světelné válcové ploše Σ). Tečna t se dotýká n v bodě C a protíná n v bodě C^+ , což je vržený stín bodu C na plochu Φ . Bod C je nejnižším bodem části p meze vlastního stínu. Bod C^+ opět určíme otočením roviny λ kolem osy rotace do roviny μ hlavního meridiánu. Meridián n se otočí do hlavního meridiánu m , při konstrukci meze vlastního stínu jsme užitím otočení sestrojili bod C . Bod 0C_2 je bod dotyku tečny 0t_2 ke křivce m_2 rovnoběžné s 0s_2 . Průsečík 0t_2 s m_2 je otočený bod ${}^0C_2^+$. Nárýsy meridiánů n a m si odpovídají v pravouhlé afinitě o ose o_2 , konstrukce nárýsu bodu C^+ je zřejmá.

Další body na obecných rovnoběžkách sestrojíme jako v příkladě 1.4.2, zvolíme libovolnou rovnoběžku a , sestrojíme její vržený stín a' do π a určíme průsečíky X' kružnic a' a p' , které zpětnými paprsky vrátíme na a .

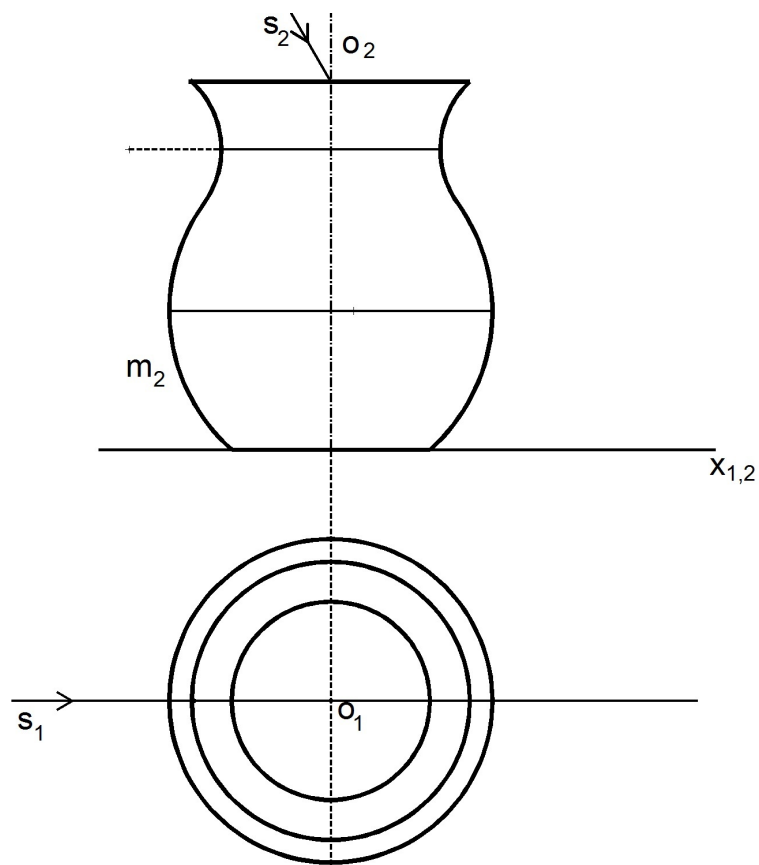


1.4.1 Sestrojte středové osvětlení rotační plochy $\Phi(o, m)$, vržený stín sestrojte do roviny π .



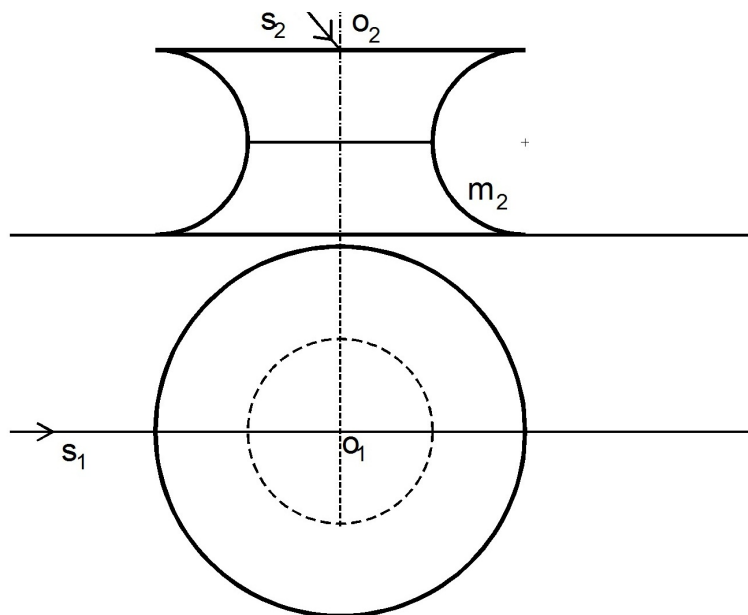
Obr. 1.4.12

1.4.2 Sestrojte rovnoběžné osvětlení rotační plochy $\Phi(o, m)$, vržený stín sestrojte do roviny π .



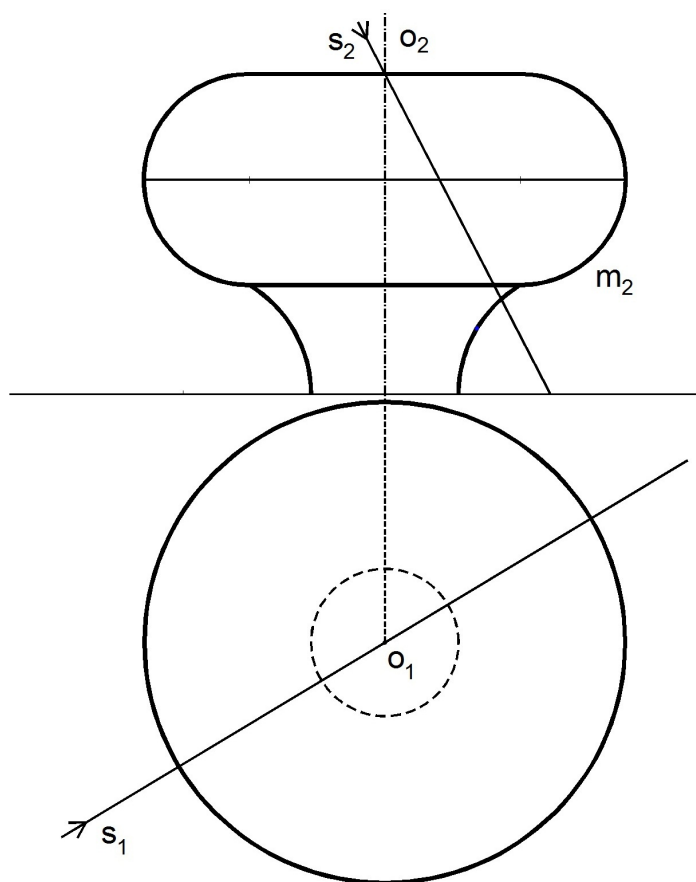
Obr. 1.4.13

1.4.3 Sestrojte rovnoběžné osvětlení rotační plochy $\Phi(o, m)$, vržený stín sestrojte do roviny π .



Obr. 1.4.14

1.4.4 Sestrojte rovnoběžné osvětlení rotační plochy $\Phi(o, m)$, vržený stín sestrojte do roviny π .



Obr. 1.4.15

1.5 Zobrazení rotačních ploch v různých projekcích.



Obrysy rotačních ploch v různých projekcích se konstruují s využitím osvětlení. Budeme sestrojovat průměty plochy v promítáních daných směrem, tj. s nevlastním středem promítání. Plochu osvětlíme ve směru promítání, určíme mez vlastního stínu tj. skutečný obrys plochy a mez stínu vrženého do průmětny, tj. zdánlivý obrys plochy. Mez p vlastního stínu plochy v tomto osvětlení sestrojíme metodami uvedenými v předchozí kapitole. Vzhledem k tomu, že směr osvětlení splývá se směrem promítání, některé konstrukce se zjednoduší.

1.5.1 Obrys plochy v Mongeově projekci

V Mongeově projekci určujeme půdorys a nárys plochy, tj. hledáme první a druhý zdánlivý obrys plochy. Nejprve sestrojíme obrys plochy, jejíž osa je rovnoběžná s ν , ale není kolmá k π .

Příklad 1.5.1 V Mongeově projekci sestrojte průmět plochy $\Phi(o, m)$, jejíž osa je rovnoběžná s nárysnou.

Protože je osa o rovnoběžná s nárysnou, je druhým skutečným obrysem plochy hlavní meridián m , druhý zdánlivý obrys je nárys m_2 hlavního meridiánu. Sestrojíme první zdánlivý obrys p_1 , tj. půdorys plochy. Osvětlujeme plochu v rovnoběžném osvětlení jehož směr s je kolmý k π . Na obecné rovnoběžky použijeme kulovou metodu. Podél rovnoběžky a vepíšeme kulovou plochu κ . Mez vlastního stínu k této kulové plochy leží v rovině rovnoběžné s π , jejím nárysem je úsečka a půdorysem kružnice, která je současně půdorysem kulové plochy κ . Stačí tedy sestrojit nárys k_2 meze vlastního stínu kulové plochy a určit průsečík k_2 s nárysem a_2 rovnoběžky a . Protože nárysem kružnic a, k jsou úsečky, získáme nárys bodů X, Y meze vlastního stínu. Půdorys těchto bodů najdeme jednoduše na půdoryse k_1 kružnice k meze vlastního stínu kulové plochy κ . Půdorysy X_1, Y_1 bodů X, Y leží také na elipse a_1 , která je půdorysem rovnoběžky a . Kružnice k_1 a elipsa a_1 se v bodech X_1, Y_1 dotýkají.

Pro konstrukci bodů meze vlastního stínu na hrdle či rovníku je v případě sestrojování průmětů ploch vhodnější užít rovněž kulové metody, nikoli metody kuželové. Aplikujeme-li totiž uvedenou konstrukci bodů meze vlastního stínu kulovou metodou na rovník či hrdlo, zjistíme, že nárys bodů meze vlastního stínu je průsečík nárysu rovnoběžky s nárysem osy plochy.

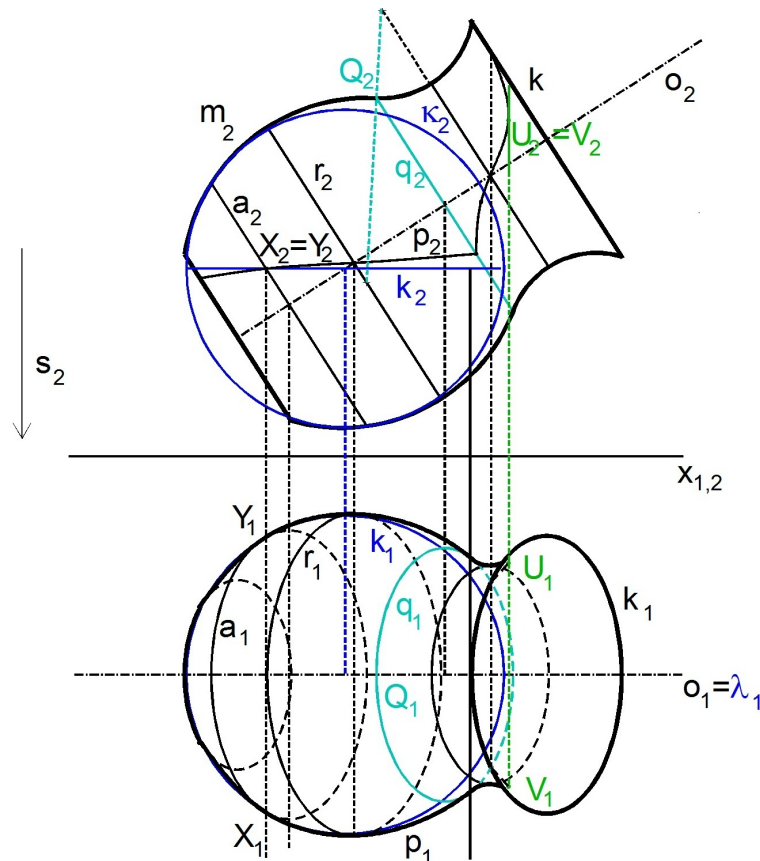
Hlavní meridián m obsahuje bod Q , ve kterém se mění křivost hlavního meridiánu, ale existuje v něm jediná tečna meridiánu. Na rovnoběžce q bodu Q je bod meze vlastního stínu, který je singulárním bodem p_2 , viz. poznámka 1.4.6.

Směr osvětlení je rovnoběžný s nárysnou, proto světelná rovina λ splyne s rovinou μ hlavního meridiánu a hlavní meridián m splyne se světelným meridiánem. Pokud existují body meze vlastního stínu na světelném meridiánu, určíme je metodou válcovou jako body dotyku tečny m_2 rovnoběžné s s_2 (v tomto případě body meze vlastního stínu na světelném meridiánu neexistují).

Prvnímu obrysu patří také část hraniční rovnoběžky. Body, ve kterých se půdorys hraniční rovnoběžky a první zdánlivý obrys p_1 dotýkají, určíme kulovou metodou.

Sestrojíme nárys p_2 prvního skutečného obrysu. K p_2 existuje tečna rovnoběžná s s_2 , která se p_2 dotýká v bodě $U_2 = V_2$. Body U, V jsou body prvního skutečného obrysu, které se zobrazí jako body vratu U_1, V_1 prvního zdánlivého obrysu.

První zdánlivý obrys lze také sestavit jako obálku půdorysů rovnoběžek plochy.



Obr. 1.5.1

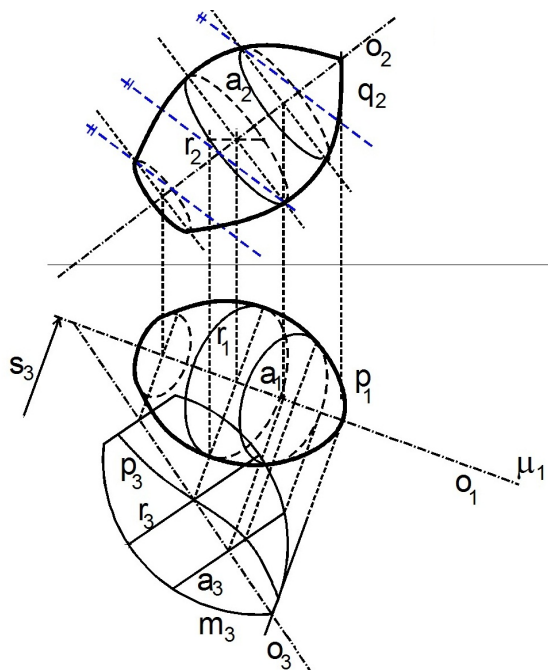
Příklad 1.5.2 V Mongeově projekci sestojte průmět plochy $\Phi(o, m)$.

Osa plochy v obecné poloze vzhledem k průmětnám, ke konstrukci p prvního resp. q druhého zdánlivého obrysu je třeba užít další průmětny. Zvolíme třetí průmětnu μ procházející osou o kolmo k půdorysně a sklopíme. V rovině μ leží meridián m rotační plochy. Půdorys určíme jako v příkladě 1.5.1. Osa plochy leží v třetí průmětně μ , první skutečný obrys je mez p vlastního stínu při osvětlení kolmém k π .

Nárys lze sestavit stejně, zavedeme čtvrtou průmětnu σ procházející osou o rotační plochy kolmou k nárysně, rovinu σ sklopíme a sestojíme meridián n rotační plochy Φ ležící v rovině σ a na ploše určíme mez q vlastního stínu v rovnoběžném osvětlení ve směru kolmém k nárysně podle příkladu 1.5.1.

Druhý zdánlivý obrys plochy je také možné sestavit jako obálku průmětů rovnoběžek plochy. Rovnoběžky plochy leží ve vzájemně rovnoběžných rovinách, jejich nárysy jsou proto homotetické elipsy (tj. elipsy, jejichž spojnice hlavního a vedlejšího vrcholu jsou rovnoběžné.) Sestrojíme například nárys rovníku. Známe střed O rovníku r . Rovník leží v rovině ρ kolmé k o , jeho půdorysem je elipsa r_1 , její hlavní osa má velikost rovnu poloměru rovníku a je kolmá na o_1 . Hlavní osa elipsy r_1 je půdorys průměru kružnice r rovnoběžného s π , tj. leží na hlavní přímce první osnovy roviny ρ . Nárys tohoto průměru

je rovnoběžný se základnicí. V náryse se kružnice r rovněž zobrazí jako elipsa. Protože leží v rovině ρ kolmé k o , bude hlavní osa elipsy r_2 kolmá na o_2 a její velikost je rovna poloměru kružnice r . Elipsa r_2 je určena hlavními vrcholy a krajními body průměru rovnoběžného s π , r_2 sestrojíme proužkovou konstrukcí. Pro další rovnoběžky pak stačí najít střed, hlavní osy budou kolmé na o_2 a jejich velikost bude rovna poloměru rovnoběžky. Vedlejší vrcholy pak již snadno sestrojíme pomocí rovnoběžných přímků spojujících hlavní a vedlejší vrcholy. Sestrojením dostatečného počtu rovnoběžek, případně zavedením čtvrté průmětny zjistíme, že bod rotační plochy ležící na ose patří druhému skutečnému obrysu.



Obr. 1.5.2

1.5.2 Obrys plochy v ortogonální axonometrii

Axonometrický průmět (tj. zdánlivý obrys plochy) je průmět meze p vlastního stínu plochy v osvětlení kolmém k axonometrické průmětně. Osu rotační plochy ztotožníme s osou z .

Příklad 1.5.3 Zobrazte rotační plochu $\Phi(z, m)$ v ortogonální axonometrii dané axonometrickým trojúhelníkem.

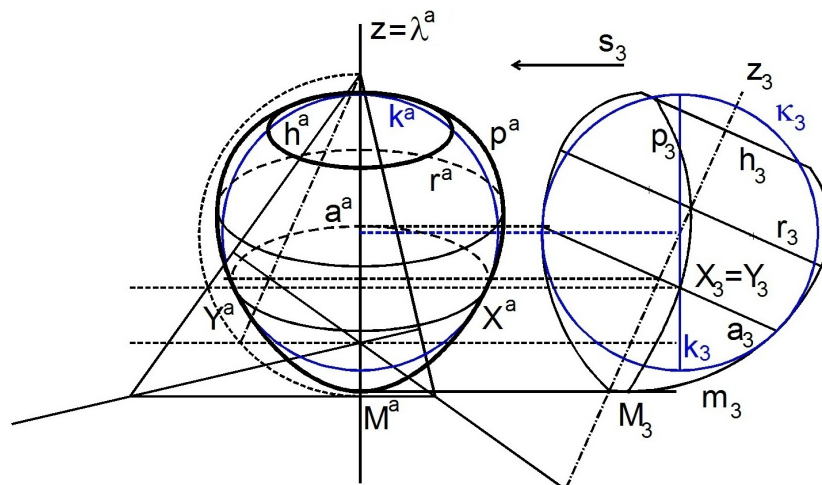
Meridián m plochy zadáme v promítací rovině λ osy z , rovinu λ sklopíme. Aby se nám nepřekrýval sklopený meridián s axonometrickým průmětem, posuneme sklopené útvary ve směru kolmém k průmětu osy z . Směr osvětlení je kolmý k axonometrické průmětně, je to tedy sklopený směr osvětlení. (Sklopené útvary značíme indexem 3.) Sestrojíme mez p vlastního stínu. Zvolíme libovolnou rovnoběžku a plochy a na ní kulovou metodou určíme body meze vlastního stínu. Podél rovnoběžky a vepíšeme dotykovou kulovou plochu κ a určíme její mez k vlastního stínu. Průsečíky k s rovnoběžkou a jsou body X, Y meze vlastního stínu rotační plochy. Rotační plocha Φ , kulová plocha κ i mez k, p vlastních stínů jsou souměrné podle roviny λ , tj. mez k vlastního stínu kulové plochy κ i rovnoběžka a se do roviny λ promítnou jako úsečky, k_3 je úsečka kolmá k s_3 ,

průsečík k_3 a a_3 je průmět dvou různých bodů X, Y rotační plochy do roviny λ . Axonometrické průměty bodů X, Y sestrojíme s využitím kružnice k . Kružnice k leží v rovině rovnoběžné s axonometrickou průmětnou, proto je jejím axonometrickým průmětem kružnice k^a , jejíž střed leží na ose z . Body X, Y leží na kružnici k , konstrukce jejich axonometrických průmětů je zřejmá. Axonometrickými průměty bodů X, Y prochází rovněž axonometrický průmět rovnoběžky a (elipsa), zdánlivý obrys rotační plochy Φ je obálkou průmětů rovnoběžek.

Body meze vlastního stínu na rovníku je opět výhodnější sestřít kulovou metodou, je zřejmé, že průmět bodů meze vlastního stínu na rovníku r do roviny λ je průsečík úsečky r_3 se z_3 .

Bod M meze vlastního stínu na meridiánu m v rovině λ určíme válcovou metodou. Je to bod dotyku tečny meridiánu rovnoběžné s s_3 . Axonometrický průmět bodu M leží na ose z .

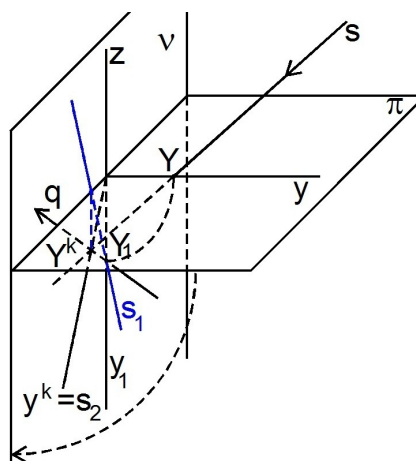
Obrysu plochy patří rovněž průmět hraniční rovnoběžky, body, ve kterých se hraniční rovnoběžka dotýká obrysu určíme kulovou metodou jako v případě obecné rovnoběžky.



Obr. 1.5.3

1.5.3 Obrys plochy v kosoúhlém promítání

Kosoúhlé promítání je určeno kosoúhlým průmětem y^k osy y a kvocientem kosoúhlého promítání, který je dán přímkou q .

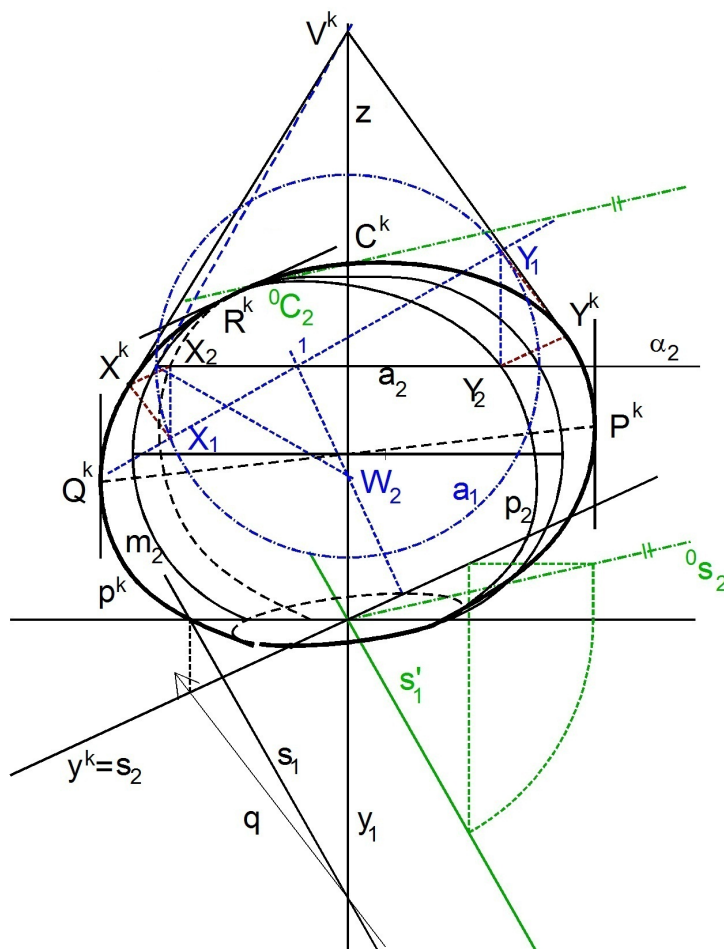


Obr. 1.5.4

Osu rotační plochy opět ztotožníme s osou z . Hledáme skutečný obrys plochy - mez p vlastního stínu při osvětlení daném směrem promítání. Abychom mohli sestavit kosoúhlý průmět p^k plochy Φ , musíme v přidružené Mongeově projekci určit nárysy a půdorysy bodů meze vlastního stínu v osvětlení daném směrem promítání. Je třeba nejprve sestavit půdorys a nárys směru promítání. Směr promítání je dán přímkou $s = YY^k$. Nárys s_2 přímky s tedy splývá s y^k . Půdorys přímky s prochází Y_1 a bodem na ose x , který je pravouhlým průmětem bodu Y^k do π , což je nárys půdorysného stopníku promítacího paprsku, viz. obr. 1.5.4

Příklad 1.5.4 Zobrazte rotační plochu $\Phi(z, m)$ v kosoúhlém promítání daném kosoúhlým průmětem osy y a kvocientem.

Osa rotační plochy leží v nárysně, druhým obrysem plochy v Mongeově projekci je hlavní meridián m . Sestrojíme půdorys a nárys směru promítání podle obr. 1.5.4. V osvětlení daném půdorysem a nárysem sestavíme nárys p_2 skutečného obrysu p . Nebudeme sestavovat půdorys plochy v přidružené Mongeově projekci, rovnoběžky sklápíme do rovin, v nichž dané rovnoběžky leží. Zvolíme rovnoběžku a rotační plochy Φ ležící v rovině α a kulovou metodou na ní najdeme body X, Y meze vlastního stínu.



Obr. 1.5.5

Sestrojíme střed W kulové plochy vepsané ploše Φ podél rovnoběžky a a rovnoběžku a sklopíme do roviny α . (Sklopené útvary budeme značit jako půdorysy, tj. dolním indexem 1.) Bodem W_2 vedeme kolmici k s_2 , určíme průsečík 1 této kolmice s a_2 . Bodem 1 vedeme kolmici k s_1 a její průsečíky s a_1 jsou body X_1, Y_1 . Na ordinálách a a na a_2 leží X_2, Y_2 . Sdružené průměty X_1, X_2 a Y_1, Y_2 pak určují kosoúhlé průměty X^k, Y^k . Jestliže podél rovnoběžky a opíšeme dotykovou kuželovou plochu Ω s vrcholem V , pak přímky $V^k X^k$ a $V^k Y^k$ jsou tečny kosoúhlého průmětu p^k plochy Φ v bodech X^k, Y^k .

Body na rovníku určíme metodou kuželovou, podél rovníku se rotační plochy dotýká rotační plocha válcová, její povrchy jsou rovnoběžné se z . Půdorysy bodů P, Q meze vlastního stínu na rovníku r jsou průsečíky kolmice na s_1 vedené středem rovníku s r_1 . Kosoúhlé průměty P^k, Q^k jsou body kosoúhlého průmětu p^k plochy Φ ležící na průmětu r^k rovníku a současně patří obrysu dotykové válcové plochy opsané ploše Φ podél rovníku, tj. tečny kosoúhlého průmětu p^k plochy Φ v bodech P^k, Q^k na rovníku jsou rovnoběžné se z a jsou obrysem dotykové rotační válcové plochy opsané ploše Φ podél rovníku.

