PLOCHY TECHNICKÉ PRAXE 2

Lenka JUKLOVÁ

Obsah

Kapitola 1

Kruhová šroubovice

1.1 Definice, základní vlastnosti

Šroubový pohyb je jistým zobecněním pohybu rotačního. Vzniká složením otáčení kolem osy o a posunutí ve směru osy o, přičemž oba pohyby jsou spojité a rovnoměrné. Jestliže se při pohybu po ose „dolů“ otáčíme ve směru hodinových ručiček nazveme pohyb *pravotočivý* (při klesání se otáčíme za pravou rukou), při otáčení proti směru hodinových ručiček se jedná o pohyb *levotočivý*. Známe-li ještě velikost v_0 posunutí při otočení o 1 radián, je šroubový pohyb jednoznačně určen a ke každému posunutí můžeme jednoznačně určit velikost otočení a naopak.

Číslo v_0 nazýváme *parametr šroubového pohybu*. Velikost posunutí a otočení jsou vázány vztahem $z_M = \omega_M \cdot v_0$, kde z_M je posunutí a ω_M otočení daného bodu M. Šroubový pohyb je jednoznačně určen osou, orientací a parametrem. Posunutí $v = 2\pi v_0$, které odpovídá otočení o 2π nazýváme *výška závitu*.

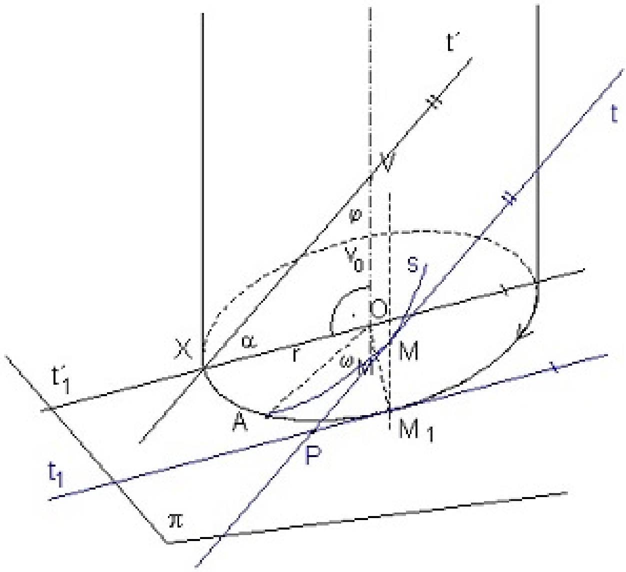
Je-li dán šroubový pohyb, trajektorie bodu A neležícího na ose se nazývá *(kruhová) šroubovice*. Vzdálenost r bodu A od osy o šroubového pohybu se nazývá *poloměr šroubovice*, část šroubovice odpovídající výšce závitu se nazývá *závit šroubovice* a část šroubovice odpovídající parametru šroubového pohybu se nazývá *redukovaná výška závitu*.

Tečny šroubovice mají konstantní odchylku φ od osy o šroubového pohybu a tedy i konstantní odchylku $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$ od roviny kolmé k ose o. Číslo $\operatorname{tg} \varphi$ nazýváme *spád šroubovice*, šroubovice je křivka konstantního spádu a také geodetická křivka na rotační válcové ploše.

Vedeme-li libovolným bodem V osy o přímky rovnoběžné s tečnami šroubovice, vytvoří rotační kuželovou plochu Ω, kterou nazýváme *směrová kuželová plocha*. Rovina π kolmá k ose ležící ve vzdálenosti v_0 od vrcholu V ve směru klesání protne směrovou kuželovou plochu Ω v kružnici $k = (O, r)$, kde r je poloměr šroubovice. Pravoúhlý trojúhelník VOX, kde X je bod kružnice k[1] nazýváme *základní trojúhelník šroubovice*. Jeho odvěsna je rovnoběžná s některou tečnou šroubovice.

[1]Jeho odvěsny mají po řadě velikost v_0 a r.

Nechť M je bod šroubovice a M_1 jeho pravoúhlý průmět do roviny π. V bodě M sestrojíme tečnu t šroubovice a určíme její průsečík P s rovinou π. Trojúhelník PMM_1 je podobný základnímu trojúhelníku a proto platí $|PM_1| = r\omega_M$, což je velikost oblouku AM. Body P tedy vytvoří *evolventu* kružnice k.



Obr. 1.1.1

Příklad 1.1.1 V Mongeově projekci sestrojte jeden závit levotočivé šroubovice l, která je dána osou o, bodem A a redukovanou výškou závitu v_0. V bodě M této šroubovice určete doprovodný Frenetův repér.

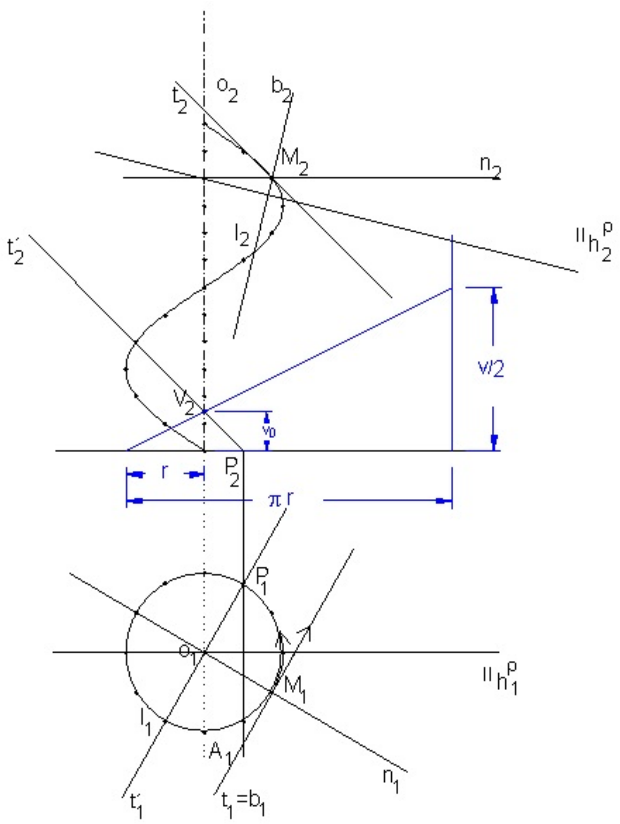
Řešení: Osa o šroubovice l je kolmá k půdorysně, bod A leží v půdorysně. Křivku sestrojíme bodově, určíme dvanáct jejích bodů, které odpovídají otočení o $30°$. Půdorysem šroubovice je kružnice $l_1 = (o_1, |o_1A_1|)$. Určíme výšku v závitu šroubovice. Platí $v = 2\pi v_0$, odtud $\frac{v}{2\pi} = v_0$. Sestrojíme-li tedy trojúhelník podobný základnímu trojúhelníku, jehož jedna odvěsna bude mít délku πr, pak velikost druhé odvěsny bude rovna polovině výšky závitu. Rozdělením této úsečky na šestiny získáme posunutí, které odpovídá otočení o $30°$. Odvěsnu délky πr získáme například Kochaňského rektifikací kružnice l_1. Sestrojíme půdorysy i nárysy dvanácti bodů šroubovice otočených o $30°$ a posunutých o $\frac{v}{12}$. Stoupání šroubovice je proti šipce.

Zvolíme libovolný bod M šroubovice l a v něm sestrojíme tečnu t, hlavní normálu n a binormálu b.

Sestrojíme směrovou kuželovou plochu Ω, její vrchol V volíme ve výšce v_0 nad půdorysnou. Povrchové přímky této kuželové plochy jsou rovnoběžné s tečnami šroubovice l, půdorysna kuželovou plochu protíná v kružnici l_1. Půdorysem tečny t v bodě M je tečna t_1 kružnice l_1. Známe orientaci šroubovice a určíme tak i klesání tečny.[2] Vrcholem V směrové

[2]Šipka z bodu dotyku musí vycházet stejným směrem.

kuželové plochy vedeme přímku t' rovnoběžnou s přímkou t. Půdorys t'_1 protíná kružnici l_1 v půdoryse půdorysného stopníku P' přímky t'. Pomocí něj určíme nárys t'_1 přímky t'. Nárys t_2 tečny t je pak rovnoběžný s t'_2 a prochází M_2. Hlavní normála n šroubovice l leží v normálové rovině a je kolmá na tečnu i na osu šroubového pohybu. Odtud vyplývá i její konstrukce. Nárys n_2 je rovnoběžný se základnicí a hlavní normála je tedy hlavní přímkou první osnovy každé roviny, která přímku n obsahuje. Půdorys n_1 je pak kolmý na t_1. Binormála b je kolmá na oskulační rovinu určenou tečnou t a hlavní normálou n. Půdorys b_1 je kolmý na n_1, což znamená, že splývá s t_1.[3] Nárys b_2 určíme pomocí libovolné hlavní přímky druhé osnovy oskulační roviny. Zvolíme libovolnou přímku druhé osnovy oskulační roviny, sestrojíme její nárys a b_2 je kolmice k nárysu této přímky.



Obr. 1.1.2

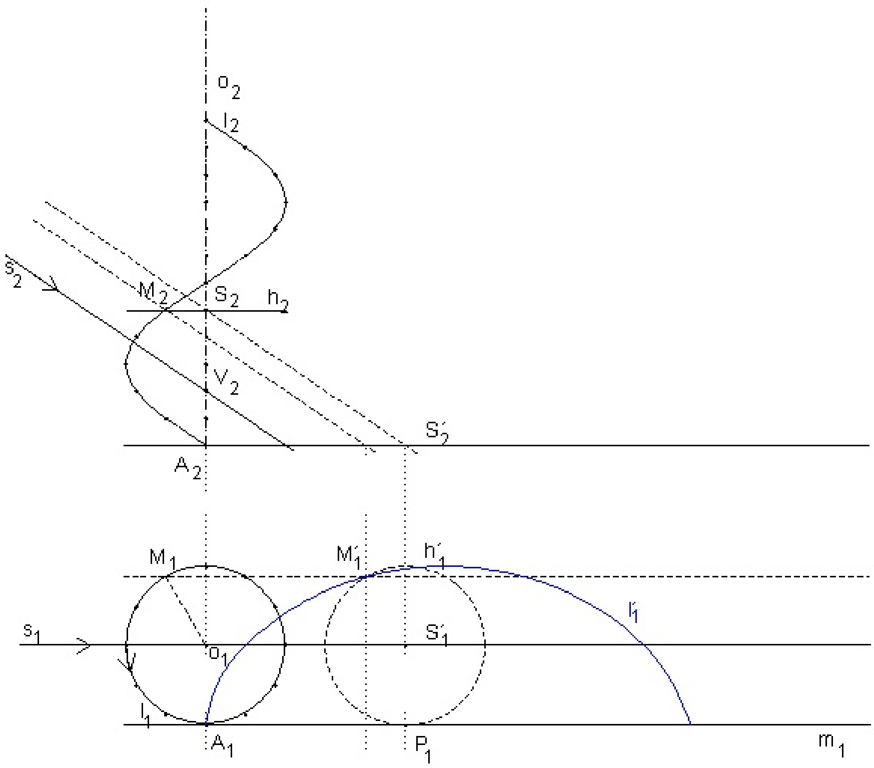
Poznámka 1.1.1 V předchozím příkladě jsme měli zadáno v_0 a konstruovali jsme výšku závitu v. Protože 1 radián je přibližně $60°$ nebudeme v dalších příkladech sestrojovat v, ale položíme $v_0 = \frac{v}{6}$.

[3]Rektifikační rovina je tedy kolmá k π.

1.2 Rovnoběžné osvětlení šroubovice

Nejprve sestrojíme stín l' šroubovice l do roviny π kolmé k ose o. Označíme α odchylku povrchových přímek směrové kuželové plochy od π[4] a φ odchylku směru osvětlení od π. Budeme určovat vržený stín šroubovice l do roviny π pro tři případy a zvolíme směr s osvětlení rovnoběžně s nárysnou a procházející V.

1. $\alpha = \varphi$
   Zvolíme libovolný bod M šroubovice l. Tento bod leží rovněž na kružnici h rotační válcové plochy, na níž leží i šroubovice l. Sestrojíme vržený stín h' kružnice h a bodu M do π. Nechť m_1 je tečna kružnice l_1 v bodě A_1 a P_1 její bod dotyku s kružnicí h'_1. Platí $|A_1P_1| = |O_1S'_1| = |A_2S'_2|$ a základní trojúhelník je podobný trojúhelníku $S_2A_2S'_2$. Odtud $\frac{|A_2S'_2|}{|A_2S_2|} = \frac{r}{v_0}$. Bod M jsme získali přešroubováním bodu A, označme úhel otočení ω_M, velikost posunutí $z_M = |A_2S_2|$, ke každému otočení určíme jednoznačně posunutí ze vztahu $z_M = \omega_M v_0$, proto $\frac{|A_2S'_2|}{?_M v_0} = \frac{r}{v_0}$. Z předchozích vztahů dostáváme $|A_1P_1| = r\omega_M$, což je rovno velikosti oblouku $P_1M'_1$. Body M'_1 tedy vyplní prostou cykloidu.



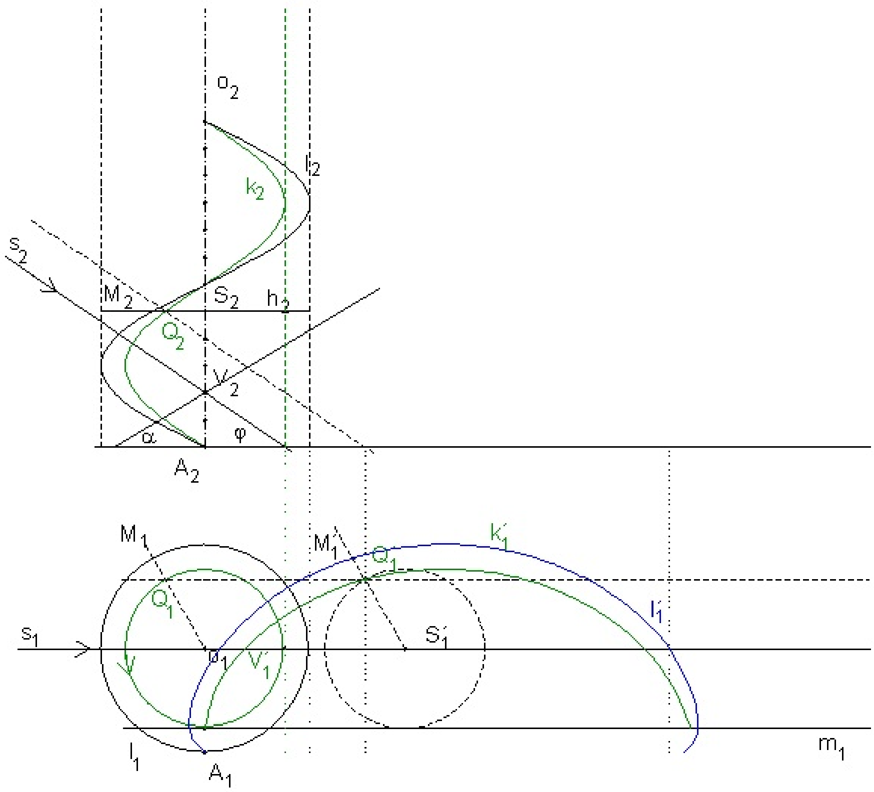
Obr. 1.2.1

[4] tg α je spád šroubovice.

Odvodili jsme větu:

Věta 1.2.1 *Vrženým stínem šroubovice do roviny π kolmé k ose šroubovice l je prostá cykloida, jestliže směr osvětlení má stejnou odchylku od roviny π jako tečny šroubovice l.*

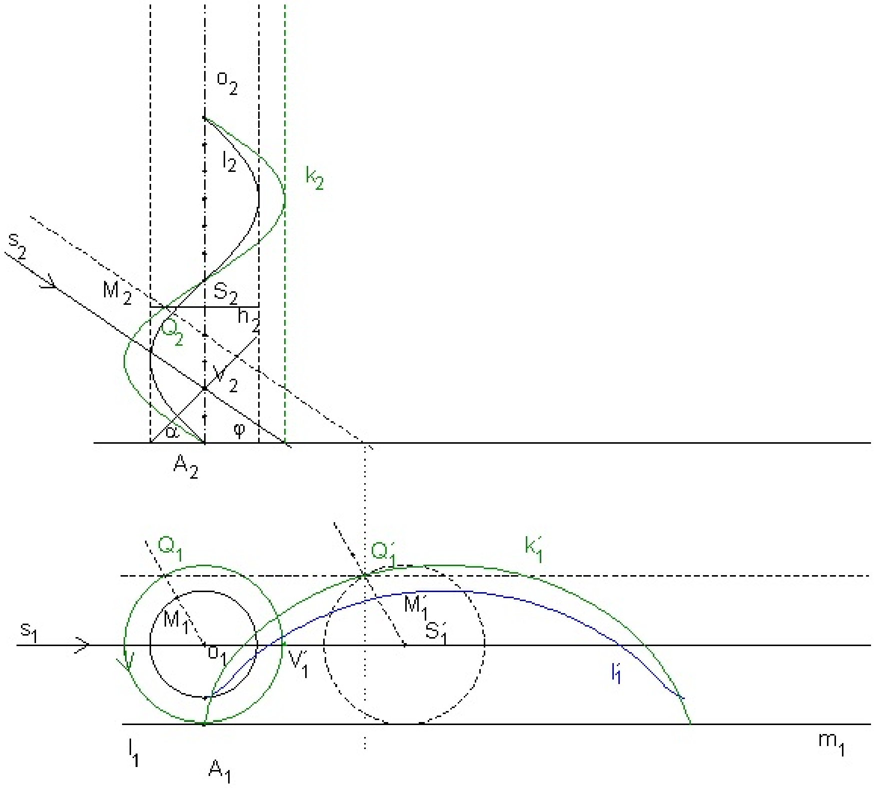
2. $\alpha < \varphi < \frac{\pi}{2}$
   Uvažujme šroubovici k spádu $\operatorname{tg}\alpha$ vytvořenou stejným šroubovým pohybem. Hledáme vržený stín bodu M dané šroubovice l do π. Nejprve sestrojíme bod Q ležící na šroubovici k a ve stejné rovině jako kružnice h bodu M. Sestrojíme vržený stín Q' bodu Q do π. Víme[5], že Q' leží na prosté cykloidě k'. Bod M_1' leží na polopřímce $\overrightarrow{S_1'Q_1'}$, vně úsečky $S_1'Q_1'$, body M_1' vyplní prodlouženou cykloidu.



Obr. 1.2.2

3. $0 < \varphi < \alpha$
   Zvolíme stejný postup jako v předchozím případě, bod M_1' leží teď uvnitř úsečky $S_1'Q_1'$ a vrženým stínem do π je zkrácená cykloida.

[5] Věta 1.2.1.



Obr. 1.2.3

Uvedené poznatky shrneme do jediné věty:

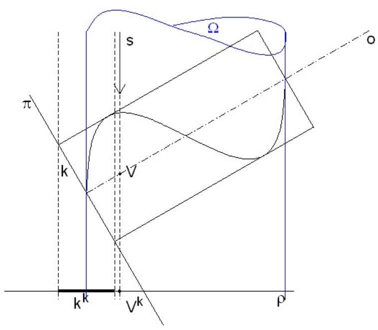
Věta 1.2.2 *Vrženým stínem šroubovice do roviny π kolmé k ose šroubovice l je prostá, resp. prodloužená, resp. zkrácená, cykloida, jestliže směr osvětlení má stejnou odchylku, resp. větší odchylku, resp. menší odchylku od roviny π jako tečny šroubovice l.*

O tvaru vrženého stínu do roviny π můžeme také rozhodnout podle polohy vrženého stínu V' vrcholu směrové kuželové plochy do π. Křivka l' je prostá (resp. prodloužená, resp. zkrácená) cykloida, jestliže V_1' leží na (resp. uvnitř, resp. vně) kružnice l_1. Tohoto využijeme při konstrukci stínu šroubovice vrženého do obecné roviny a také pro konstrukci šroubovice s osou v obecné poloze či v jiných projekcích.