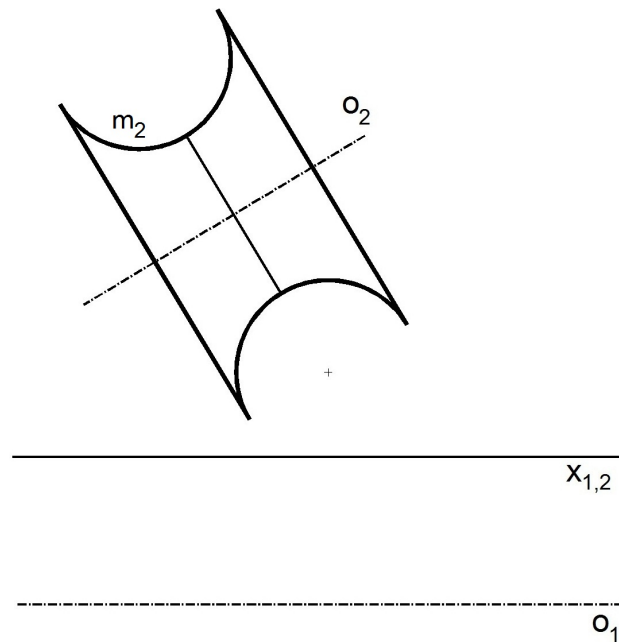
Válcovou metodou určíme bod R meze p ležící na hlavním meridiánu. Protože meridián m leží v nárysně, bude nárys bodu R splývat s jeho kosoúhlým průmětem a v tomto bodě se dotýkají křivky m_2, p_2, p^k . Bod R je bodem dotyku tečny m_2 rovnoběžné s s_2 .

Body v rovině světelného meridiánu λ opět určíme válcovou metodou. Rovinu λ , která prochází osou z a je rovnoběžná se směrem osvětlení otočíme kolem osy z do náryсны. Vedeme směr osvětlení bodem na ose (např. počátkem) a otočíme jej kolem z do náryсны.

Světelný meridián se otočí do meridiánu m . K m_2 sestrojíme tečnu rovnoběžnou s 0s_2 , najdeme bod 0C_2 dotyku a otočíme zpět. Bod C leží ve světelné rovině λ procházející osou z , rovina λ je tedy promítací rovina a jejím kosoúhlým průmětem je osa z . Kosoúhlý průmět C^k leží na ose z , tečna kosoúhlého průmětu p^k plochy Φ v bodě C^k je rovnoběžná s osou x . Kosoúhlému průmětu patří i část průmětu hraniční rovnoběžky, body dotyku na této rovnoběžce určíme kulovou metodou.

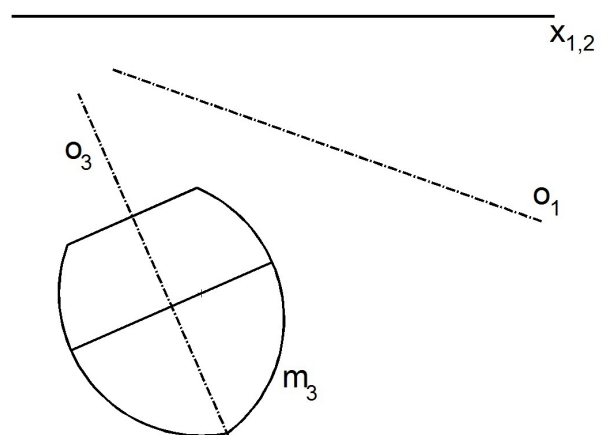


1.5.1 V Mongeově projekci sestrojte půdorys rotační plochy $\Phi(o, m)$, jejíž osa je rovnoběžná s ν .



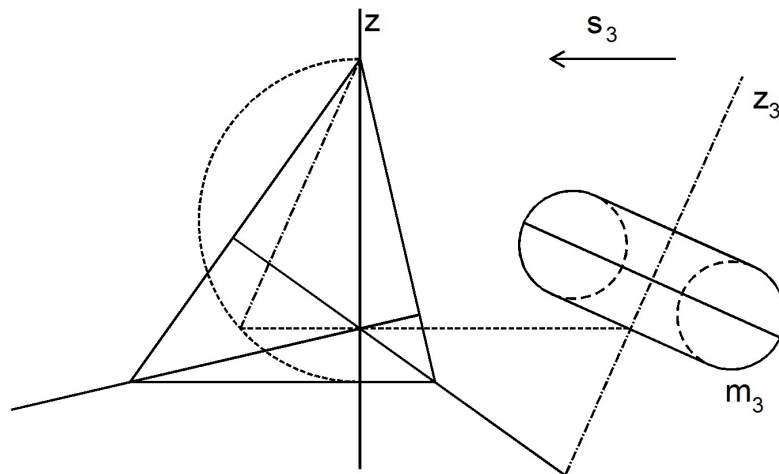
Obr. 1.5.6

1.5.2 Sestrojte průmět rotační plochy $\Phi(o, m)$ v Mongeově projekci.



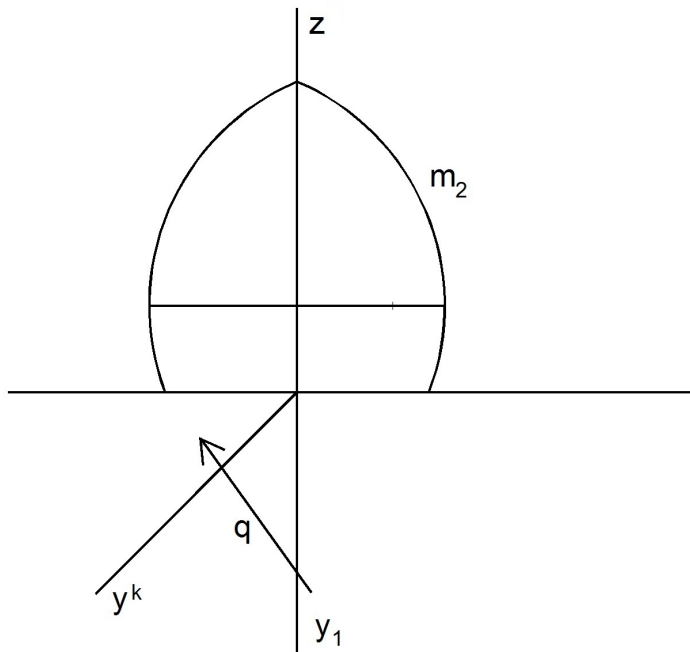
Obr. 1.5.7

1.5.3 Sestrojte průmět rotační plochy $\Phi(z, m)$ v ortogonální axonometrii.



Obr. 1.5.8

1.5.4 Sestrojte průmět rotační plochy $\Phi(z, m)$ v kosoúhlém promítání.

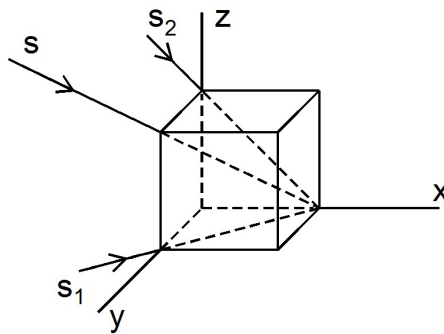


Obr. 1.5.9

1.6 Technické osvětlení rotačních ploch.



V technické praxi se často pro zvýšení názornosti využívá speciálního osvětlení, tzv. technického osvětlení. Je určeno tělesovou úhlopříčkou krychle, která má hrany v souřadných osách, vrchol v počátku soustavy souřadnic. Osvětlení je určeno tělesovou úhlopříčkou, která neprochází počátkem soustavy souřadnic.

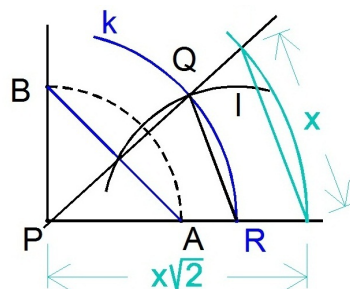


Obr. 1.6.1

Budeme sestřiovat technické osvětlení rotačních ploch v Mongeově projekci, osy rotačních ploch jsou kolmé k půdorysně a leží v nárysně. V Mongeově projekci sdružené průměty s_1 a s_2 směru osvětlení svírají se základnicí úhel 45° , mnohé konstrukce se tím zjednoduší a není pak třeba sestřiovat půdorys rotační plochy. Sestřovujeme pouze nárysy, tzn. i vržený stín plochy se sestřovuje pouze do náryсны ν . Pokud rotační plocha stojí na π sestřovujeme vržený stín jen po rovinu π . Z meze stínu vlastního i meze stínu vrženého sestřovujeme pouze viditelné části (neviditelné části sestřovujeme pouze v případě, využívají-li se u dalších konstrukcích).

1.6.1 Metody konstrukce bodů meze stínu vlastního a vrženého

V technickém osvětlení budeme pro konstrukci bodů meze vlastního stínu užívat metody uvedené v kapitole 1.4.1. Mnohé konstrukce se zjednoduší, uvedeme si modifikaci jednotlivých metod pro technické osvětlení. Mez stínu vrženého do náryсны je množina náryсных stopníků světelných paprsků procházejících body meze stínu vlastního (viz. definice 1.4.5), jejich konstrukce se rovněž zjednoduší. Často budeme potřebovat sestřovit k úsečce, jejíž délku si označíme $d\sqrt{2}$ úsečky délky d , tzv. *redukovanou úsečkou*.



Obr. 1.6.2

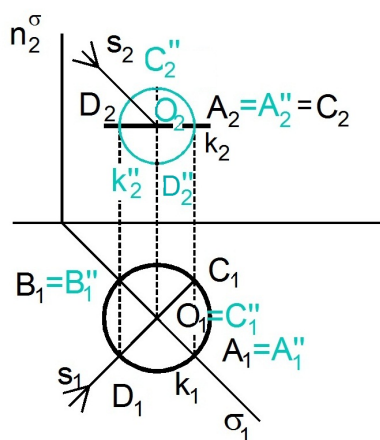
Sestrojíme pravý úhel s vrcholem P . Na ramenech zvolíme body A, B tak, aby platilo $|PA| = |PB|$. Na polopřímce PA sestrojíme bod R tak, aby $|AB| = |PR|$. Sestrojíme kružnici k se středem P a poloměrem $|PR|$ a kružnici l se středem R a poloměrem $|PA|$. Průsečík kružnic k a l označíme Q . Označíme-li d velikost úsečky QR , pak velikost úsečky PR je $d\sqrt{2}$. Naneseme-li na polopřímku PA od bodu P úsečku délky $x\sqrt{2}$ a druhým jejím koncovým bodem vedeme rovnoběžku s přímkou QR , vytne tato rovnoběžka v úhlu QPR úsečku délky x , tzv. *redukovanou úsečku*.

Při některých konstrukcích bude výhodné využít tzv. Piletovy roviny.

Definice 1.6.1 Rovina ξ , která prochází osou rotační plochy, má od náryсны odchylku 45° a je kolmá k půdorysu světelného paprsku určujícímu technické osvětlení se nazývá *Piletova rovina*.

Věta 1.6.1 Necht' $k = (O, r\sqrt{2})$ je rovnoběžková kružnice rotační plochy Φ . Nárysem vrženého stínu k'' kružnice k do Piletovy roviny je kružnice $k_2'' = (O_2, r)$ s redukováným poloměrem.

Důkaz: Zvolme kružnici k se středem O a poloměrem $r\sqrt{2}$ ležící ve vodorovné rovině. Bodem O vedeme Piletovu rovinu ξ . Vržený stín k'' kružnice k do Piletovy roviny je elipsa, sestrojíme její nárys. Uvažujme dva kolmé průměry kružnice k Průměr AB ležící v Piletově rovině ξ a průměr CD k němu kolmý. Vržené stíny A'', B'' bodů A, B leží v ξ , splývají s body A, B , tj. splývají i nárysy bodů A, A'' a bodů B, B'' . Protože A leží v Piletově rovině, která má odchylku 45° od náryсны a C leží na průměru kolmém k ξ splývá také nárys bodu A s nárysem bodu C . Platí $|A_2O_2| = r$, kde r je redukováný poloměr kružnice k . Pro bod C'' platí $C_1'' = O_1$, C_2'' leží na kolmici k základnici, $|C_2''O_2| = |C_2O_2| = r$. Protože AB a CD jsou kolmé průměry kružnice k , jsou $A''B''$ a $C''D''$ sdružené průměry elipsy k'' . V náryse ale platí $|A_2''O_2''| = |C_2''O_2''|$ a průměry $A_2''B_2''$, $C_2''D_2''$ jsou kolmé, proto k_2'' je kružnice se středem $O_2 = O_2''$ a redukováným poloměrem r .

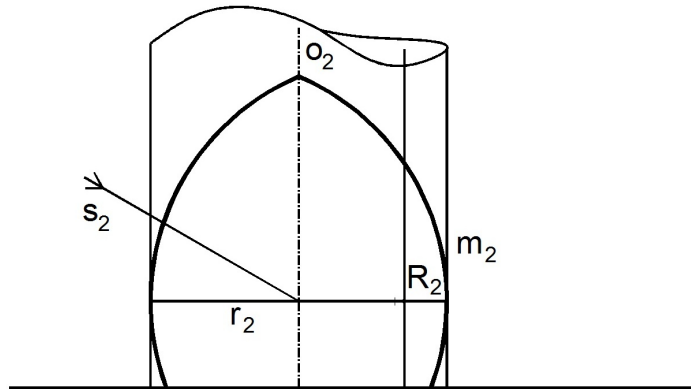


Obr. 1.6.3

□

1. Metoda kuželová

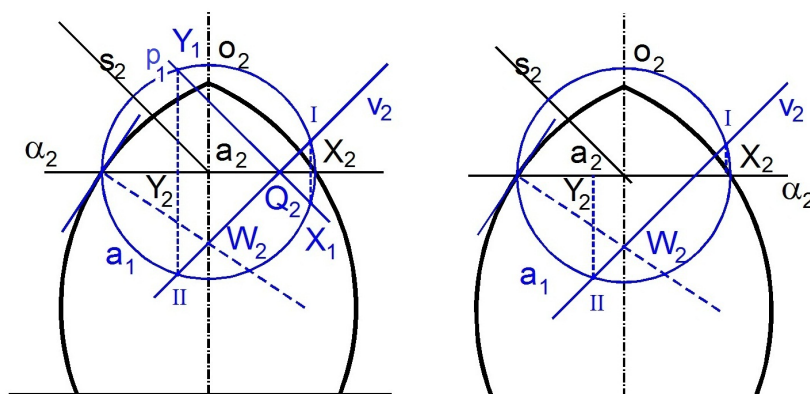
Kuželovou metodu užíváme pro rovníky a hrdla. Rovníku či hrdlu opisujeme dotykovou rotační válcovou plochu Ω . Mez vlastního stínu rotační válcové plochy Ω leží v rovině procházející osou a kolmé ke směru s osvětlení, tj. leží v Piletově rovině. Pomocí redukčního úhlu sestrojíme redukovaný poloměr zvoleného rovníku resp. hrdla, ten nám určí hledané body meze vlastního stínu.



Obr. 1.6.4

2. **Metoda kulová** Kulovou metodou se sestrojují body meze vlastního stínu ležící na obecných rovnoběžkách. Zvolíme rovnoběžku a rotační plochy ležící v rovině α a podél ní vepíšeme dotykovou kulovou plochu κ se středem W . Místo půdorysu budeme vždy uvažovat rovinu α zvolené rovnoběžky a do ní rovnoběžku sklopíme, body ve sklopení budeme značit dolním indexem 1. Pro rovnoběžné osvětlení je konstrukce bodu meze vlastního stínu následující (viz. kulová metoda v kapitole 1.4.1):

Bodem W vedeme hlavní přímkou v druhé osnovy roviny ρ , což je rovina meze vlastního stínu na kulové ploše κ , její průsečík s rovinou α označíme Q a bodem Q vedeme hlavní přímkou p první osnovy roviny ρ .



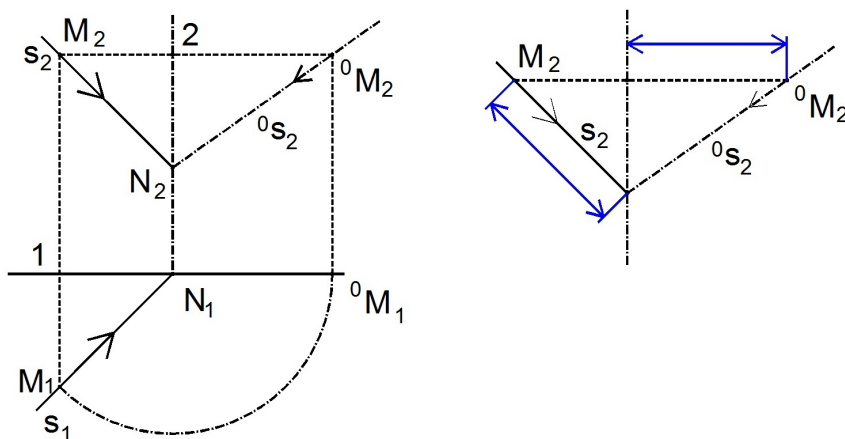
Obr. 1.6.5

Průsečíky X, Y přímkou p s rovnoběžkou a jsou body meze vlastního stínu na rovnoběžce a . Protože nyní máme technické osvětlení, tj. s_1 je kolmé na s_2 , jsou p_1 a v_2 souměrné podle α_2 . Označíme-li I a II průsečíky přímkou v_2 s a_1 , jsou body X a I, Y a II souměrné podle a_2 . Odtud vyplývá zjednodušení konstrukce bodů meze

vlastního stínu. Pro rovnoběžku a najdeme střed W dotykové kulové plochy, bodem W_2 vedeme přímkou v_2 kolmou na s_2 , určíme její průsečíky I a II s a_1 (sklopená a do roviny α) a body I, II promítneme pravoúhle na a_2 do bodů X_2, Y_2 . Viditelný je ovšem ten z bodů, k němuž souměrný leží nad a_2 .

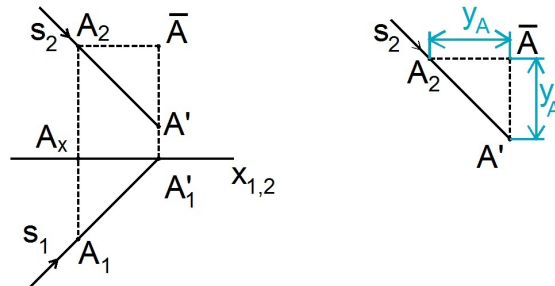
3. **Metoda válcová** Body meze vlastního stínu ležící na hlavním světelném meridiánu sestrojíme metodou válcovou. Body meze vlastního stínu na hlavním meridiánu m jsou body dotyku tečen m rovnoběžných s s_2 , a protože hlavní meridián m leží v nárysně, je $m = m_2$ a body meze vlastního stínu na m jsou současně i body meze p' stínu vrženého do ν a v těchto bodech se křivky m, p, p' dotýkají.

Body meze vlastního stínu na světelném meridiánu n určíme otočením světelné roviny λ obsahující meridián n kolem osy rotační plochy do náryсны. Zvolme přímkou směru s procházející bodem N na ose o a označme M libovolný její bod neležící na ose. Bod N je nárysný stopník s a je při otáčení kolem o samodružný. Označme 1 průsečík přímky M_1M_2 se základnicí a 2 průsečík přímky vedené bodem M_2 rovnoběžně se základnicí a osy. Platí $|^0M_22| = |^0M_1N_1| = |M_1N_1| = \sqrt{2}|1N_1| = \sqrt{2}|M_2N_2|$. Odtud je zřejmá konstrukce přímky 0s_2 bez užití půdorysu, známe-li osu rotační plochy (kolmou k půdorysně) (viz. obr. 1.6.6)



Obr. 1.6.6

4. **Mez stínu vrženého do náryсны** Vržený stín bodu A do náryсны je nárysný stopník A' přímky s rovnoběžné se směrem osvětlení a procházející bodem A . (Nárysný stopník A' splývá s nárysem A'_2 , v náryse budeme u vržených stínů vynechávat index 2.) Označme A_x průsečík ordinály A_1A_2 se základnicí $x_{1,2}$ a \bar{A} průsečík přímky $A'_1A'_1$ s rovnoběžkou se základnicí vedenou bodem A_2 . Trojúhelníky $A_2\bar{A}A'$ a $A_xA_1A'_1$ jsou shodné, proto platí $|\bar{A}A'| = y_A$, kde y_A je y -ová souřadnice bodu A . Odtud je již zřejmá zjednodušená konstrukce vrženého stínu A' bodu A do náryсны. Známe-li směr ordinál a y_A , lze sestrojít A' bez konstrukce bodu A_1 . Určíme vzdálenost y_A bodu A od náryсны a od A_2 nanese doprava od bodu A vodorovně úsečku délky y_A a od jejího koncového bodu nanese svisle dolů opět úsečku délky y_A . Protože sestrojujeme vržené stíny bodů rotační plochy a každým bodem rotační plochy, neležícím na ose prochází právě jedna rovnoběžka plochy, určíme y -ovou souřadnici bodu A sklopením rovnoběžky bodu A do náryсны.



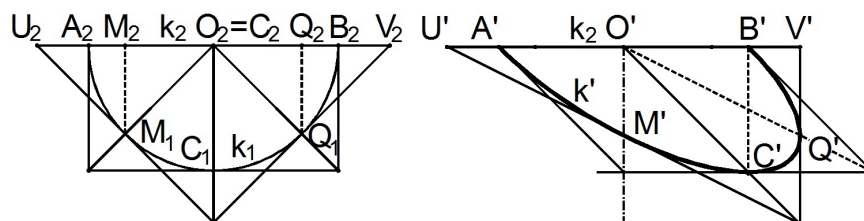
Obr. 1.6.7

1.6.2 Technické osvětlení rotační plochy

Částmi stínů vržených do nárysny bývají také vržené stíny hraničních rovnoběžek. Osa rotační plochy leží v ν , proto sestrojujeme pouze vržený stín půlkružnice ležící v rovině kolmé k ose rotační plochy do nárysny, tj. pouze tu část stínu, která skutečně existuje.

Příklad 1.6.1 V technickém osvětlení sestrojíte vržený stín kružnice ve vodorovné rovině do nárysny.

Uvažujme půlkružnici k se středem O na ose o a průměrem $AB = 2 \cdot r\sqrt{2}$ ležící v nárysne. Vržený stín k' je částí elipsy, která je řezem světelné válcové plochy procházející půlkružnicí k . Označme C krajní bod poloměru půlkružnice kolmého k ν a M, Q takové body na půlkružnici k , pro které platí, že přímky OM a OQ svírají s přímkou OC úhel 45° . Průsečíky tečen půlkružnice k sestrojených v bodech M, Q s přímkou AB označme po řadě U, V . Body A, B, U, V leží v nárysne, proto splývají se stíny vrženými do ν . Tečna půlkružnice k v bodě C je rovnoběžná s základnicí, tj. její průmět je kolmý k o_2 , proto i tečna vrženého stínu k' v bodě C' je kolmá k o_2 . Vzdálenost y_C bodu C od ν je rovna poloměru $r\sqrt{2}$ půlkružnice k . Bod C' tedy leží na přímce rovnoběžné s o_2 jdoucí B' a platí $|B'C'| = |O'B'| = r\sqrt{2}$. Vzdálenosti y_M, y_Q bodů M, Q od ν jsou rovny r (úsečka, kterou sestrojíme využitím redukčního úhlu z úsečky $r\sqrt{2} = \frac{1}{2}|AB|$). Vržené stíny bodů M, Q do nárysny sestrojíme podle předchozího, tj. zřejmě M' leží na o_2 a Q' leží na přímce rovnoběžné s o_2 jdoucí V' . Přímka $U'M'$ je tečnou křivky k' v bodě M' , přímka $V'Q'$ (která je rovnoběžná s o_2) je tečnou křivky k' v bodě Q' . Průsečíky tečen křivky k' sestrojené v bodě C' s přímkami O_2M' a O_2Q' jsou body tečen půlkružnice k' v bodech A' a B' . Vržený stín půlkružnice k do průmětny je část elipsy, která je nyní určena dostatečným počtem bodů a tečen.



Obr. 1.6.8

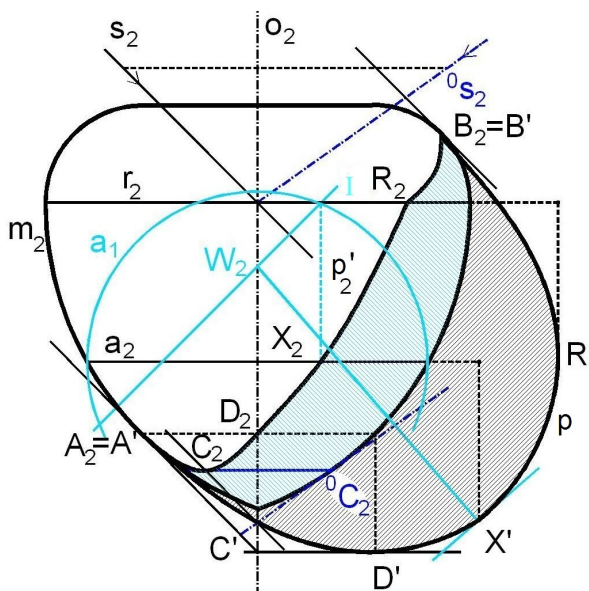
Příklad 1.6.2 Sestrojte technické osvětlení rotační plochy $\phi(o, m)$.

Nejprve sestrojíme mez p vlastního stínu, podobně jako v případě obecného osvětlení. Sestrojíme body meze vlastního stínu ve světelné rovině, body ležící na hlavním meridiánu (tj. v nárysně), body na rovníku a body na obecných rovnoběžkách. Budeme sestrojovat pouze viditelné části meze vlastního stínu, tj. pouze body ležící před nárysnou.

Body A, B ležící v nárysně, které oddělují viditelnou a neviditelnou část meze vlastního stínu, určíme válcovou metodou. Jsou to body dotyku tečen hlavního meridiánu rovnoběžných s_2 . Tečny hlavního meridiánu sestrojené v bodech A, B jsou i tečnami meze p vlastního stínu v bodech A, B . Mez vlastního stínu je souměrná podle světelné roviny λ , která svírá s nárysnou úhel 45° . Proto k bodu A ležícímu v nárysně existuje bod D meze vlastního stínu souměrný podle roviny λ , který leží v rovině kolmé k ν procházející osou. Nárys bodu D je tedy pata kolmice sestrojena z A_2 k ose. Body A, D leží na rovnoběžce rotační plochy, její poloměr je zřejmě roven vzdálenosti bodu D od náryсны.

Body meze vlastního stínu na světelném meridiánu n určíme rovněž válcovou metodou. Rovinu λ otočíme do náryсны, sestrojíme 0s_2 a k hlavnímu meridiánu vedeme tečny rovnoběžné $s {}^0s_2$, bod dotyku označme 0C_2 . (Na obr. 1.6.9 existují dvě tečny hlavního meridiánu rovnoběžné se směrem osvětlení, ale pouze jeden bude viditelný). Náryсны meridiánů m a n si odpovídají v pravouhlé afinitě o ose o_2 . Tečna v bodě 0C_2 protne osu, při otáčení je tento bod samodružný, prochází jím tedy i přímka rovnoběžná s_2 , na níž leží C_2 . Odchylka roviny λ od náryсны je 45° , zřejmě je vzdálenost bodu C od náryсны rovna redukované délce poloměru rovnoběžky procházející bodem C . Sestrojujeme-li vržený stín C' bodu C , zřejmě C' leží na o_2 .

Body meze vlastního stínu ležící na rovníku r sestrojíme kuželovou metodou, tj. R_2 je bod ležící na r_2 , jeho vzdálenost od o_2 je rovna redukovanému poloměru rovníku a je to rovněž jeho vzdálenost od náryсны.



Obr. 1.6.9

Body meze vlastního stínu na obecných rovnoběžkách sestrojíme kulovou metodou. Zvolíme rovnoběžku a , určíme vrchol W vepsané kulové plochy κ a rovnoběžku a sklopíme do náryсны. Bodem W_2 vedeme kolmici k s_1 a určíme její průsečík I s a_1 . Na rovnoběžce s o_2 a na a_2 leží X_2 . Vzdálenost bodu X od náryсны je rovna vzdálenosti bodu I od a_2 .

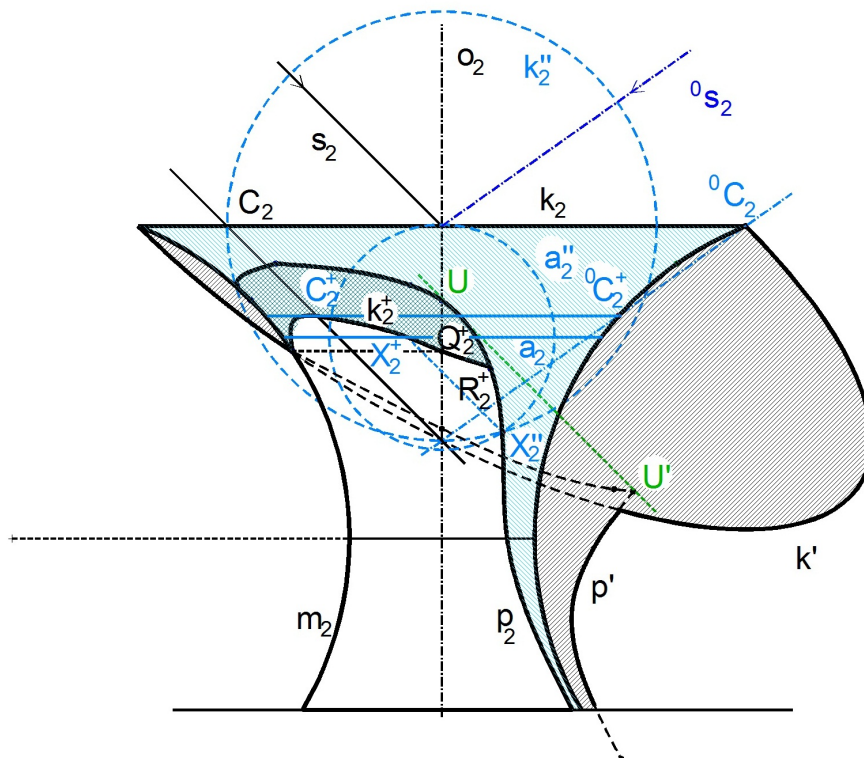
Mez p' stínu vrženého do nárýsný sestrojíme podle výše uvedené konstrukce. Známe vzdálenosti všech sestrojených bodů meze p stínu od nárýsný. Body A', B' leží v nárýsně. Kuželová plocha Ω opsaná rotační ploše podél rovnoběžky bodu A má vrchol ležící na ose, povrchová přímka plochy Ω procházející bodem A leží v nárýsně. Uvažujme povrchovou přímku dotykové kuželové plochy Ω procházející bodem D a sestrojme její vržený stín do ν . Zřejmě je kolmý k o_2 a je tečnou křivky p' v bodě D' .

Podél rovníku je ploše opsaná rotační plocha válcová Ω' , její povrchové přímky jsou rovnoběžné s osou rotační plochy. Vržený stín opsané rotační válcové plochy je tvořen dvojicí přímek (sestrojíme jen viditelnou část). Jedna z přímek vrženého stínu Ω' prochází bodem R' rovnoběžně s o_2 , Ω' se dotýká rotační plochy, proto přímka procházející R' rovnoběžně s osou je tečnou p' .

Tečná rovina τ plochy v obecném bodě X meze vlastního stínu je světelná, dotýká se také vepsané kulové plochy κ podél rovnoběžky a . Rovina τ je kolmá na přímku WX . Nárýsná stopa roviny τ je tečnou meze p' stínu vrženého do nárýsný v bodě X' , n_2^+ je tedy kolmá k W_2X' .

Příklad 1.6.3 Sestrojte technické osvětlení rotační plochy $\phi(o, m)$.

Světelná válcová plocha Ψ proložená hraniční rovnoběžkou k dané plochy Φ má s plochou neprázdný průnik k^+ , je třeba sestrojít i mez stínu k^+ vrženého rovnoběžkou na plochu (definice 1.4.6). Nejprve sestrojíme podle příkladů 1.6.1 a 1.6.2 mez p vlastního stínu, mez p' stínu vrženého do nárýsný a vržený stín k' hraniční rovnoběžky k .



Obr. 1.6.10

K mezi p vlastního stínu existují tečny rovnoběžné se směrem osvětlení, vržené stíny U', V' jejich bodů dotyku U, V jsou body vratu meze p' stínu vrženého, sestrojujeme pouze vržený stín bodu U ležícího před nárýsnou. Plocha stojí na půdorysně, vržený stín do nárýsný je sestrojen jen po π .

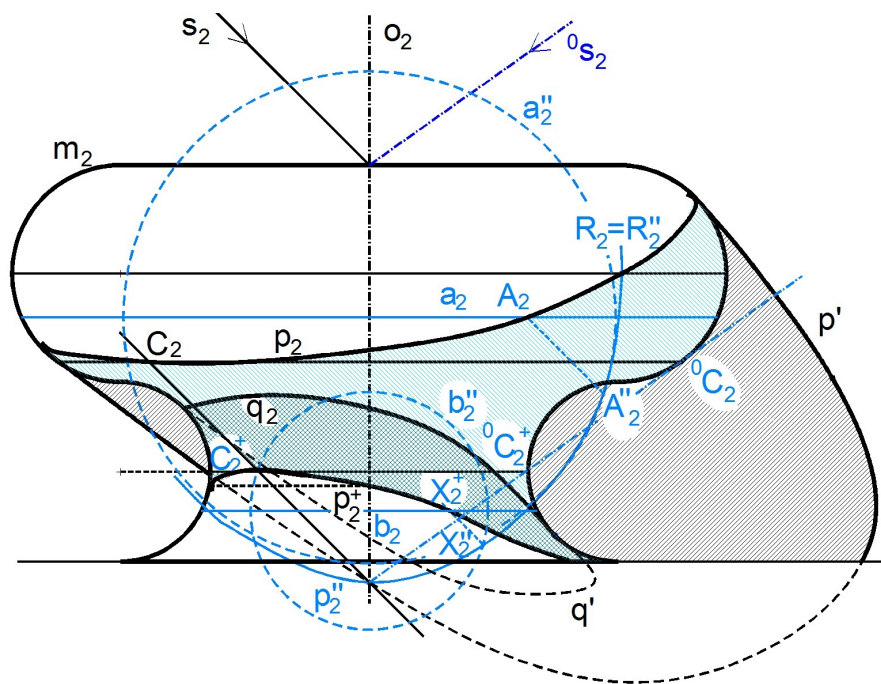
Sestrojíme mez k^+ stínu vrženého kružnicí k na plochu Φ . Bod C kružnice k ležící na světelném meridiánu n ve světelné rovině λ vrhá stín C^+ na rotační plochu. Bod C^+ určíme otočením roviny λ do náryсны. Bod C se otočí do bodu 0C , jím vedeme otočený světelný paprsek 0s a určíme průsečík ${}^0C^+$ s hlavním meridiánem m . Nárys bodu C získáme využitím pravouhlé afinity o ose o_2 mezi nárysy meridiánů m_2, n_2 , stejně jako v příkladě 1.6.2.

Další body na obecných rovnoběžkách sestrojíme s využitím Piletovy roviny ξ . Sestrojíme vržený stín k'' kružnice k do Piletovy roviny, k_2'' je podle věty 1.6.1 kružnice s redukovaným poloměrem. Zvolme rovnoběžku a rotační plochy a sestrojíme a'' , vržený stín do ξ . V náryse určíme průsečík X_2'' kružnic a_2'' a k_2'' a zpětnými paprsky získáme na a_2 nárys X_2^+ vrženého stínu X^+ bodu X kružnice k .

Podle roviny λ světelného meridiánu je plocha i mez p vlastního stínu a mez k^+ stínu vrženého kružnicí k souměrná, k bodům plochy ležícím na hlavním meridiánu existují souměrné body podle roviny λ ležící v rovině kolmé k nárysně a procházející osou. Známe-li tedy bod Q^+ meze stínu k^+ , jehož nárys leží na ose, pak na m_2 leží bod křivky k_2^+ , který je průsečíkem kolmice k o_2 vedené bodem Q_2^+ . Bod Q^+ i průsečík R^+ mezi stínů p a k^+ sestrojíme přibližně vyrýsováním dostatečného počtu bodů křivky k^+ ležících na obecných rovnoběžkách.

Příklad 1.6.4 Sestrojte technické osvětlení rotační plochy $\phi(o, m)$.

Podle příkladu 1.6.2 sestrojíme mez stínu vlastního a mez stínu vrženého. Mez vlastního stínu se rozpadá na části p, q . Dotyková světelná válcová plocha s řídicí křivkou p protíná plochu Φ v křivce p^+ (viz. definice 1.4.5), tj. horní část plochy vrhá stín na spodní část plochy.



Obr. 1.6.11

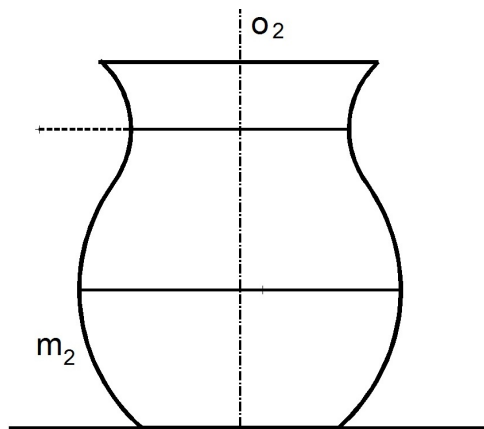
Pro mez p^+ stínu vrženého plochou na sebe určíme nejprve bod ležící ve světelné rovině λ . Sestrojíme jej v otočení. ${}^0C_2^+$ je průsečík přímky směru 0s_2 jdoucí 0C_2 s m_2 . Pro

konstrukci obecných bodů užitíme opět Piletovu rovinu ξ . Sestrojíme p'' , což je vržený stín horní části plochy do Piletovy roviny, p'' je obálka vržených stínů rovnoběžek plochy do roviny ξ . Je-li A bod meze vlastního stínu ležící na rovnoběžce a , sestrojíme nárys a''_2 vrženého stínu rovnoběžky a do roviny ξ . a''_2 je kružnice s redukovaným poloměrem. Na a''_2 leží bod A''_2 , vržený stín bodu A do roviny ξ , přímka A''_2A_2 patří směru osvětlení. Bod R meze vlastního stínu ležící na rovníku leží v Piletově rovině, proto $R_2 = R''_2$.

Body X^+ meze p^+ ležící na obecné rovnoběžce určujeme podobně jako v příkladě 1.6.3. Zvolíme rovnoběžku b na dolní části plochy, sestrojíme vržený stín b'' do Piletovy roviny ξ , určíme průsečík X'' křivek b'' a p'' a zpětnými paprsky získáme na rovnoběžce b bod X^+ .

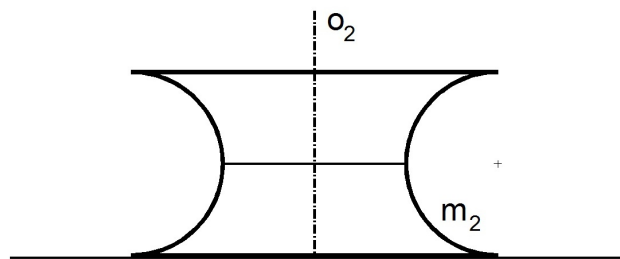


1.6.1 Sestrojte technické osvětlení rotační plochy $\Phi(o, m)$.



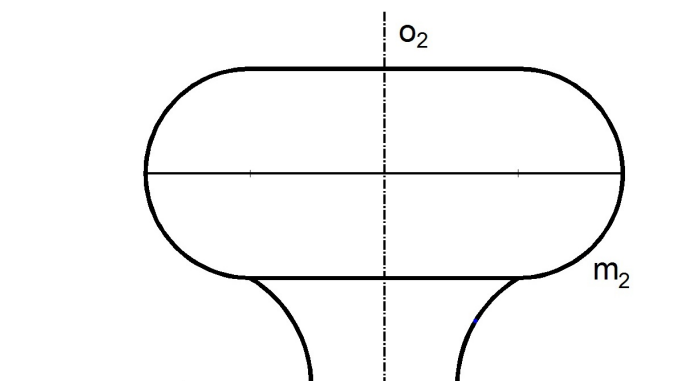
Obr. 1.6.12

1.6.2 Sestrojte technické osvětlení rotační plochy $\Phi(o, m)$.



Obr. 1.6.13

1.6.3 Sestrojte technické osvětlení rotační plochy $\Phi(o, m)$.



Obr. 1.6.14

Kapitola 2

Rotační kvadriky

2.1 Definice rotačních kvadrik a jejich vlastnosti



V této části budeme studovat speciální rotační plochy, jejichž tvořící křivka je kuželosečka a osa rotace splývá s některou z os kuželosečky. Většinou budeme kvadriky studovat v rozšířeném Eukleidovském prostoru \bar{E}_3 a připomeneme i některé projektivní vlastnosti kvadrik. Pokud nebude řečeno jinak, budeme zobrazovat rotační kvadriky v Mongeově projekci, osa kvadriky bude kolmá k půdorysně.

Definice 2.1.1 Rotační plocha $\Phi(o, m)$, jejíž tvořící křivka m je kuželosečka a osa o rotace splývá s osou kuželosečky se nazývá *rotační kvadrika*. Jestliže je m singulární kuželosečka, je Φ *singulární rotační kvadrika*, je-li m regulární kuželosečka, pak Φ je *regulární rotační kvadrika*

Poznámka 2.1.1 Z analytické geometrie (např. v [4]) znáte afinní klasifikaci kuželoseček - množina neprázdných kuželoseček se v relaci "být ekvivalentní" rozkládá na následující třídy kuželoseček

1. elipsy
2. paraboly
3. hyperboly
4. jednobodové množiny
5. dvojice různoběžných přímek
6. dvojice rovnoběžných přímek
7. přímky

První tři třídy obsahují regulární kuželosečky, které rotací kolem své osy vytvoří regulární rotační kvadriku, zbývající kuželosečky jsou singulární. Do množiny elips patří i kružnice, osou kružnice je každá přímka procházející středem kružnice, rotací kružnice kolem osy vzniká plocha kulová.

Pro jednobodovou množinu je osou kuželosečky každá přímka procházející tímto bodem, rotací kolem osy dostáváme jednobodovou kvadriku.

Osy kuželosečky k tvořené dvojicí různoběžek p, q jsou osy u, v úhlu těchto přímek, rotací kuželosečky k kolem některé její osy vzniká rotační kuželová plocha. Pokud jsou

přímky p, q k sobě kolmé, jsou také osami kuželosečky k . Rotací kuželosečky kolem p resp. q pak vzniká další singulární kvadrika - rovina.

Je-li kuželosečka k tvořena dvojicí rovnoběžných přímek p, q , je její osa o přímka, která je osou pásu tvořeného přímkami p, q a také každá přímka u , která je kolmá na přímkou p, q . V prvním případě vzniká rotací kuželosečky k kolem o rotační plocha válcová, ve druhém případě při rotaci k kolem u dostáváme dvojici rovnoběžných rovin.

Kuželosečka, která je přímkou p , má osu rotace jednak přímkou p a pak každou přímkou u k ní kolmou. V prvním případě vzniká rotací kolem p přímka, ve druhém případě je rotační kvadrikou rovina.

Rotační plocha válcová a kuželová i plocha kulová byly důkladně studovány v základním kurzu zobrazovacích metod, dále se budeme zabývat především rotačními kvadrikami, které vzniknou rotací regulární kuželosečky (kromě kružnice) kolem její osy.

Poznámka 2.1.2 Kuželosečka obsahující více než jeden bod má s přímkou, která není částí kuželosečky, buď společně dva různé body (sečna kuželosečky), nebo mají prázdný průnik (nesečna), nebo mají právě jeden bod společný (tečna kuželosečky nebo asymptotická sečna - přímka procházející průsečíkem tvořících přímek), [6], [4]. Podle polohy kuželosečky a nevlastní přímky dělíme kuželosečky do tří typů

1. typ elipsa - nevlastní přímka má s kuželosečkou prázdný průnik
2. typ hyperbola - nevlastní přímka protíná kuželosečku ve dvou bodech
3. typ parabola - nevlastní přímka má s kuželosečkou společný jeden bod

Jestliže je dána středová kolineace v \bar{E}_3 , jejíž osou je nevlastní přímka, nazývá se tato kolineace *homotetie*. Jestliže si dvě kuželosečky odpovídají v homotetii, nazývají se *homotetické*, [6]. Homotetické kuželosečky mají tedy společné nevlastní body. Je zřejmé, že homotetické mohou být kuželosečky pouze stejného typu. Pro středové kuželosečky platí, jsou-li p, q sdružené průměry kuželosečky k a přímky p', q' rovnoběžné po řadě s přímkami p, q jsou průměry kuželosečky k' homotetické s kuželosečkou k , pak jsou p', q' sdružené průměry kuželosečky k' .

Kuželosečky typu hyperbola jsou homotetické právě tehdy, když mají společné asymptoty (asymptoty tvoří singulární kuželosečku homotetickou s takovými hyperbolami). Homotetické kuželosečky typu parabola mají společnou osu (patří sem kromě parabol i přímka a dvojice rovnoběžných přímek) a pro homotetické elipsy platí, že spojnice hlavních a vedlejších vrcholů homotetických elips jsou vzájemně rovnoběžné. Mezi kuželosečky typu elipsa patří i kružnice.

Definice 2.1.2 Průsečíky rotační kvadriky s osou rotace nazýváme vrcholy kvadriky.

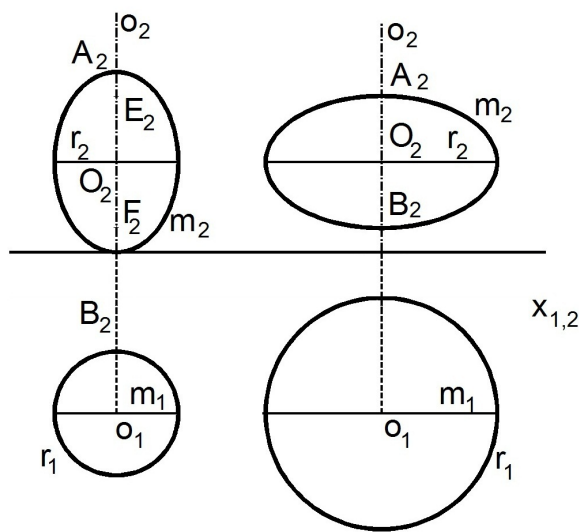
Definice 2.1.3 Nechť Φ je regulární kvadrika v \bar{E}_3 a S vlastní pól nevlastní roviny ω^∞ vzhledem ke kvadrice. Pak bod S nazýváme *střed* kvadriky, kvadrika je středová. V opačném případě je kvadrika nestředová.

Poznámka 2.1.3 Leží-li na kvadrice přímky, říkáme jí také přímková kvadrika, neobsahuje-li regulární kvadrika žádnou přímku, říká se jí bodová kvadrika.

V [4] byla dokázána následující věta

Věta 2.1.1 Řez kvadriky rovinou ρ je kuželosečka. Je-li rovina tečná, je řezem regulární kvadriky singulární kuželosečka, není-li rovina ρ tečná je řezem regulární kvadriky regulární kuželosečka.

Definice 2.1.4 Rotací elipsy kolem hlavní osy vznikne *protáhlý (vejčitý) elipsoid*, rotací kolem vedlejší osy vznikne *zploštělý elipsoid*



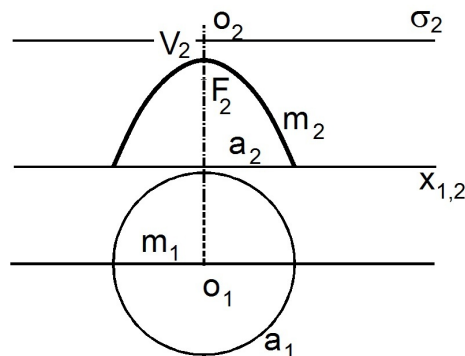
Obr. 2.1.1

Základní vlastnosti mají oba elipsoidy stejné, většinou při konstrukci nemusíme rozlišovat, zda se jedná o elipsoid protáhlý nebo zploštělý. Elipsoid je bodová středová kvadrika, má dva vrcholy. Průnik elipsoidů a nevlastní roviny je prázdná množina. Je-li osa rotace kolmá k půdorysně, je prvním obrysem rovníková kružnice, půdorysem plochy je pak kruh. Jestliže je elipsoid protáhlý, leží ohniska elipsy, jejíž rotací vzniká, na ose rotace a jsou společná pro všechny meridiány. Protáhlý elipsoid tedy můžeme definovat v prostoru podobně jako elipsu v rovině:

Definice 2.1.5 Protáhlý elipsoid je množina bodů v prostoru, jejichž součet vzdáleností od dvou pevných různých bodů je konstantní, větší než vzdálenost daných bodů. Tyto body nazýváme *ohniska* protáhlého rotačního elipsoidu.

Pro zploštělý elipsoid to neplatí, ohniska tvořící elipsy neleží na ose, při rotaci opíší kružnici.

Definice 2.1.6 Rotací paraboly kolem její osy vzniká *rotační paraboloid*.



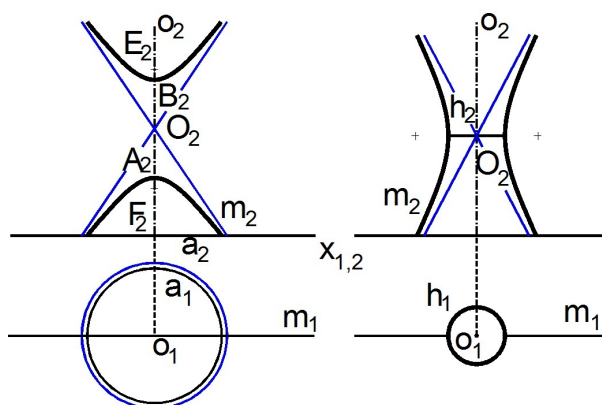
Obr. 2.1.2

Rotační paraboloid je bodová nestředová kvadrika, nevlastní rovina ω^∞ se jej dotýká v nevlastním bodě O^∞ osy, bod O^∞ je pól roviny ω^∞ . Rotační paraboloid má jeden vrchol. Je-li osa kolmá k půdorysně, nemá plocha první obrys, půdorysem plochy je celá rovina π . Ohnisko tvořící paraboly leží na ose, je společné pro všechny meridiány a řídící přímka tvořící paraboly vyplní rotací rovinu σ . Rotační paraboloid v prostoru lze také definovat podobně jako parabolu v rovině:

Definice 2.1.7 Rotační paraboloid je množina bodů v prostoru, které mají od daného bodu F a dané roviny σ stejnou vzdálenost. Bod F nazýváme *ohnisko* rotačního paraboloidu, rovinu σ nazýváme *řídící rovina* rotačního paraboloidu.

Rotací hyperboly získáme dvě rotační kvadriky rozdílných vlastností. Hyperbola má dvě větve a podle toho, kolem které osy rotuje, buď přechází rotací jedna větev v druhou, anebo rotací přechází každá větev sama v sebe. Osy hyperboly jsou osy úhlu, který svírají asymptoty hyperboly, což jsou přímky u, v , které se hyperboly dotýkají v nevlastních bodech U^∞, V^∞ .

Definice 2.1.8 Rotací hyperboly kolem hlavní osy vzniká *rotační dvojdílný hyperboloid*, rotací hyperboly kolem vedlejší osy vzniká *rotační jednodílný hyperboloid*.



Obr. 2.1.3

Definice 2.1.9 Rotací asymptot hyperboly vzniká rotační kuželová plocha Ω , která se nazývá *asymptotická kuželová plocha*.

Oba rotační hyperboloidy jsou středové kvadriky, nevlastní rovina ω^∞ je protíná v regulární nevlastní kuželosečce l^∞ , která vznikne rotací bodů U^∞, V^∞ dotyku asymptot. Podél kuželosečky l^∞ se hyperboloidy dotýkají asymptotické kuželové plochy. Asymptotická kuželová plocha je dotyková plocha rotačního hyperboloidu opsaná z jeho středu.

Rotační dvojdílný hyperboloid je bodová kvadrika, má dva vrcholy. Ohniska tvořící hyperboly leží na ose, proto lze opět rotační dvojdílný hyperboloid v prostoru definovat podobně jako hyperbolu v rovině:

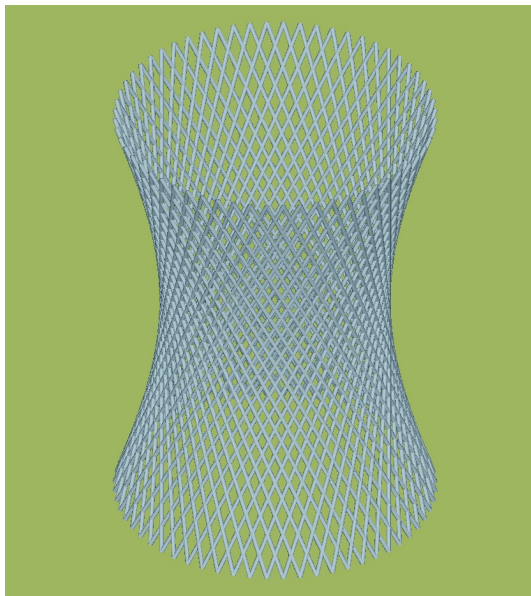
Definice 2.1.10 Dvojdílný rotační hyperboloid je množinou bodů v prostoru, které mají od dvou pevných různých bodů stálý kladný rozdíl vzdáleností, menší než je vzdálenost daných bodů. Body nazýváme ohniska rotačního hyperboloidu.

Stejně jako u rotačního paraboloidu, je-li osa dvojdílného hyperboloidu kolmá k půdorysně, je půdorysem plochy celá půdorysna.

V případě rotačního jednodílného hyperboloidu neprotíná tvořící hyperbola m (což je hlavní meridián) osu rotace, plocha nemá vrcholy. Zvolme bod M na tvořící hyperbole m . Tečná rovina τ plochy Φ v bodě M protíná jednodílný hyperboloid v kuželosečce k , kuželosečka k je singulární, protože τ je tečná rovina (viz. věta 2.1.1). Rovina τ' rovnoběžná s rovinou τ vedená středem O plochy protíná asymptotickou kuželovou plochu Ω ve dvou povrchových přímkách a', n' , tedy v kuželosečce typu hyperbola. Plochy Φ a Ω se dotýkají podél regulární nevlastní kuželosečky l^∞ . Roviny τ a τ' se protínají v nevlastní rovině v přímce q^∞ . Přímka q^∞ protíná kuželosečku l^∞ v bodech A^∞, N^∞ , tj. roviny τ, τ' protínají Φ i Ω v kuželosečce (věta 2.1.1) typu hyperbola (poznámka 2.1.2). Rovina τ je tečná rovina plochy Φ , proto plochu Φ protne v singulární kuželosečce typu hyperbola, tj. ve dvojici různoběžných přímk a, n , pro které platí $a \parallel a', n \parallel n'$ (obr. 2.1.5). Přímka a zřejmě protíná všechny rovnoběžkové kružnice plochy Φ , tj. a je také tvořící přímkou plochy Φ . Přímka a je mimoběžná s osou o rotace. Kdyby byla různoběžná s o , průsečík přímk a a o by patřil ploše Φ a plocha by obsahovala bod na ose (měla by vrchol). Rotační jednodílný hyperboloid tedy vzniká rotací hyperboly kolem vedlejší osy, ale také rotací přímk mimoběžné s osou kolem této osy, je to přímková kvadrika. Je-li osa plochy Φ kolmá k půdorysně, nárysy přímk plochy obalí tvořící hyperbolu (hlavní meridián m).