Mějme dánu šroubovici l a směr osvětlení s a rovinu ρ, do níž osvětlujeme. Sestrojujeme-li vržený stín šroubovice, proložíme každým bodem šroubovice světelný paprsek. Ty nám vyplní světelnou válcovou plochu Ω s řídící křivkou l. Vržený stín do roviny ρ je pak řezem plochy Ω touto rovinou. Odvodili jsme si, že řez rovinou π kolmou k ose je prostá, prodloužená či zkrácená cykloida vzhledem k poloze bodu V' a kružnice k.[6] Vedeme-li řez světelné válcové plochy Ω obecnou rovinou ρ, víme, že řezy rovinou π a ρ si odpovídají

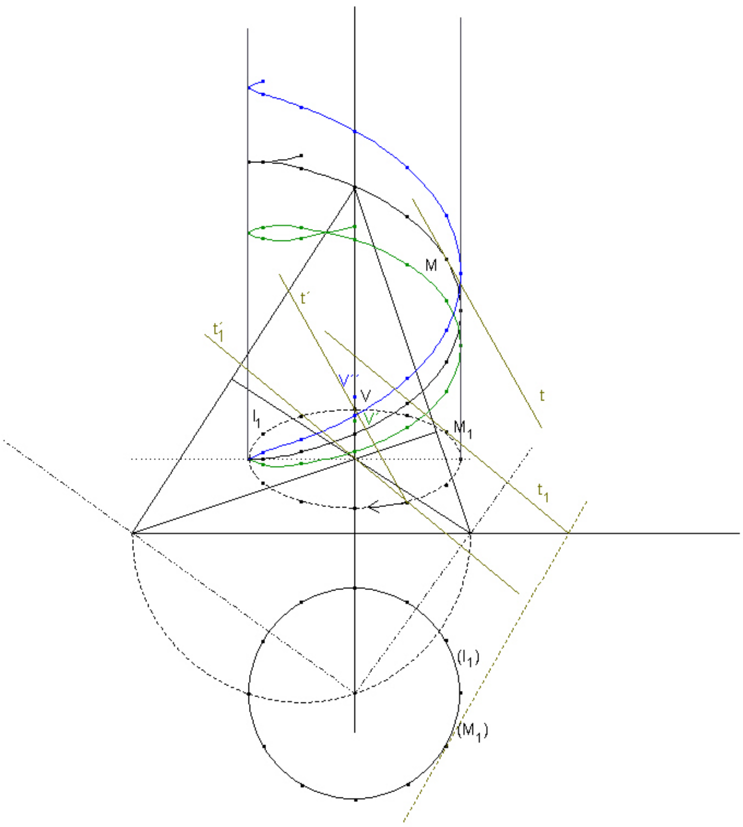
[6] Kružnice k je řez rotační válcové plochy, na které leží šroubovice l, rovinou π.

v afinitě, jejíž směr je směr osvětlení. Vrženým stínem šroubovice l do obecné roviny ρ je tedy křivka afinní cykloidě, jejíž tvar závisí na poloze bodu V_k vzhledem ke křivce k_k.[7]



Obr. 1.2.4

Stejný postup využíváme pro konstrukci šroubovice s osou v obecné poloze v Mongeově promítání a při konstrukcích šroubovice v jiných projekcích. Směr osvětlení je shodný se směrem promítání, sestrojujeme vržený stín do průmětny.



Obr. 1.2.5

[7] V_k a k_k jsou po řadě afinní útvary k V', k'.

Na obrázku jsou sestrojené šroubovice v axonometrii pro různou redukovanou výšku závitu, jsou sestrojeny bodově, opět přibližně pokládáme $v_0 = \frac{v}{6}$, tj. pro otočení o $30°$ dostáváme posunutí rovno $_0$. Pro jeden bod je sestrojen tečna s využitím směrové kuželové plochy.

V Mongeově projekci zobrazte jeden závit šroubovice procházející body A, B, je-li dána její osa o (procházející bodem $[0; 55; 0]$ kolmo k π). ($A = [-25; 35; 40], B = [-10; y_B > y_A; 0]$).

V Mongeově projekci zobrazte jeden závit šroubovice, je-li dána její osa o (procházející bodem $[0; 55; 0]$ kolmo k π) a tečna t=AB. ($A = [70; 10; 0], B = [0; 95; 60]$).

Pravotočivá šroubovice je v Mongeově projekci dána osou o (procházející počátkem kolmo k π), redukovanou výškou závitu $v_0 = 13$ a bodem $A = [-15; 75; 0]$. Určete její průsečíky s rovinou ρ

- $\rho = (\infty; \infty; 25)$;
- $\rho = (70; 55; \infty)$;
- $\rho = (35; \infty; 50)$;
- $\rho = (80; 95; 60)$.

Pravotočivá šroubovice je v Mongeově projekci dána osou o (procházející počátkem kolmo k π), výškou závitu $v = 100$ a prochází bodem $A = [-20; 75; 0]$. Sestrojte její tečny rovnoběžné s rovinou $\rho = (-75; 110; 60)$.

Body $A = [-25; 55; 50], B = [20; y_B > y_A; 0]$ leží na rotační válcové ploše o ose o (procházející počátkem kolmo k π). Spojte je na této rotační válcové ploše nejkratším obloukem. Úlohu řešte v Mongeově projekci, ortogonální axonometrii zadané axonometrickým trojúhelníkem XYZ ($XY| = 110, |XZ| = 120, |YZ| = 100)|$) a kosoúhlém promítání ($\omega = 150°, q = 2/3$).

Sestrojte v Mongeově promítání levotočivou šroubovici určenou osou o (procházející počátkem kolmo k π) a výškou závitu $v = 100$ tak, aby ji přímka $p = AB$ protínala ve dvou bodech. ($A = [0; 55; 35], B = [-40; 10; 0]$)

V Mongeově projekci zobrazte pravotočivou šroubovici o ose o (procházející počátkem kolmo k π), je-li dána její oskulační rovina $\rho = (-75; 110; 60)$ a

- redukovaná výška závitu $v_0 = 15$
- bod $A = [20; 70; ?]$, přičemž bod A leží na šroubovici a současně v rovině ρ.

V ortogonální axonometrii určené axonometrickým trojúhelníkem XYZ zobrazte levotočivé šroubovice dané osou $o = z$, bodem $A = [30; 0; 0]$ a výškou závitu $v = 75$ a $v = 120$. V libovolném bodě na každé šroubovici sestrojte tečnu. $(XY| = 110, |XZ| = 120, |YZ| = 100)|$.

V kosoúhlém promítání ($\omega = 150°, q = 2/3$) zobrazte pravotočivou šroubovici o ose $o = z$, redukované výšce závitu $v_0 = 15$, která prochází bodem $A = [0; 30; 0]$. Sestrojte vržený stín na půdorysnu, je-li směr osvětlení dán přímkou $p = MN(M = [0; 0; 50], N = [55; 0; 0])$.

Kapitola 2

Rozvinutelné plochy

Rozvinutelná plocha je každá přímková plocha, pro kterou existuje izometrické zobrazení do rov iny, tj. lze ji rozvinout do roviny. Dá se ukázat, že každá rozvinutelná plocha patří jednomu ze tří typů – válcová plocha s řídící křivkou k, kuželová plocha s vrcholem V a řídící křivkou k nebo plocha tečen prostorové křivky k.

Je-li plocha Φ plochou tečen prostorové křivky k, pak oskulační rovina v regulárním bodě křivky k je tečnou rovinou plochy Φ. Rovina, která není tečná, protíná Φ v křivce, která má na k bod vratu, k se proto nazývá hrana vratu. Tečná rovina se dotýká plochy podél celé přímky, množina všech tečných rovin je proto závislá jen na jednom parametru a tvoří jednoparametrickou soustavu rovin. Plocha Φ je tedy obálkou tečných rovin. Přímky rozvinutelné plochy jsou (jedinými) asymptotickým křivkami na ploše, a protože tečná rovina se dotýká Φ podél celé přímky, jsou přímky plochy přímky *torzální*.

Pro konstrukci je někdy výhodnější zadat plochu jinak než jako plochu tečen prostorové křivky. Množina tečných rovin prostorové křivky je závislá na dvou parametrech, množina tečných rovin dotýkajících se současně dvou křivek je potom závislá na jednom parametru, tvoří jednoparametrickou soustavu rovin a tedy obaluje rozvinutelnou plochu Φ. Nechť jsou dány dvě křivky ${}^1k$, ${}^2k$. Z bodu P ležícího na křivce ${}^1k$ promítneme křivku ${}^2k$ kuželovou plochou Ω. Tečná rovina plochy Ω procházející tečnou ${}^1t$ křivky ${}^1k$ v bodě P se dotýká Ω podél přímky p, je také tečnou rovinou rozvinutelné plochy Φ a dotýká se jí podél přímky p. Jestliže křivky ${}^1k$, ${}^2k$ jsou rovinné, daná konstrukce se zjednoduší. V bodě ${}^1T$ křivky ${}^1k$ sestrojíme tečnu ${}^1t$, určíme její průsečík X s průsečnicí rovin křivek (pracujeme v rozšířeném eukleidovském prostoru) a bodem X vedeme tečnu ${}^2t$ ke křivce ${}^2k$, která se křivky ${}^2k$ dotýká v bodě ${}^2T$. Přímka $p =^1 T^2T$ je pak přímkou rozvinutelné plochy a rovina $\tau = ({}^1t,^2 t)$ tečnou rovinou. Takto vytvořené plochy nazýváme *přechodové plochy*.

Je-li např. ${}^2k$ nevlastní,[1] konstrukce bude následující. Zvolíme bod P na křivce ${}^1k$, v něm sestrojíme tečnu ${}^1t$ a vedeme s ní rovnoběžnou přímku t' vrcholem V řídící kuželové plochy Ω. Sestrojíme tečnou rovinu plochy Ω, ta se dotýká Ω podél přímky p'. Přímka p rovnoběžná s přímkou p' a procházející bodem P je přímkou rozvinutelné plochy. Protože řídící kuželová

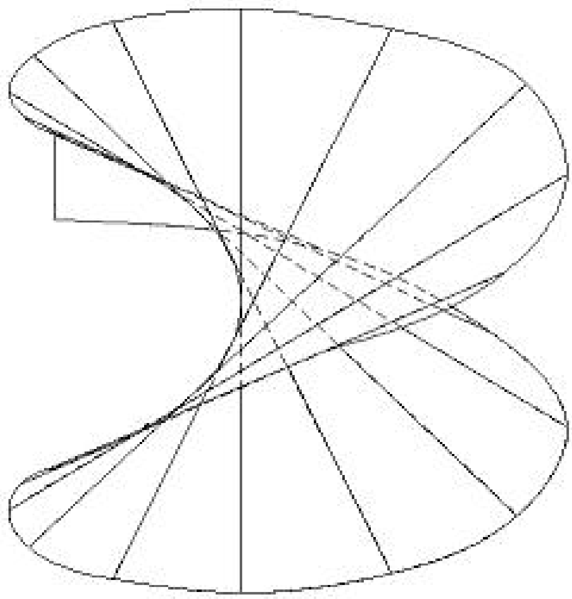
[1] Je zadaná rotační kuželovou plochou, tzv. řídící kuželovou plochou, o vrcholu V a ose o.

plocha je rotační, mají její povrchové přímky konstantní odchylku od roviny kolmé k ose a tedy i všechny přímky rozvinutelné plochy mají stejnou odchylku od této roviny. Takto vytvořené plochy se pak nazývají *plochy konstantního spádu*.

2.1 Rozvinutelná šroubová plocha

Rozvinutelná šroubová plocha Φ je plochou tečen šroubovice h, která je její *hranou vratu*.[2] Tečny šroubovice svírají konstantní úhel s rovinou kolmou k ose šroubovice, proto je Φ plocha konstantního spádu. Rovina kolmá k ose protíná tečny šroubovice h v kruhové evolventě, přímky rovnoběžné s tečnami šroubovice h vytvoří směrovou kuželovou plochu Ω. Můžeme tedy plochu Φ dostat také jako plochu konstantního spádu nad kruhovou evolventou s řídící kuželovou plochou šroubovice h. Další možná definice rozvinutelné šroubové plochy je užitím šroubového pohybu. Šroubovému pohybu můžeme podřídit evolventu, rovinu různoběžnou s osou o (ne kolmou k ose šroubového pohybu) nebo tečnu šroubovice.

Závitem plochy nazveme množinu tečen jednoho závitu šroubovice h. Plocha má nekonečně mnoho závitů, které se vzájemně pronikají. Patří-li bod D dvěma závitům plochy, prochází jím dvě přímky plochy a je *dvojnásobným bodem plochy*.

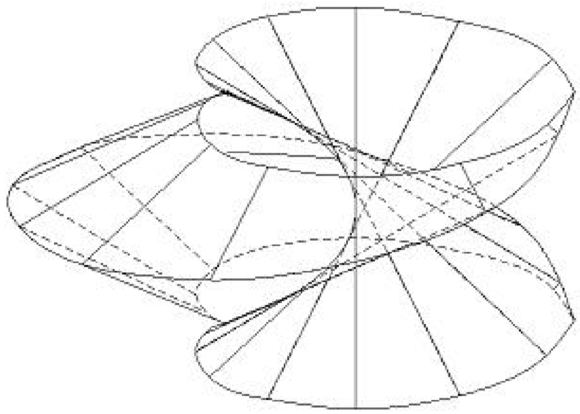


Obr. 2.1.1

Šroubovým pohybem vytvoří *dvojnásobnou šroubovici* plochy, která má tutéž orientaci a tutéž výšku závitu jako hrana vratu. Na ploše leží nekonečně mnoho dvojnásobných šroubovic. Na obrázku 3.0.4 je v axonometrii zobrazen jeden závit rozvinutelné šroubové plochy omezené dvěma rovnoběžnými rovinami, které plochu protínají v kruhových evolventách.

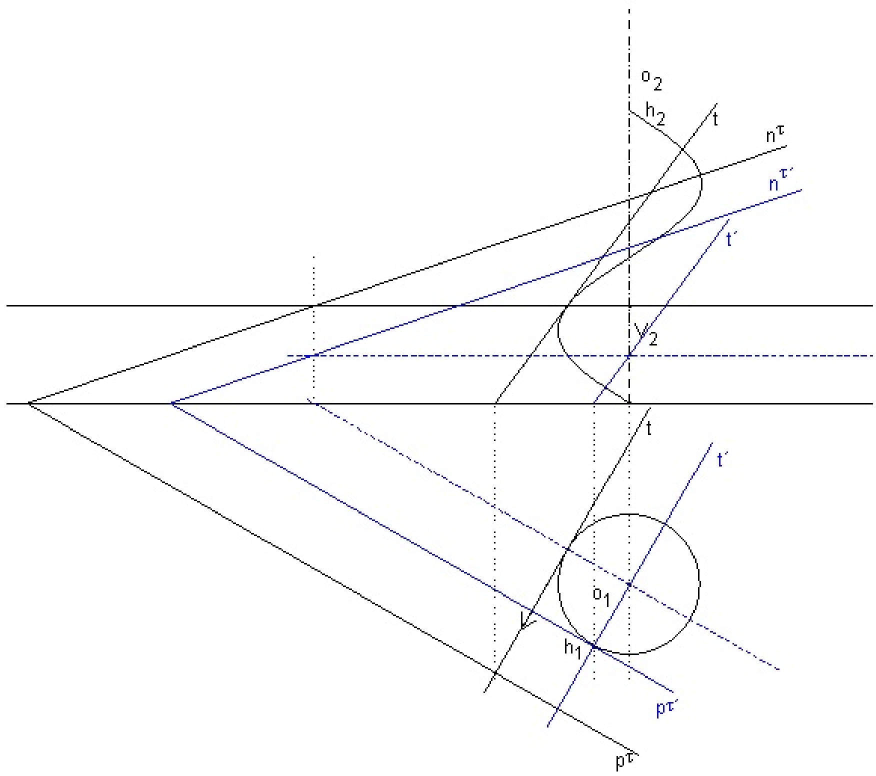
[2]Plocha Φ, která je plochou tečen prostorové křivky k je rovinutelná a křivka k je její hranou vratu – řezy plochy Φ rovinami mají na křivce k body vratu.

Obrázek 3.1.1 zobrazuje plochu rovněž v axonometrii, tentokrát omezenou dvojnásobnou šroubovicí a dvěma rovnoběžnými rovinami.



Obr. 2.1.2

Příklad 2.1.1 Konstrukce hrany vratu.
V Mongeově projekci je dán levotočivý šroubový pohyb osou o kolmou k půdorysně a v_0. Určete hranu vratu h rozvinutelné šroubové plochy Φ, kterou při daném šroubovém pohybu obalí rovina τ.



Obr. 2.1.3

Řešení: Rovina τ je oskulační rovinou křivky h, rovina τ' rovnoběžná s τ a jdoucí bodem V se dotýká směrové kuželové plochy Ω podél přímky t'. Ω protne půdorysnu v půdoryse hrany vratu. Rovina τ se dotýká plochy Φ podél přímky t rovnoběžné s t'. Půdorys t_1 přímky t se dotýká půdorysu h_1 hrany vratu, musíme dbát na to, aby h i t měly stejné klesání (obr. 3.1.2)

2.2 Řez rozvinutelné šroubové plochy

Pravotočivá rozvinutelná šroubová plocha je zadána v Mongeově projekci osou o kolmou k půdorysně a redukovanou výškou závitu v_0, plocha je omezena rovnoběžnými rovinami π, π' (vzdálenost rovin π, π' je rovna výšce jednoho závitu). Řez g rovinou ρ sestrojujeme bodově jako množinu průsečíků přímek plochy s rovinou řezu.

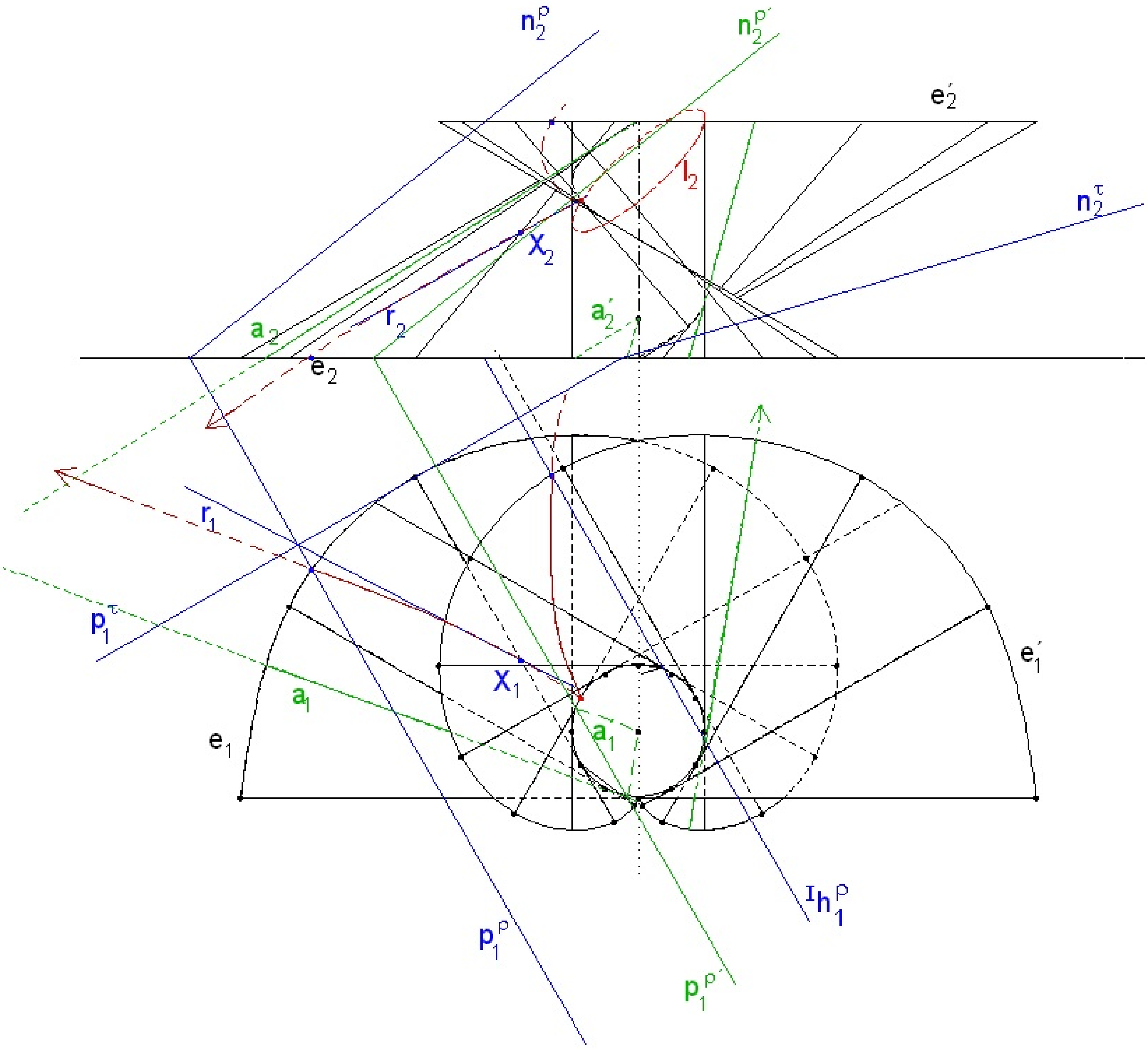
1. Konstrukce obecného bodu řezu.
   Zvolíme přímku q plochy a sestrojíme tečnou rovinu τ podél této přímky. Rovina τ je určena přímkou q a například tečnou evolventy e procházející půdorysným stopníkem přímky q. Evolventa e leží v půdorysně, proto je její tečna půdorysnou stopu roviny τ. Sestrojíme průsečnici r rovin τ a ρ. Společný bod X přímek r a q je obecný bod řezu, přímka r je *tečnou křivky* g řezu v bodě X.

2. Konstrukce bodů řezu na evolventách e, e'.
   Evolventy e, e' leží v rovnoběžných rovinách π a π', rovina π protne rovinu ρ v půdorysné stopě roviny ρ a rovina π' v hlavní přímce první osnovy. Na evolventě e patří řezu průsečíky s půdorysnou stopou roviny ρ, na evolventě e' jsou to průsečíky s hlavní přímkou první osnovy roviny ρ ležící v rovině π'.

3. Konstrukce bodů řezu na hraně vratu.
   Hrana h vratu leží na rotační válcové ploše Ω''. Sestrojíme řez plochy Ω' rovinou ρ. Řezem je elipsa l, společné body elipsy l a šroubovice h patří řezu g. Tyto body jsou body vratu křivky g řezu.

4. Konstrukce dvojnásobných bodů.
   Pokud je plocha Φ omezená dvojnásobnou šroubovicí, konstrukce dvojnásobných bodů je stejná, jako konstrukce bodů na hraně vratu.