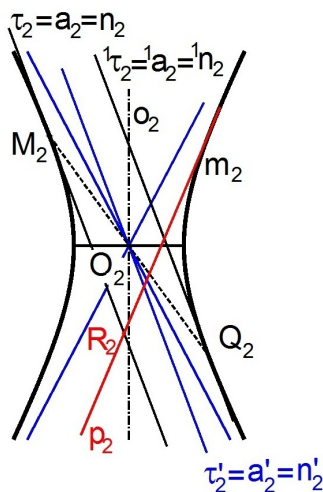
Definice 2.1.11 Množinu přímk rotačního jednodílného hyperboloidu $\Phi(o, a)$, které vzniknou rotací přímk a kolem osy nazýváme *regulus*.

Poznámka 2.1.4 Přímk jednoho regulu plochy Φ jsou vzájemně mimoběžné. Kdyby byly různoběžné, patřil by jejich průsečík ploše Φ , a protože rotací přechází přímka jednoho regulu v druhou přímku téhož regulu, musel by průsečík být bod plochy ležící na ose rotace.



Obr. 2.1.4

Tečná rovina τ obsahuje kromě přímky a i přímku n s ní různoběžnou, rotací přímky n dostáváme *II. regulus*. Všechny přímky *II. regulu* jsou opět vzájemně mimoběžné. V rovině τ' rovnoběžné s τ leží přímka a' asymptotické kuželové plochy Ω rovnoběžná s přímkou a , viz. obr. 2.1.5.



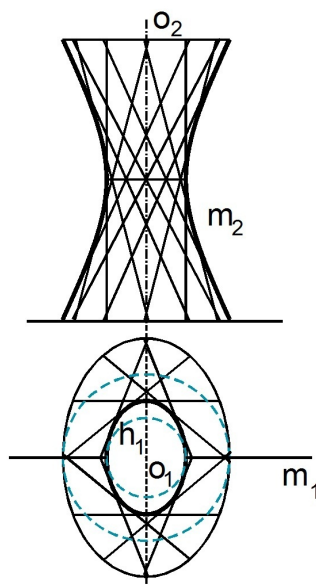
Obr. 2.1.5

Jestliže M je bod tvořící hyperboly m , označme Q k němu souměrný podle středu O plochy Φ . Tečná rovina ${}^1\tau$ v bodě Q protne Φ opět ve dvojici různoběžek ${}^1a, {}^1n$. Rotací přejde rovina τ do roviny ${}^1\tau$. V rovině τ leží přímka a , k ní existuje na asymptotické kuželové ploše Ω přímka a' s ní rovnoběžná. K přímce a' existuje v rovině ${}^1\tau$ přímka plochy Φ rovnoběžná s a' . Přímky jednoho regulu jsou vzájemně mimoběžné, je tedy $a \parallel a' \parallel {}^1n$. Ke každé přímce jednoho regulu existuje přímka druhého regulu s ní rovnoběžná. Platí věta:

Věta 2.1.2 *V rozšířeném Eukleidovském prostoru se na jednodílném hyperboloidu Φ každé dvě přímky různých regulů protínají.*

Důkaz: Nechť a, p jsou přímky různých regulů plochy Φ . Přímkou a proložíme promítací rovinu τ , τ je tečná rovina. τ protíná plochu Φ v přímkách a, n různých regulů (obr. 2.1.5). Pokud přímka p leží v rovině τ , pak $n = p$ a přímky a, p se protínají. Pokud přímka p neleží v τ , musí rovinu τ protínat v bodě R (vlastním nebo nevlastním). R patří rovině τ a současně ploše Φ , je tedy částí řezu plochy Φ rovinou τ . Řezem je kuželosečka, tvoří ji přímky a, n . Bod R musí ležet na jedné z těchto přímek (kdyby neležel, řez by tvořily dvě přímky a další bod, což není kuželosečka). Bod R patří přímce p , ta je II. regulu. Protože přímky stejného regulu jsou mimoběžné, musí R ležet na přímce a a je tedy průsečíkem přímek a, p . \square

Poznámka 2.1.5 Zobrazíme-li rotační jednodílný hyperboloid v osově afinitě v prostoru, kde osou afinity je rovina procházející osou rotace a směr je k ní kolmý, pak se každá rovnoběžka plochy zobrazí do elipsy, rotační jednodílný hyperboloid se zobrazí do nerotačního jednodílného hyperboloidu. Afinní zobrazení zachovává incidenci, proto zde uvedené věty platí pro jednodílné hyperboloidy obecně.



Obr. 2.1.6

Je-li T libovolný bod plochy, vždy jej můžeme kolem osy rotace otočit do roviny rovnoběžné s nárysnou na hlavní meridián do bodu 0T . V tomto bodě je tečná rovina ${}^0\tau$ kolmá k nárysně, její průmět splývá s tečnou 0t hlavního meridiánu v bodě 0T . Rovina ${}^0\tau$ protíná plochu Φ v přímkách ${}^0a, {}^0p$ různých regulů, jejich průsečíkem je bod 0T . Otočíme-li vše zpět do bodu T , přejde přímka 0a do přímky a , přímka 0p do přímky p , dostáváme větu:

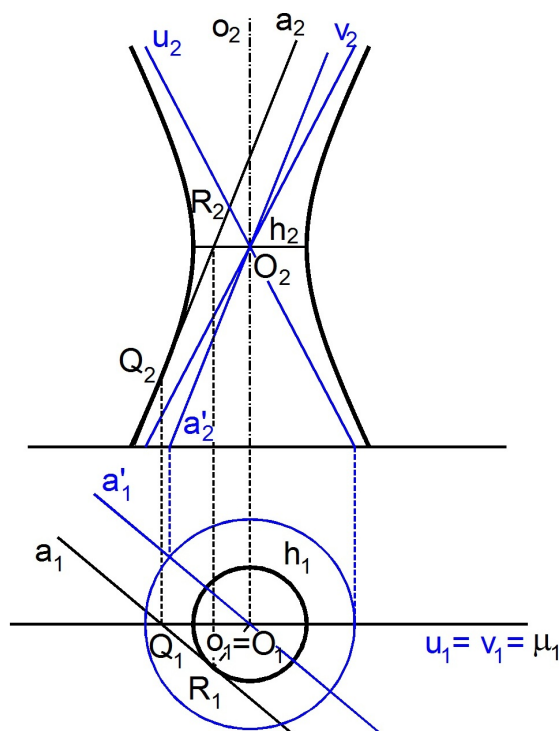
Věta 2.1.3 *Každým bodem T jednodílného hyperboloidu prochází dvě přímky různých regulů. Tyto přímky tvoří tečnou rovinu τ v bodě T a jsou současně řezem plochy rovinou τ . Tečné roviny bodů téže přímky p vytvářejí svazek rovin o ose p .*

Věta platí opět v rozšířeném Eukleidovském prostoru, v nevlastních bodech A^∞ je tečná rovina τ určena dvěma rovnoběžnými přímkami a, n různých regulů. Protože se jednodílný hyperboloid Φ a asymptotická kuželová plocha Ω dotýkají podél nevlastní kuželosečky l^∞ , mají v bodě A^∞ společnou tečnou rovinu α , která se plochy Ω dotýká podél přímky a' rovnoběžné s přímkami a, n . Rovina α je tečná rovina v nevlastním bodě a nazývá se *asymptotická rovina*.

Jestliže je osa rotace kolmá k půdorysně, je prvním obrysem plochy hrdelní kružnice, která vzniká rotací vrcholů hyperboly, půdorysem je množina vnějších bodů hrdelní kružnice. Druhým obrysem je hyperbola, nárýs tvoří vnitřní body hyperboly.

Příklad 2.1.1 Sestrojte hlavní meridián m rotačního jednodílného hyperboloidu $\Phi(o, a)$ v Mongeově projekci s osou kolmou k půdorysně, plocha Φ vzniká rotací přímky a kolem osy o .

Určíme bod R přímky a , který je nejbližší ose. Půdorys bodu R je pata kolmice sestavené z o_1 na a_1 . Bod R opisuje hrdlo h , nárýs hrdla protíná nárýs osy v nárýse středu O hyperboly m . Bodem O vedeme přímkou a' rovnoběžnou s a , její rotací vznikne asymptotická kuželová plocha Ω . Druhým obrysem plochy Ω jsou přímky u, v , jsou to asymptoty hyperboly m . Body hrdla h ležící v rovině μ hlavního meridiánu jsou vrcholy hyperboly m , hyperbola je dostatečně určena.



Obr. 2.1.7

Na závěr připomeneme projektivní vlastnost kvadrik, kterou budeme využívat v dalších konstrukcích. Věta je uvedena např. v [1]

Věta 2.1.4 Každé dvě různé kuželosečky kvadriky leží na dvou kuželových plochách. Spojnice vrcholů těchto kuželových ploch je polárně sdružená s průsečnicí rovin daných kuželoseček.

2.2 Řezy rotačních kvadrik



Řezem rotační kvadriky Φ rovinou ρ je kuželosečka q (věta 2.1.1). Každá rovina ρ je souměrná podle jakékoli roviny λ k ní kolmé, rotační kvadrika je souměrná podle každé roviny λ procházející osou o rotace. Je-li rovina λ rovina procházející osou rotace a současně je kolmá k rovině ρ řezu, je i řez q kvadriky Φ souměrný podle roviny λ . Průsečnice s rovin ρ a λ je tedy osa souměrnosti řezu, řezem je kuželosečka q , přímka s je osou kuželosečky q . Volíme-li v Mongeově projekci osu kvadriky kolmo k půdorysně, je s spádová přímka první osnovy roviny ρ procházející osou.

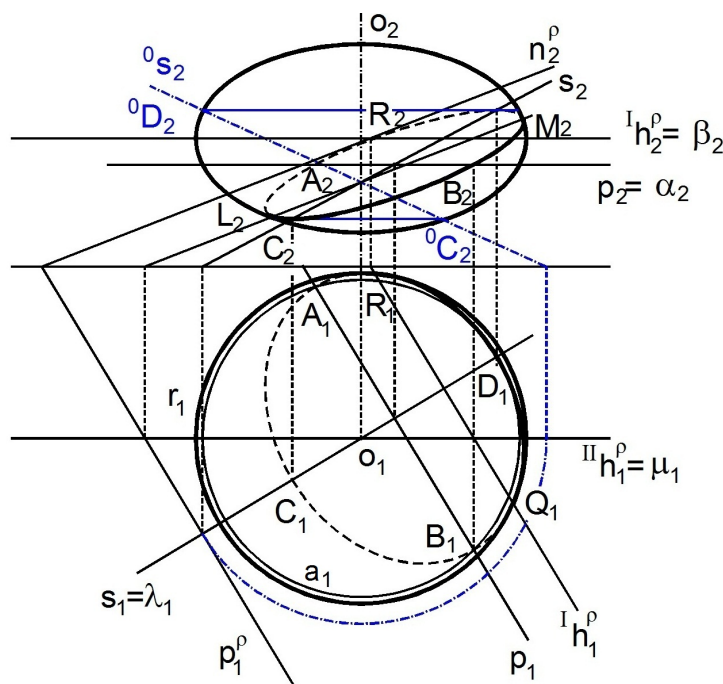
Označme u^∞ nevlastní přímku roviny ρ , a l^∞ řez kvadriky Φ nevlastní rovinou ω^∞ , tj. množinu nevlastních bodů (nevlastní kuželosečku) kvadriky Φ . Průsečíky u^∞ a l^∞ jsou nevlastní body řezu q . Podle vzájemné polohy přímky u^∞ a kuželosečky l^∞ určíme typy řezů na jednotlivých kvadrikách.

2.2.1 Rotační elipsoidy

Elipsoidy neobsahují nevlastní body, l^∞ je prázdná množina. Řez q neobsahuje nevlastní body, proto je řezem je kuželosečka typu elipsa (poznámka 2.1.2). Podle polohy roviny ρ a elipsoidu Φ je řezem buď prázdná množina, jednobodová množina (ρ je tečná rovina) nebo elipsa. Konstrukce řezu je obdobná jako pro obecné rotační plochy.

Příklad 2.2.1 Sestrojte řez rotačního elipsoidu $\Phi(o, m)$ rovinou ρ .

Nejprve sestrojíme osu s elipsy q řezu. Přímka s leží v rovině λ , která je kolmá k rovině ρ řezu a prochází osou o rotace. V rovině λ leží meridián n elipsoidu Φ , společné body meridiánu n a přímky s jsou vrcholy kuželosečky q . Vrcholy určíme otočením roviny λ do roviny μ hlavního meridiánu, podobně jako v případě obecných rotačních ploch (příklad 1.2.1).



Obr. 2.2.1

Rovina λ je kolmá k půdorysně, půdorys řezu je tedy souměrný podle λ_1 , a proto je $\lambda_1 = s_1$ osou elipsy q_1 a sestrojené body C_1D_1 jsou její vrcholy. V náryse je s_2 pouze průměrem elipsy q_2 . Půdorysy tečen řezu q v bodech C, D jsou kolmé k λ_1 a nárysy jsou rovnoběžné se základnicí.

Druhá osa elipsy q je přímka p kolmá k přímce s (v tomto případě, kdy je osa rotace kolmá k půdorysně, je p hlavní přímka I. osnovy roviny ρ). Určíme rovinu α procházející přímkou p rovnoběžně s půdorysnou. Rovina α protne kvadriku v rovnoběžce a , společné body kružnice a a přímky p jsou zbývající vrcholy vrcholy elipsy q . Protože do půdorysu se osa s elipsy q zobrazí jako osa s_1 elipsy q_1 , je i p_1 osou elipsy q_1 . Nárys p_2 je průměr elipsy q_2 sdružený s průměrem s_2 .

Elipsa je v půdoryse určena osami a v náryse sdruženými průměry, je však ještě třeba určit body, v nichž se mění viditelnost řezu. V půdoryse je obrysem elipsoidu Φ rovník r , body na rovníku určíme jako v příkladě 1.2.1. Rovníkem proložíme rovinu β , ta protne rovinu ρ v hlavní přímce Ih I. osnovy, společné body Q, R přímky Ih a rovníku r patří řezu. V bodech Q, R se mění viditelnost řezu v půdoryse.

Druhý skutečný obrys kvadriky Φ leží v rovině μ hlavního meridiánu. Rovina μ protne rovinu ρ řezu v hlavní přímce ^{II}h druhé osnovy. Přímka ^{II}h protne hlavní meridián m v bodech L, M , v nichž se v náryse mění viditelnost.

2.2.2 Rotační paraboloid

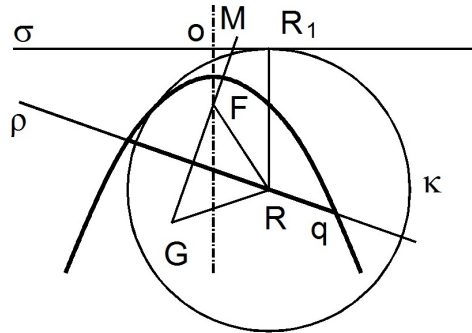
Rotační paraboloid se v nevlastním bodě O^∞ dotýká nevlastní roviny ω^∞ . Typ řezu závisí na poloze roviny ρ a bodu O^∞ . Neobsahuje-li rovina ρ bod O^∞ , není rovnoběžná s osou o rotace, řez nemá nevlastní body a řezem je kuželosečka typu elipsa. Podle vzájemné polohy roviny řezu a kvadriky je to buď prázdná množina, jednobodová množina (ρ je tečná rovina) nebo elipsa.

Obsahuje-li rovina ρ bod O^∞ , rovina ρ je rovnoběžná s osou rotace, řezem je kuželosečka typu parabola. Rotační paraboloid je bodová kvadrika, neobsahuje přímky, proto je řezem parabola.

Pro řezy na paraboloidu dokážeme dvě věty.

Věta 2.2.1 *Pravouhlý průmět eliptického řezu rotačního paraboloidu do roviny kolmé k ose rotace je kružnice.*

Důkaz: Nechť je dán rotační paraboloid Φ , F je jeho ohnisko, σ řídicí rovina, o osa. Nechť ρ je rovina, která není rovnoběžná s osou rotace a protíná rotační paraboloid v elipse q . Zvolme bod R elipsy q a sestrojme R_1 , pravouhlý průmět bodu R do roviny σ . Z definice 2.1.7 rotačního paraboloidu jako množiny bodů v prostoru víme, že platí $|RF| = |RR_1|$. Sestrojme kulovou plochu κ se středem R a poloměrem $|RF|$. Kulová plocha κ se rovinou σ dotýká v bodě R_1 . Střed R kulové plochy κ leží v rovině ρ řezu, ρ je průměrová rovina kulové plochy κ , takže na κ leží i bod G souměrně sdružený s bodem F podle roviny ρ . Označme M průsečík přímky FG a rovinou σ . Mocnost bodu M ke kulové ploše κ je dána vztahem $m = |MF| \cdot |MG| = |MR_1|^2$. Body M, F, G jsou dány paraboloidem a rovinou řezu, nezávisí na volbě bodu R , čili $|MF| \cdot |MG|$ je konstanta, proto i $|MR_1|$ je konstanta.



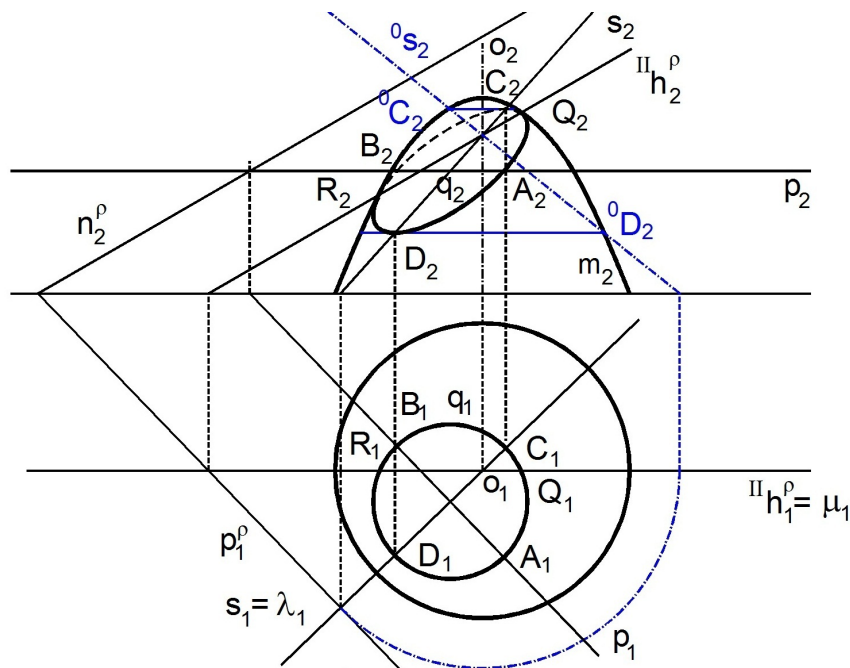
Obr. 2.2.2

□

Věta 2.2.2 Všechny paraboly na rotačním paraboloidu jsou shodné křivky.

Důkaz: Necht' ${}^1\rho, {}^2\rho$ jsou roviny rovnoběžné s osou rotace a kolmé k nárysně. Tyto roviny protínají paraboloid v parabolách ${}^1p, {}^2p$, obě paraboly obsahují bod O^∞ . Tyto paraboly leží na dvou kuželových plochách, spojnice jejich vrcholů je polárně sdružená s nevlastní přímkou u^∞ v níž se protínají roviny ${}^1\rho, {}^2\rho$ (věta 2.1.4). Přímkou u^∞ prochází bodem O^∞ , je to tedy tečna rotačního paraboloidu. Polárně sdružená přímka v^∞ s přímkou u^∞ leží proto také v rovině ω^∞ a prochází bodem O^∞ . Přímkou v^∞ je spojnice vrcholů kuželových ploch, na kterých leží paraboly ${}^1p, {}^2p$, proto jsou vrcholy obou kuželových ploch nevlastní, jsou to plochy válcové s řídicími křivkami ${}^1p, {}^2p$. Paraboly ${}^1p, {}^2p$ leží na obou těchto válcových plochách, jsou to shodné paraboly. Není-li některá z rovin ${}^1\rho, {}^2\rho$ kolmá k nárysně, lze ji otočením kolem osy o otočit do polohy kolmé k nárysně, otočení je shodné zobrazení, tedy i v tomto případě jsou paraboly ${}^1p, {}^2p$ shodné. □

Příklad 2.2.2 Sestrojte řez části rotačního paraboloidu $\Phi(o, m)$ rovinou ρ , která není rovnoběžná s osou rotace.



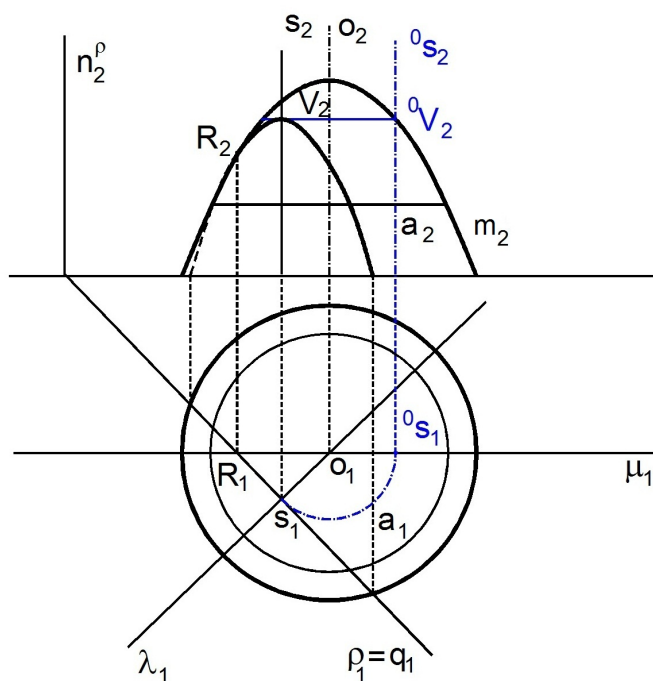
Obr. 2.2.3

Konstrukce eliptického řezu je obdobná jako v příkladě 2.2.1. Nejprve sestrojíme osu a vrcholy elipsy q řezu která leží v rovině λ . Vrcholy C, D elipsy q ležící v rovině souměrnosti λ určíme opět otočením roviny λ do roviny μ hlavního meridiánu. Půdorys řezu je (podle věty 2.2.1) kružnice q_1 nad průměrem C_1D_1 . Je-li p druhá osa elipsy q , můžeme sestrojit půdorys. p_1 je přímka kolmá na s_1 , půdorysy A_1, B_1 zbývajících vrcholů elipsy lze určit přímo jako průsečíky přímky p_1 s kružnicí q_1 . V náryse úsečky C_2D_2 a A_2B_2 omezují sdružené průměry elipsy q_2 .

V půdoryse je celá elipsa q viditelná, v náryse určíme body řezu na hlavním meridiánu, což jsou body, ve kterých se mění viditelnost řezu. Body na druhém obryse jsou průsečíky hlavní přímky druhé osy roviny ρ ležící v rovině μ s hlavním meridiánem m .

Příklad 2.2.3 Sestrojte řez části rotačního paraboloidu $\Phi(o, m)$ rovinou ρ , která je rovnoběžná s osou rotace.

Rovina ρ je rovnoběžná s osou rotace, je tedy kolmá k půdorysně. Půdorysem parabolického řezu je úsečka. Vrchol paraboly leží v rovině souměrnosti λ , což je rovina kolmá k rovině řezu a procházející osou rotace. Průsečnice s rovin ρ a λ je osa paraboly q řezu, přímka s je kolmá k půdorysně. Vrchol paraboly q je průsečík přímky s s meridiánem n ležícím v rovině λ . Bod V určíme otočením roviny λ do roviny μ hlavního meridiánu. Další body paraboly q na libovolné rovnoběžce plochy určíme v půdoryse. Sestrojíme půdorys a_1 libovolné rovnoběžky a plochy Φ a určíme průsečíky a_1 a q_1 a nárys q_2 paraboly řezu určíme dostatečným počtem bodů. Body na druhém obryse, ve kterých se mění viditelnost řezu sestrojíme opět pomocí hlavní přímky druhé osy roviny ρ ležící v rovině μ .



Obr. 2.2.4

2.2.3 Rotační hyperboloidy

Rotační hyperboloid Φ se dotýká asymptotické kuželové plochy Ω podél nevlastní regulární kuželosečky l^∞ . Nevlastní body řezů ploch Φ a Ω rovinou ρ jsou společné. Rovina ρ protíná plochy Φ, Ω po řadě v kuželosečkách q, q' , které jsou homotetické. Pokud přímka u^∞ roviny ρ není tečnou kuželosečky l^∞ , je pól této přímky vzhledem ke q i q' středem kuželoseček q, q' a kuželosečky q, q' jsou soustředné.

Podle polohy přímky u^∞ a kuželosečky l^∞ , existují na hyperboloidech řezy všech tří typů. Rovina ρ protne plochu Φ v kuželosečce typu elipsa, jestliže u^∞ a l^∞ nemají společné body, v kuželosečce typu hyperbola, jestliže u^∞ protíná l^∞ ve dvou různých bodech a v kuželosečce typu parabola, jestliže se u^∞ dotýká l^∞ .

Jestliže u^∞ a l^∞ nemají společné body, pak rovina ρ , která prochází vrcholem O asymptotické kuželové plochy Ω a jejíž nevlastní přímka je u^∞ , má s asymptotickou kuželovou plochou společný pouze bod O .

Jestliže u^∞ protíná l^∞ ve dvou různých bodech U^∞, V^∞ , pak rovina ρ , která prochází vrcholem O asymptotické kuželové plochy Ω a jejíž nevlastní přímka je u^∞ , protne asymptotickou kuželovou plochu ve dvojici různoběžek a, b , které prochází body U^∞, V^∞ .

Jestliže se u^∞ dotýká l^∞ v bodě U^∞ , pak se rovina ρ , která prochází vrcholem O asymptotické kuželové plochy Ω a jejíž nevlastní přímka je u^∞ , dotýká asymptotické kuželové plochy podél přímky a , která prochází bodem U^∞ .

(a) Rotační dvojdílný hyperboloid

Je-li řezem rotačního dvojdílného hyperboloidu Φ kuželosečka typu elipsa, pak rovina ρ řezu buď neprotíná hyperboloid, nebo se ho dotýká v jednom bodě a má s ním společný pouze tento bod, nebo jej protíná v elipse.

Je-li řezem kuželosečka typu hyperbola, a protože je dvojdílný hyperboloid bodová kvadrika, je řezem Φ vždy hyperbola.

Je-li řezem kuželosečka typu parabola, pak se rovina buď dotýká dvojdílného hyperboloidu v nevlastním bodě a má s ním společný pouze tento bod, rovina je asymptotická, nebo je řezem parabola.

Konstrukce řezů všech tří typů je podobná jako v případě elipsoidů i paraboloidu. Ukážeme konstrukci hyperbolického řezu.

Příklad 2.2.4 Sestrojte řez dvojdílného hyperboloidu $\Phi(o, m)$ rovinou ρ .