5. Konstrukce asymptot křivky řezu.
   Asymptoty jsou tečny v nevlastních bodech řezu. Z konstrukce obecného bodu víme, že tečna řezu je průsečnice roviny řezu s tečnou rovinou a bod řezu je průsečík přímky plochy a roviny řezu. Tzn. hledáme přímku plochy, která je rovnoběžná s rovinou ρ. Ta protne rovinu ρ v nevlastním bodě a tečná rovina α podél této přímky protne rovinu ρ v asymptotě řezu. Sestrojíme tedy rovinu ρ' rovnoběžnou s rovinou ρ a procházející vrcholem V směrové kuželové plochy Ω. Řez směrové kuželové plochy Ω rovinu ρ' určí počet asymptot řezu. Pokud ρ' protne Ω aspoň v jedné přímce a', asymptota existuje a je to přímka a plochy, rovnoběžná s přímkou a'. Stačí tedy sestrojit přímku a plochy Φ rovnoběžnou s a'



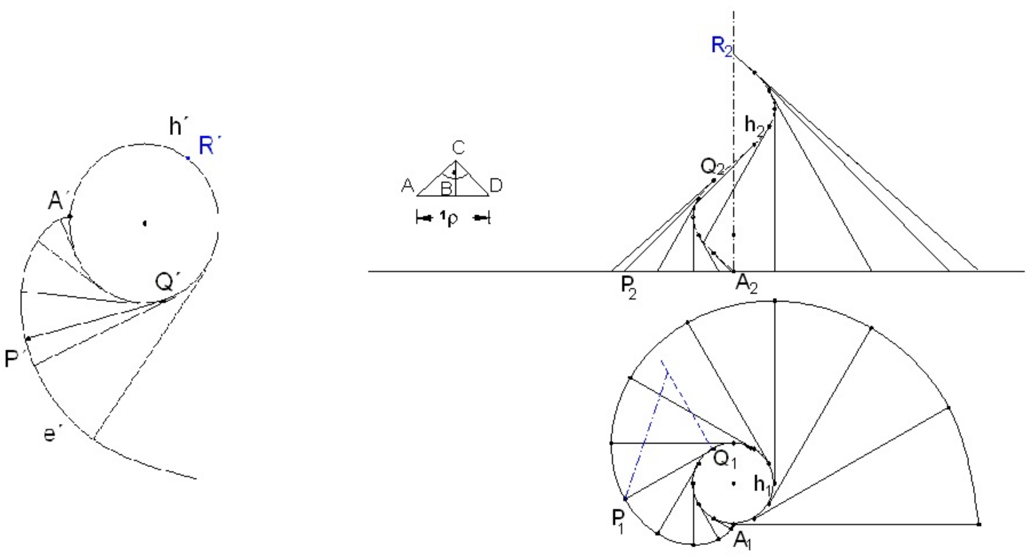
Obr. 2.2.1

2.3 Komplanace rozvinutelné šroubové plochy

Mějme dánu rozvinutelnou šroubovou plochu levotočivou šroubovicí h procházející bodem A ležícím v půdorysně. Víme, že šroubovice je prostorová křivka konstantní křivosti. Chceme-li rozvinout plochu do roviny, hledáme izometrické zobrazení plochy do roviny a tedy i každá křivka plochy se zobrazí na rovinnou křivku tímto izometrickým zobrazením. To znamená, že hrana h vratu se rozvine do rovinné křivky konstantní křivosti, tj. do kružnice h', jejíž křivost je stejná jako křivost šroubovice h. Protože se zachovává incidence, tečny šroubovice h se rozvinou do tečen kružnice h'. Poloměr kružnice h' získáme ze základního trojúhelníku. Sestrojíme základní trojúhelník šroubovice h.[3] Označme např. $r = |AB|$, $v_0 = |BC|$. Z

[3] Odvěsny mají délky r a v_0.

vrcholu C trojúhelníku ABC sestrojíme kolmici k přeponě, ta protne přímku AB v bodě D. Z Eukleidovy věty o odvěsně získáme velikost úsečky AD, $|AD| = \frac{r^2+v_0^2}{r}$, což je převrácená hodnota křivosti šroubovice,[4] tj. velikost úsečky AD je rovna poloměru ${}^1\rho$ křivosti šroubovice h a tedy i poloměru kružnice h'. Nechť Q je bod šroubovice h, pak oblouk AQ na kružnici h se musí rozvinout do stejně velkého oblouku $A'Q'$ kružnice h'. Označme q tečnu šroubovice h v bodě Q a P její půdorysný stopník a Q_1 pravoúhlý průmět bodu Q do půdorysny. Trojúhelník QQ_1P je podobný základnímu trojúhelníku, odtud $|PQ| =^1 \rho$, tj. $|PQ| = |P'Q'| =^1 \rho$, což je také velikost oblouku $A'Q'$ kružnice h', takže Q' leží na evolventě e' kružnice h' a evolventa e přejde rozvinutím do evolventy e'.[5] Jeden závit šroubovice se rozvine jen do části kružnice h'.



Obr. 2.3.1

2.4 Rovnoběžné osvětlení plochy tečen šroubovice

Rovinutelná šroubová plocha Φ je určena šroubovicí h, rovnoběžné osvětlení je určeno přímkou s. Sestrojíme mez vlastního stínu směrové kuželové plochy Ω.[6] Existuje -li mez vlastního stínu plochy Ω a je tvořena např. přímkami a', b', pak přímky a, b rozvinutelné šroubové plochy Φ, které jsou rovnoběžné s přímkami a', b' tvoří mez vlastního stínu plochy Φ. V závislosti na existenci meze vlastního stínu na Ω, existují na každém závitu plochy buď dvě, nebo jedna, nebo žádná přímka meze vlastního stínu.

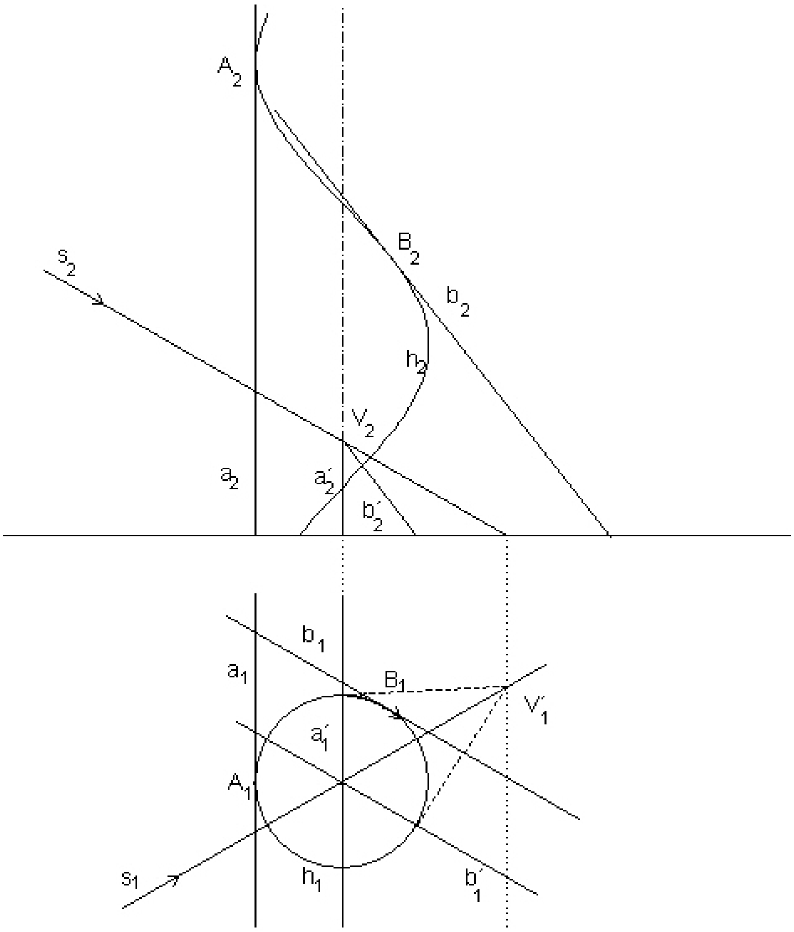
[4] Ověřte!

[5] Velikost úsečky PQ získáme například sklopením.

[6] Tato mez je tvořena dvěma přímkami nebo jednou přímkou nebo neexistuje.

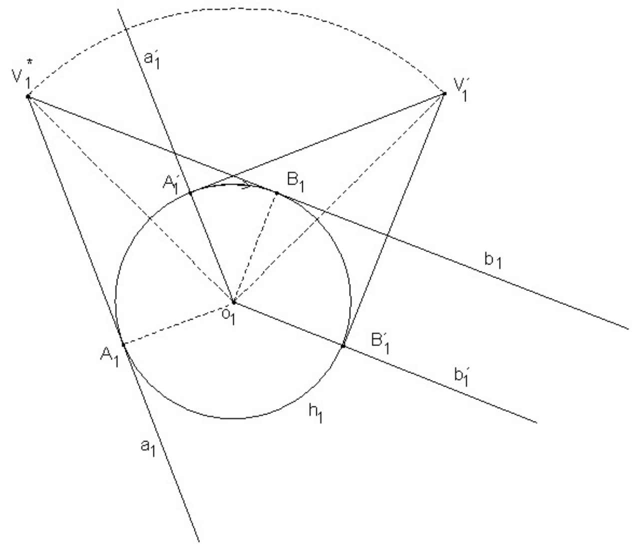
Příklad 2.4.1 V Mongeově projekci sestrojte rovnoběžné osvětlení směru s rozvinutelné šroubové plochy Φ, která je určena levotočivou šroubovicí h, osa šroubovice je kolmá k půdorysně.

Řešení: Nejprve sestrojíme mez vlastního stínu směrové kuželové plochy Ω. Vržený stín V' bodu do půdorysny leží vně kružnice h_1, existují dvě přímky a', b' meze vlastního stínu na Ω. Půdorysy a_1, b_1 jsou tečnami kružnice h_1 a jejich klesání v bodech dotyku A, B je stejné jako klesání šroubovice. Nyní určíme přímky a, b meze vlastního stínu plochy Φ na daném závitu plochy. Přímka a je rovnoběžná s a' a její půdorys je tečnou h_1, přičemž orientace a_1, h_1 je souhlasná, bod dotyku je půdorysem bodu dotyku as a h. Nárys sestrojíme podle předchozí konstrukce nárysu tečny šroubovice v daném bodě. Podobně sestrojíme přímku b meze vlastního stínu na témže závitu.



Obr. 2.4.1

Označme A_1', B_1' body dotyku tečen vedených z V_1' k h_1. Otočme vše kolem o_1 o 90° proti směru šipky udávající klesání. Otočením přejde A_1' do A_1, B_1', do B_1 bod V_1' do průsečíku $V*_1$ přímek a_1, b_1. Z toho vyplývá zjednodušení konstrukce půdorysu přímek meze vlastního stínu.



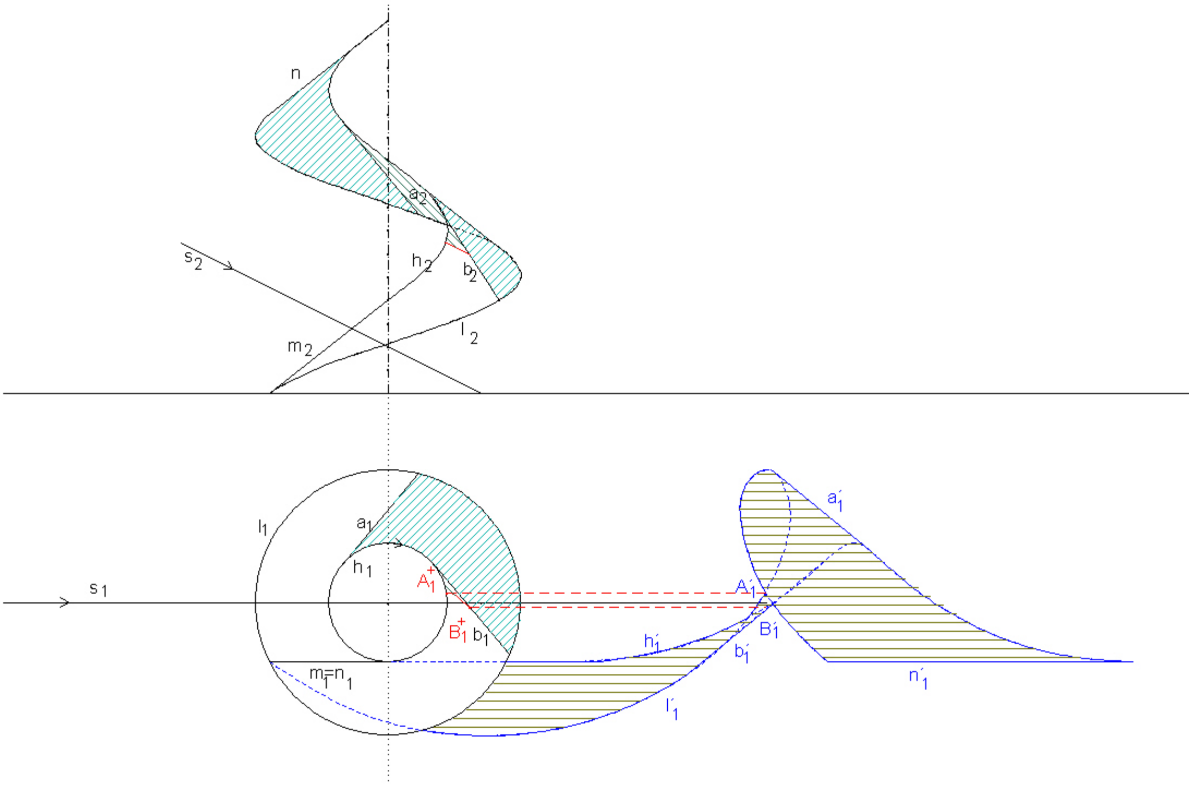
Obr. 2.4.2

Příklad 2.4.2 Sestrojte rovnoběžné osvětlení jednoho závitu části pravotočivé rozvinutelné šroubové plochy Φ. Plocha je v Mongeově projekci zadána šroubovicí h vratu omezenou body M, N a částí tečny m v bodě M. Plochu Φ tvoří úsečka PM, kde P je půdorysný stopník tečny m v bodě M. Přímka s směru osvětlení prochází vrcholem V směrové kuželové plochy, je rovnoběžná s nárysnou a vržený stín V' bodu V leží v mezikruží určeném kružnicemi h_1 a l_1, kde l je šroubovice bodu P.

Řešení: Nejprve sestrojíme mez vlastního stínu plochy Φ, tvořenou úsečkami a, b. Sestrojíme vržené stíny do π. Mez vrženého stínu v π je tvořena vrženými stíny a', b' úseček a, b, dále vrženými stíny h' a l' šroubovic h a l sestrojené podle předchozího[7] a vrženými stíny úseček ležících na tečnách m, n šroubovice h v bodech M, N.[8] Pomocí vrženého stínu do π sestrojíme zpětnými paprsky vržený stín plochy Φ na sebe. Oblouk šroubovice l omezený body A, B vrhá stín l^+ na plochu Φ, jeho koncové body A^+, B^+ určíme pomocí průsečíků A', B' křivky l' s křivkou h' a úsečkou b. Další body vrženého stínu plochy na sebe určíme zpětnými paprsky pomocí průsečíků vržených stínů úseček plochy s křivkou l'.

[7] h' je zkrácená a l' prodloužená cykloida.

[8] Krajní body úseček jsou tvořeny bodem M, resp. N a druhý krajní bod je průsečík tečny m, resp. n, se sroubovicí l.



Obr. 2.4.3

V technické praxi se z obecných rozvinutelných ploch nejvíce využívají *plochy konstantního spádu* a *přechodové plochy*. Plochy konstantního spádu se nejvíce využívají ve stavební praxi například při terénních úpravách jako výkopové či násypové plochy. Křivka ^1k je hrana komunikace, řídící rotační kuželová plocha má svislou osu. Jestliže máme dvě rovinné křivky, z nichž každá leží v jiné rovině a hledáme rozvinutelnou plochu, která je jimi určena, *sestrojujeme přechodovou plochu*. Jak jsme ukázali, je plochou konstantního spádu i plocha tečen šroubovice.[9] Další často využívané plochy konstantního spádu jsou plochy sestrojené nad regulární kuželosečkou. Ukážeme konstrukci a některé vlastnosti plochy konstantního spádu nad elipsou.

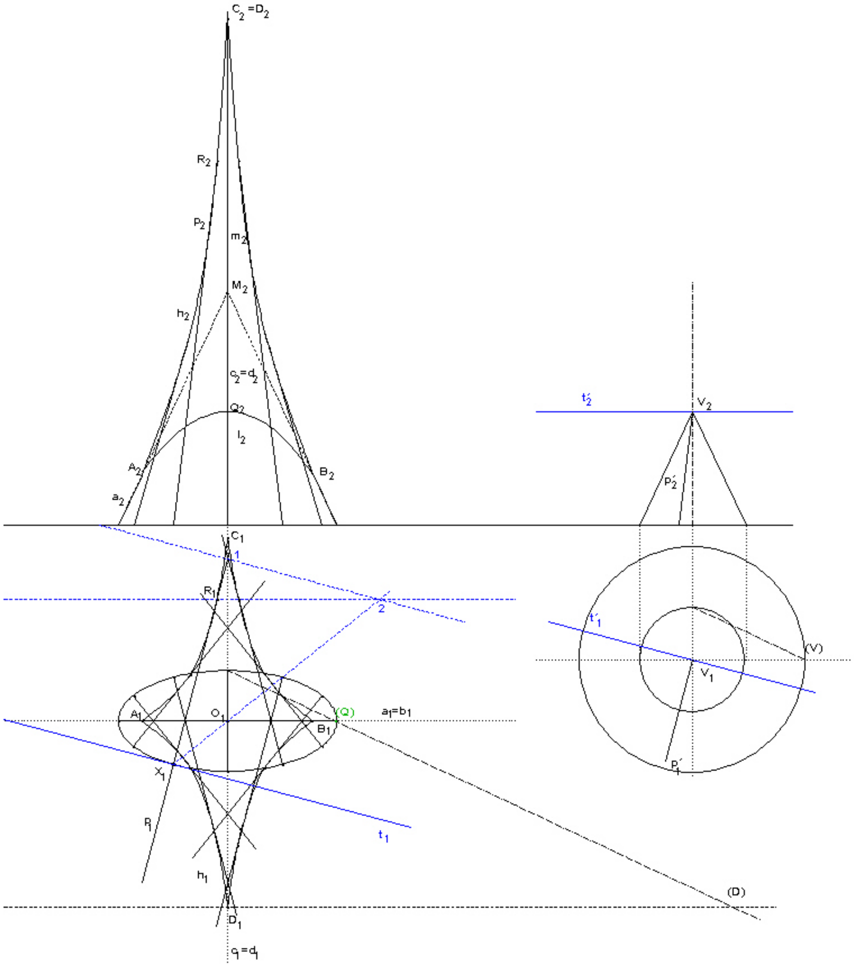
2.5 Plocha konstantního spádu nad elipsou

Plochu Φ zadáme v Mongeově projekci elipsou e ležící v půdorysně π a řídící rotační kuželovou plochou Ω s osou o kolmou k π. Hlavní osa elipsy e je rovnoběžná s nárysnou, řídící kružnice k plochy Ω leží v π. Podle předchozího sestrojíme tvořící přímky plochy. Zvolíme bod X elipsy e, v něm sestrojíme tečnu t k e, sestrojíme přímku t' rovnoběžnou s t procházející vrcholem V plochy Ω. Přímkou t' proložíme tečnou rovinu τ plochy Ω. Rovina

[9] Plocha konstantního spádu nad kruhovou evolventou.

τ se Ω dotýká podél přímky p'. Přímka p rovnoběžná s p' vedená bodem X je tvořící přímkou plochy Φ. Přímkou t' prochází dvě tečné roviny plochy Ω, bodem X tedy prochází dvě tvořící přímky, tj. elipsa e je dvojnásobnou křivkou plochy Φ. Budeme sestrojovat jen část plochy Φ ležící nad π.

Půdorysy tvořících přímek jsou normály tečen elipsy e, tj. obalí *evolutu elipsy*. Jak víme, lze rozvinutelnou plochu sestrojit jako plochu tečen prostorové křivky h,[10] půdorysy těchto tečen jsou pak tečny půdorysu křivky h, proto h_1 je evoluta elipsy e. Jak víte z diferenciální geometrie – evoluta rovinné křivky je množina jejích středů křivosti. Vrcholům křivky (evolventy) odpovídají body vratu evoluty.



Obr. 2.5.1

Půdorys křivky h[11] má čtyři body vratu A_1, B_1, C_1, D_1 – *středy hyperoskulačních kružnic*

[10]Křivka h je hranou vratu této plochy.

[11]Konstrukce bodů křivky h_1 – v X_1 máme sestrojenu normálu p_1 a hledáme střed křivosti R_1 elipsy e_1 – leží na p_1. Určíme průsečík (ozn. ho 1) přímky p_1 s vedlejší osou elipsy e_1. Bodem 1 vedeme rovnoběžku s tečnou t a určíme její průsečík (ozn. ho 2) s přímkou X_1O_1 (O_1 je střed elipsy e_1). Bodem 2 vedeme rovnoběžku s hlavní osou elipsy e_1. Průsečík této rovnoběžky s přímkou p_1 je střed R_1 křivosti.

elipsy e.

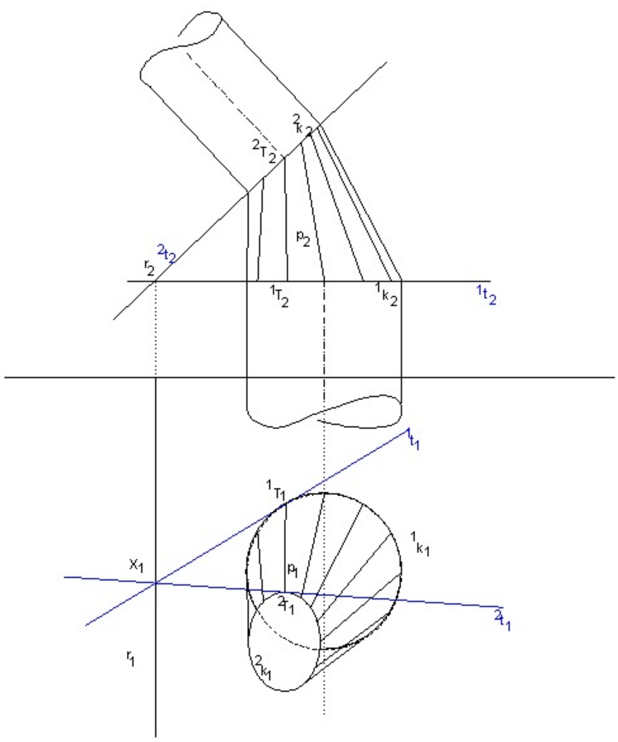
Označíme-li R bod dotyku přímky p (přímka procházející bodem X elipsy e) s hranou h vratu, půdorys bodu R sestrojíme jako střed křivosti elipsy e v bodě X a jeho nárys R_2 leží na p_2. V náryse je rovněž zachována incidence, tj. p_2 se dotýká v R_2 nárysu h_2 hrany vratu h.

Protože tvořící přímky a, b, c, d plochy Φ procházející vrcholy elipsy nepatří směru promítání, jsou body vratu křivky h_1 půdorysy bodů vratu A, B, C, D křivky h. Tvořící přímky a, b jsou rovnoběžné s nárysnou, plocha je souměrná podle roviny $\mu = (a, b)$. Přímky c, d jsou kolmé k základnici.

Nárysy bodů C, D určíme sklopením promítací roviny σ přímek c, d, plocha je souměrná také podle roviny σ. Průsečnice o rovin μ a σ je osou plochy. Přímky plochy souměrné podle μ se protínají v bodech elipsy l, jejíž jeden vrchol je průsečík Q přímek c, d. Podobně přímky plochy souměrné podle σ se protínají v bodech hyperboly m, jejíž vrchol M je průsečíkem přímek a, b. Části křivek l a m tvořené průsečíky tvořících přímek jsou dvojnásobnými křivkami plochy.

2.6 Přechodové plochy

Nejčastějším případem je sestrojení *přechodové plochy mezi dvěma danými potrubími*. Křivky, které určují tuto plochu jsou dvě kružnice nebo dvě elipsy, ležící v různých rovinách (různoběžných či rovnoběžných).



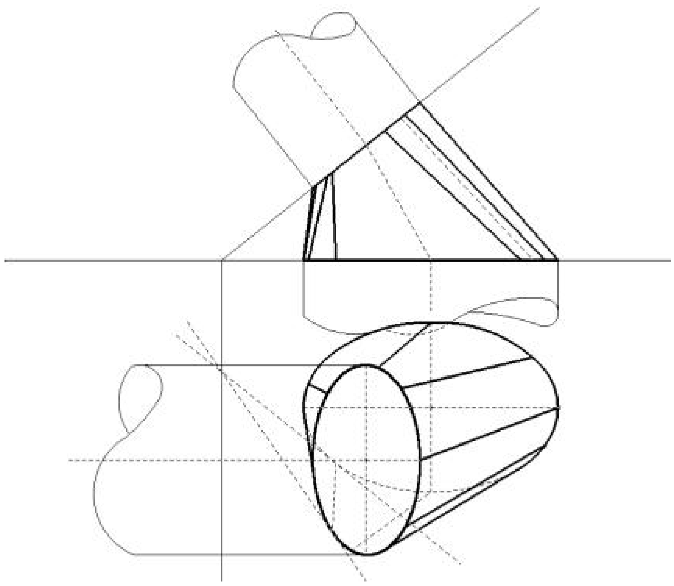
Obr. 2.6.1

Mějme dánu rotační válcovou plochu s osou kolmou k π a rotační válcovou plochu s osou rovnoběžnou s ν, viz obr 3.1.1.

Zobrazíme části rotačních ploch omezené kružnicemi ^1k, ^2k ležícími v rovinách kolmých k ν, roviny se protínají v přímce r. Sestrojíme část rozvinutelné plochy ležící „mezi" kružnicemi ^1k, ^2k. Na ^1k zvolíme bod ^1T, v něm určíme tečnu ^1t k ^1k a určíme její průsečík X s přímkou r.

Z bodu X vedeme tečnu ^2t ke kružnici ^2k, dotýká se v bodě ^2T. Přímka $p =^1 T^2T$ je tvořící přímkou přechodové plochy Φ, budeme uvažovat jen úsečku $^1T^2T$. Z bodu X lze vést ještě tečnu $^2t'$, která určí další přímku p'. Spojitým pohybem přímek p a p' vznikají dva pláště plochy Φ, uvažujeme jen jeden, vytvořený přímkou p. Je-li ^1t rovnoběžná s r, pak i ^2t je rovnoběžná s r, pomocí takovéto přímky dostaneme tvořící přímky plochy patřící druhému obrysu. Půdorysy tvořících přímek patřících prvnímu obrysu jsou společné tečny křivek $^1k_1$, $^2k_1$.

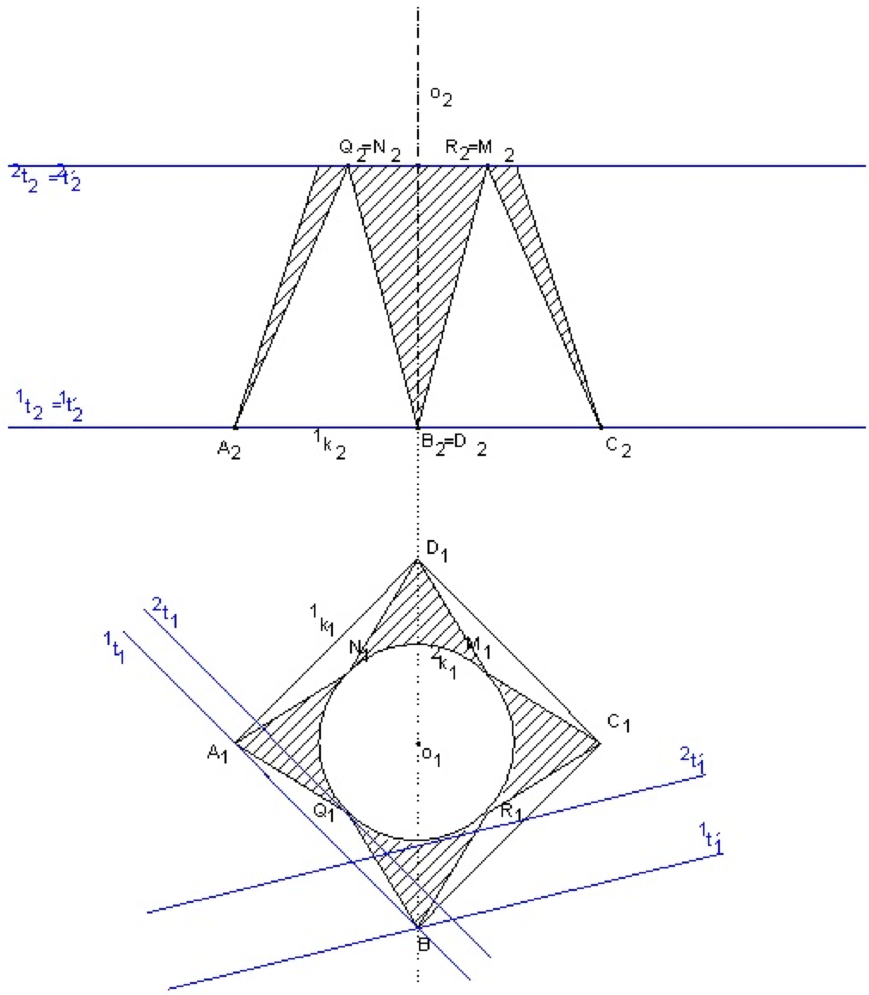
Řídící křivky nemusí být kružnice, na obrázku 3.1.2 je přechodová plocha mezi dvěma potrubími s eliptickým profilem.



Obr. 2.6.2

Řídící křivky mohou také ležet v rovinách rovnoběžných (průsečnice je pak nevlastní přímka). V tomto případě jsou vždy přímky ^1t a ^2t rovnoběžné. Křivky ^1k, ^2k nemusí být vždy hladké, sestrojíme přechodovou plochu mezi kvádrem se čtvercovou podstavou ^1k a rotačním válcem omezeným kružnicí ^2k. Kvádr a válec mají společnou osou kolmou k π.

Roviny křivek ^1k a ^2k jsou rovnoběžné, tečny ^1t a ^2t budou také navzájem rovnoběžné. Za tečny čtverce ^1k považujeme buď přímky, na nichž leží strany čtverce, nebo přímky procházející vrcholy. Položme $^1t = AB$, všechny body úsečky AB jsou body dotyku tečny ^1t s ^1k. Ke ^2k existuje tečna v jednom bodě Q rovnoběžná s ^1t. Ploše Φ tedy patří trojúhelník ABQ. Podobně pro další strany – ploše patří také trojúhelníky BCR, CDM, ADN. Ke každé tečně ^2t’ oblouku QR kružnice ^2k existuje přímka $^1t'$ s ní rovnoběžná procházející vrcholem B čtverce ^1k, bod dotyku tečny $^1t'$ je B. Ploše také patří část rotačního kužele s osou kolmou k π, vrcholem B omezeného kratším obloukem QR kružnice ^2k. Stejně pro ostatní vrcholy. Tato plocha se používá jako přechodová plocha v násypce.



Obr. 2.6.3

Kapitola 3

Zborcené plochy

Přímkové plochy lze vytvořit i jiným způsobem než jsme je dosud konstruovali. V obecném případě lze přímku zadat jako průsečnici dvou rovin, každá přímka v prostoru tak je zadána čtyřmi nezávislými parametry. (Čtyřmi nezávislými podmínkami.) Příkladem geometrické interpretace jednoduché podmínky pro zadání přímky je také to, že přímka protíná danou křivku v jednom bodě nebo se dotýká dané plochy. Uvažujeme-li množinu přímek protínajících tři dané křivky (přímky množiny splňují tři nezávislé podmínky), dostáváme systém přímek závislý na jednom parametru, tedy přímkovou plochu.[1] Vytvoříme tak přímkovou plochu jako množinu přímek protínajících tři dané křivky ${}^1k$, ${}^2k$, ${}^3k$, tzv. *řídící křivky*.[2] Přímky plochy se nazývají *tvořící přímky*. Parametricky lze přímkovou plochu zapsat ve tvaru $p(u,v) = f(u) + v.g(u)$, kde $f(u)$ je řídící křivka a $g(u)$ je směrový vektor tvořící přímky p. Jestliže jsou v bodě (u_0, v_0) vektory $f'(u), g(u), g'(u)$ *lineárně nezávislé*, pak v každém bodě tvořící přímky p existuje právě jedna tečná rovina obsahující přímku p. Přímku p nazveme *regulární*.

Tečné roviny všech bodů regulární přímky p vytvoří svazek rovin o ose p a platí pro ně tzv. *Chaslesova* věta:

Věta 3.0.1 *Zobrazení, které každému bodu X regulární přímky p přiřadí tečnou rovinu plochy v bodě X je projektivní.*[3]

Definice 3.0.1 Přímkové plochy, které obsahují regulární přímky se nazývají *zborcené*.

Jestliže pro bod (u_0, v_0) přímky p přímkové plochy platí , že vektory $f'(u), g(u), g'(u)$ jsou *lineárně závislé*, pak existuje tečná rovina, která se dotýká *podél celé přímky*. Přímka i rovina se nazývají *torzální*. Na přímce p pak existuje bod K, který je průsečíkem přímky p s každou soumeznou přímkou[4] (a tyto dvě přímky tvoří torzální rovinu), bod K se nazývá

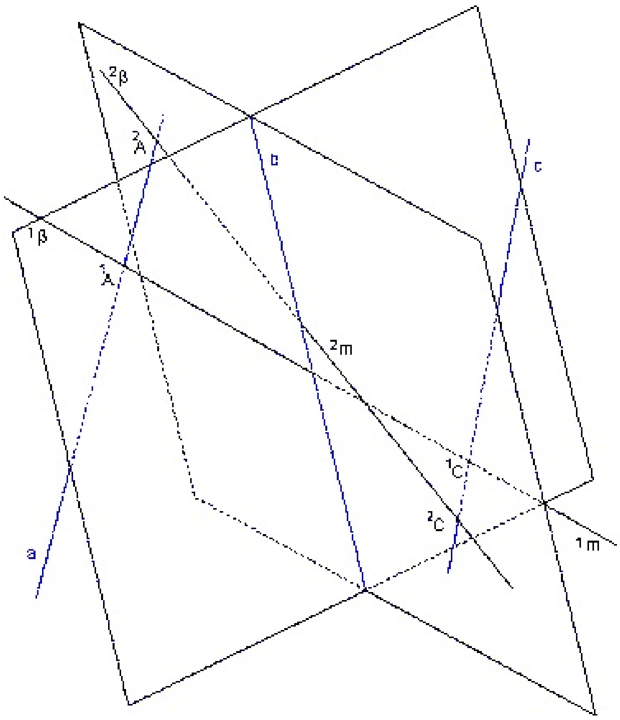
[1] Opět provádíme veškeré konstrukce v rozšířeném euklidovském prostoru.
[2] Výjimečně lze místo některé z řídících křivek uvažovat plochu, jíž se mají přímky plochy dotýkat.
[3] Tj. zachovává dvojpoměr.
[4] Tj. nekonečně blízkou k p.

kuspidální bod a je bodem dotyku každé roviny procházející přímkou p, která je různá od torzální roviny. Jestliže všechny přímky plochy jsou torzální, je plocha rozvinutelná.

Definice 3.0.2 Vlastní tečná rovina α v nevlastním bodě přímky p zborcené plochy Φ se nazývá a*symptotická*. Rovina γ procházející přímkou p a kolmá k asymptotické rovině α se nazývá *centrální rovina*, její bod dotyku nazveme *centrální bod*. Množina centrálních bodů plochy vytváří tzv. *strikční křivku*.

Nejprve budeme studovat plochy Φ, jejichž řídící křivky jsou tři navzájem mimoběžné přímky a, b, c.[5]. Proložme např. přímkou b roviny ${}^1\beta$, ${}^2\beta$, ${}^3\beta, \ldots$ Určíme průsečík ${}^1A$ roviny ${}^1\beta$ a přímky a a průsečík ${}^1C$ roviny ${}^1\beta$ a přímky c, dále průsečík ${}^2A$ roviny ${}^2\beta$ a přímky a atd. Přímky ${}^im ={}^i A{}^iC$ protínají přímku b v bodech ${}^iB$, tzn., že patří ploše. Zobrazení f, které přiřadí bodům ${}^iA$ roviny ${}^i\beta$ a zobrazení g přiřazující rovinám ${}^i\beta$ body ${}^iC$ jsou perspektivní.

Složení těchto zobrazení přiřazující bodům ${}^iA$ body ${}^iC$ je projektivní, tedy zborcená plocha určuje projektivní zobrazení dvou nesoumístných řad bodových výše popsaným způsobem. Platí i obráceně, že spojnice odpovídajících si bodů dvou projektivních řad je zborcená plocha.



Obr. 3.0.4

Zvolme obecnou přímku q nepatřící ploše Φ zadané třemi mimoběžnými přímkami a, b, c. Každým bodem B přímky b proložme roviny $\alpha = (B, a)$, $\gamma = (B, c)$ a označme B' průsečík

[5] Mimoběžné proto, aby plocha byla zborcená

roviny β a přímky q a B'' průsečík roviny γ a přímky q. Zobrazení f přiřazující bodu B bod B' a zobrazení g přiřazující bodu B bod B'' jsou projektivní. Složené zobrazení přiřazující bodu B' bod B'' je projektivní, dostáváme soumístnou projektivitu na přímce. Tato projektivita má buď dva různé reálné samodružné body X, Y, nebo dva reálné splývající nebo dva imaginárně sdružené. Z konstrukce bodů B' a B'' je zřejmé že body X a Y (a jen těmito body) je možné vést společné příčky x, y mimoběžek a, b, c. Na přímce q leží obecně dva (reálné různé, reálné splývající, imaginárně sdružené) body patřící ploše Φ, proto je plocha Φ druhého stupně, tj. kvadrika, nazýváme ji *zborcená kvadrika*.

Uvažujme na Φ příčku m přímek a, b, c. Proložíme jí rovinu ρ, přímka m pak patří řezu plochy Φ rovinou ρ. Řezem kvadriky je kuželosečka k. Přímka m patří řeu plochy Φ rovinou ρ, je tedy částí kuželosečky k a k je proto singulární kuželosečka. Řez se rozpadá na dvě přímky, $k = \{m, d\}$. Je-li přímka d různá od přímek a, b, c, pak je s nimi mimoběžná. Kdyby totiž byla například různoběžná s přímkou , pak by přímka c ležela v rovině ρ řezu (a tedy by patřila také řezu), protože protíná přímku m. Což je ovšem spor s tím, že řez je singulární kuželosečka. Je-li n další příčka mimoběžek a, b, c, pak protíná také přímku d. Kdyby přímky n a d byly mimoběžné, průsečík N přímky n a roviny ρ by neležel ani na m ani na d, ale patřil by řezu k rovinu ρ a plochy Φ, což je opět spor. Obdobně bychom ukázali, že přímky m a n jsou mimoběžné.

Ukázali jsme, že na zborcené kvadrice leží dva systémy přímek, které nazýváme *reguly*. Přímky téhož regulu jsou navzájem mimoběžné. Každá přímka jednoho regulu protíná všechny přímky druhého regulu. Zborcená kvadrika je určena kterýmikoli třemi přímkami *téhož regulu*. Každým bodem M zborcené kvadriky prochází dvě přímky různých regulů, tyto přímky tvoří tečnou rovinu plochy Φ v bodě M.

Podle typu řezu kvadriky nevlastní rovinou ω^∞ dělíme zborcené kvadriky na dva druhy. Kvadrika, jejímž řezem nevlastní rovinou je *regulární kuželosečka* (tj. neobsahuje nevlastní přímku) se nazývá *zborcený hyperboloid*, kvadrika, jejímž řezem nevlastní rovinou je *singulární kuželosečka* (tj. obsahuje nevlastní přímku, nevlastní rovina je tečnou rovinou kvadriky) se nazývá *hyperbolický paraboloid*.

3.1 Zborcený hyperboloid

Zborcený hyperboloid Φ je určen třemi mimoběžnými přímkami, které nejsou rovnoběžné s žádnou rovinou.[6] Plocha Φ protíná nevlastní rovinu v *regulární kuželosečce* l^∞. Nevlastní rovina ω^∞ tedy není tečnou rovinou plochy, pól O nevlastní roviny ω^∞ vzhledem k Φ je vlastní bod a je tedy středem plochy. Ke každé přímce p plochy Φ existuje asymptotická rovina α procházející středem O. Nevlastní přímka a^∞ asymptotické roviny α se dotýká kuželosečky l^∞ v bodě A^∞. Množina asymptotických rovin obaluje asymptotickou kuželovou plochu Ω s vrcholem O, plocha Ω se dotýká kvadriky Φ podél l^∞. Asymptotická rovina α se dotýká

[6] Plocha neobsahuje nevlastní přímku.

asymptotické kuželové plochy Ω podél přímky a'. Rovina α protíná Φ ve dvou přímkách a, m různých regulů, přímky prochází bodem A^∞, tj. přímky a', a, m jsou rovnoběžné.

3.1.1 Řez plochy rovinou

Každá rovina ρ protíná zborcený hyperboloid Φ v kuželosečce. Nemá-li nevlastní přímka u^∞ roviny ρ žádný společný bod s kuželosečkou l^∞, pak řez k neobsahuje nevlastní body a řezem je *elipsa*.[7].
Protíná-li ρ kuželosečku l^∞ ve dvou bodech je řezem kuželosečka *typu hyperbola*.

- Obsahuje-li ρ přímku plochy, je ρ tečnou rovinou a řezem je dvojice různoběžek, jejich průsečík je bodem dotyku roviny ρ s plochou Φ.
- Neobsahuje-li ρ přímku plochy, je řezem hyperbola.

Dotýká-li se u^∞ kuželosečky l^∞ v bodě U^∞ je řezem kuželosečka *typu parabola*.

- Leží-li v ρ přímka plochy Φ, pak je ρ asymptotická a řezem je dvojice rovnoběžek, jejich průsečík (nevlastní bod) je bodem dotyku asymptotické roviny.
- Neleží-li v ρ žádná přímka plochy Φ je řezem parabola.

Protože se plochy Φ a Ω dotýkají podél l^∞, je řezem Φ i Ω vždy kuželosečka stejného afinního typu.
Obecný řez zborcené plochy pak sestrojujeme jako u rozvinutelných ploch, hledáme průsečíky přímek plochy s rovinou řezu.