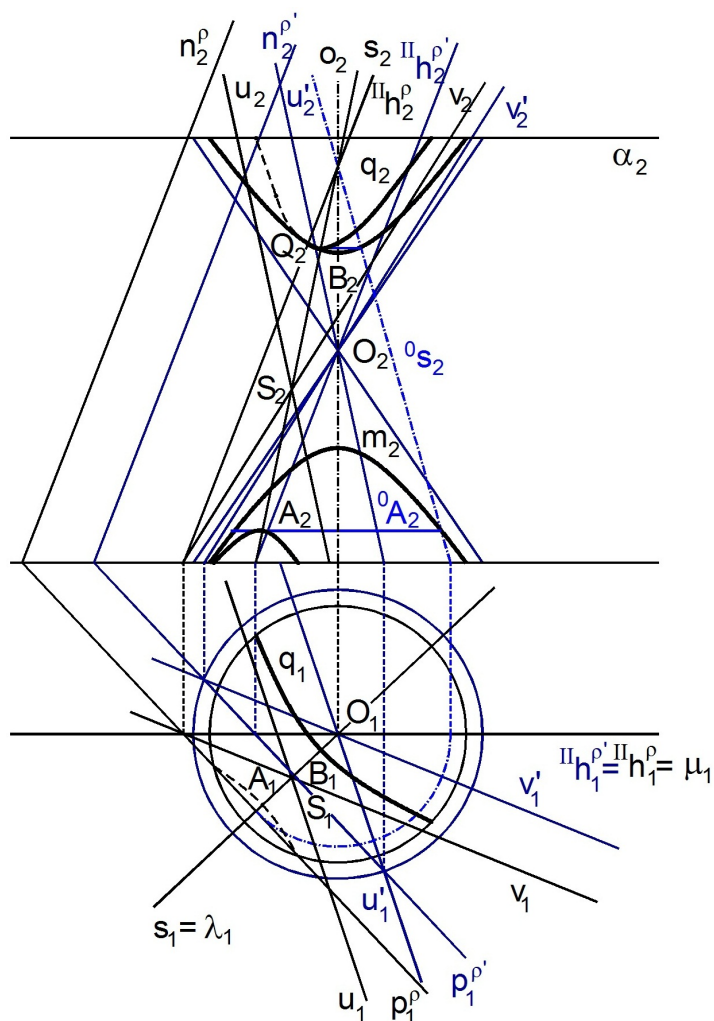
Nejprve zjistíme typ kuželosečky q řezu. Sestrojíme rovinu ρ' rovnoběžnou s rovinou ρ a procházející středem O plochy Φ . Řezem je hyperbola. Postup konstrukce je podobný jako v příkladě 2.2.1. Nejprve sestrojíme body řezu ležící v rovině souměrnosti λ , tj. vrcholy hyperboly q . Rovinu λ otočíme kolem osy rotace do roviny μ hlavního meridiánu a v otočení určíme vrcholy A, B . Střed S úsečky AB je střed kuželosečky q řezu, průsečnice s rovin λ a ρ je její hlavní osa. Půdorys s_1 je hlavní osou hyperboly q_1 , nárys s_2 je průměr q_2 .

Rovina ρ' protíná asymptotickou kuželovou plochu Ω ve dvojici různoběžek u', v' , tyto přímky obsahují nevlastní body řezu a jsou to tedy přímky rovnoběžné s asymptotami hyperboly q . Hyperbola q je body A, B a asymptotami určena.

V náryse je třeba ještě znát body na druhém obryse, ve kterých se mění viditelnost. Bod Q je průsečík hlavní přímky ^{II}h druhé osy roviny ρ ležící v μ s hlavním

meridiánem m . V půdoryse je jedna část plochy viditelná, druhá ne, takže je vidět jedna větev hyperboly řezu.

Můžeme ještě sestrojít další body jako u obecných rotačních ploch. Vedeme rovinu α rovnoběžnou s půdorysnou, která protne plochu Φ v rovnoběžce a a rovinu ρ v hlavní přímce první osy. Společné body této hlavní přímky a rovnoběžky a jsou body řezu. Určíme např. průsečíky půdorysné stopy roviny ρ s rovnoběžkou ležící v půdorysně.



Obr. 2.2.5

(b) Rotační jednodílný hyperboloid

Rotační jednodílný hyperboloid Φ je přímková plocha, řez rovinou ρ je množina průsečíků přímek plochy s rovinou ρ , nenastane tedy případ, že by řezem byla prázdná nebo jednobodová množina. Je-li řezem kuželosečka typu elipsa, pak to může být pouze regulární kuželosečka, řezem je elipsa.

Je-li řezem kuželosečka typu hyperbola, pak záleží na tom, zda rovina ρ řezu obsahuje přímku a plochy. Pokud ρ obsahuje přímku a ploch, pak je řezem singulární kuželosečka, musí obsahovat i přímku n plochy druhého regulu, rovina ρ je tečná rovina, průsečík T přímek a, n je bod dotyku roviny ρ (věta 2.1.3). Pokud ρ neobsahuje přímku plochy Φ je řezem hyperbola.

Jestliže je řezem kuželosečka typu parabola, pak opět záleží na tom, zda rovina

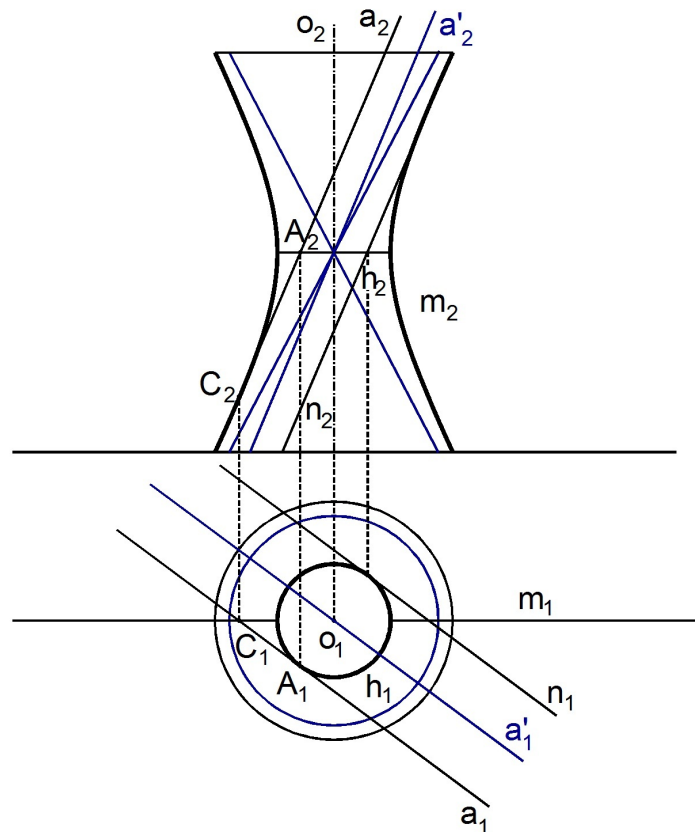
ρ obsahuje přímku a plochy Φ . Pokud rovina ρ obsahuje přímku a plochy Φ pak obsahuje ještě další přímku n plochy s ní rovnoběžnou a je to asymptotická rovina. Pokud rovina řezu neobsahuje přímku plochy, je řezem parabola.

Postup konstrukce je podobný jako u ostatních kvadrik. Ukážeme konstrukci singulárního parabolického řezu jednodílného hyperboloidu, tj. konstrukci asymptotické roviny plochy.

Příklad 2.2.5 Je dán jednodílný rotační hyperboloid $\Phi(o, m)$. Sestrojte asymptotickou rovinu α libovolné přímky a plochy Φ .

Přímka a leží na hyperboloidu, její půdorys a_1 se dotýká hrdla h_1 v bodě A_1 . Průsečík a_1 a m_1 je půdorys bodu C , ve kterém se přímka a dotýká hlavního meridiánu m . V náryse je C_2 bod dotyku a_2 a m_2 .

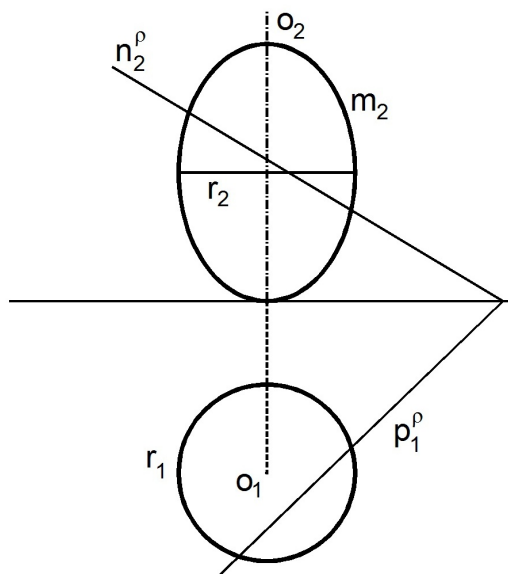
Asymptotická rovina α se dotýká asymptotické kuželové plochy Ω podél přímky a' rovnoběžné s přímkou a . Rovina α obsahuje ještě přímku n druhého regulu plochy Φ rovnoběžnou s přímkou a . Půdorys n_1 se opět musí dotýkat h_1 a nárys n_2 se dotýká m_2 .



Obr. 2.2.6

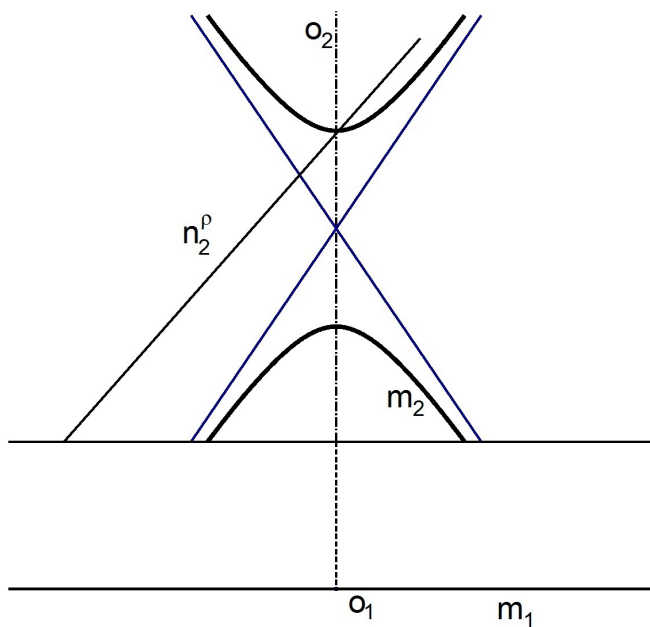


2.2.1 Sestrojte řez rotačního protáhlého elipsoidu rovinou ρ .



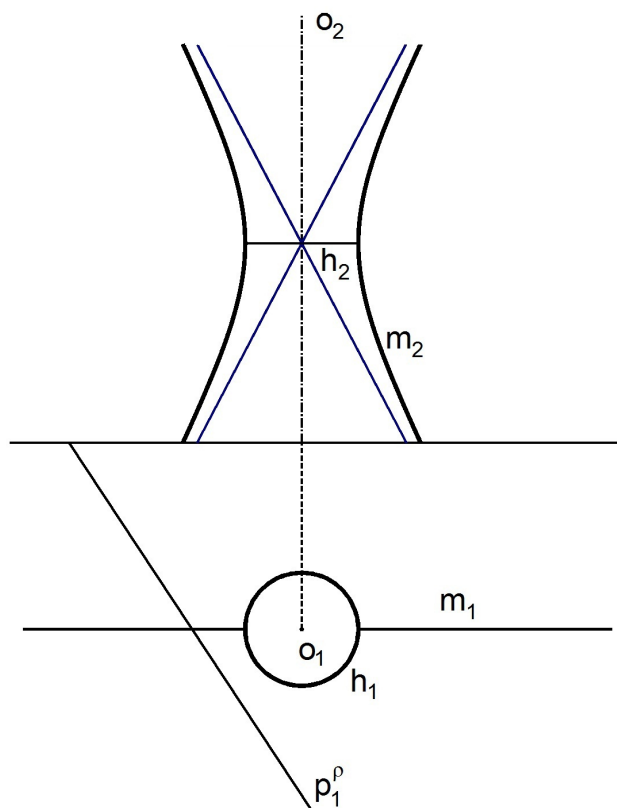
Obr. 2.2.7

2.2.2 Sestrojte parabolický řez rotačního dvojdílného hyperboloidu rovinou ρ , rovina ρ je dána nárysnou stopou.



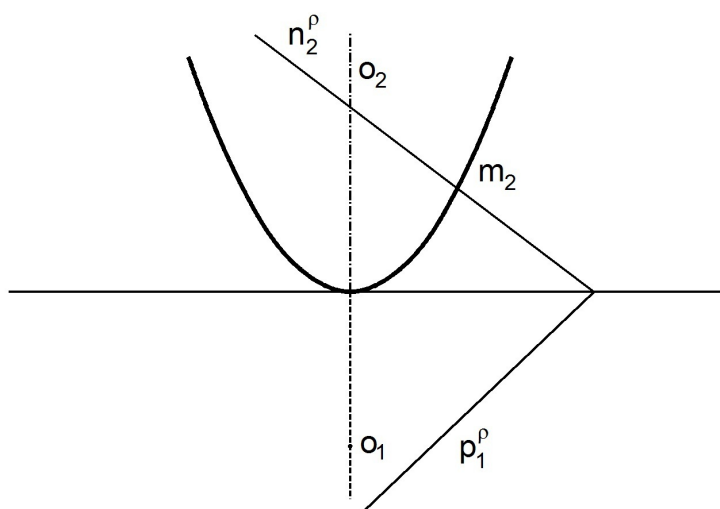
Obr. 2.2.8

2.2.3 Sestrojte některý eliptický řez rotačního jednodílného hyperboloidu rovinou ρ , rovina ρ je dána půdorysnou stopou.



Obr. 2.2.9

2.2.4 Sestrojte řez rotačního paraboloidu rovinou ρ .



Obr. 2.2.10

2.3 Průsečíky přímky s rotační kvadrikou

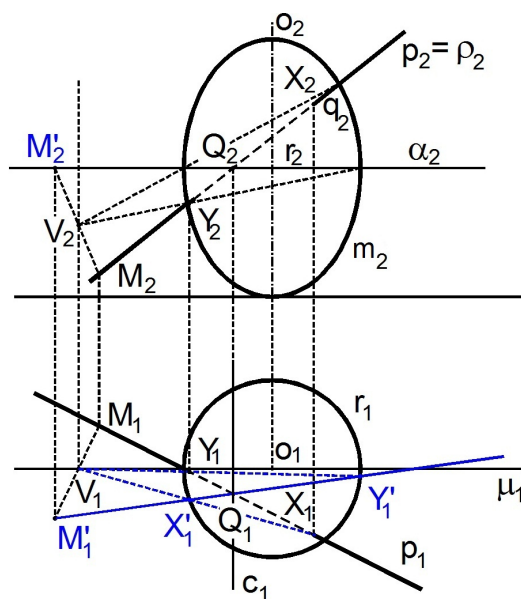


Průsečíky přímky s rotační kvadrikou můžeme určit třemi způsoby, volíme je podle typu kvadriky a podle polohy přímky vzhledem ke kvadrice.

2.3.1 Průsečíky přímky s rotačními elipsoidy.

Příklad 2.3.1 Sestrojte průsečík přímky p s rotačním elipsoidem Φ .

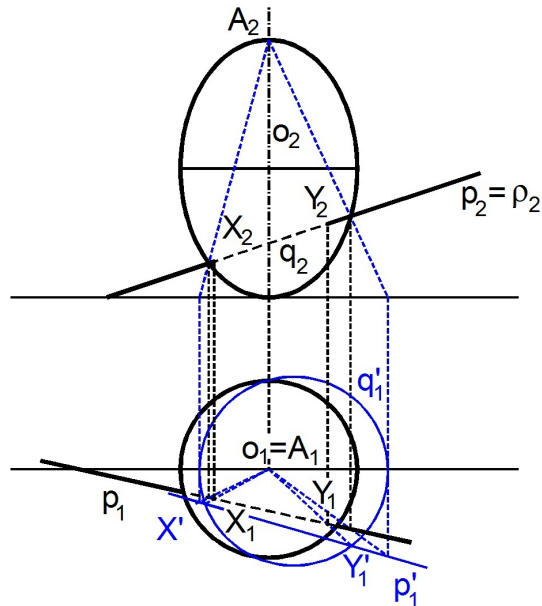
1. Přímku p proložíme vhodnou rovinou ρ , nejlépe kolmou k některé průmětně. Sestrojíme řez k kvadriky rovinou ρ , řezem je elipsa. Určíme společné body X, Y řezu k a přímky p . Protože obecně určujeme průsečíky přímky s elipsou, konstrukce může být dost nepřesná. Proto volíme raději jiné způsoby konstrukce průsečíků.
2. Uvažujme rovinu ρ , která obsahuje přímku p a je kolmá k nárysně. Rovina ρ protne elipsoid Φ v elipse q . Na elipsoidu leží rovník r v rovině α kolmé k ose rotace. Kružnice r a elipsa q jsou kuželosečky ležící na dvou kuželových plochách s vrcholy V, W (věta 2.1.4). Kuželosečky q a r jsou souměrné podle roviny μ hlavního meridiánu, proto body V, W leží v μ . Určíme jednu z kuželových ploch, například s vrcholem V . Její vrchol V sestrojíme jako průsečík dvou povrchových přímek ležících v rovině μ . Kuželová plocha je prořazena rovinami ρ a α po řadě v kuželosečkách q, r . Proto elipse q odpovídá v prostorové kolineaci se středem V a osou $c = \rho \cap \alpha$ kružnice r . V této kolineaci sestrojíme obraz p' přímky p . Přímka p' leží v rovině α . Zvolíme na p bod M a určíme jeho obraz M' . Bod M' leží v rovině α a na přímce MV . Bod Q přímky p ležící v rovině α je samodružný. Určíme průsečíky X', Y' kružnice r a přímky p' a sestrojíme jejich obrazy X, Y ležící na přímce p . Protože prostorová kolineace zachovává incidenci bodů a přímek, jsou body X, Y průsečíky přímky p s elipsoidem Φ . Tato konstrukce je přesnější než konstrukce obecného řezu, při konstrukci průsečíků přímky s rotačním elipsoidem se používá nejčastěji.



Obr. 2.3.1

3. Opět budeme uvažovat rovinu ρ procházející přímku p a kolmou k nárysně. Rovina ρ protne elipsoid v kuželosečce q . Označme A vrchol elipsoidu. Průmět elipsy

q z bodu A do půdorysny je kružnice q' . Přímkou p promítneme z bodu A také do půdorysny a určíme průsečíky X', Y' přímky p' s kružnicí q' . Body X', Y' promítneme z bodu A zpět na přímkou p . Tato konstrukce je rovněž přesnější než první způsob, často se ovšem kružnice q' nevejde na nákresnu.



Obr. 2.3.2

2.3.2 Průsečíky přímky s rotačním paraboloidem.

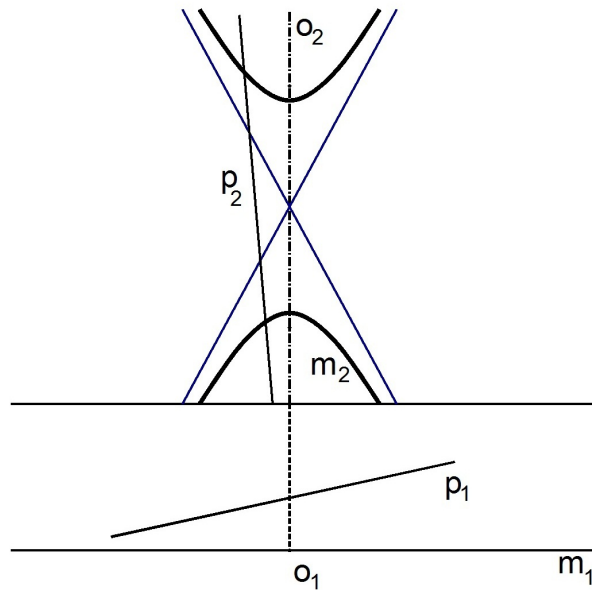
Při sestřování průsečíků přímky s rotačním paraboloidem využijeme věty 2.2.1 a využijeme první způsob konstrukce průsečíků přímky s rotačním paraboloidem, tj. užitím řezu plochy vhodnou rovinou. Přímkou p proložíme rovinu kolmou k nárysně, sestrojíme půdorys q_1 řezu q . Protože je q_1 kružnice, lze určit přímo hledané průsečíky.

2.3.3 Průsečíky přímky s rotačními hyperboloidy.

Průsečíky přímky s rotačními hyperboloidy se v případě obou hyperboloidů konstruují stejně jako u rotačních elipsoidů. Nejčastěji se využívá druhého způsobu - prostorové kolineace s využitím věty 2.1.4. U jednodílného hyperboloidu může nastat případ, kdy nárys přímky neprotíná hlavní meridián hyperboloidu. Tehdy nelze využít k řešení prostorové kolineace a používá se první způsob - konstrukce řezu vhodnou rovinou.

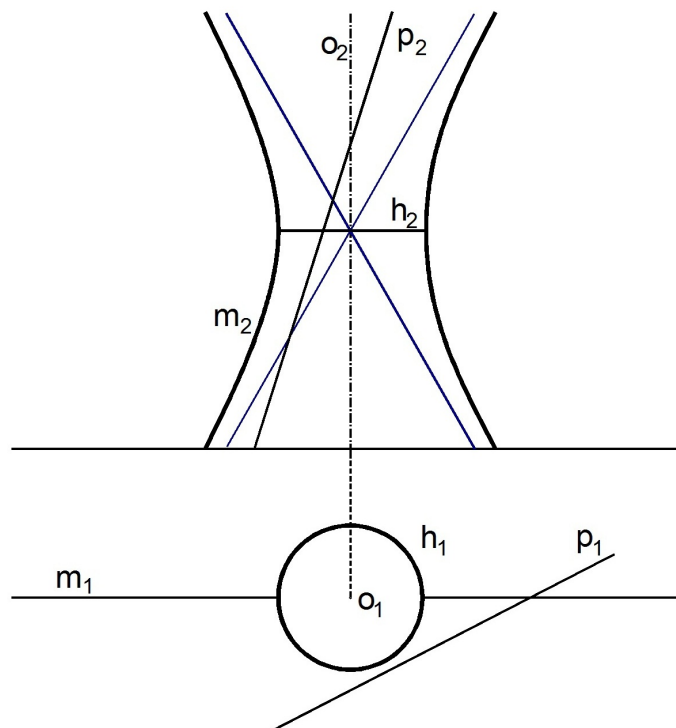


2.3.1 Sestrojte průsečík přímky p s rotačním dvojdílným hyperboloidem $\Phi = (o, m)$.



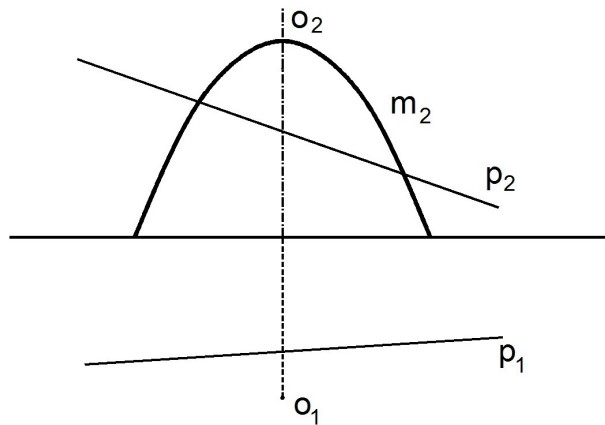
Obr. 2.3.3

2.3.2 Sestrojte průsečík přímky p s rotačním jednodílným hyperboloidem $\Phi = (o, m)$.



Obr. 2.3.4

2.3.3 Sestrojte průsečík přímky p s rotačním paraboloidem $\Phi = (o, m)$.



Obr. 2.3.5

2.4 Tečné roviny rotační kvadriky procházející přímkou

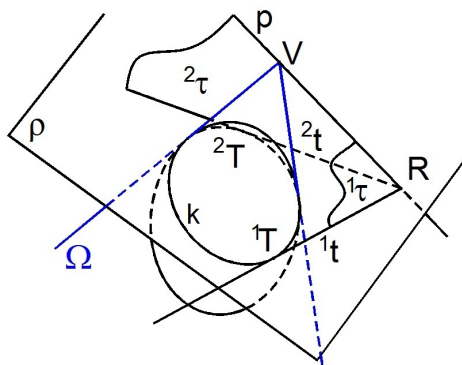


Konstrukce tečných rovin kvadriky procházejících danou přímkou se liší podle toho, je-li kvadrika bodová nebo přímková. Bodová kvadrika má s tečnou rovinou společný pouze bod dotyku, v případě přímkové kvadriky obsahuje tečná rovina přímkou kvadriky. Existence tečných rovin kvadriky procházejících přímkou závisí na vzájemné poloze přímky a kvadriky a opět je třeba rozlišovat, jedná-li se o kvadriku bodovou či přímkovou.

2.4.1 Tečné roviny bodových kvadrik

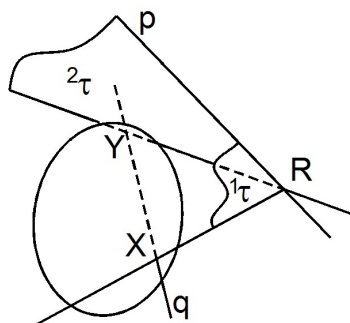
Máme-li danu bodovou kvadriku, můžeme její tečné roviny procházející danou přímkou p sestrojít dvěma způsoby.

1. Na přímce p zvolíme vhodný bod V , z něj kvadrice opíšeme dotykovou kuželovou plochu Ω . Plocha Ω se kvadriky Φ dotýká podél kuželosečky k ležící v rovině ρ . Rovina ρ je polární rovina bodu V vzhledem ke kvadrice Φ . Tečné roviny kuželové plochy Ω procházející přímkou p jsou hledané tečné roviny ${}^1\tau, {}^2\tau$. Roviny ${}^1\tau, {}^2\tau$ jsou po řadě určeny přímkou p a tečnami ${}^1t, {}^2t$ kuželosečky k sestrojenými z průsečíku R přímky p a roviny ρ . Body dotyku tečných rovin ${}^1\tau, {}^2\tau$ a kvadriky Φ jsou body dotyku tečen ${}^1t, {}^2t$.



Obr. 2.4.1

2. K přímce p sestrojíme přímkou q polárně sdruženou s přímkou p vzhledem ke kvadrice Φ . Určíme průsečíky X, Y přímky q s kvadriku Φ . Body X, Y jsou body dotyku tečných rovin procházejících přímkou p .



Obr. 2.4.2

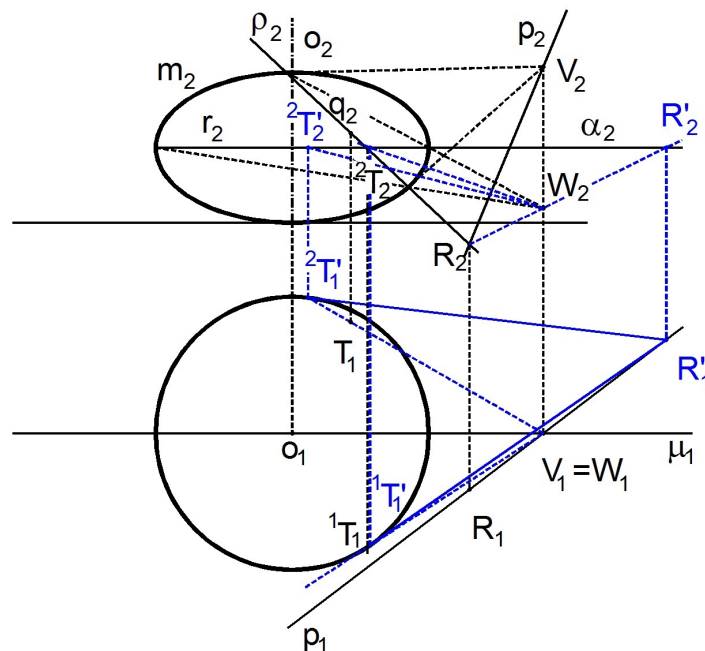
Ze způsobů konstrukce lze snadno odvodit existenci tečných rovin bodové kvadriky procházejících danou přímkou. Danou přímkou p prochází dvě různé tečné roviny, jestliže přímka p nemá s kvadrikou žádný společný bod, protože přímka q polárně sdružená s přímkou p protíná kvadriku Φ ve dvou různých bodech.

Danou přímkou p nelze proložit tečnou rovinu kvadriky Φ , jestliže přímka p protíná Φ ve dvou různých bodech, protože přímka q polárně sdružená s přímkou p neprotíná kvadriku Φ .

Danou přímkou p prochází právě jedna tečná rovina, jestliže se přímka p dotýká kvadriky Φ v bodě T , protože přímka q polárně sdružená s přímkou p se rovněž dotýká kvadriky Φ v bodě T .

Příklad 2.4.1 Sestrojte tečné roviny zploštělého elipsoidu $\Phi = (o, m)$ procházející přímkou p .

Je dán rotační elipsoid Φ a přímka p , která jej neprotíná. Zvolme bod V přímky p ležící v rovině μ hlavního meridiánu m . Uvažujme kuželovou plochu Ω opsanou kvadricí Φ z bodu V . Obě plochy jsou souměrné podle roviny μ . Polární rovina ρ bodu V vzhledem ke kvadrici Φ je tedy kolmá k μ a jejím nárysem je spojnice bodů dotyku tečen elipsy m_2 sestrojených z V_2 . Rovina ρ protíná kvadriku Φ v kuželosečce q , přímka p protíná rovinu ρ v bodě R . Určíme body dotyku ${}^1T, {}^2T$ tečen ${}^1t, {}^2t$ vedených z bodu R ke kuželosečce q . Konstrukce je podobná jako při určování průsečíků přímky s kvadrikou, využijeme prostorové kolineace se středem W mezi rovinami ρ a α , kde α je rovina rovníku. W je vrchol jedné z kuželových ploch, na kterých leží kuželosečky r, q . Protože jsou kuželosečky r, q souměrné podle roviny μ , leží bod W v rovině μ a nárys W_2 tak leží na ordinále bodu V , která je polárou průsečíku úseček r_2 a q_2 vzhledem k m_2 . V uvedené kolineaci určíme obraz R' bodu R . Bod R' leží v rovině α a na přímce WR . Sestrojíme tečny ${}^1t', {}^2t'$ kružnice r vedené z bodu R' a v kolineaci určíme jejich obrazy ${}^1T \in {}^1t', {}^2T \in {}^2t'$ v rovině ρ . Tečné roviny ${}^1\tau, {}^2\tau$ jsou určeny po řadě body ${}^1T, {}^2T$ a přímkou p .



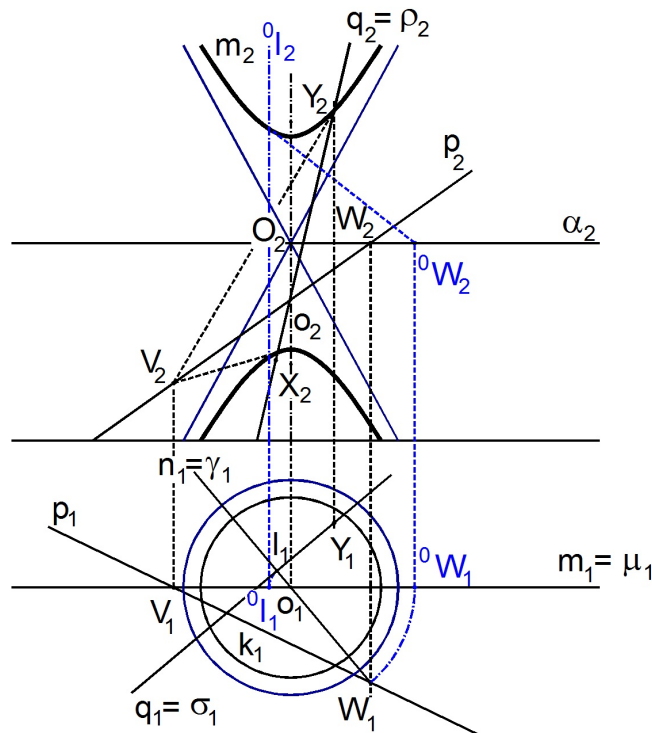
Obr. 2.4.3

Příklad 2.4.2 Sestrojte tečné roviny rotačního dvojdílného hyperboloidu $\Phi = (o, m)$ procházející přímkou p .

Tečné roviny rotačního dvojdílného hyperboloidu Φ procházející přímkou p sestrojíme druhým z výše uvedených způsobů. Sestrojíme přímkou q polárně sdruženou s přímkou p vzhledem ke kvadrice Φ . Přímkou q určíme jako průsečnici polárních rovin dvou vhodně zvolených bodů přímky p .

Zvolme na přímce p bod V ležící v rovině μ hlavního meridiánu m . Jeho polární rovina ρ vzhledem ke kvadrice Φ je kolmá k nárysně, proto $q_2 = \rho_2$. V náryse je q_2 polárou bodu V_2 vzhledem k hyperbole m_2 .

Zvolme bod W ležící v rovině α rovnoběžné s půdorysnou a procházející středem O kvadriky. Označme σ polární rovinu bodu W vzhledem ke kvadrice Φ . Dotyková kuželová plocha Ω opsaná kvadrice Φ z bodu W je souměrná podle roviny α , a proto je polární rovina σ kolmá k půdorysně. Takže bude $\sigma_1 = q_1$. Určíme rovinu σ . Uvažujme rovinu $\gamma = (o, W)$. Přímka OW leží v rovině γ a je kolmá k polární rovině σ bodu W , proto jsou roviny σ a γ k sobě kolmé. Vzhledem k tomu, že jsou obě kolmé k půdorysně je γ_1 kolmá k σ_1 . Rovina γ protne kvadriku Φ v meridiánu n a rovinu σ v poláře l bodu W vzhledem k n . Určíme-li poláru l , můžeme potom sestroit i rovinu σ , která přímkou l obsahuje. Přímka l je kolmá k půdorysně a sestrojíme ji užitím otočení roviny γ kolem osy dvojdílného rotačního hyperboloidu do roviny μ hlavního meridiánu. V náryse je otočená přímka 0l_2 polárou bodu 0W_2 vzhledem k m_2 . Půdorys q_1 hledané přímky q roviny σ polárně sdružené s přímkou p , prochází bodem l_1 kolmo ke γ_1 .



Obr. 2.4.4

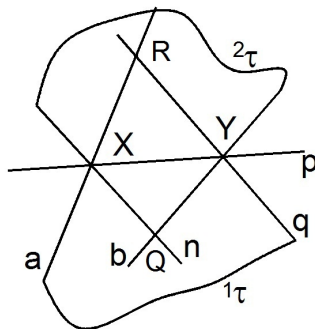
Přímkou q nyní máme určenou nárysem i půdorysem. Podle příkladu 2.3.1 určíme průsečíky X, Y přímky q s kvadrikou Φ . Při konstrukci průsečíků využijeme například toho, že rovina ρ protne kvadriku v hyperbole k' a půdorysna v kružnici k . Kuželosečky k a k'

leží na dvou kuželových plochách a pomocí prostorové kolineace určíme průsečky X, Y přímky q s kvadrikou Φ . (V obrázku není vyznačena konstrukce bodů X, Y .) Hledané tečné roviny jsou určeny přímkou p a body X, Y .

2.4.2 Tečné roviny přímkových kvadrik

Mějme dánu přímkovou kvadriku Φ a přímkou p , která nemá s kvadrikou žádný společný bod (vlastní ani nevlastní). Předpokládejme, že existuje tečná rovina τ plochy Φ procházející přímkou p . Pak tato rovina protíná kvadriku Φ ve dvojici různoběžek a, n různých regulů (věta 2.1.3). Rovina τ obsahuje přímkou p , a protože přímkou p nemá s kvadrikou Φ žádný společný bod, neprotíná přímkou p ani přímkou a , ani přímkou n , což je spor s tím, že přímky a, n, p leží v jedné rovině. Platí tedy, že přímkou p , která nemá s jednodílným hyperboloidem žádný společný bod, neprochází žádná tečná rovina.

Předpokládejme, že přímkou p protíná kvadriku Φ ve dvou různých bodech X, Y , vlastních nebo nevlastních. (Je-li jeden z bodů X, Y nevlastní, je přímkou p rovnoběžná s některou přímkou kvadriky Φ , jsou-li oba nevlastní, hledáme tečné roviny rovnoběžné s rovinou, jejíž nevlastní přímkou je p^∞ .) Bodem X prochází přímky a, n různých regulů plochy Φ , bodem Y prochází přímky b, q různých regulů. Přímky a, q jsou různých regulů a proto se protínají v bodě R (věta 2.1.2). Přímky a, q tvoří rovinu ${}^1\tau$, která obsahuje i přímkou p , je to tedy hledaná tečná rovina plochy Φ obsahující přímkou p . Podobně bod Q je průsečíkem přímek b, n různých regulů, které určují rovinu ${}^2\tau$ různou od roviny ${}^1\tau$ a obsahující přímkou p , je to rovněž tečná rovina procházející přímkou p . Přímkou p , která protíná jednodílný hyperboloid ve dvou různých bodech, prochází dvě různé tečné roviny plochy.

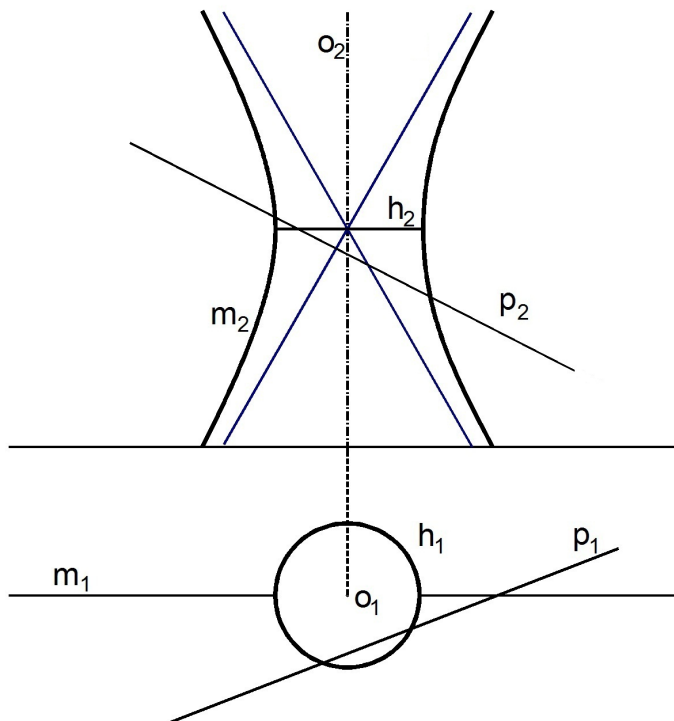


Obr. 2.4.5

Pokud se přímkou p dotýká jednodílného hyperboloidu Φ v bodě T (vlastním nebo nevlastním), ale celá neleží na Φ , pak přímkou p leží v tečné rovině τ plochy Φ , která se plochy Φ dotýká v bodě T a další tečné roviny neexistují. Je-li T nevlastní bod, je τ asymptotická rovina.

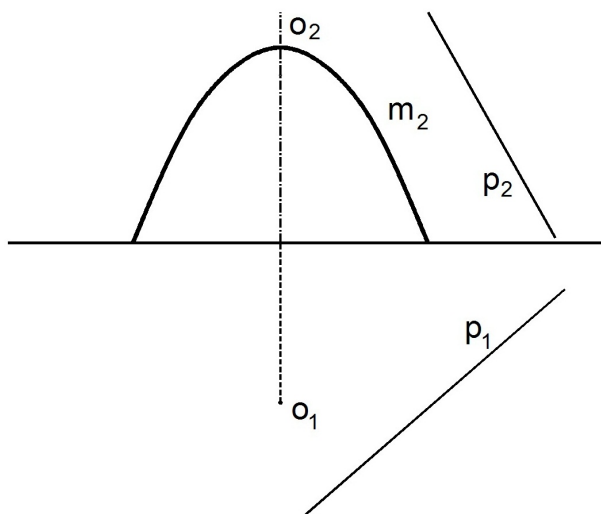


2.4.1 Sestrojte tečné roviny jednodílného rotačního hyperboloidu procházející přímkou p .



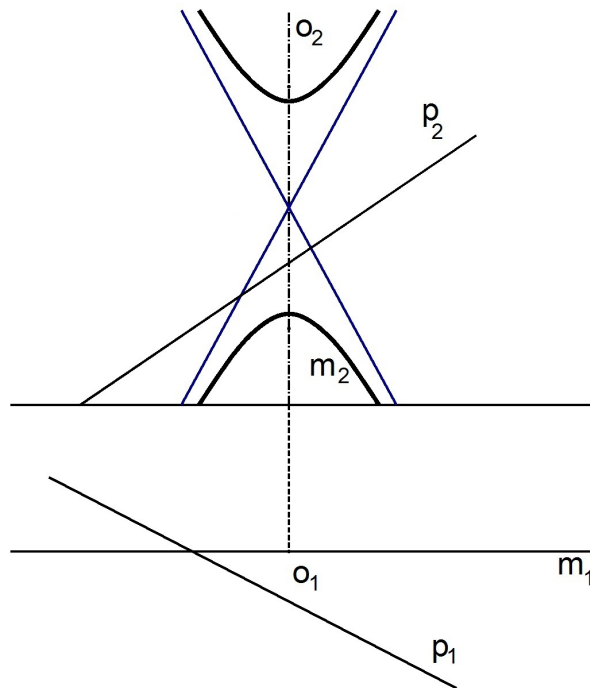
Obr. 2.4.6

2.4.2 Sestrojte tečné roviny rotačního paraboloidu procházející přímkou p .



Obr. 2.4.7

2.4.3 Sestrojte tečné roviny dvojdílného rotačního hyperboloidu procházející přímkou p .



Obr. 2.4.8

2.5 Průniky rotačních kvadrik



Uvažujme dvě rotační kvadriky ${}^1\Phi = ({}^1o, {}^1m)$, ${}^2\Phi = ({}^2o, {}^2m)$. Průniková křivka k těchto kvadrik je množina společných bodů obou kvadrik. Každá rovina ρ protíná kvadriky ${}^1\Phi, {}^2\Phi$ v kuželosečkách ${}^1k, {}^2k$ (věta 2.1.1). Tyto kuželosečky se protínají obecně ve čtyřech bodech, které patří průnikové křivce k . Průniková křivka k kvadrik je čtvrtého stupně, nazývá se *kvartika*. Dotýkají-li se kvadriky ve dvou bodech, pak jsou tyto body dvojnásobné body průnikové křivky k a křivka k se rozpadá na dvě kuželosečky. Dotýkají-li se kvadriky téže kulové plochy (i podél různých kružnic), rozpadá se průnik na dvě kuželosečky. Pravoúhlým průmětem prostorové kvartiky je rovinná kvartika. Leží-li osy ${}^1o, {}^2o$ kvadrik ${}^1\Phi, {}^2\Phi$ v téže rovině ρ , jsou plochy ${}^1\Phi, {}^2\Phi$ i průniková křivka k souměrné podle roviny ρ . Dva body souměrné podle roviny ρ se do roviny ρ pravoúhle promítají do téhož bodu, proto je v tomto případě pravoúhlým průmětem k_2 průnikové křivky k do roviny ρ kuželosečka nebo její část. Následující větu uvedeme bez důkazu, její důkaz lze najít např. v [1] nebo [2].

Věta 2.5.1 *Nechť ${}^1\Phi = ({}^1o, {}^1m)$, ${}^2\Phi = ({}^2o, {}^2m)$ jsou dvě rotační kvadriky, jejichž osy ${}^1o, {}^2o$ leží v rovině ρ . Jsou-li osy ${}^1o, {}^2o$ rovnoběžné, pak je pravoúhlý průmět k_2 průnikové křivky k do roviny ρ část kuželosečky typu parabola. Jsou-li osy ${}^1o, {}^2o$ různoběžné, pak je pravoúhlý průmět k_2 průnikové křivky k do roviny ρ část kuželosečky typu elipsa, jestliže právě jedna z kvadrik je rotační zploštělý elipsoid. Jsou-li osy ${}^1o, {}^2o$ různoběžné, pak je pravoúhlý průmět k_2 průnikové křivky k do roviny ρ část kuželosečky typu hyperbola, jestliže nenastane případ, že právě jedna z kvadrik je rotační zploštělý elipsoid.*

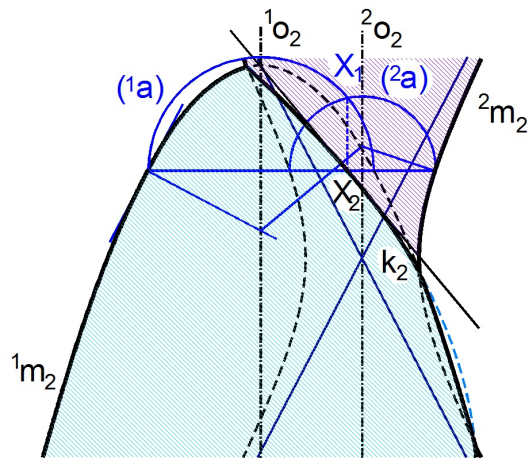
Poznámka 2.5.1 Uvedená věta platí pro všechny rotační kvadriky, tedy i pro rotační plochy válcové, kuželové a plochu kulovou. Navíc za osu kulové plochy vždy můžeme zvolit přímkou, která prochází středem a je rovnoběžná s osou druhé kvadriky.

Průniky rotačních kvadrik sestrojíme bodově, stejně jako u obecných rotačních ploch. Podle polohy os rotace prokládáme pomocné plochy, které protnou obě kvadriky v kružnicích a hledáme společné body kružnic. Jsou-li osy kvadrik rovnoběžné, volíme jako pomocné plochy roviny kolmé k osám rotace, jsou-li osy kvadrik různoběžné, volíme za pomocné plochy kulové plochy se středem v průsečíku os rotace. Tečny průnikové křivky se sestrojují stejně jako u obecných rotačních ploch. Věta 2.5.1 nám umožní určit typ kuželosečky, jejíž částí je pravoúhlý průmět průnikové křivky do roviny os rotace. K sestrojení průmětu průnikové křivky tak stačí sestrojít pouze tolik obecných prvků (bodů a tečen), kolik je nezbytných k určení kuželosečky daného typu.

Příklad 2.5.1 Sestrojte nárys průnikové křivky rotačního jednodílného hyperboloidu s rotačním paraboloidem, jejichž osy jsou rovnoběžné a leží v nárysně.

Průnik rotačního jednodílného hyperboloidu a rotačního paraboloidu s rovnoběžnými osami ležícími v nárysně se sestrojí podobně jako v příkladu 1.3.1. Volíme pomocné roviny kolmé k osám kvadrik. Ty protnou kvadriky v rovnoběžkových kružnicích jejichž společné body patří průnikové křivce k . Nárys k_2 je částí paraboly, kterou určíme dostatečným počtem prvků (např. čtyřmi body nebo dvěma tečnami s body dotyku apod.). Společné body hlavních meridiánů patří průnikové křivce. Tečnu v bodě průnikové křivku určíme pomocí normálové roviny. Ke každé kvadrice určíme v bodě X průnikové křivky

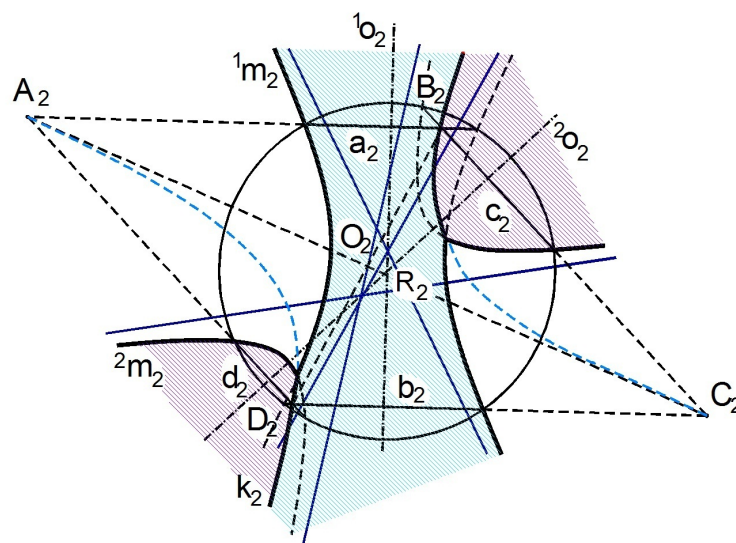
normálu, tečna je kolmá k normálové rovině. Protože osy rotace leží v nárysně, je nárysná stopa normálové roviny spojnice vrcholů normálových kuželů obou ploch příslušných rovnoběžkám bodu X .



Obr. 2.5.1

Příklad 2.5.2 Sestrojte nárys průnikové křivky rotačního dvojdílného hyperboloidu s rotačním jednodílným hyperboloidem, jejichž osy jsou různoběžné a leží v nárysně.

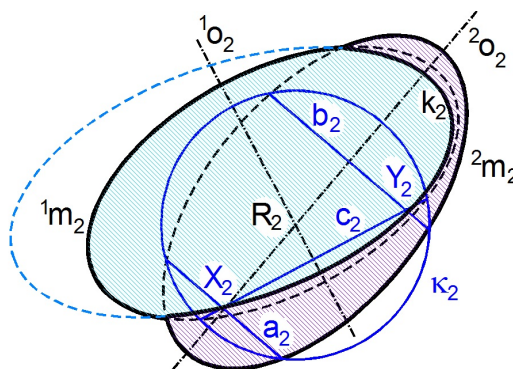
Průniková křivka se sestojí podobně jako v příkladě 1.3.3. Volíme kulové plochy se středem v průsečíku R os kvadrik Kulová plocha κ protne jednu kvadriku v rovnoběžkových kružnicích a, b , druhou v rovnoběžkových kružnicích c, d . Společné body těchto kružnic patří průnikové křivce k . Osy rotačních kvadrik leží v nárysně, proto průnikové křivce patří společné body hlavních meridiánů. V bodech průnikové křivky můžeme určit tečny opět jako kolmice k normálové rovině. Podle věty 2.5.1 je nárysem k_2 část hyperboly, určíme-li průsečíky přímek, na kterých leží úsečky a_2, b_2, c_2, d_2 , získáme rovnoběžník $A_2B_2C_2D_2$ vepsaný hyperbole k_2 (body A_2, C_2 patří tzv. parazitní části křivky k_2). Střed O tohoto rovnoběžníku je středem hyperboly. Průniková křivka k_2 je tak dostatečně určena.



Obr. 2.5.2

Příklad 2.5.3 Sestrojte nárys průnikové křivky rotačního zploštělého elipsoidu s rotačním protáhlým elipsoidem, jejichž osy jsou různoběžné a leží v nárysně.

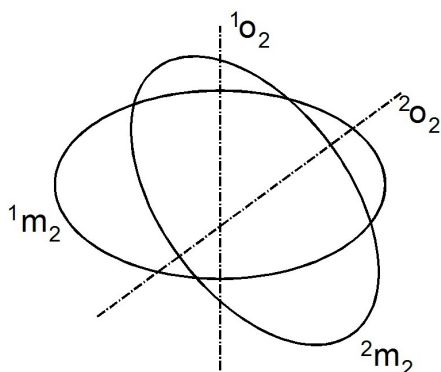
Průnikem rotačního zploštělého elipsoidu a rotačního protáhlého s různoběžnými osami ležícími v nárysně je křivka, jejímž nárysem je část elipsy. Sestrojíme dostatečný počet bodů (případně tečen) této elipsy. Ke konstrukci bodů použijeme stejnou metodu jako v příkladě 1.3.3. Opět volíme pomocné plochy kulové se středem v průsečíku R os rotačních ploch. Tyto kulové plochy mají s rotačními kvadrikami společné rovnoběžkové kružnice a, b, c , průsečíky těchto kružnic patří průnikové křivce. V bodech průnikové křivky lze opět sestavit tečny průnikové křivky jako kolmice ke stopě normálové roviny. Vrcholy normálových kuželových ploch příslušných k rovnoběžkám a, b, c leží na stopě normálové roviny. Průnikové křivce k patří i společné body hlavních meridiánů. Určíme alespoň pět prvků (body, tečny či tečny s body dotyku), elipsa jejíž je k_2 částí je pěti prvky dostatečně určena a lze ji sestavit.



Obr. 2.5.3

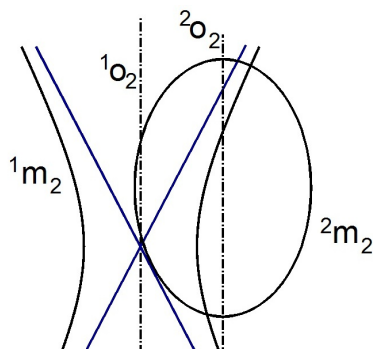


2.5.1 Sestrojte nárys průnikové křivky rotačních zploštělých elipsoidů, jejichž osy jsou různoběžné a leží v nárysně.



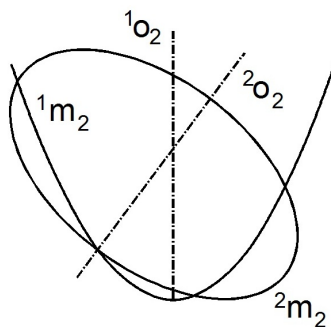
Obr. 2.5.4

2.5.2 Sestrojte nárys průnikové křivky rotačního jednodílného hyperboloidu s rotačním protáhlým elipsoidem, jejichž osy jsou rovnoběžné a leží v nárysně.



Obr. 2.5.5

2.5.3 Sestrojte nárys průnikové křivky rotačního paraboloidu s rotačním zploštělým elipsoidem, jejichž osy jsou různoběžné a leží v nárysně.



Obr. 2.5.6

2.6 Rovnoběžné osvětlení rotačních kvadrik

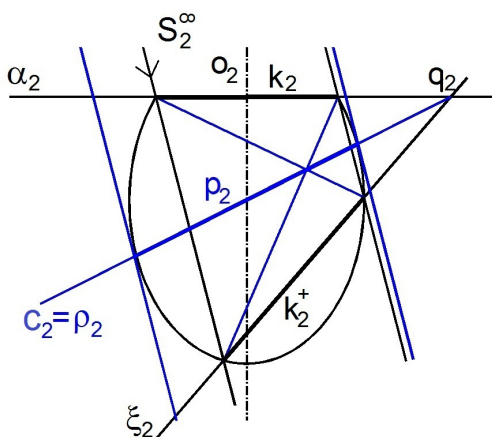


Rovnoběžné osvětlení je zadáno nevlastním středem S^∞ osvětlení. Ze středu S^∞ osvětlení opisujeme kvadrice Φ světelnou kuželovou plochu Σ , která se dotýká kvadriky Φ podél meze p vlastního stínu (kapitola 1.4.1). Mez p vlastního stínu kvadriky Φ je tedy množina bodů dotyku tečných rovin kvadriky Φ procházejících středem S^∞ osvětlení, proto p leží v polární rovině ρ bodu S^∞ vzhledem ke kvadrice Φ a je řezem kvadriky Φ polární rovinou ρ . Mez vlastního stínu je kuželosečka (věta 2.1.1). Osa q kuželosečky p leží v rovině λ procházející osou rotace kolmo k rovině ρ (viz. kapitola 2.2), tj. λ je světelná rovina. Pro středovou kvadriku platí, že střed O kvadriky Φ je pólem nevlastní roviny, proto musí ležet v polární rovině ρ bodu S^∞ , z čehož plyne, že je také středem kuželosečky p . Pro rotační paraboloid je pólem nevlastní roviny bod O^∞ (nevlastní bod osy rotace), proto O^∞ leží v polární rovině ρ bodu S^∞ vzhledem ke kvadrice Φ .