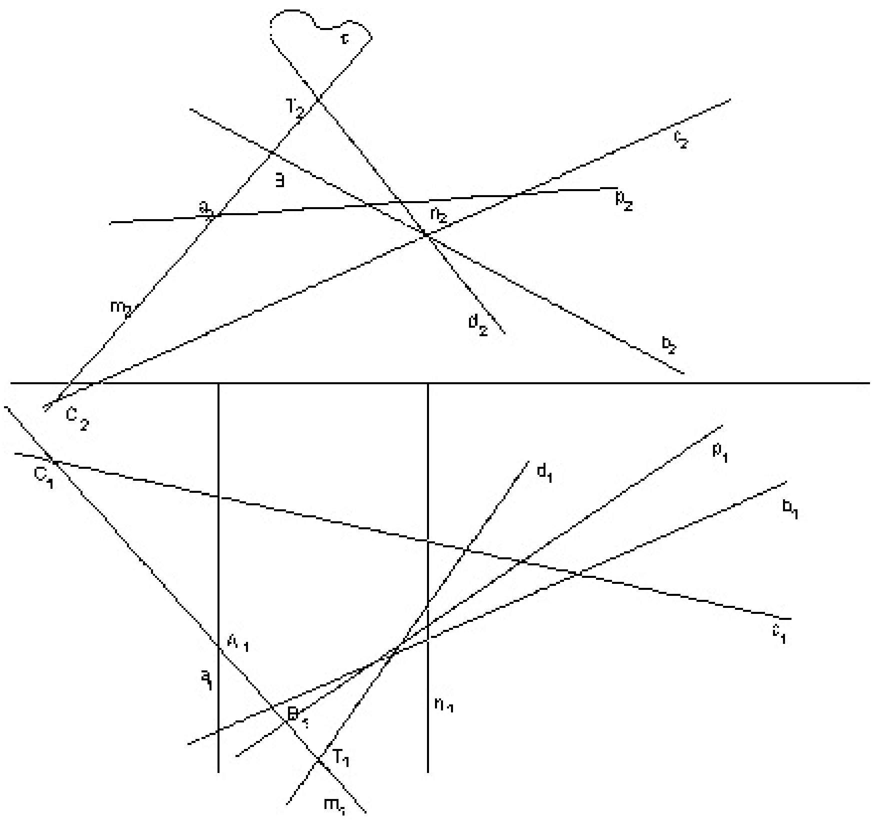
3.1.2 Rovnoběžné osvětlení plochy

Rovnoběžné osvětlení je zadáno středem S^∞. Mez vlastního stínu kvadriky při osvětlení z libovolného středu S osvětlení je řezem plochy Φ polární rovinou ρ bodu S vzhledem k Φ. Pro rovnoběžné osvětlení zborceného hyperboloidu je tedy mezí vlastního stínu řez rovinou procházející středem O. Nevlastní přímka u^∞ polární roviny ρ bodu S^∞ vzhledem k Φ je polárou bodu S^∞ vzhledem ke kuželosečce l^∞. Jestliže S^∞ leží vně kuželosečky l^∞,[8] polára u^∞ protíná l^∞ ve dvou různých bodech a mezí vlastního stínu je *hyperbola*[9] Leží-li S^∞ uvnitř l^∞[10] nemá polára u^∞ bodu S^∞ vzhledem k l^∞ s kuželosečkou l^∞ společný bod a mezí vlastního stínu je *elipsa*. Leží-li S^∞ na l^∞[11], je polára u$^\infty$ bodu S^∞ vzhledem k l^∞ tečnou l^∞ v bodě S^∞, rovina ρ je asymptotická a mez vlastního stínu je tvořena *dvěma rovnoběžkami*.

[7] Nemůže nastat prázdný nebo jednobodový průnik roviny řezu a plochy Φ, protože plocha je přímková
[8] Tj. paprsek s směru osvětlení vedený vrcholem O asymptotické kuželové plochy Ω leží vně Ω
[9] Rovina ρ prochází středem kvadriky, tj. ρ není tečná.
[10] Paprsek s směru osvětlení vedený vrcholem O asymptotické kuželové plochy Ω leží uvnitř Ω.
[11] Paprsek s směru osvětlení vedený vrcholem O asymptotické kuželové plochy Ω je povrchová přímka Ω.

3.1.3 Konstrukce na ploše

Příklad 3.1.1 V Mongeově projekci je dán zborcený hyperboloid mimoběžkami a, b, c, přímka a je kolmá k ν. V bodě T plochy sestrojte tečnou rovinu.
Řešení: Přímky a, b, c jsou přímky prvního regulu plochu, přímky druhého regulu protínají přímky prvního regulu. Druhému regulu patří přímka n rovnoběžná s přímkou a, její nárys n_2 je průsečík přímek b_2 a c_2.[12] Nárysy přímek druhého regulu tvoří svazek přímek o středu a_2, kromě přímky n (proč?). Nárysy přímek prvního regulu tvoří svazek o středu n_2, kromě přímky a (proč?). Druhý skutečný obrys plochy Φ je mez vlastního stínu při rovnoběžném osvětlení ve směru kolmém k ν, přímky a, n patří směru osvětlení a jsou tedy mezí vlastního stínu. Druhý zdánlivý obrys je pak průmět do ν, tedy druhým zdánlivým obrysem je dvojice bodů a_2, n_2. Nárysy přímek plochy tvoří dva svazky o středech a_2, n_2 s vyloučením přímky a_2n_2 (proč?). První skutečný je obrys je kuželosečka – hyperbola nebo elipsa.



Obr. 3.1.1

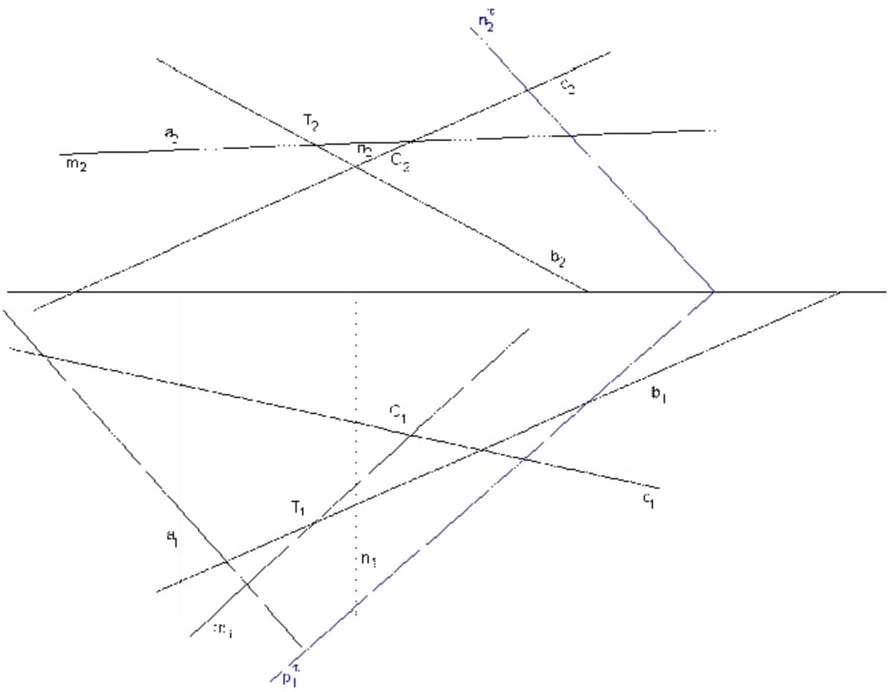
Bod T plochy je dán nárysem T_2. Tečná rovina τ v bodě T je určena dvěma přímkami d, m různých regulů protínajícími se v bodě T, $m_2 = T_2a_2$, $d_2 = T_2n_2$. Určíme půdorysy přímek d, m. Přímka m protíná přímky a, b, c po řadě v bodech A, B, C, sestrojíme jejich půdorysy a získáme půdorys přímky m i bodu T. Půdorys přímky d sestrojíme pomocí průsečíků s

[12]Zdůvodněte.

přímkami druhého regulu, proto sestrojíme ještě přímku p druhého regulu a půdorys přímky d určíme pomocí průsečíků s přímkami m, p.

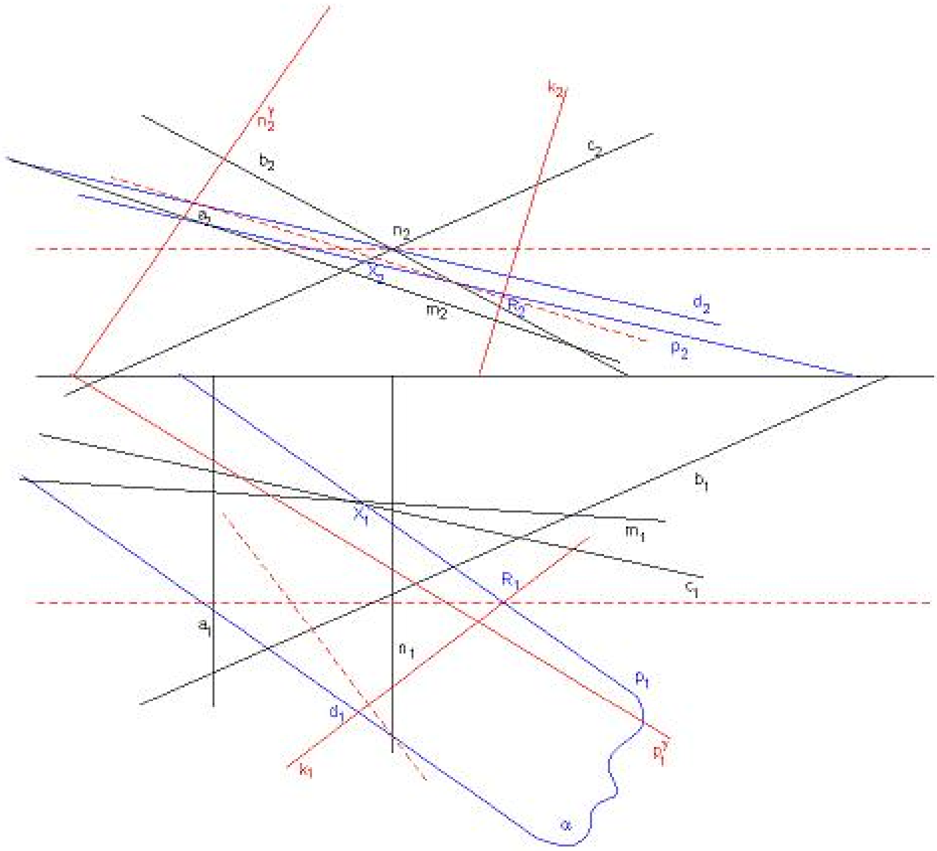
Poznámka 3.1.1 Mají-li přímky a, b, c obecnou polohu vzhledem k průmětnám, je třeba řešit obecně úlohu příčka tří mimoběžek jdoucí daným bodem.

Příklad 3.1.2 V Mongeově projekci je dán zborcený hyperboloid mimoběžkami a, b, c, přímka a je kolmá k ν. Určete bod dotyku tečné roviny τ procházející přímkou b.
Řešení: Stejně jako v předchozím případě tvoří nárysy přímek obou regulů dva svazky přímek o středech a_2, n_2, kromě přímky $a_2 n_2$. Hledáme bod dotyku roviny τ s plochou Φ. V rovině τ leží přímky různých regulů, jedna z nich je b. Určíme např. průsečík C přímky C a roviny τ, C je bod plochy ležící v rovině τ, tj. prochází jím přímka m druhého regulu ležící v rovině τ. Její nárys m_2 je spojnice $a_2 C_2$, průsečík T_2 přímek b_2 a m_2 je nárys bodu dotyku.



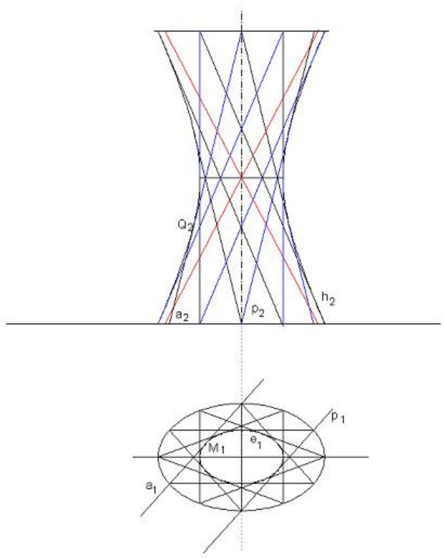
Obr. 3.1.2

Příklad 3.1.3 V Mongeově projekci je dán zborcený hyperboloid mimoběžkami a, b, c, přímka a je kolmá k ν. Určete asymptotickou rovinu přímky p druhého regulu, centrální rovinu a centrální bod přímky p.
Řešení: Zvolme libovolně p, nárys p_2 prochází a_2, sestrojíme půdorys pomocí průsečíků s přímkami b, c. V asymptotické rovině α přímky p leží dvě přímky p, d různých regulů, které jsou rovnoběžné. Nárys d_2 prochází n_2 (průsečík b_2 a c_2) rovnoběžně s p_2. Půdorys d_1 určíme pomocí další přímky m druhého regulu. symptotická rovina α je tvořena přímkami d, p. Centrální rovina γ prochází přímkou p kolmo k α. Sestrojíme přímku k kolmou k rovině α a procházející libovolným bodem R přímky p. (Např. pomocí hlavních přímek). Přímkami p, k je určena centrální rovina a podle příkladu 3.1.2 sestrojíme její bod dotyku – centrální bod.



Obr. 3.1.3

Afinním obrazem rotačního jednodílného hyperboloidu je zborcený hyperboloid a každý zborcený hyperboloid je také tak možno vytvořit, toho využíváme při konstrukci.



Obr. 3.1.4

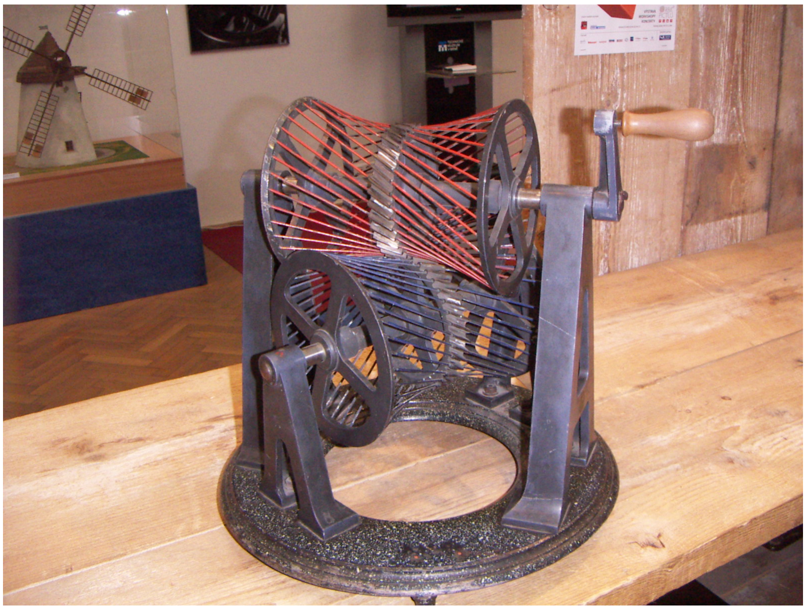
Na obrázku 3.1.4 je zborcený hyperboloid v Mongeově projekci dán osou kolmou k π, prvním skutečným obrysem je hrdelní elipsa (řez rovinou rovnoběžnou s π procházející středem), druhým skuteným obrysem je hyperbola (řez rovinou rovnoběžnou s ν procházející středem). Zvolíme-li přímku a prvního regulu, pak půdorys a_1 se dotýká půdorysu e_1 elipsy v bodě M_1, nárys a_2 se dotýká nárysu h_2 hyperboly v bodě Q_2. Na ploše existuje přímka p rovnoběžná s a, která spolu s a tvoří asymptotickou rovinu, která obaluje asymptotickou kuželovou plochu. Jejím druhým zdánlivým obrysem jsou asymptoty hyperboly h_2.

Ve stavební praxi využíváme toho, že jde o přímkovou plochu. Ve směru povrchových přímek můžeme klást vyztužení železem a vzniklá železobetonová konstrukce je tak velmi pevná a stabilní.

Obr. 3.1.5

Zborceného rotačního hyperboloidu se využívá zejména při stavbě chladících věží, kde není nejužší část hyperboloidu uprostřed, ale výše. Částí přímek ve spodní části hyperboloidu bývá použito jako nožek, které drží hmotu chladící věže a kudy do ní proudí vzduch.

Na následujícím obrázku je model šroubového soukolí pro mimoběžné osy hřídelí.



Obr. 3.1.6

3.2 Hyperbolický paraboloid

Uvažujme zborcenou kvadriku Φ, která obsahuje nevlastní přímku c^∞. Nevlastní rovina ω^∞ protíná kvadriku v kuželosečce, přímka c^∞ patří řezu kvadriky Φ touto rovinou a řezu tedy patří ještě jedna přímka q^∞ druhého regulu. Nevlastní rovina ω^∞ je pak tečnou rovinou plochy Φ. Kvadriky se dotýká nevlastní rovina je to tedy *paraboloid*. Přímky c^∞ a q^∞ jsou po řadě dány různoběžnými rovinami α, σ, které se nazývají *řídící roviny*. Všechny přímky druhého regulu protínají přímky prvního regulu (i přímku c^∞), proto jsou přímky druhého regulu rovnoběžné s řídící rovinou α. Podobně přímky prvního regulu jsou rovnoběžné s řídící rovinou obsahující přímku q^∞, tedy s rovinou σ. Hyperbolický paraboloid je tedy možné zadat třemi (vlastními) mimoběžkami rovnoběžnými s jednou rovinou, dvěma mimoběžnými přímkami a rovinou (řídící) s nimi různoběžnou (tj. tři mimoběžky, dvě vlastní a jedna nevlastní).
Ukázali jsme již, že kvadriku je možné zadat dvěma projektivními řadami bodů na mimoběžných přímkách a, b. Nevlastní body přímek a, b leží na přímce q^∞.[13] V projektivnosti přímek a, b si tak odpovídají nevlastní body a zobrazení je tedy podobnost.[14]Odtud plyne, že hyperbolický paraboloid je možné zadat podobností na nesoumístných řadách bodových.[15]

Průsečík R^∞ přímek c^∞ a q^∞ je bod dotyku nevlastní roviny ω^∞, je to nevlastní bod průsečnice r řídících rovin α a σ. Tečná rovina hyperbolického paraboloidu Φ kolmá k přímce r se dotýká plochy Φ ve *vrcholu* V. Přímka o rovnoběžná s přímkou r a procházející vrcholem se nazývá *osa* plochy Φ.

3.2.1 Řez plochy rovinou

Řez plochy Φ rovinou ρ určíme opět bodově jako množinu průsečíků přímek plochy s rovinou řezu. Řez obecnou rovinou je kuželosečka, její typ určíme pomocí polohy nevlastní přímky u^∞ roviny ρ a nevlastních přímek c^∞ a q^∞ plochy Φ.

Jestliže u^∞ neprochází bodem R^∞[16], přímka u^∞ protíná přímky c^∞ a q^∞ ve dvou různých bodech a řezem je kuželosečka *typu hyperbola*.

- Jestliže ρ obsahuje přímku plochy, jedná se o tečnou rovinu a řezem je dvojice různoběžek.

- Jestliže ρ neobsahuje přímku plochy, je řezem hyperbola.

Pokud u^∞ prochází bodem R^∞ a současně je různá od přímek c^∞, q^∞, pak je rovina ρ řezu rovnoběžná s osou o plochy, ale není rovnoběžná s žádnou řídící rovinou plochy Φ. Řezem je

[13] Přímky a, b patří prvnímu regulu a musí protnout přímku q^∞ druhého regulu.
[14] Podobnost je určena dvěma dvojicemi odpovídajících si bodů a zachovává dvojpoměr.
[15] Tj. dvěma mimoběžkami s dvěma dvojicemi odpovídajících si bodů.
[16] Rovina ρ není rovnoběžná s osou o paraboloidu.

parabola. Kdyby řezu patřila přímka plochy, musela by procházet bodem R^∞ a tímto bodem by pak procházely tři přímky plochy.[17]
Pokud u^∞ splyne s některou z nevlastních přímek plochy (např. c^∞), pak rovina ρ protíná plochu ještě v jedné vlastní přímce p druhého regulu. Řezem je *singulární kuželosečka typu parabola*. Jedná se tedy o *tečnou rovinu*, která je tvořena dvěma přímkami různých regulů, které se protínají v nevlastním bodě – bod dotyku. Rovina ρ řezu je tedy asymptotická rovina.

Ukázali jsme, že na paraboloidu se vyskytují kromě parabolických jen hyperbolické řezy, a proto se nazývá hyperbolický.

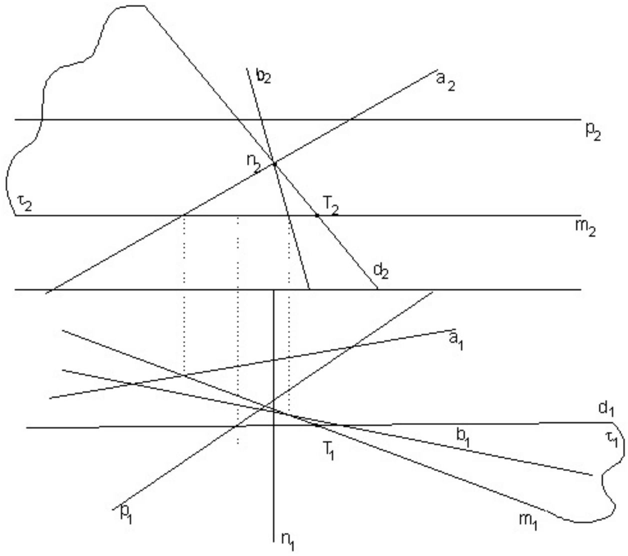
3.2.2 Rovnoběžné osvětlení plochy

Mez vlastního stínu při osvětlení z libovolného středu S je řezem polární roviny ρ bodu S vzhledem ke kvadrice Φ. Budeme uvažovat rovnoběžné osvětlení ze středu S^∞. Nevlastní přímka u^∞ polární roviny bodu S^∞ je polárou tohoto bodu vzhledem k singulární kuželosečce tvořené přímkami c^∞, q^∞. Jestliže S^∞ neleží na žádné z přímek c^∞, q^∞, pak přímka u^∞ prochází bodem R^∞ a je různá od přímek c^∞, q^∞. Mezí vlastního stínu je *parabola*. Jestliže S^∞ leží například na c^∞, a je různý od R^∞,[18] pak S^∞ patří ploše Φ, $u^\infty = c^\infty$ a rovina ρ je tečnou rovinou v bodě S^∞ a obsahuje ještě vlastní přímku p druhého regulu. Mezí vlastního stínu je *přímka* p rovnoběžná s přímkou s. Jestliže S^∞ splyne s R^∞,[19] ρ splyne s nevlastní rovinou a mez vlastního stínu *neexistuje*.

3.2.3 Konstrukce na ploše

Příklad 3.2.1 Hyperbolický paraboloid je dán přímkami a, b prvního regulu a řídící rovinou π. Sestrojte tečnou rovinu v daném bodě plochy Φ.
Řešení: Všechny přímky plochy Φ druhého regulu jsou rovnoběžné s řídící rovinou π, tj. nárysy přímek druhého regulu jsou rovnoběžné se základnicí, kromě přímky kolmé k ν (proč?). Druhá řídící rovina je libovolná rovina rovnoběžná s přímkami a, b. Přímka n kolmá k ν, jejíž nárys n_2 prochází průsečíkem a_2 a b_2 patří ploše a je druhého regulu. Všechny přímky prvního regulu protínají všechny přímky druhého regulu, proto nárysem přímek prvního regulu je svazek přímek o středu n_2, kromě přímky rovnoběžné se základnicí (proč?). Přímka n patří směru osvětlení kolmému k ν, tj. je druhým skutečným obrysem. Prvním skutečným obrysem je parabola.

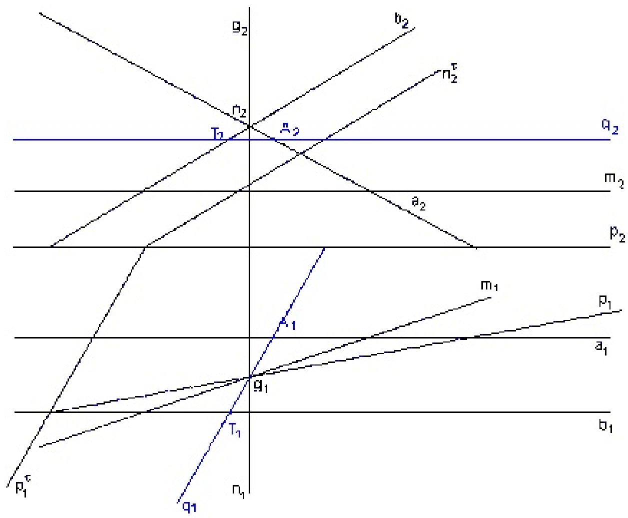
[17] Neexistuje tedy tečná rovina hyperbolického paraboloidu rovnoběžná s osou o a současně různoběžná s oběma řídícími rovinami.
[18] Tj. směr osvětlení patří zaměření jedné z řídících rovin.
[19] Směr osvětlení je totožný se směrem osy plochy.



Obr. 3.2.1

Bod T je zadán nárysem T_2. Tečná rovina v bodě T je určena dvěma přímkami různých regulů. Nárys m_2 přímky druhého regulu je rovnoběžný se základnicí a prochází T_2 a nárys d_2 přímky prvního regulu je dán body n_2T_2. Půdorys přímky m určíme pomocí průsečíků s přímkami a, b, pro sestrojení půdorysu přímky d musíme ještě sestrojit průměty další přímky p druhého regulu.

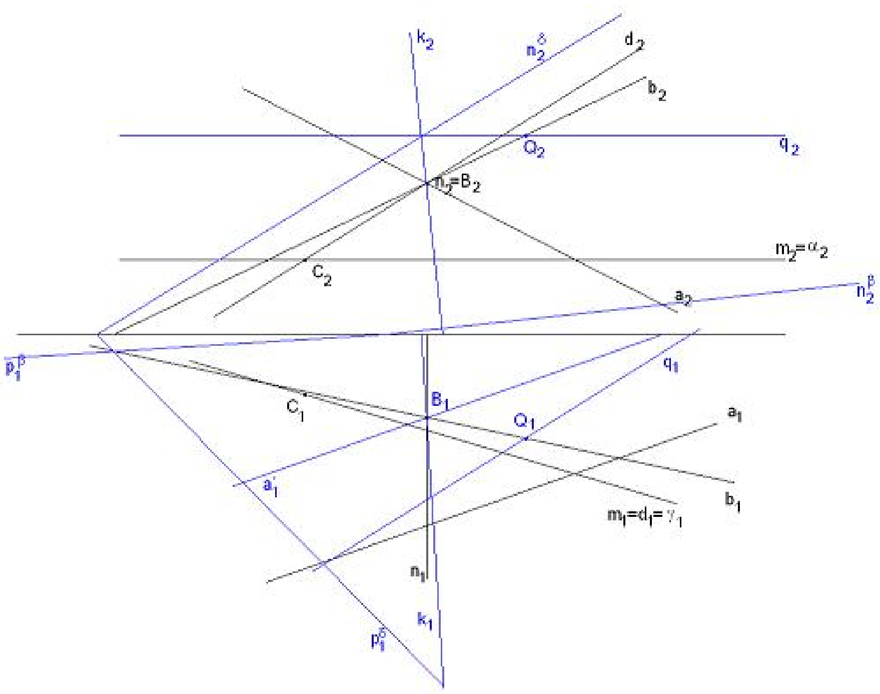
Příklad 3.2.2 Hyperbolický paraboloid je dán přímkami a, b prvního regulu rovnoběžnými s nárysnou a řídící rovinou π. Sestrojte bod dotyku tečné roviny τ procházející přímkou b.



Obr. 3.2.2

Řešení: Nárysy přímek druhého regulu jsou opět rovnoběžné se základnicí a nárysy přímek prvního regulu vytvářejí svazek o ose n_2, kde n_2 je průsečík a_2 a b_2. Nárysna je druhá řídící rovina, proto půdorysy přímek prvního regulu jsou rovnoběžné se základnicí. Jsou-li sestrojeny přímky m a p druhého regulu, pak průsečík g_1 přímek m_1 a p_1 je půdorysem přímky prvního regulu kolmé k π. Protože všechny přímky druhého regulu protínají všechny přímky prvního regulu, patří g prvnímu regulu, patří také směru osvětlení kolmému k π a je proto prvním zdánlivým obrysem. Půdorysy přímek druhého regulu vytváří svazek o středu g_1. Přímky n a g se musí rovněž protínat (proč?), proto g_1 leží na n_1 a naopak. Tečná rovina τ je dána stopami. Je tvořena přímkami různých regulů, které se protínají v bodě dotyku. Konstrukce je stejná jako u zborceného hyperboloidu. Určíme průsečík A roviny τ a přímky a, je to bod plochy a musí jím procházet přímka q druhého regulu ležící v rovině τ. Průsečík T přímek q a b je hledaný bod dotyku.

Příklad 3.2.3 Hyperbolický paraboloid je dán přímkami a, b prvního regulu a řídící rovinou π. Sestrojte asymptotické roviny β, α plochy procházející po řadě přímkou b a přímkou m druhého regulu, určete centrální roviny těchto přímek a jejich centrální body.



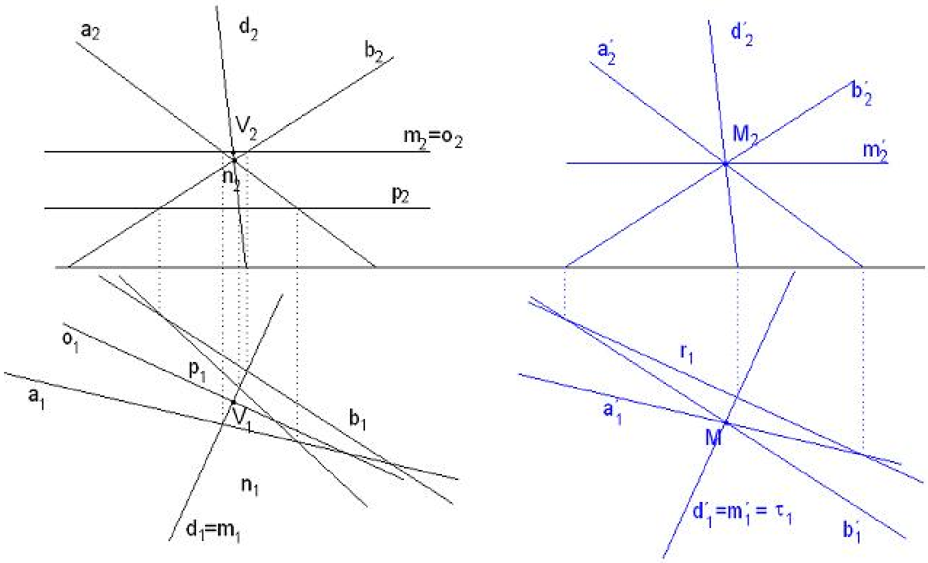
Obr. 3.2.3

Řešení: Jako v prvním příkladě jsou nárysy přímek druhého regulu rovnoběžné se základnicí a nárysy přímek prvního regulu tvoří svazek o středu n_2. Řídící rovina přímek druhého regulu je π, řídící rovina přímek prvního regulu je jakákoli rovina σ rovnoběžná s přímkami a, b.

Asymptotická rovina je tečná rovina v nevlastním bodě. Protože plocha Φ protíná nevlastní rovinu v singulární kuželosečce, tvoří řez asymptotické roviny plochou Φ přímka vlastní a přímka nevlastní opačného regulu daná řídící rovinou. Tj. asymptotická rovina α

přímky m prochází přímkou m a je rovnoběžná s rovinou π, asymptotická rovina β přímky b prochází přímkou b a je rovnoběžná s řídící rovinou σ. Centrální roviny jsou kolmé k asymptotickým, centrální body jsou jejich body dotyku. Centrální rovina γ přímky m je kolmá k půdorysně, patří směru osvětlení kolmému k π a její bod dotyku tedy patří prvnímu skutečnému obrysu plochy. Prvním skutečným obrysem je v tomto případě tedy strikční křivka plochy příslušná druhému regulu.[20] Centrální rovina δ přímky b je určena přímkou b a některou kolmicí k k rovině δ různoběžnou s přímkou b.

Příklad 3.2.4 Hyperbolický paraboloid je dán přímkami a, b prvního regulu a řídící rovinou π. Sestrojte jeho vrchol a osu.



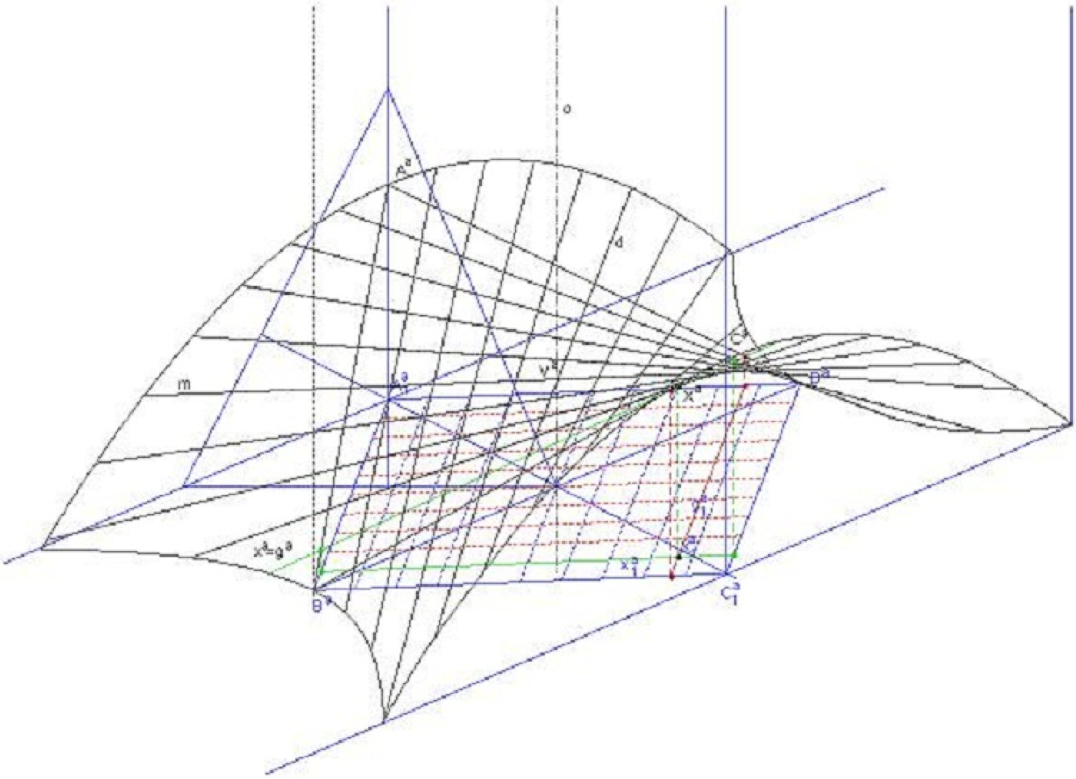
Obr. 3.2.4

Řešení: Přímky obou regulů plochy Φ se zobrazují jako v předchozích příkladech. Osa o plochy Φ je přímka rovnoběžná s průsečnicí r řídících rovin π a σ, rovina σ je rovnoběžná s přímkami a, b. Tečná rovina τ kolmá k přímce r se dotýká plochy Φ ve vrcholu V. Libovolným bodem M v prostoru vedeme přímky a', b' rovnoběžné s přímkami a, b. Přímky a', b' určují řídící rovinu σ. Průsečnice r rovin π a σ udává směr osy o plochy. Rovina τ je tedy kolmá k π. Bodem M vedeme rovinu τ' kolmou k přímce r, rovina τ' protíná řídící roviny v přímkách d', m'. Tyto přímky jsou rovnoběžné s přímkami plochy Φ i s tečnou rovinou τ. Sestrojíme-li přímky d, m plochy rovnoběžné s přímkami d', m', určí tyto přímky tečnou rovinu τ a jejich průsečík V je vrchol hyperbolického paraboloidu Φ. Vrcholem V prochází osa o paraboloidu. Nárys přímky d prochází n_2, půdorys sestrojíme pomocí některé přímky π druhého regulu. Půdorysy přímek m a d splynou a pomocí půdorysů průsečíku přímky m s přímkami a, b určíme nárys přímky m a nárys vrcholu V.

[20]Body dotyku centrálních rovin sestrojíme stejně jako v příkladě 4.1.5.

3.2.4 Využití v technické praxi

Jak jsme již ukázali, je hyperbolický paraboloid rovněž zadán dvěma podobnými bodovými řadami na mimoběžných přímkách. Podobné zobrazení zachovává dělicí poměr a tím je i dána konstrukce dalších přímek plochy. Předpokládejme, že máme dány mimoběžky a, b[21] a na nich odpovídající si body – bodům ^1A, ^2A přímky a odpovídají body ^1B, ^2B přímky b. Přímky $^1A^1B$, $^2A^2B$ patří druhému regulu a další přímky druhého regulu sestrojíme tak, že úsečky $^1A^2A$ a $^1B^2B$ rozdělíme na n stejných dílků a odpovídající body spojíme. Na přímkách $^1A^2A$ a $^1B^2B$ je rovněž určeno podobné zobrazení a stejným způsobem sestrojíme i další přímky prvního regulu. Hyperbolický paraboloid lze tedy zadat také čtyřmi body neležícími v rovině, tzv. *zborceným čtyřúhelníkem*. S tímto zadáním se nejčastěji setkáváme ve stavební praxi.



Obr. 3.2.5

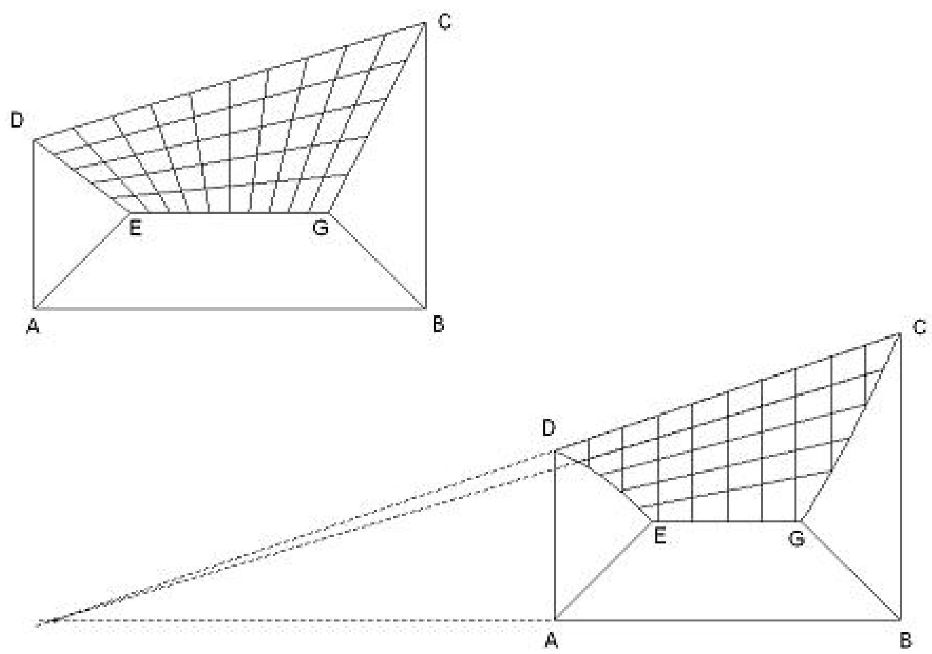
Na obrázku 4.2.2 je dán hyperbolický paraboloid v ortogonální axonometrii zborceným čtyřúhelníkem $ABCD$, body B, D leží v π a přímka BD je rovnoběžná s osou y. Body A, C mají stejnou z-ovou souřadnici a A_1^a, C_1^a leží na ose x, A_1 splývá s počátkem. Přímky plochy obou regulů jsou sestrojeny s využitím podobných řad, je sestrojena část plochy omezená půdorysnou π, bokorysnou μ a rovinou μ' rovnoběžnou s μ a procházející bodem C. Rovina

[21] Tj. přímky plochy patřící prvnímu regulu.

π protíná plochu Φ v hyperbole, roviny μ a μ' v parabolách. Konstrukce těchto kuželoseček jsou provedeny bodově jako průsečíky přímek plochy s příslušnými rovinami. Přímky $A_1^a C_1^a$ a $B_1^a D_1^a$ se protínají v půdoryse vrcholu V a jsou to půdorysy přímek d a m různých regulů, které určují tečnou rovinu ve vrcholu V. Osa o je rovnoběžná se souřadnou osou z. Axonometrické průměty plochy obalují obrysovou parabolu plochy. Její body[22] jsou sestrojeny jako body dotyku tečných rovin kolmých k axonometrické průmětně a procházejících odpovídající přímkou. Hledáme např. obrysový bod na přímce x druhého regulu. Axonometrický průmět této přímky splývá a axonometrickým průmětem přímky g prvního regulu, různoběžné s přímkou x. Sestrojíme axonometrické půdorysy obou těchto přímek.[23] Přímky g a x se protínají v bodě dotyku X roviny ρ kolmé k axonometrické průmětně a bod X patří obrysu. Z obrázku je zřejmý a i další název hyperbolického paraboloidu a to sedlová plocha.

Ve stavební praxi se této plochy využívá nejčastěji k zastřešování objektů s nepravidelnými půdorysy nebo rozlehlejších objektů. Využívá se jednoduchého praktického provedení i úspory materiálu (plocha je přímková) a rovněž pozitivního estetického dojmu.

Mějme dán objekt s nepravidelným půdorysem $ABCD$. Máme jej zastřešit s okapy ve stejné výši. Jestliže zastřešení řešíme obvyklým způsobem pomocí rovin, dostaneme hřeben EF, který není vodorovný, což nepůsobí nejlepším estetickým dojmem. Řešíme to následujícím způsobem. Bodem E vedeme vodorovný hřeben EG, kde G leží v rovině ABE. Střecha je určena střešními rovinami AED, ABE, BCG a částí hyperbolického paraboloidu.

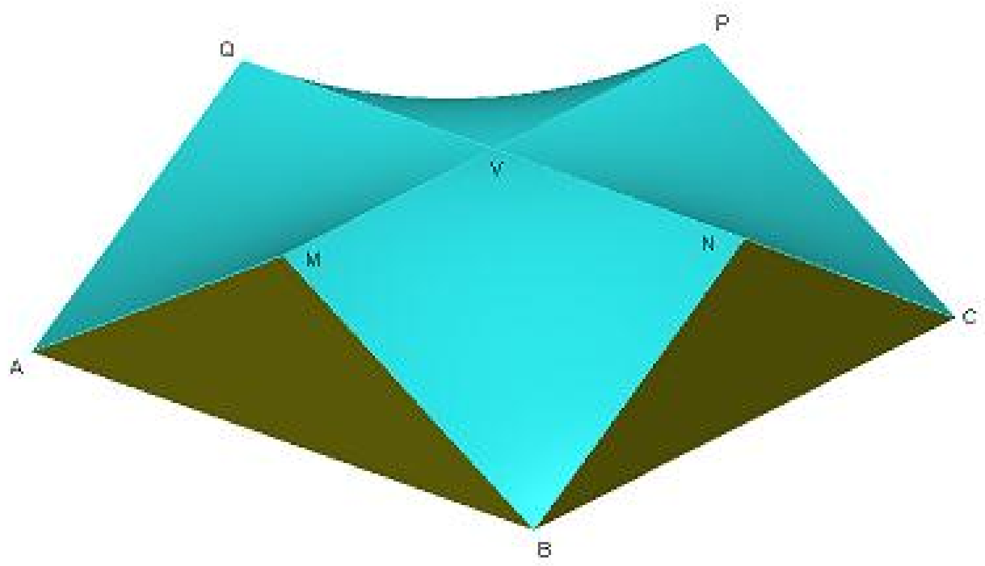


Obr. 3.2.6

[22]Body dotyku obrysové paraboly a přímek plochy.
[23]Pomocí průsečíků s přímkami opačných regulů.