Osvětlujeme-li část kvadriky Φ ohraničenou kružnicí k plochy, pak kružnice k vrhá stín k^+ na Φ . Mez k^+ stínu vrženého kružnicí k na kvadriku Φ je množina bodů A^+ , což jsou průsečíky přímek $S^\infty A$ s kvadrikou Φ , kde A je bod kružnice k . Vylučujeme pouze případ, kdy $S^\infty A$ je rovnoběžná s přímkou plochy Φ a tedy A^+ je nevlastní. Křivka k^+ patří průniku rotační kvadriky Φ a světelné kuželové plochy Ψ , jejíž vrchol je S^∞ a řídicí křivka je kružnice k (definice 1.4.5). Plochy Φ , Ψ jsou kvadriky obsahující kružnici k , proto se jejich průnik rozpadá na dvě kuželosečky, tj. k^+ je kuželosečka. Protože Ψ je kruhová válcová plocha (obecně ne rotační!), je k^+ elipsa. Označme α rovinu křivky k^+ . Platí věta:

Věta 2.6.1 *Nechť k je kružnice rotační kvadriky Φ ležící v rovině α kolmé k ose rotace a nechť ρ je rovina meze p vlastního stínu kvadriky Φ v osvětlení dané středem S^∞ . Pak platí, že rovina ξ vrženého stínu k^+ kružnice k na kvadriku Φ prochází průsečnicí q rovin ρ a α a kuželosečky k a k^+ si odpovídají v prostorové afinitě o ose q , jejíž směr je dán bodem S^∞ .*

Důkaz: Zvolme kvadriku Φ s osou rotace v nárysně a směr osvětlení daný bodem S^∞ rovnoběžný nárysnou. Uvažujme část kvadriky omezenou kružnicí k ležící v rovině α kolmou k ose rotace.



Obr. 2.6.1

Kružnicí k proložíme světelnou válcovou plochu Ψ . Její průnik k^+ s kvadrikou Φ leží v rovině ξ . Ψ je kruhová válcová plocha, kuželosečky k a k^+ jsou po řadě řezy plochy Ψ rovinami α a ξ , proto si odpovídají v osové afinitě jejíž směr je dán směrem povrchových přímků plochy Ψ , tj. bodem S^∞ . Osa afinity je průsečnice q rovin α a ξ .

V náryse jsou k_2 a k_2^+ jsou úsečky, jejichž krajní body leží na náryse m_2 hlavního meridiánu m a jsou to vrcholy úplného čtyřrohu vepsaného kuželosečce m_2 s diagonálním bodem S^∞ . V úplném čtyřrohu vepsaném kuželosečce platí, že jeho diagonála c_2 protějšší diagonálnímu bodu S_2^∞ je polárou bodu S_2^∞ vzhledem k m_2 . Přímka c_2 je spojnice zbylých diagonálních bodů, z nichž jeden je průsečík $q_2 = \alpha_2 \cap \xi_2$.

Polární rovina ρ bodu S^∞ vzhledem ke kvadrice Φ je kolmá k nárysně, přímka c leží v nárysně, proto $c_2 = \rho_2$ a roviny α , ξ , ρ procházejí společnou přímkou q . \square

(a) Mez vlastního stínu rotačních elipsoidů

Rotační elipsoidy jsou středové kvadriky, polární rovina ρ bodu S^∞ prochází středem kvadriky, proto má neprázdný průnik s elipsoidem. Mezí vlastního stínu v rovnoběžném osvětlení je vždy elipsa.

(b) Mez vlastního stínu rotačního paraboloidu

Rotační paraboloid obsahuje jeden nevlastní bod O^∞ , nevlastní bod osy rotace. Střed osvětlení je buď různý od bodu O^∞ nebo s ním splyne. Jestliže je bod S^∞ různý od bodu O^∞ , směr osvětlení není rovnoběžný s osou rotace. Polární rovina ρ bodu S^∞ vzhledem ke kvadrice prochází bodem O^∞ a je různá od nevlastní roviny ω^∞ . Rovina ρ je tedy rovnoběžná s osou rotačního paraboloidu a mezí vlastního stínu je parabola.

Jestliže střed S^∞ osvětlení splyne s bodem O^∞ paraboloidu, je směr osvětlení rovnoběžný s osou rotace. Polární rovina bodu S^∞ vzhledem ke kvadrice je ω^∞ a mezí vlastního stínu neexistuje. Jedna strana plochy je osvětlená, druhá je ve stínu.

(c) Mez vlastního stínu rotačního dvojdílného hyperboloidu

Rotační dvojdílný hyperboloid protíná nevlastní rovinu ω^∞ v regulární kuželosečce l^∞ . Označme u^∞ nevlastní přímkou polární roviny ρ bodu S^∞ vzhledem ke kvadrice. Přímka u^∞ je polárou bodu S^∞ vzhledem ke kuželosečce l^∞ . Jestliže bod S^∞ leží vně kuželosečky l^∞ , pak jeho polára u^∞ vzhledem k l^∞ protne kuželosečku l^∞ ve dvou různých bodech U^∞, V^∞ . Přímka směru osvětlení procházející středem dvojdílného hyperboloidu leží vně asymptotické kuželové plochy (nemá s dvojdílným hyperboloidem společné body) a rovina ρ prochází středem kvadriky, asymptotickou kuželovou plochu protne ve dvojici různoběžek a mezí vlastního stínu je hyperbola.

Leží-li bod S^∞ uvnitř kuželosečky l^∞ , pak jeho polára u^∞ vzhledem k l^∞ nemá kuželosečkou l^∞ žádné společné body. Přímka směru osvětlení procházející středem dvojdílného hyperboloidu leží uvnitř asymptotické kuželové plochy (dvojdílný hyperboloid protne ve dvou různých bodech). Polární rovina ρ prochází středem kvadriky, s asymptotickou kuželovou plochou má společný pouze její vrchol, s dvojdílným hyperboloidem nemá žádné společné body. Mezí vlastního stínu neexistuje.

Leží-li bod S^∞ na kuželosečce l^∞ , jeho polára u^∞ vzhledem ke kuželosečce l^∞ je tečnou kuželosečky l^∞ v bodě U^∞ . Přímka směru osvětlení procházející středem dvojdílného hyperboloidu je povrchovou přímkou asymptotické kuželové plochy a

dotýká se dvojdílného hyperboloidu v bodě U^∞ . Polární rovina ρ je tečnou rovinou dvojdílného hyperboloidu v bodě U^∞ , tj. asymptotická rovina. S dvojdílným hyperboloidem má společný pouze bod U^∞ a mez vlastního stínu neexistuje.

(d) Mez vlastního stínu rotačního jednodílného hyperboloidu

Rotační jednodílný hyperboloid stejně jako rotační dvojdílný hyperboloid protíná nevlastní rovinu ω^∞ v regulární kuželosečce l^∞ . Je-li u^∞ nevlastní přímka polární roviny ρ bodu S^∞ vzhledem ke kvadrice, je u^∞ polárou bodu S^∞ vzhledem ke kuželosečce l^∞ . Pokud bod S^∞ leží vně kuželosečky l^∞ , protne jeho polára u^∞ vzhledem k l^∞ kuželosečku l^∞ ve dvou různých bodech U^∞, V^∞ . Přímka směru osvětlení procházející středem jednodílného hyperboloidu leží vně asymptotické kuželové plochy (jednodílný hyperboloid protne ve dvou různých bodech), polární rovina ρ prochází středem kvadriky, asymptotickou kuželovou plochu protne ve dvojici různoběžek a mezí vlastního stínu je hyperbola.

Jestliže bod S^∞ leží uvnitř kuželosečky l^∞ , jeho polára u^∞ vzhledem k l^∞ nemá s kuželosečkou l^∞ žádné společné body. Přímka směru osvětlení procházející středem dvojdílného hyperboloidu leží uvnitř asymptotické kuželové plochy (nemá s jednodílným hyperboloidem žádné společné body). Polární rovina ρ prochází středem kvadriky, s asymptotickou kuželovou plochou má společný pouze její vrchol, jednodílný hyperboloid protne v elipse resp. kružnici. Mezí vlastního stínu je elipsa, pokud je směr osvětlení rovnoběžný s osou rotace, je mezí vlastního stínu hrdelní kružnice.

Leží-li bod S^∞ na kuželosečce l^∞ , je jeho polára u^∞ vzhledem ke kuželosečce l^∞ tečnou kuželosečky l^∞ v bodě U^∞ . Přímka směru osvětlení procházející středem dvojdílného hyperboloidu je povrchovou přímkou asymptotické kuželové plochy a dotýká se jednodílného hyperboloidu v bodě U^∞ . Polární rovina ρ je tečnou rovinou jednodílného hyperboloidu v bodě U^∞ , tj. asymptotická rovina, mezí vlastního stínu jsou dvě navzájem rovnoběžné přímky různých regulů rovnoběžné se směrem osvětlení.

Mez vlastního stínu na všech kvadrikách budeme sestrojovat metodami uvedenými v kapitole 1.4.1, tj. obecné body metodou kulovou, body na rovníkách a hrdlech metodou kuželovou a body na hlavních a světelných meridiánech metodou válcovou. Vržený stín budeme sestrojovat do půdorysny, vržený stín kvadriky na sebe (bude-li existovat) sestrojíme s využitím věty 2.6.1.

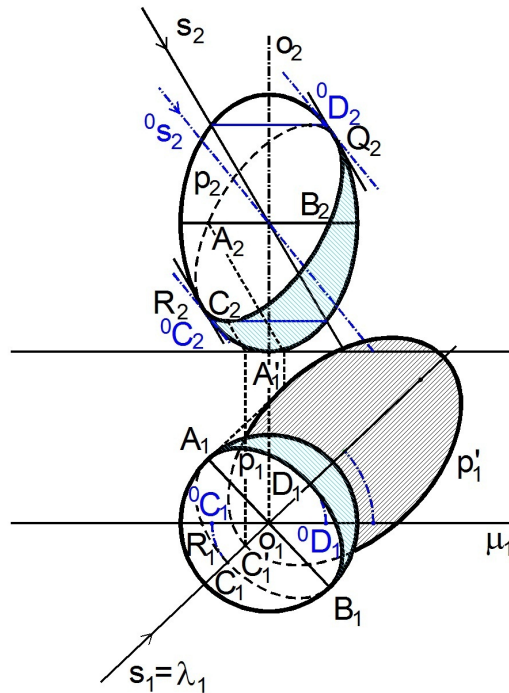
Příklad 2.6.1 Sestrojte rovnoběžné osvětlení rotačního protáhlého elipsoidu $\Phi(o, m)$.

Mez p vlastního stínu je elipsa, jejíž střed splyne se středem elipsoidu. Ve světelné rovině λ procházející osou rotace leží osa elipsy p . Body meze vlastního stínu na světelném meridiánu n jsou vrcholy elipsy p , určíme je válcovou metodou. Rovinu λ otočíme kolem osy rotace do roviny μ hlavního meridiánu a v otočení sestrojíme body dotyku tečen hlavního meridiánu rovnoběžné s otočeným směrem osvětlení, získáme otočené vrcholy ${}^0C, {}^0D$. Přímka CD je průsečnice roviny ρ meze vlastního stínu s rovinou λ , je to spádová přímka první osnovy roviny ρ .

Druhá osa elipsy p leží na přímce kolmé k přímce CD . Protože elipsa p a kvadrika Φ mají společný střed O , leží druhá osa v rovině rovníku. Vrcholy A, B elipsy p leží na rovníku a v půdoryse se v nich mění viditelnost meze vlastního stínu. Body A, B určíme kuželovou metodou. V půdoryse je p_1 určena osami, v náryse sdruženými průměry.

Body meze vlastního stínu, ve kterých se v náryse mění viditelnost, jsou body dotyku tečen hlavního meridiánu rovnoběžných s s_2 .

Mez p' stínu vrženého na půdorysnu je určena půdorysnými stopníky přímk směru osvětlení procházejících body elipsy p . Protože jedna z os elipsy p je rovnoběžná s půdorysnou, jsou $A'B'$, $C'D'$ osy elipsy p' .



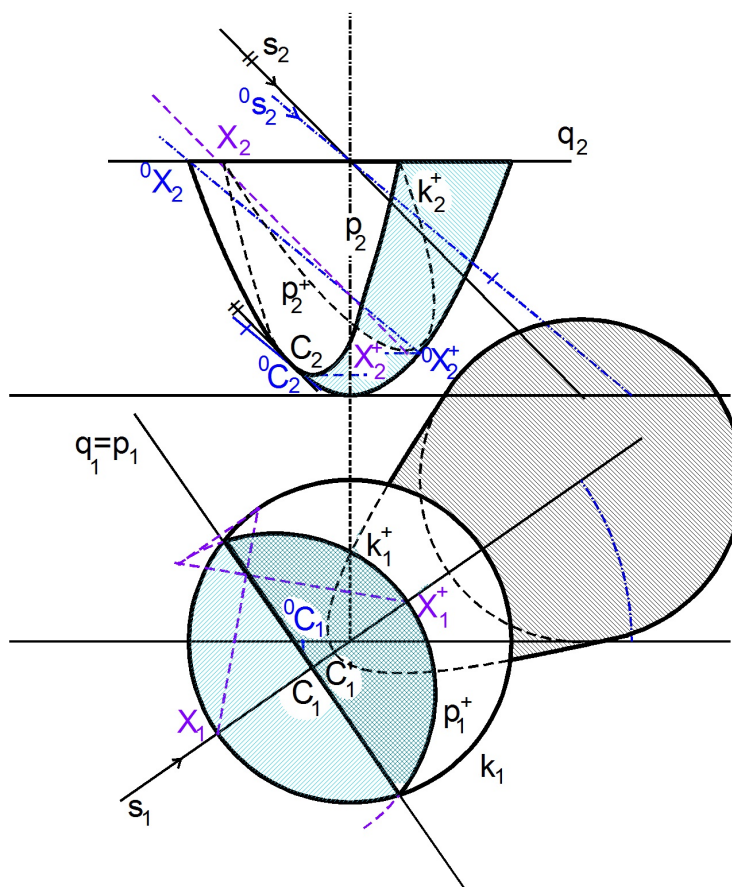
Obr. 2.6.2

Příklad 2.6.2 Sestrojte rovnoběžné osvětlení rotačního paraboloidu $\Phi(o, m)$.

Aby existovala mez vlastního stínu, nesmí být směr osvětlení rovnoběžný s osou rotace. Mezi vlastního stínu je parabola. Půdorysem meze vlastního stínu je přímka. Určíme vrchol C paraboly p . Bod C leží ve světelné rovině λ procházející osou, určíme ho válcovou metodou. Rovinu λ otočíme kolem osy rotace do roviny hlavního meridiánu. Najdeme bod dotyku 0C_2 tečny hlavního meridiánu rovnoběžné s otočeným směrem osvětlení. Půdorys meze vlastního stínu je přímka p_1 kolmá na s_1 procházející C_1 . Nárys určíme dostatečným počtem bodů. V prostoru je bod C vrcholem paraboly p , ale v náryse bod C_2 není vrcholem paraboly p_2 . Zvolíme-li libovolnou rovnoběžku a , z půdorysu snadno získáme body meze vlastního stínu jako průsečíky a_1 a p_1 . Body meze vlastního stínu, ve kterých se v náryse mění viditelnost, jsou body dotyku tečen hlavního meridiánu rovnoběžných s s_2 .

Rotační paraboloid je omezen kružnicí k , která vrhá stín k^+ na plochu. Mez p vlastního stínu leží v rovině ρ kolmé k půdorysně. Označme α rovinu kružnice k a q průsečnici rovin ρ a α . Mez k^+ stínu vrženého kružnicí k na plochu je elipsa afinní ke kružnici k , osa afinity je q , směr afinity je dán směrem osvětlení. Určíme pár odpovídajících si bodů. Bod X kružnice k ležící v rovině λ vrhá stín X^+ na světelný meridián, určíme otočením roviny λ kolem osy rotace do roviny hlavního meridiánu. Otočeným bodem 0X vedeme přímkou směru 0s , průsečík této přímky s hlavním meridiánem je ${}^0X^+$. Bodu X pak v dané afinitě odpovídá bod ${}^0X^+$, sestrojíme obraz kružnice k .

Mez p' stínu vrženého stínu do půdorysny sestrojíme opět jako množinu vržených stínů bodů meze vlastního stínu, vrchol paraboly p' je vržený stín C' bodu C .



Obr. 2.6.3

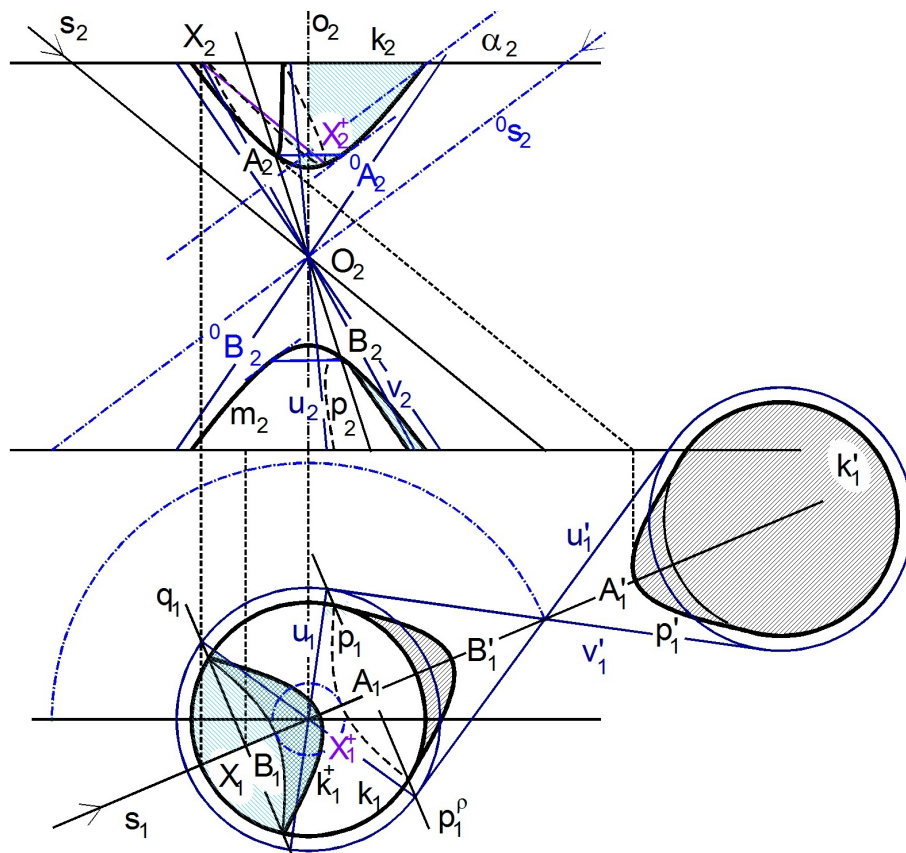
Příklad 2.6.3 Sestrojte rovnoběžné osvětlení rotačního dvojdílného hyperboloidu $\Phi(o, m)$.

Aby existovala mez vlastního stínu, musí světelný paprsek procházející středem dvojdílného hyperboloidu ležet vně asymptotické kuželové plochy. Mez vlastního stínu sestrojíme podobně jako v příkladě 2.6.1, kuželosečka p je hyperbola, jejíž střed splyne se středem dvojdílného hyperboloidu. Osa hyperboly p a její vrcholy A, B leží ve světelné rovině λ procházející osou, určíme je v otočení roviny λ do roviny hlavního meridiánu. Otočené vrcholy jsou body dotyku tečen hlavního meridiánu rovnoběžných s otočeným směrem osvětlení. V půdoryse se přímka AB zobrazí jako osa hyperboly p_1 (AB je spádová přímka první osnovy roviny ρ), v náryse pouze jako průměr hyperboly p_2 .

Mez vlastního stínu rotačního dvojdílného hyperboloidu i jeho asymptotické kuželové plochy leží v polární rovině ρ bodu S^∞ vzhledem k dané kvadrice. Rovina ρ obsahuje střed O dvojdílného hyperboloidu, mez vlastního stínu asymptotické kuželové plochy je tvořena dvojicí přímek u, v . Protože asymptotická kuželová plocha a dvojdílný hyperboloid mají společnou nevlastní kuželosečku l^∞ , mají společné nevlastní body meze vlastních stínů obou ploch a přímky u, v jsou asymptoty hyperboly p . Hyperbola p je dostatečně určena v náryse i půdoryse. V náryse ještě určíme body meze vlastního stínu, ve kterých se mění viditelnost. Jsou to body dotyku tečen hlavního meridiánu rovnoběžných s s_2 .

Vržený stín p' je určen vrcholy A' , B' a asymptotami u' , v' .

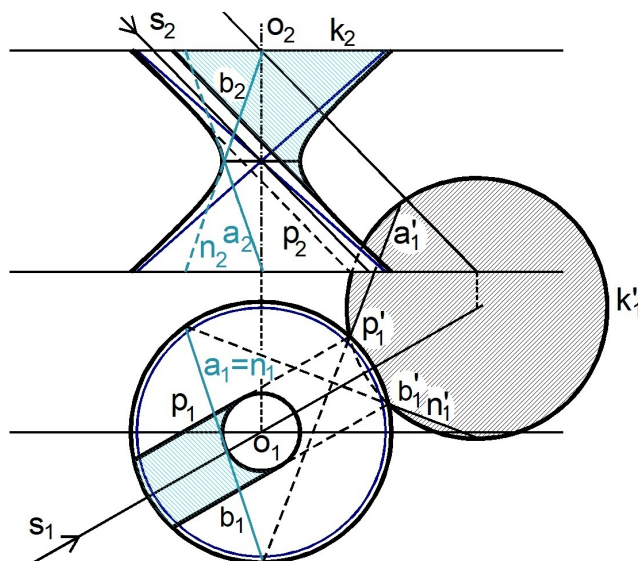
Mez k^+ stínu vrženého hraniční kružnicí k na plochu sestrojíme stejně jako v příkladě 2.6.2. Určíme vržený stín X^+ bodu X kružnice k ležící v rovině λ na plochu. Afinita mezi kružnicí k a elipsou k^+ je určena průsečnicí q rovin ρ a α , kde α je rovina hraniční rovnoběžky k . Jeden její bod je např. průsečík přímky AB s rovinou α , q_1 je kolmá na s_1 .



Obr. 2.6.4

Příklad 2.6.4 Sestrojte rovnoběžné osvětlení jednodílného hyperboloidu. $\Phi(o, m)$.

Světelný paprsek procházející středem jednodílného hyperboloidu leží na asymptotické kuželové ploše, mezi vlastního stínu je dvojice rovnoběžných přímek b , p různých regulů.

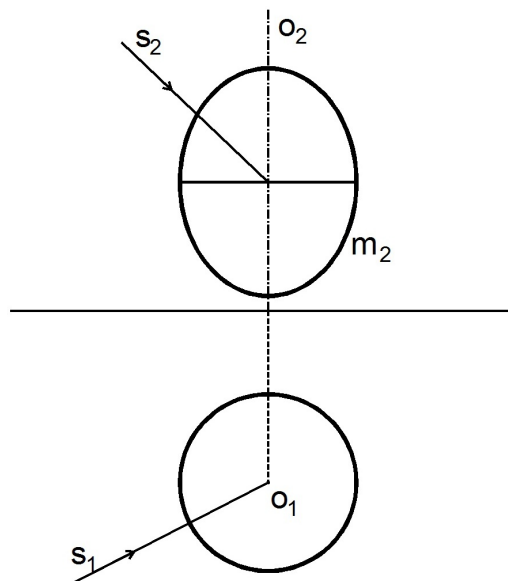


Obr. 2.6.5

Přímky b, p tvoří asymptotickou rovinu jednodílného hyperboloidu a jsou rovnoběžné se směrem osvětlení. Jejich půdorysy jsou tečny půdorysu hrdla rovnoběžné s půdorysem směru osvětlení. Vržené stíny přímek b, p do půdorysny jsou průměty přímek b, p do půdorysny ve směru osvětlení, proto jsou b', p' body. Mez stínu vrženého jednodílným hyperboloidem do půdorysny jsou dva různé body. Každá přímka jednoho regulu protíná přímky druhého regulu, takže každá přímka jednodílného hyperboloidu různá od přímek b, p protne jednu z přímek b, p a s druhou je mimoběžná. Vržené stíny přímek plochy různých od přímek b, p tvoří dva svazky o středech b', p' . V obrázku je hyperboloid omezen půdorysnou a kružnicí k a je sestrojen vržený stín k' kružnice k do půdorysny a vržené stíny přímek a, n různých regulů.

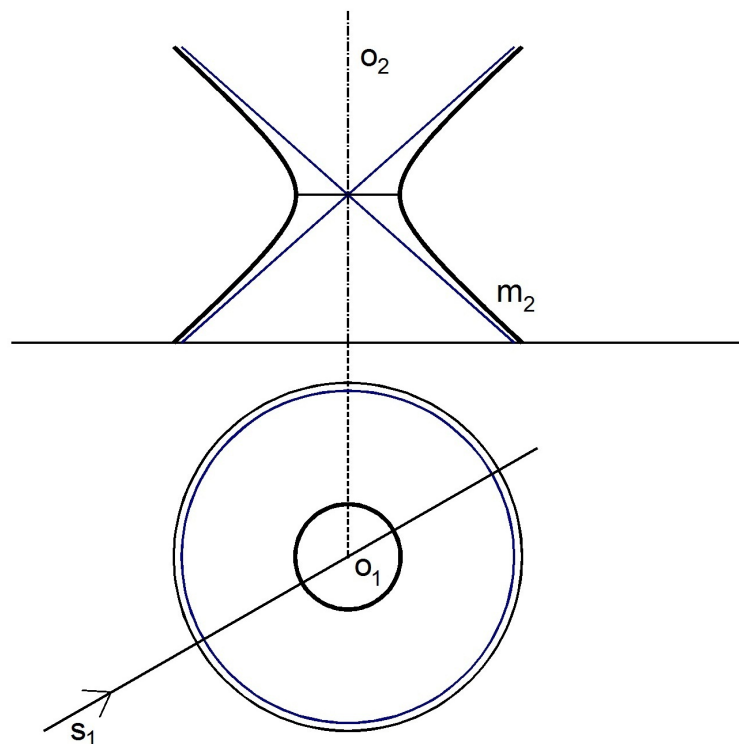


2.6.1 Sestrojte rovnoběžné osvětlení rotačního protáhlého elipsoidu $\Phi(o, m)$.



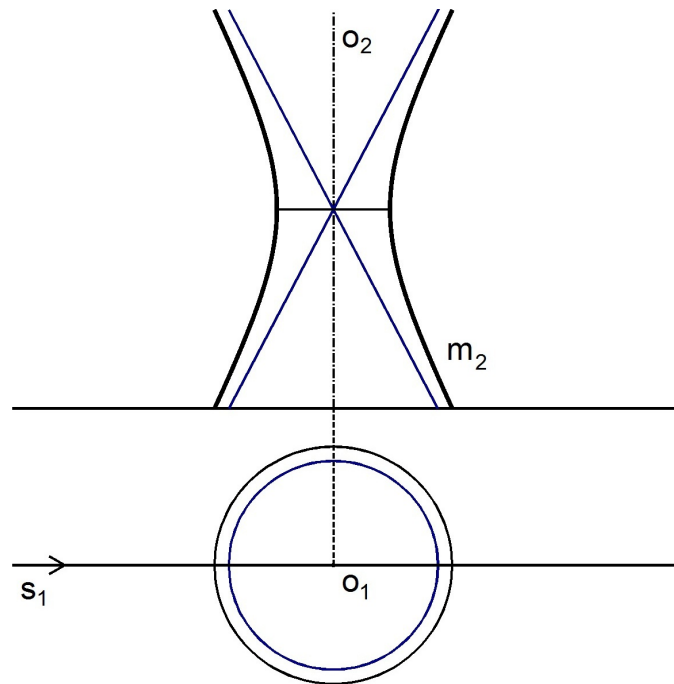
Obr. 2.6.6

2.6.2 Sestrojte rovnoběžné osvětlení rotačního jednodílného hyperboloidu $\Phi(o, m)$, směr osvětlení je zadán půdorysem, nárys zvolte tak, aby mezi vlastního stínu byla hyperbola.



Obr. 2.6.7

2.6.3 Sestrojte rovnoběžné osvětlení rotačního jednodílného hyperboloidu $\Phi(o, m)$, směr osvětlení je zadán půdorysem, nárys zvolte tak, aby mezi vlastního stínu byla elipsa.