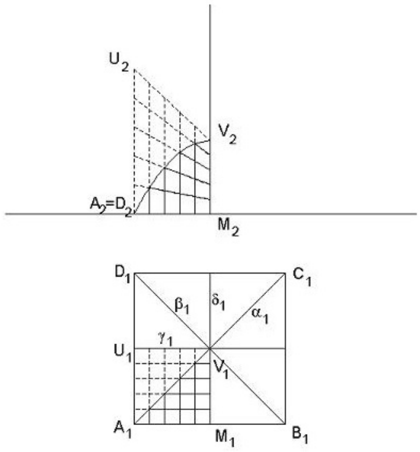
Ten můžeme zadat dvěma způsoby. Buď zborceným čtyřúhelníkem $EGCD$ nebo jej zadáme přímkami CD, EG a řídící rovinou s kolmou k přímce EG. V prvním případě hyperbolický paraboloid protíná střešní roviny ADE a BCG po řadě v přímkách DE, CG, ovšem přímky druhého regulu nejsou kolmé k hřebenu EG a praktické provedení je náročnější. V druhém případě protínají střešní roviny ADE a BCG plochu v kuželosečkách, ovšem přímky plochy druhého regulu jsou tentokrát kolmé k hřebenu EG.

Hyperbolický paraboloid se také může využít k zastřešení obdélníkového půdorysu $ABCD$. Využijeme čtyř hyperbolických paraboloidů. Nad stranami obdélníku sestrojíme stejně vysoké trojúhelníkové štíty ABM, BCN, CDP, ADQ, úsečky NQ, PM tvoří hřebeny střechy, průsečík hřebenů označme V. Hyperbolické paraboloidy jsou určeny zborcenými čtyřúhelníky $AMVQ$, $BMVN$, $CNVP$, $DPVQ$.



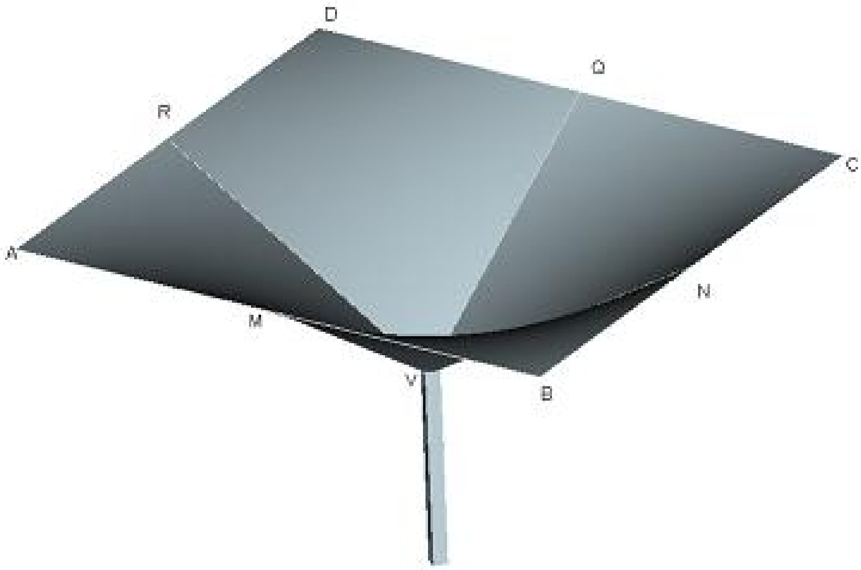
Obr. 3.2.7

Nad čtvercovým půdorysem se používá tzv. *Aymondova báň*, která má výborné statické vlastnosti. Máme-li dán čtverec $ABCD$ v půdorysně, body U, V mají různé z-ové souřadnice (U je výš) a půdorys V_1 je střed čtverce $ABCD$, půdorys U_1 je střed strany AD, označme M střed strany AB. Sestrojíme hyperbolický paraboloid daný zborceným čtyřúhelníkem $AMVU$. Jeho řídící roviny jsou kolmé k π, rovina kolmá k π procházející AC protíná tuto plochu parabole. Část Aymondovy báně tvoří ta část plochy nad trojúhelníkem $A_1M_1V_1$, tato část je osminou plochy. Celou Aymondovu báň dostaneme souměrností podle rovin α, β, γ, δ, což jsou roviny kolmé k π a procházející úhlopříčkami a středními příčkami čtverce $ABCD$.



Obr. 3.2.8

Rozlehlejší objekty zastřešujeme také následujícím způsobem. Základní stavební prvek je tvořen hyperbolickými paraboloidy nad čtvercovým půdorysem $ABCD$. Označme M, N, Q, R středy stran čtverce $ABCD$. Na svislé přímce procházející středem čtverce zvolme bod V (níž než body čtverce). Hyperbolické paraboloidy jsou určeny zborcenými čtyřúhelníky $AMVR$, $BMVN$, $CNVQ$, $DQVR$. Do bodu V se připojuje nosný sloup, kterým odchází dešťová voda. Tyto stavební prvky pak řadíme vedle sebe a používají se často pro zastřešování nástupišť.



Obr. 3.2.9

3.3 Obecné zborcené plochy

Obecná zborcená plocha Φ je množina přímek protínajících tři řídící křivky ${}^1k$, ${}^2k$, ${}^3k$, případně je průsečík s některou z křivek nahrazen dotykem s řídící plochou. Jestliže jsou řídící křivky algebraické je i plocha algebraická. Stupeň algebraické plochy je počet průsečíků obecné přímky s plochou a je závislý na stupni řídících křivek. Dá se ukázat, že pokud žádné dvě z řídících křivek ${}^1k$, ${}^2k$, ${}^3k$ nemají společný bod, pak stupeň plochy Φ je $2 \cdot^1 n \cdot^2 n \cdot^3 n$, kde ${}^1n$, ${}^2n$, ${}^3n$ jsou stupně řídících křivek. Mají-li např. tvořící křivky ${}^1k$, ${}^2k$ společný bod X, pak ploše formálně patří i kuželová plocha s vrcholem X a řídící křivkou ${}^3k$. Tuto plochu nebudeme ke zborcené ploše počítat a stupeň plochy je pak nižší a je roven $2 \cdot^1 n \cdot^2 n \cdot^3 n - s_{{}^1k{}^2k} \cdot^3 n - s_{{}^1k \cdot {}^3k} \cdot^2 n - s_{{}^2k \cdot {}^3k} \cdot^1 n$, kde $s_{{}^ik{}^jk}$, $i = 1, 2, 3$ je počet společných bodů křivek ${}^ik$, ${}^jk$. Rovněž se dá dokázat, že každá tvořící křivka je vícenásobnou křivkou plochy a její násobnost se rovná součinu stupňů obou zbývajících křivek.

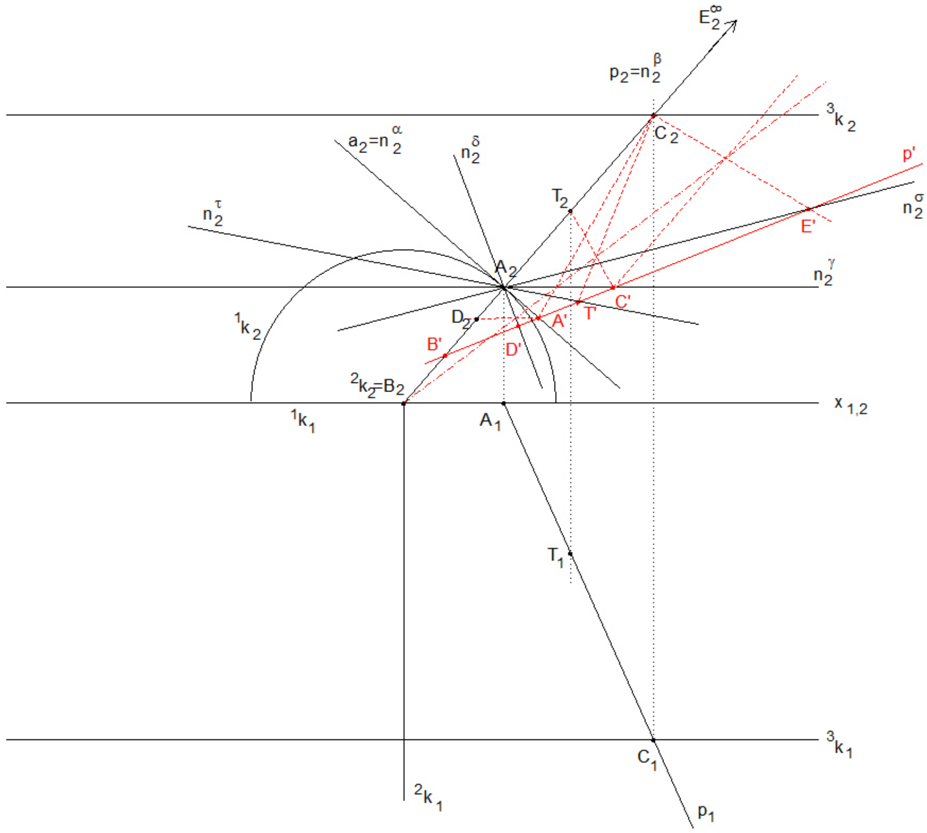
Víme, že pro regulární přímky zborcené plochy platí Chaslesova věta. Pomocí ní sestrojujeme tečné roviny v bodech regulární přímky.

Nechť Φ je obecná zborcená plocha zadaná řídícími křivkami ${}^1k$, ${}^2k$, ${}^3k$ a p tvořící přímka plochy, která křivky ${}^1k$, ${}^2k$, ${}^3k$ protíná po řadě v bodech A, B, C. Sestrojme v bodech A, B, C tečny a, b, c ke křivkám ${}^1k$, ${}^2k$, ${}^3k$. Tyto tečny spolu s přímkou p určují po řadě v bodech A, B, C tečné roviny α, β, γ zborcené plochy Φ procházející přímkou p. Je-li D další bod přímky p, pak pro tečnou rovinu δ v bodě D platí $(ABCD) = (\alpha\beta\gamma\delta)$.

Příklad 3.3.1 Plocha Montpeliérského oblouku je určena půlkružnicí ${}^1k$ ležící v ν, přímkou ${}^2k$ kolmou k ν a přímkou ${}^3k$ rovnoběžnou se základnicí. V bodě T regulární přímky p plochy Φ určete tečnou rovinu τ, k tečné rovině δ procházející přímkou p určete bod dotyku D a sestrojte asymptotickou rovinu σ přímky p.
Řešení: Přímka p protíná všechny řídící křivky, proto nárys p_2 musí procházet bodem k_2. Pomocí průsečíků s křivkami ${}^1k$, ${}^3k$ určíme půdorys přímky p. Označme A, B, C po řadě průsečíky přímky p s tvořícími křivkami ${}^1k$, ${}^2k$, ${}^3k$. Tečná rovina α v bodě A je určena přímkou p a tečnou a k půlkružnici ${}^1k$ v bodě A, tečná rovina β v bodě B je určena přímkami p a ${}^2k$, a tečná rovina γ v bodě C je určena přímkami p, ${}^3k$. Určíme nárysné stopy rovin α, β, γ Platí $n_2^\alpha = a_2$, $n_2^\beta = p_2$, n_2^γ je rovnoběžná se základnicí a všechny nárysné stopy rovin obsahujících přímku p prochází A_2. Podle Chaslesovy věty platí pro tečnou rovinu v bodě T pro dvojpoměry $(ABCT) = (A_2B_2C_2T_2) = (\alpha\beta\gamma\tau) = (n_2^\alpha n_2^\beta n_2\gamma n_2^\tau$. Přímku n_2^β svazku o středu A_2 určíme doplněním projektivity dvou nesoumístných bodových řad. Protněme svazek přímek o středu A_2 libovolnou přímkou p' neprocházející středem svazku a označme A', B', C' průsečíky přímky p' po řadě s přímkami a_2, p_2, n_2^γ. Řady p_2 a p' jsou projektivní, bodům A_2, B_2, C_2 odpovídají po řadě body A', B', C'. Sestrojíme obraz T' bodu T_2[24] a nárysná stopa tečné roviny τ je určena body A_2 a T'. Obráceně, jestliže známe nárysnou stopu n_2^δ tečné roviny procházející přímkou p, určíme průsečík D' této stopy s přímkou p'

[24]Doplněním projektivity např. využitím Pappova axiomu.

a obraz D_2 bodu D'. D_2 je pak nárys bodu dotyku. Asymptotická rovina σ je tečná rovina v nevlastním bodě, takže na p' určíme obraz E' nevlastního bodu E_2^∞ přímky p_2 a nárysná stopa roviny σ je určena body A_2 a E'.



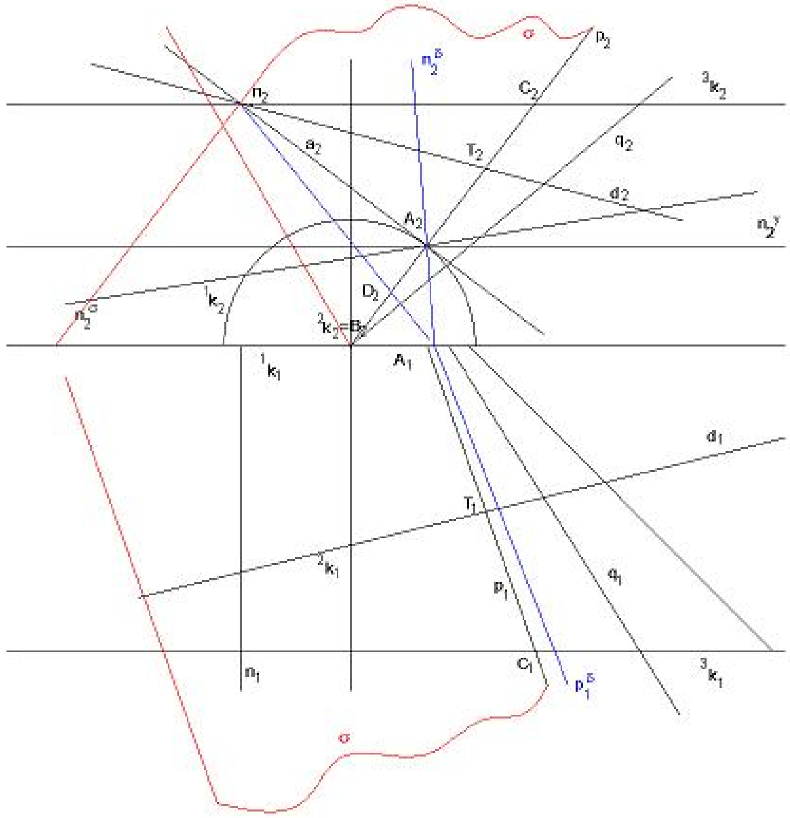
Obr. 3.3.1

Jestliže dvě zborcené plochy Φ a Φ' mají společnou přímku p, pak podle Chaslesovy věty mají společné tečné roviny procházející přímkou p a plochy Φ a Φ' se podél přímky p dotýkají. Toho využijeme tak, že některé konstrukce na obecných zborcených plochách nahradíme konstrukcemi na zborcených kvadrikách. Jsou-li ^1k, ^2k, ^3k řídící křivky plochy Φ, p tvořící přímka této plochy, která řídící křivky protíná v bodech A, B, C a a, b, c tečny křivek ^1k, ^2k, ^3k, v bodech A, B, C. Podle Chaslesovy věty jsou přímky a, b, c mimoběžné a určují tak zborcenou kvadriku Ω, která se plochy Φ dotýká podél přímky p. Konstrukci tečných rovin zborcené plochy je možno převést na konstrukci tečných rovin dotykové zborcené kvadriky.

Mějme dánu zborcenou plochu Φ z příkladu 4.1.8. Přímky a, ^2k, ^3k určují dotykový zborcený hyperboloid Ω dotýkající se dané zborcené plochy Φ podél přímky p. Nárysy přímek druhého regulu tvoří svazek o středu $^2k_2$, nárysy přímek prvního regulu tvoří svazek o středu n_2, který je průsečíkem přímek $_2$ a $^3k_2$. Tečná rovina τ v bodě T přímky p je určena dvěma přímkami p, d různých regulů zborcené kvadriky Ω. Sestrojíme přímku d prvního regulu.[25].

[25]Podle příkladu 4.1.1.

Podobně pro konstrukci bodu dotyku dané tečné roviny δ procházející přímkou p či pro sestrojení asymptotické roviny použijeme známých konstrukcí na zborceném hyperboloidu.



Obr. 3.3.2

Jestliže v rovinách $\alpha = (a, p)$, $\beta = (b, p)$, $\gamma = (c, p)$ zvolíme přímky a', b', c' procházející body A, B, C, jsou opět mimoběžné a určují rovněž zborcenou kvadriku Ω', která se dotýká plochy Φ podél přímky p. Existuje *nekonečně mnoho* zborcených kvadrik, které se dotýkají plochy Φ podél přímky p. Pro konstrukce volíme takovou kvadriku, jejíž některé přímky mají vzhledem k průmětnám zvláštní polohu, abychom zjednodušili konstrukce.

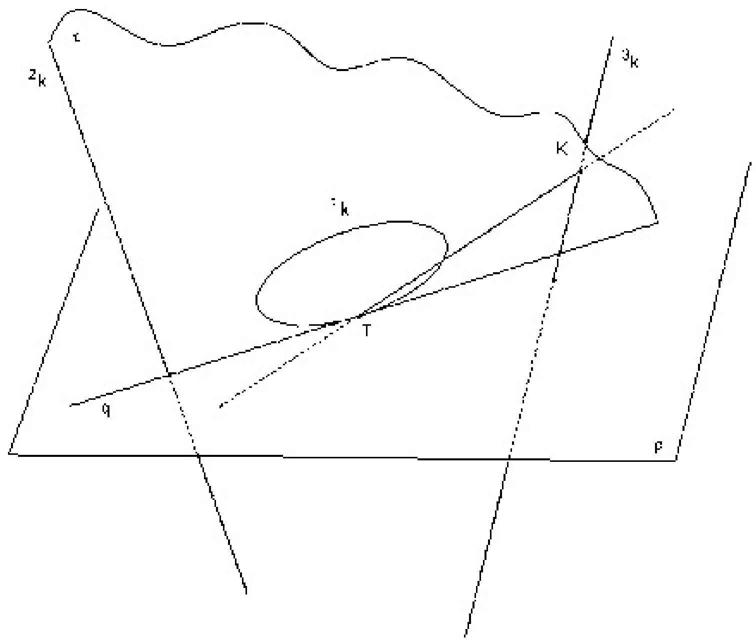
Ke každé obecné přímce zborcené plochy Φ existuje asymptotická rovina. Protože množina přímek plochy je jednoparametrická, je jednoparametrická i množina asymptotických rovin plochy Φ a obaluje rozvinutelnou plochu σ, tzv. *asymptotickou rozvinutelnou plochu* Ω zborcené plochy Φ. Například v případě zborceného hyperboloidu se jedná o *asymptotickou kuželovou plochu*, asymptotické roviny hyperbolického paraboloidu tvoří *dva svazky rovnoběžných rovin*.

Na obecné zborcené ploše mohou existovat kromě přímek regulárních i přímky torzální. Je-li p torzální přímka zborcené plochy Φ, pak existuje rovina τ[26], která se zborcené plochy Φ

[26]Torzální rovina.

dotýká podél celé přímky p. Ostatní roviny procházející přímkou p jsou rovněž tečné, všechny se plochy dotýkají v jediném bodě K přímky p.[27] Soumezná přímka k přímce p je s přímkou p mimoběžná, pokud se jedná o regulární přímku a různoběžná v případě torzální přímky. Torzální přímku p protíná s ní soumezná v kuspidálním bodě a spolu s p určuje torzální rovinu.

Předpokládejme, že je plocha Φ zadána rovinnou křivkou ^1k a dvěma mimoběžnými přímkami ^2k, ^3k, které neleží v rovině křivky ^1k a neprotínají ^1k. Ukážeme si konstrukci torzálních přímek a rovin. Přímkou ^2k proložíme rovinu τ, jejíž průsečnice s rovinou ρ křivky ^1k se dotýká křivky ^1k v bodě T. Průsečík K roviny τ a křivky ^3k je kuspidální bod K přímky TK, přímka Kje torzální a rovina τ je torzální. Obdobně pro přímku ^3k.



Obr. 3.3.3

Mez vlastního stínu při rovnoběžném osvětlení plochy Φ je *množina bodů dotyku tečných světelných rovin* této plochy. Mohou nastat některé speciální případy. Je-li p regulární přímka rovnoběžná se směrem osvětlení, patří přímka p mezi vlastního stínu. Je-li p torzální přímka a tečná světelná rovina je rovina torzální, pak opět p patří mezi vlastního stínu. Není-li světelná rovina torzální, pak se dotýká plochy v kuspidálním bodě. Mez vlastního stínu tedy prochází všemi kuspidálními body plochy.

Jestliže je zborcená plocha zadána řídícími křivkami ^1k, ^2k, ^3k, kde např. $^3k^\infty$ je nevlastní přímka, pak se plocha nazývá *cylindroid* nebo také *Catalanova plocha*. Jestliže je navíc např. ^2k vlastní přímka, pak se plocha nazývá *konoid*. Další pojmenování konoidu

[27] Kuspidální bod.