Obr. 2.6.8

2.7 Zobrazení rotačních kvadrik v různých projekcích



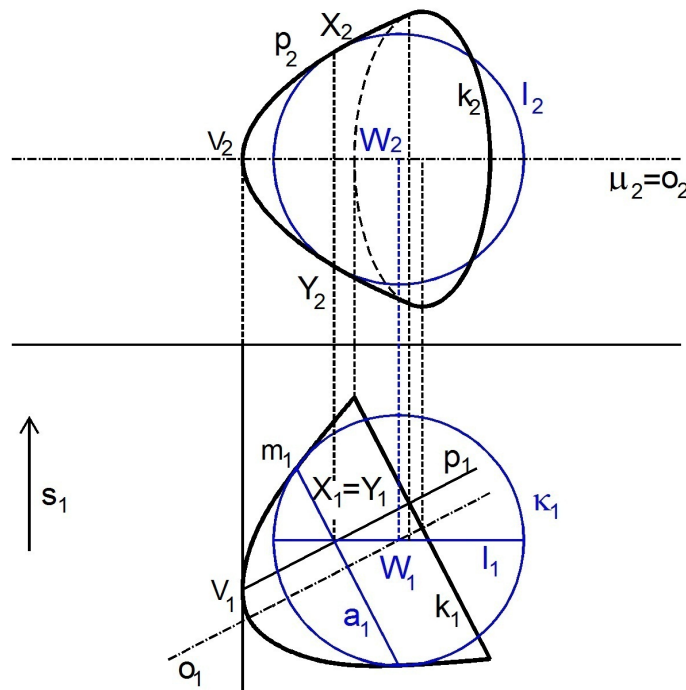
Rovnoběžného osvětlení se využívá při konstrukci rovnoběžných průmětů rotačních ploch. Sestrojíme obrysy rotačních kvadrik v Mongeově projekci v případě, že osa rotace není kolmá k půdorysně a také průměty rotačních kvadrik v pravoúhlé axonometrii a kótovaném promítání. Směr osvětlení je dán směrem promítání, skutečný obrys plochy je mez vlastního stínu a zdánlivý obrys (průmět plochy) je mez stínu vrženého.

2.7.1 Obrys rotační kvadriky v Mongeově projekci

V Mongeově projekci je třeba sestavit půdorys a nárys kvadriky, tj. hledáme meze stínů vlastních a vržených v osvětleních daných směry kolmými k průmětnám. Nejprve sestrojíme průmět plochy v případě, kdy je osa rovnoběžná s jednou z průměten a pak tuto konstrukci použijeme pro sestavení obrysu plochy s osou v obecné poloze.

Příklad 2.7.1 V Mongeově projekci sestojte průmět rotačního paraboloidu $\Phi(o, m)$, jehož osa je rovnoběžná s půdorysnou, paraboloid je omezený kružnicí k .

Hlavní meridián m leží v rovině μ rovnoběžné s půdorysnou a procházející osou. Prvním skutečným obrysem je hlavní meridián, prvním zdánlivým obrysem je půdorys m_1 hlavního meridiánu. Druhý skutečný obrys p je mez vlastního stínu při osvětlení ve směru kolmém k nárysně. Mez p vlastního stínu je parabola a leží v polární rovině ρ bodu S^∞ . Rovina ρ je rovnoběžná s osou rotace a je kolmá k půdorysně. Půdorysem paraboly p je přímka, je-li paraboloid omezen kružnicí k je p_1 úsečka.



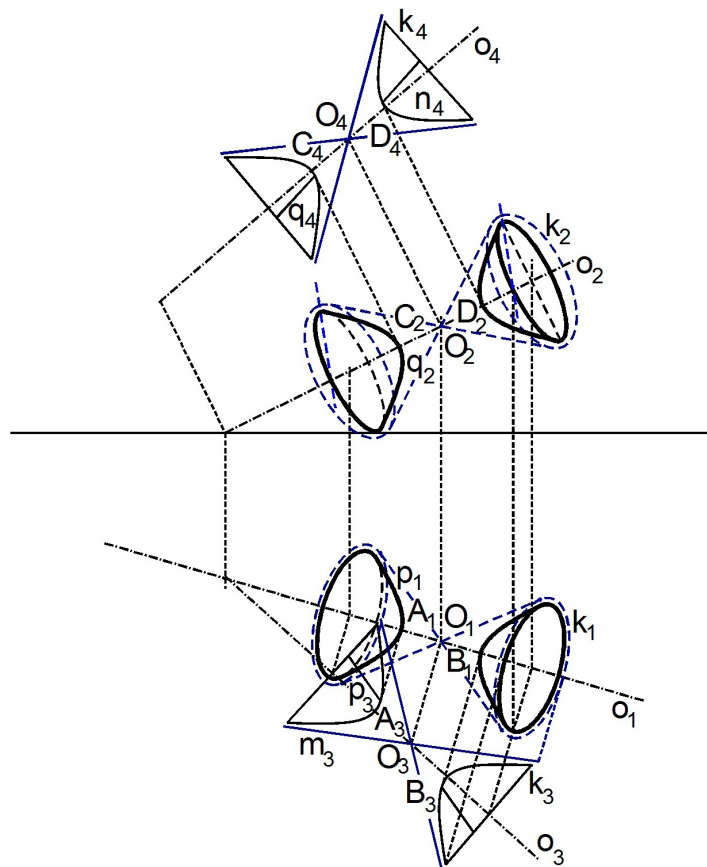
Obr. 2.7.1

Rovina světelného meridiánu je rovnoběžná s rovinou hlavního meridiánu, proto vrchol V paraboly p leží na hlavním meridiánu. Určíme ho válcovou metodou, bod V je bod dotyku tečny hlavního meridiánu rovnoběžné se směrem osvětlení. V půdoryse je V_1 bod

dotyku tečny paraboly m_1 , která je rovnoběžná s s_1 . Nárýsy dalších bodů X, Y můžeme určit přímo z půdorysu, sestrojíme nárýs rovnoběžky a , na které body X, Y leží. Protože nárýsem rovnoběžky a je elipsa, je konstrukce nepřesná a využívá se spíše konstrukce pomocí kulové metody. Podél rovnoběžky a vepíšeme kulovou plochu κ , na ní určíme mez l vlastního stínu. Kružnice l je hlavní kružnicí kulové plochy κ a leží v rovině rovnoběžné s nárýsnou, nárýsem je kružnice. Na l_2 leží nárýsy bodů X, Y . Sestrojíme ještě nárýs hraniční kružnice k , křivky k_2 a p_2 se dotýkají, body dotyku opět určíme kulovou metodou.

Příklad 2.7.2 V Mongeově projekci sestrojte průmět rotačního dvojdílného hyperboloidu $\Phi(o, m)$, jehož osa je v obecné poloze vzhledem k průmětnám.

Kvadrík je omezena dvěma kružnicemi ležícími v rovinách kolmých k ose a je zadána meridiánem m ležícím v rovině μ procházejícím osou kolmo k půdorysně. Rovina μ je zvolena za třetí průmětnu a meridián m je zadán ve sklopení. Sklopené průměty značíme indexem 3. První skutečný obrys p je mez vlastního stínu při osvětlení ve směru kolmém k půdorysně, první zdánlivý obrys je první průmět p_1 kuželosečky p . p je hyperbola, její průmět p_3 do roviny μ je dvojice polopřímek s krajními body A_3, B_3 . Rovina μ je světelná rovina, body A, B jsou vrcholy hyperboly p , jejich půdorysy leží na o_1 . Určíme je válcovou metodou, A_3, B_3 jsou body dotyku tečen hyperboly m_3 rovnoběžných s s_3 .



Obr. 2.7.2

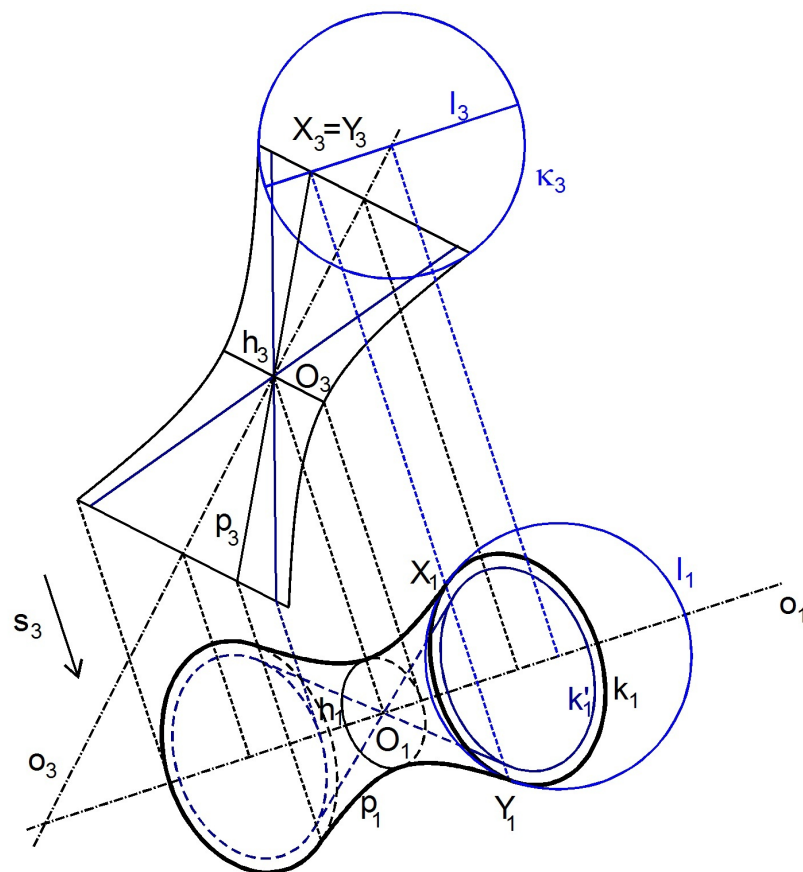
Sestrojíme půdorys hraničních kružnic a středu dvojdílného hyperboloidu. Střed hyperboloidu leží na ose, půdorysy kružnic hyperboloidu jsou elipsy. Hlavní osa každé takové elipsy leží na přímce kolmé k o_1 , její velikost je rovna průměru zobrazované kružnice

a vedlejší osa leží na o_1 a je určena půdorysem bodu kružnice ležícího v μ . Sestrojíme půdorys asymptotické kuželové plochy Ω . Známe její vrchol O , sestrojíme elipsu, která je půdorysem libovolné kružnice plochy Ω . Její obrysové přímky jsou pak tečny vedené z O_1 k této elipse. První průmět dvojdílného hyperboloidu je pak dán středem, vrcholy a asymptotami. Body, ve kterých se p_1 dotýká hraničních kružnic určíme kulovou metodou stejně jako v příkladě 2.7.1.

Nárys sestrojíme stejně jako půdorys. Druhý skutečný obrys je mez q vlastního stínu při osvětlení kolmém k nárysně, druhý zdánlivý obrys je nárys q_2 . Osou o proložíme čtvrtou průmětnu λ , sklopíme ji a ve sklopení sestrojíme meridián n ležící v rovině λ . Sklopené útvary označíme indexem 4. Stejně jako v půdoryse sestrojíme mez q vlastního stínu v osvětlení daném směrem kolmým k nárysně. Nárys je také možné sestrojit jako obálku nárysu kružnic plochy, kdy využijeme toho, že kružnice plochy leží v rovnoběžných rovinách a zobrazí se jako homotetické elipsy (příklad 1.5.2).

2.7.2 Obrys rotační kvadriky v kótovaném promítání

Příklad 2.7.3 V kótovaném promítání sestrojte průmět rotačního jednodílného hyperboloidu $\Phi(o, m)$, jehož osa je v obecné poloze vzhledem k průmětně.



Obr. 2.7.3

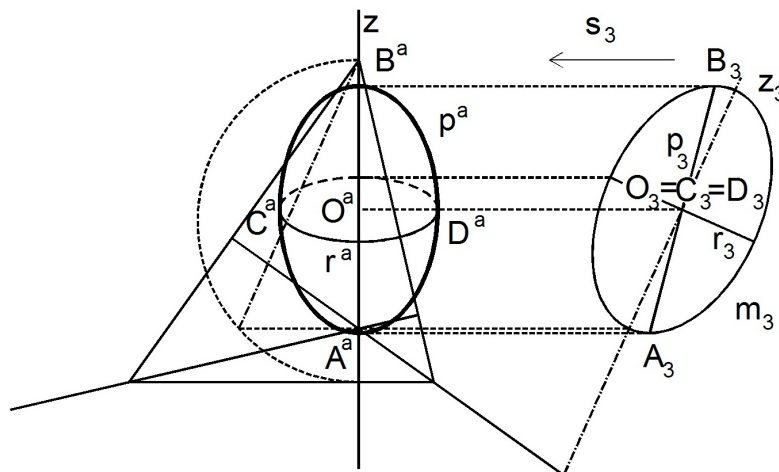
Rotační jednodílný hyperboloid je zadán osou a meridiánem m , který leží v rovině λ . Je zadán průmět osy a pomocná rovina rovina λ procházející osou o kolmo k průmětně, do ní pravouhle promítneme plochu a rovinu sklopíme. V rovině λ je sestrojen meridián m .

Průměty do roviny λ jsou značeny indexy 3. Konstrukce pravouhlého průmětu plochy Φ do průmětny je podobná jako v Mongeově projekci. První skutečný obrys p je mez vlastního stínu v osvětlení kolmém k průmětně, z polohy s_3 je zřejmé, že p je hyperbola. Určíme stejně jako v příkladě 2.7.2 průmět asymptotické kuželové plochy, který určí asymptoty hyperboly p_1 . Sestrojíme průmět h_1 hrdla h , kuželosečky h_1 a p_1 mají společné vrcholy. Hyperbola p_1 je zadána středem, asymptotami a vrcholy. Určíme ještě kulovou metodou body, ve kterých se dotýkají průměty hraničních kružnic hyperboly p_1 . Podél kružnice k vepíšeme jednodílnému hyperboloidu kulovou plochu κ a na ní určíme mez l vlastního stínu. l je hlavní kružnice plochy κ , jejím průmětem do roviny λ je úsečka a l_1 je kružnice. Společné body l a k jsou body X, Y , ve kterých se p a k dotýkají.

2.7.3 Obrys rotační kvadriky v pravouhlé axonometrii

Příklad 2.7.4 V pravouhlé axonometrii sestrojte průmět rotačního protáhlého elipsoidu $\Phi(z, m)$, jehož osa splyne s osou z .

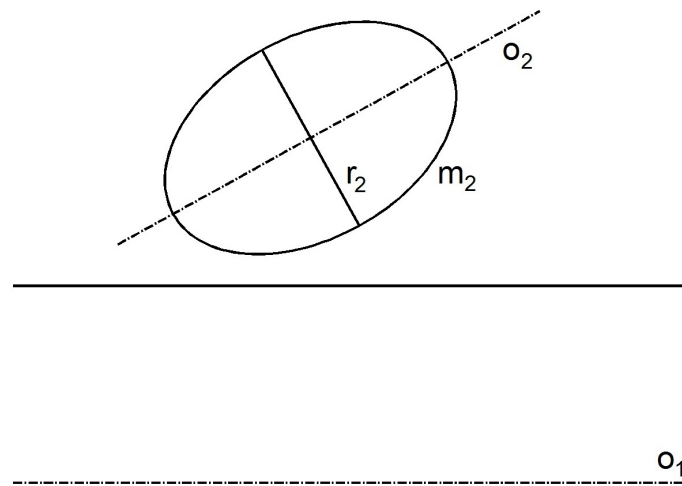
V promítací rovině λ osy z leží meridián m rotačního elipsoidu. Promítací rovinu sklopíme a ve směru promítání vysuneme, sklopené útvary označíme indexem 3. Mez p vlastního stínu při osvětlení ve směru promítání je elipsa, jejíž střed splyne se středem elipsoidu. Průmětem elipsy p do roviny λ je úsečka p_3 . Válcovou metodou určíme vrcholy A, B elipsy p . Jsou to body, ve kterých se meridiánu m dotýkají přímky směru osvětlení, tj. A_3, B_3 jsou body dotyku tečen elipsy m_3 rovnoběžných s s_3 , A_3B_3 je průměr elipsy m_3 . Axonometrické průměty bodů A, B leží na z . Vedlejší vrcholy C, D elipsy p leží na přímce procházející bodem O a kolmé k λ , jsou to společné body rovníku a skutečného obrysu. V bodech C^a, D^a se elipsy r^a a p^a dotýkají.



Obr. 2.7.4

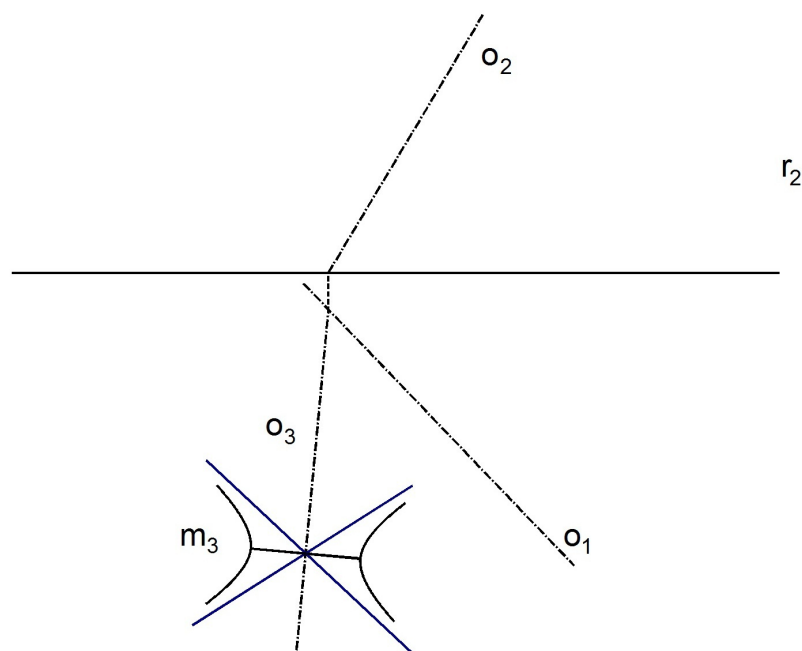


2.7.1 V Mongeově projekci sestrojte půdorys rotační kvadriky $\Phi(o, m)$, jejíž osa je rovnoběžná s ν .



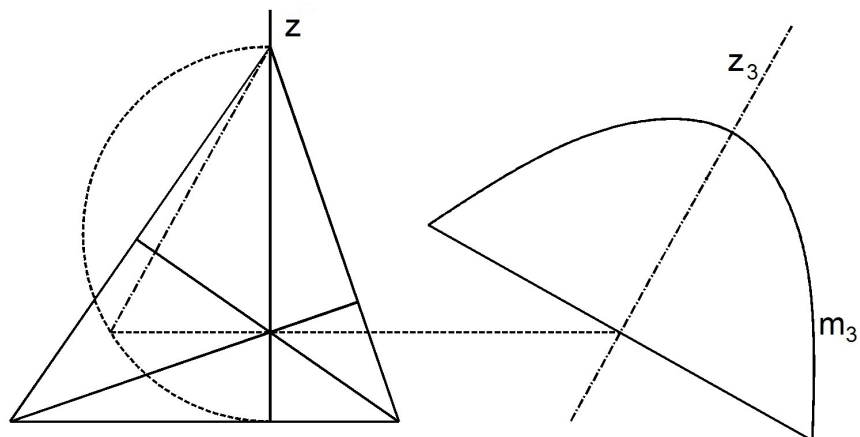
Obr. 2.7.5

2.7.2 Sestrojte průmět rotační kvadriky $\Phi(o, m)$ v Mongeově projekci.



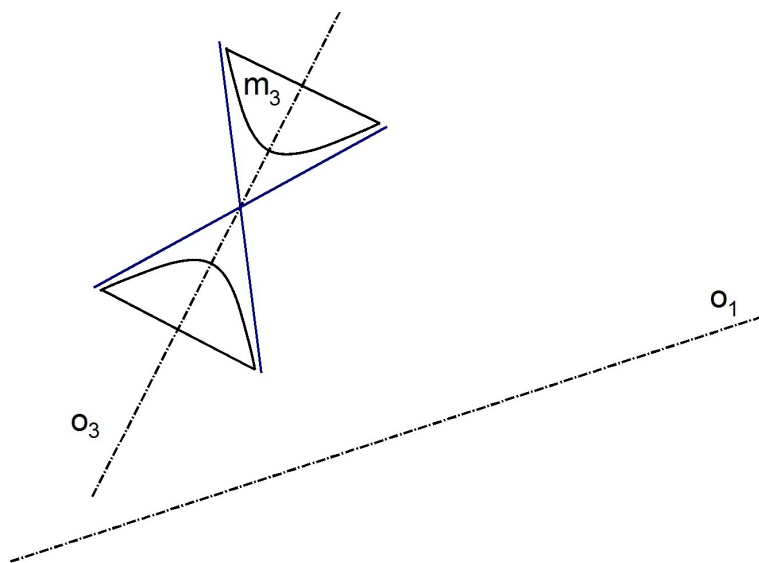
Obr. 2.7.6

2.7.3 Sestrojte průmět rotační kvadriky $\Phi(z, m)$ v ortogonální axonometrii.



Obr. 2.7.7

2.7.4 Sestrojte průmět rotační kvadriky $\Phi(o, m)$ v kótovaném promítání.



Obr. 2.7.8

Kapitola 3

Přibližné konstrukce na empirických křivkách

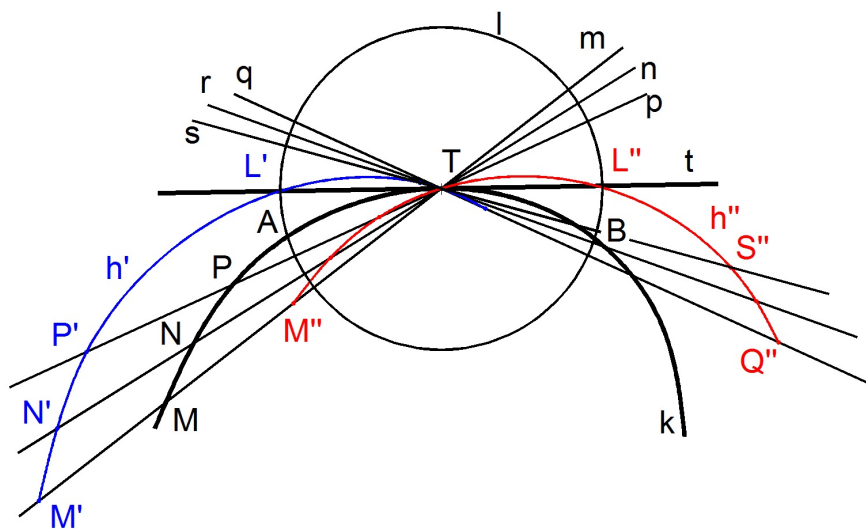


Některé křivky máme pouze dány empiricky, tj. neznáme jejich výtvarný zákon, rovnice apod., nevíme, jak bude křivka probíhat dál. Ukážeme si některé konstrukce na takových křivkách zadaných "od ruky."

3.1 Konstrukce tečny ke křivce v jejím bodě

Příklad 3.1.1 V regulárním bodě T dané křivky k sestrojte tečnu t .

Bodem T křivky k vedeme svazek přímek $T(m, n, p, \dots)$. Svazek protne pomocnou kružnicí $l = (T, r)$, jejíž poloměr volíme přiměřeně, tak aby vzdálenost bodů A, B v nichž kružnice l protne křivku k byla dostatečně velká k přesnému sestrojení přímky jimi určené. Určíme průsečíky M, N, P, \dots přímek svazku s křivkou k různé od bodu T . Na přímkách m sestrojíme body M', M'' tak, aby úsečky MM', MM'' měly délku r . Stejným způsobem získáme na přímkách n, p, \dots dvojice bodů N', N'', P', P'', \dots . Body M', N', P', \dots proložíme křivku h' , body M'', N'', P'', \dots křivku h'' . Křivky h', h'' se nazývají *konchoidy* křivky k . Průsečíky L', L'' křivek h, h' s pomocnou kružnicí l prochází hledaná tečna t křivky k .

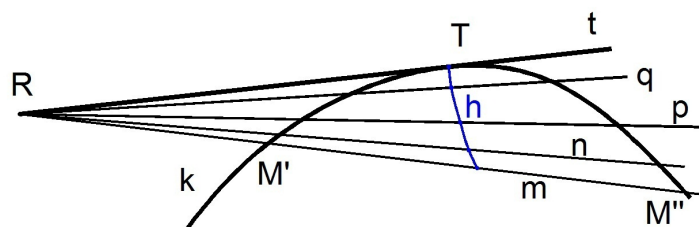


Obr. 3.1.1

3.2 Konstrukce tečny ke křivce z bodu neležícího na křivce

Příklad 3.2.1 Z daného bodu R neležícího na dané křivce k veďte tečnu t křivky k .

Bodem R vedeme svazek přímek $R(m, n, p, \dots)$ tak, aby křivka na přímkách svazku vytínala tětivy $M'M'', N'N'', P'P'', \dots$. Středů M, N, P, \dots těchto tětív tvoří pomocnou křivku h , která protíná danou křivku k bodě T dotyku hledané tečny t .



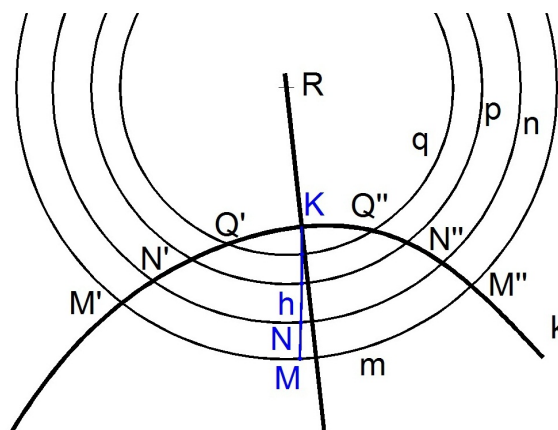
Obr. 3.2.1

Poznámka 3.2.1 Konstrukce je stejná i pro bod R^∞ , tj. sestavení tečny ke křivce rovnoběžné s daným směrem.

3.3 Konstrukce paty normály na křivku z bodu na ní neležícího

Příklad 3.3.1 Z daného bodu R neležícího na dané křivce k veďte normálu n ke křivce k .

Sestrojíme soustavu soustředných kružnic m, n, p, \dots se středem R o různých poloměrech, které protínají křivku k po řadě ve dvojicích bodů $M', M''; N', N''; P', P''; \dots$. Středů oblouků $M'M'', N'N'', P'P'', \dots$ určí křivku h , která protíná křivku k v hledané patě K normály n .



Obr. 3.3.1

Poznámka 3.3.1 Konstrukce lze provést i pro bod R^∞ , tj. sestavení paty normály křivky, která je rovnoběžná s daným směrem. Soustředné kružnice m, n, p, \dots pak přejdou ve svazek rovnoběžek, který je kolmý ke směru R^∞ .

Literatura

- [1] KADEŘÁVEK, J., KLÍMA, J., KOUNOVSKÝ, F.: *Deskriptivní geometrie II*, ČSAV Praha, 1954
- [2] MACHALA, F.: *Rotační plochy*, RUP Olomouc, 1992
- [3] URBAN, A.: *Deskriptivní geometrie II*, SNTL Praha, 1967
- [4] JUKL, M.: *Analytická geometrie kuželoseček a kvadrik*, VUP Olomouc, 2006
- [5] PISKA, R, MEDEK, V.: *Deskriptivní geometrie II*, SNTL Praha, 1966
- [6] HAVLÍČEK, K.: *Úvod do projektivní geometrie kuželoseček*, SNTL Praha, 1956
- [7] VOJTĚCH, J.: *Geometrie projektivní. Synthetické i analytické vyšetřování projektivních příbuzností a útvarů*, JČMF Praha, 1932
- [8] NOVÁKOVÁ, M.: *Rovinné křivky-jejich výtvarné zákony a vlastnosti*, diplomová práce, PřF UP Olomouc, 2003



kag.upol.cz/juklova/index.html