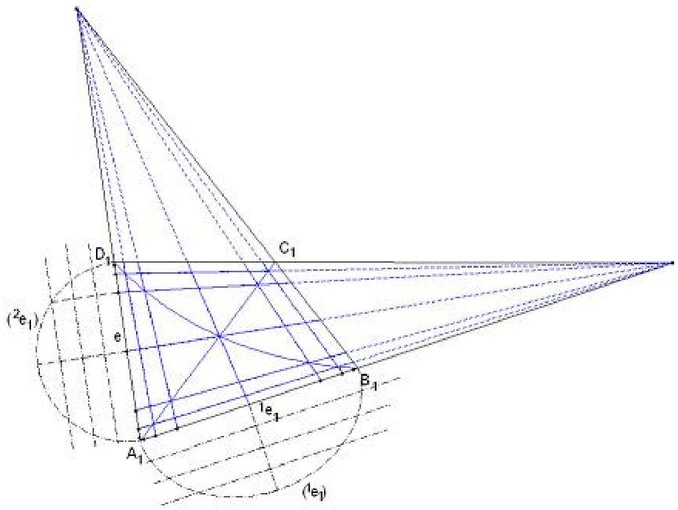
se pak řídí křivkou ^1k[28] Navíc, je-li ^2k kolmá na přímku $^3k^{\infty}$[29] nazývá se konoid *přímý* v opačném případě *šikmý* nebo *kosý*.

3.4 Užití zborcených ploch

Zborcené plochy se užívají především ve stavebnictví, protože jsou konstrukčně jednoduché (přímkami se spojují tři řídící útvary), mají výborné statické vlastnosti (soumezné tvořící přímky jsou mimoběžné), působí lehkým a vzdušným dojmem, je na ně nevelká spotřeba materiálu.

Z kuželosečkových konoidů se přímého kruhového konoidu užívá na tzv. *pilových střechách* nad továrními halami, kde je tak umožněno dostatečné osvětlení pracoviště. Roviny řídících kružnic jsou svislé nebo mírně nakloněné (v případě, kdy požadujeme, aby střecha propouštěla více světla), vlastní řídící přímky jsou vodorovné.[30] V některých případech se místo kružnice užívá řídící parabola a dostáváme pak parabolický konoid. Kruhový konoid se dále využívá jako opěrná zeď vodní nádrže, skladiště sypkých hmot apod.[31]

Zastřešení nepravidelného čtyřúhelníkového půdorysu je také možno provést pomocí dvou eliptických konoidů, dostáváme tzv. *křížovou klenbu*. Předpokládejme, že máme dán půdorys $ABCD$.



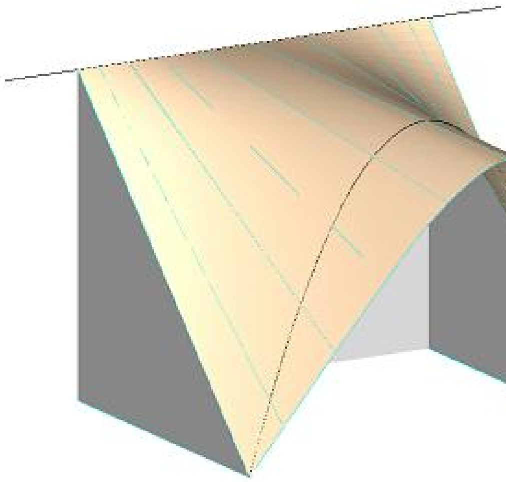
Obr. 3.4.1

Dva eliptické konoidy jsou určeny řídícími elipsami ^1e, ^2e ve svislých rovinách procházejících přímkami AB, BC a jejich druhé osy jsou stejně velké. Řídící rovina obou konoidů je π a

[28]Např. eliptický, resp. parabolický, resp. kruhový, konoid apod.
[29]Tj. na řídící rovinu.
[30]Jedná se o přímý konoid, takže řídící rovina je kolmá k řídící přímce.
[31]Tj. tam, kde na stěny působí velké tlaky, které se na konoidech rozkládají.

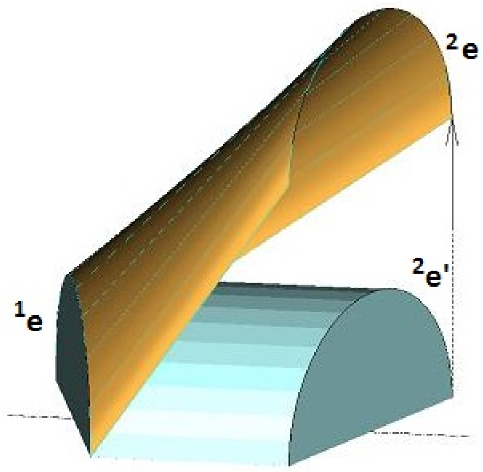
řídící přímky jsou svislé a prochází průsečíky přímek AD a BC či AB a CD. Vodorovné roviny tedy protínají oba konoidy v přímkách, toho využijeme při konstrukci jejich průniku a řezu svislými rovinami procházejícími přímkami AC, BD.

Přímý parabolický konoid se dá také využít ke chránění vchodu do budovy, je určen parabolou ve svislé rovině, řídící přímka je vodorovná, řídící rovina je svislá, kolmá k rovině paraboly. Na obrázku je konoid omezen šikmou rovinou.



Obr. 3.4.2

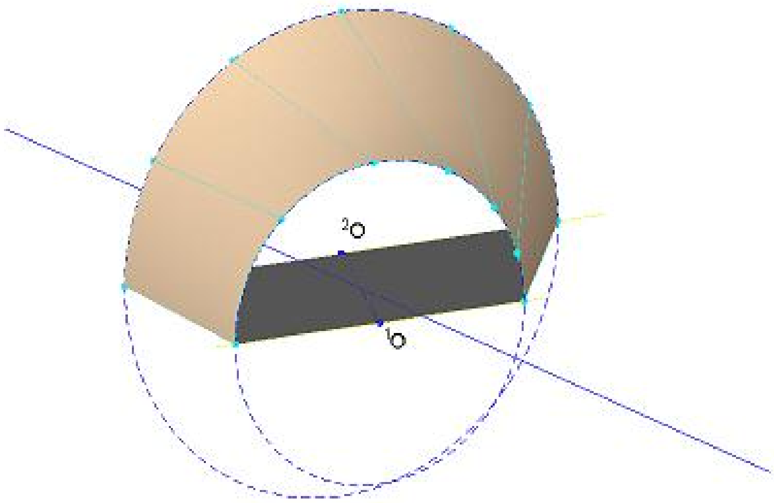
Plocha klenby nad schodištěm je částí Catalanovy plochy nazývané *Freziérův cylindroid*. Řídící útvary jsou zadány následujícím způsobem. Mějme rotační válcovou plochu s osou v π a rovnoběžnou s ν,[32] uvažujme dva eliptické řezy ${}^1e$, ${}^2e'$ v rovinách kolmých k π a elipsu ${}^2e'$ vysuňme svislým směrem do elipsy ${}^2e$. Křivky ${}^1e$, ${}^2e$ jsou řídící křivky a řídící rovina je ν.



Obr. 3.4.3

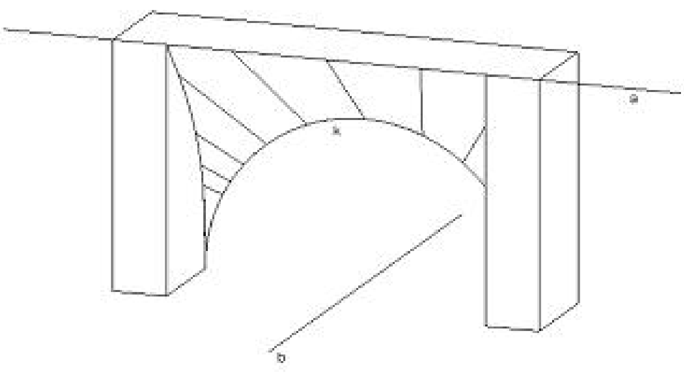
[32]Část válcové plochy nad π.

Pro šikmý podjezd železniční trati se využívá *plochy šikmého průchodu*. Řídící křivky jsou kružnice ležící ve svislých rovnoběžných rovinách a spojnice ${}^1O{}^2O$ jejich středů není k těmto rovinám kolmá. Řídící přímka prochází středem úsečky ${}^1O{}^2O$ kolmo k rovinám kružnic. V praxi se většinou opět bere jen část plochy určená půlkružnicemi.



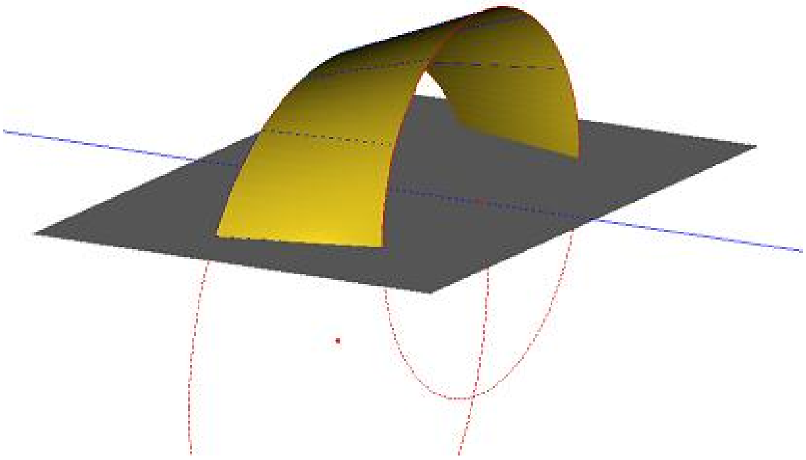
Obr. 3.4.4

Řídící kružnici a dvěma přímkami je zadána plocha *Montpeliérského oblouku*. Používá se jí jako klenby při přechodu válců do hranolů nebo jako vyrovnávací plochy. Jedna řídící přímka je rovnoběžná s rovinou řídící kružnice, druhá řídící přímka je kolmá k rovině řídící kružnice a prochází středem řídící kružnice.



Obr. 3.4.5

Podobné využití jako Montpeliérský oblouk má i *Marseillský oblouk*, který je zadán dvěma řídícími kružnicemi v rovnoběžných rovinách a řídící přímkou procházející středem jedné řídící kružnice kolmo k její rovině.



Obr. 3.4.6

Pro konstrukci střechy nad kruhovým půdorysem je možno využít tzv. *helmice* (u nás známá *Štramberská trúba*). Plocha je dána řídící kružnicí v půdorysně a dvěma navzájem kolmými přímkami, jejichž půdorysy procházejí středem kružnice.

Obr. 3.4.7

Kapitola 4

Šroubové plochy

Šroubová plocha $\Phi(k)$ vzniká šroubovým pohybem křivky k, která není trajektorií daného šroubového pohybu. Je-li pohyb levotočivý, resp. pravotočivý je i plocha Φ levotočivá, resp. pravotočivá. Křivku k nazýváme *tvořící křivka* plochy Φ, osa o šroubového pohybu je *osou plochy* Φ. Jestliže křivka k leží na rotační válcové ploše s osou o, pak splývá šroubová plocha s touto válcovou plochou. Tento případ nebudeme dále uvažovat.

Každý bod tvořící křivky neležící na o vytváří *šroubovici plochy*. Plocha se šroubuje sama v sebe, toho využíváme v technické praxi. Šroubové plochy jsou zobecněním rotačních ploch — rotační pohyb je nahrazen šroubovým pohybem. Rovnoběžkám rotačních ploch odpovídají na šroubových plochách šroubovice. Na šroubové ploše jsou dvě významné soustavy křivek. Jednou z nich je soustava vyšroubovaných poloh tvořící křivky, druhou soustava šroubovic bodů tvořící křivky. Každá křivka, která protíná všechny tyto šroubovice, vytvoří při stejném šroubovém pohybu touž šroubovou plochu. Speciálně lze šroubovou plochu vytvořit šroubovým pohybem rovinného řezu, jehož rovina prochází osou šroubového pohybu, tzv. *osový řez*. Nazýváme jej *meridián* šroubové plochy. Zvolíme-li osu šroubové plochy rovnoběžnou s průmětnou, pak meridián, jehož rovina je rovnoběžná s touto průmětnou se nazývá *hlavní meridián*. Část meridiánu, ležící v jedné polorovině určené v jeho rovině osou o , se nazývá *polomeridián*. Každý polomeridián je tvořící křivkou. Všechny osové řezy šroubové plochy jsou vzájemně shodné křivky. Každý osový řez je složen z nekonečně mnoha shodných částí, které posunutím o *celistvý násobek* výšky závitu ve směru osy plochy splývají.

Řez šroubové plochy rovinou kolmou k ose se nazývá *normální řez*. Normální řez šroubové plochy je, na rozdíl od normálního řezu rotační plochy, také tvořící křivkou.

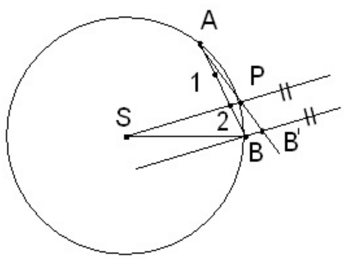
Výška závitu, redukovaná výška závitu plochy jsou definovány stejně jako u šroubovice či rozvinutelné plochy šroubové. Protíná-li tvořící křivka k osu o, nazývá se plocha Φ *uzavřená*, neprotíná-li k osu o, nazývá se plocha Φ *otevřená*. U otevřených ploch může na křivce existovat bod, jehož vzdálenost od osy je (v jeho okolí) minimální, resp. maximální. Šroubovici takového bodu nazýváme *hrdelní, resp. rovníková šroubovice*. V technické praxi se nejvíce využívá ploch, které vzniknou šroubovým pohybem přímky – přímkové šroubové plochy –

nebo kružnice – cyklické šroubové plochy.

4.1 Základní úlohy na šroubových plochách

Uvedeme několik základních úloh, které užíváme pro konstrukce na šroubových plochách. Šroubový pohyb bude dán orientací (šipkou), osou o a redukovanou výškou závitu v_0. Budeme řešit v Mongeově projekci, osa šroubového pohybu bude kolmá k půdorysně.

Nejprve si připomeneme *d´Ocagneovu rektifikaci* oblouku kružnice příslušného středovému úhlu menšímu než $60°$. Máme-li rektifikovat oblouk AB kružnice k, rozdělíme tětivu AB body 1 a 2 na tři stejné díly. Bod 2 promítneme ze středu S kružnice k do pomocného bodu P na kružnici. Vedeme koncovým bodem B daného oblouku rovnoběžku s polopřímkou SP a určíme průsečík B' této rovnoběžky s polopřímkou AP. Platí, že velikost oblouku AB je přibližně rovna velikosti úsečky AB'.
Máme-li obráceně na danou kružnici k od jejího bodu A navinout úsečku AB' délky m, určíme na kružnici k bod P tak, aby velikost úsečky AP byla rovna dvěma třetinám velikosti úsečky AB. Na spojnici AP určíme B' tak, aby velikost úsečky AB' byla m. Vedeme bodem B' rovnoběžku s SP a tato rovnoběžka kružnici k protne v bodě B. Velikost oblouku AB je přibližně rovna m.



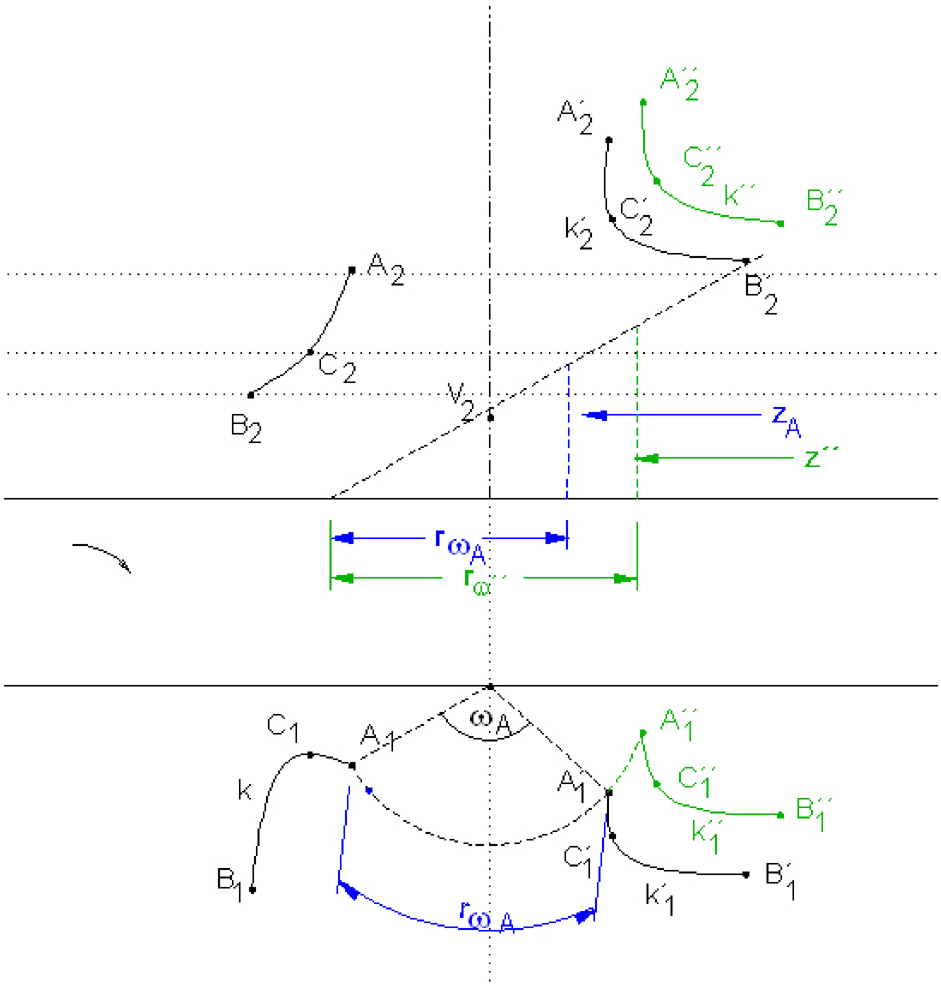
Obr. 4.1.1

Příklad 4.1.1 Přešroubujte křivku k do polohy k', je-li nejprve znám úhel otočení ω, potom do polohy k'', je-li známa velikost posunutí z.
Řešení: Mějme dán např. pravotočivý šroubový pohyb. Každý bod křivky k se přešroubuje o úhel ω, tj. i všechny body křivky se otočí o stejný úhel a tedy i posunou o stejnou vzdálenost. Určíme velikost posutí pro bod A.
Označme h šrouibovici bodu A a r její poloměr. Sestrojíme základní trojúhelník této šroubovice.[1] Sestrojíme podobný trojúhelník, jeho odvěsny budou mít velikost $r\omega_A$ a z_A. Tj. určíme velikost oblouku A_1A_1' kružnice h_1 a naneseme ji na odvěsnu základního trojúhelníku.

[1] Odvěsny má velikosti r a v_0.

Rektifikaci oblouku můžeme provést například d´Ocagneovou konstrukcí.[2] Přešroubujeme dostatečný počet bodů a určíme křivku k'.

Je-li naopak známa velikost posunutí, určíme ze základního trojúhelníku velikost otočení a opět přešroubujeme dostatečný počet bodů křivky k. Oblouk $r\omega$ musíme nanášet na půdorys šroubovice bodu A, odtud zjistíme velikost úhlu ω.

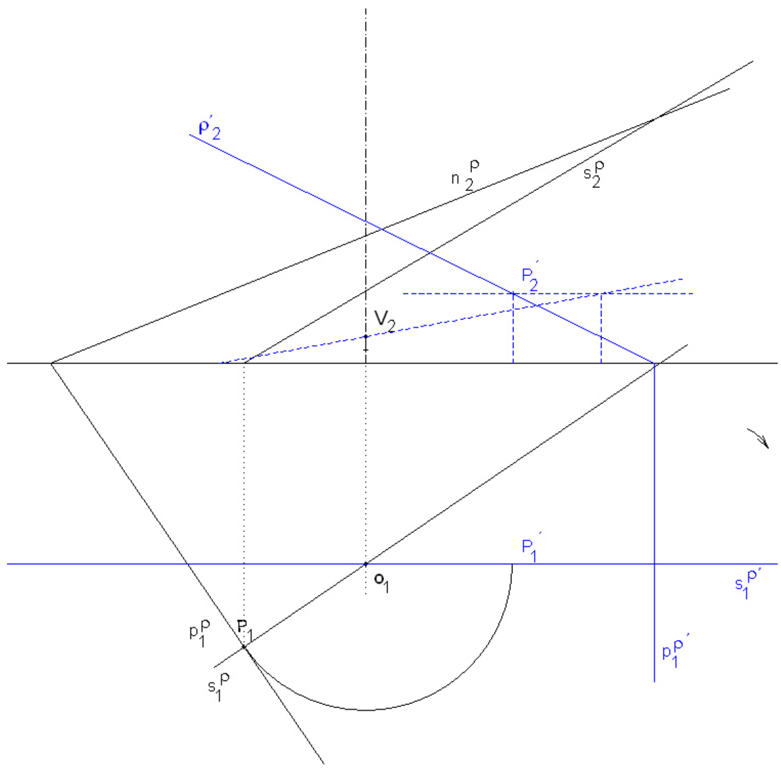


Obr. 4.1.2

Příklad 4.1.2 Přešroubujte rovinu ρ do polohy kolmé k nárysně.
Řešení:

Rovina je dána stopami, pohyb je pravotočivý. Rovinu přešroubujeme do polohy ρ', víme-že ρ' má být kolmá k nárysně. Spádová přímka s^ρ první osnovy roviny ρ bude po přešroubování rovnoběžná s nárysnou. Známe tedy půdorys s^ρ i přešroubované $s^{\rho'}$. Protože je ρ' kolmá k nárysně, je $s_2^{\rho'} = \rho_2$.

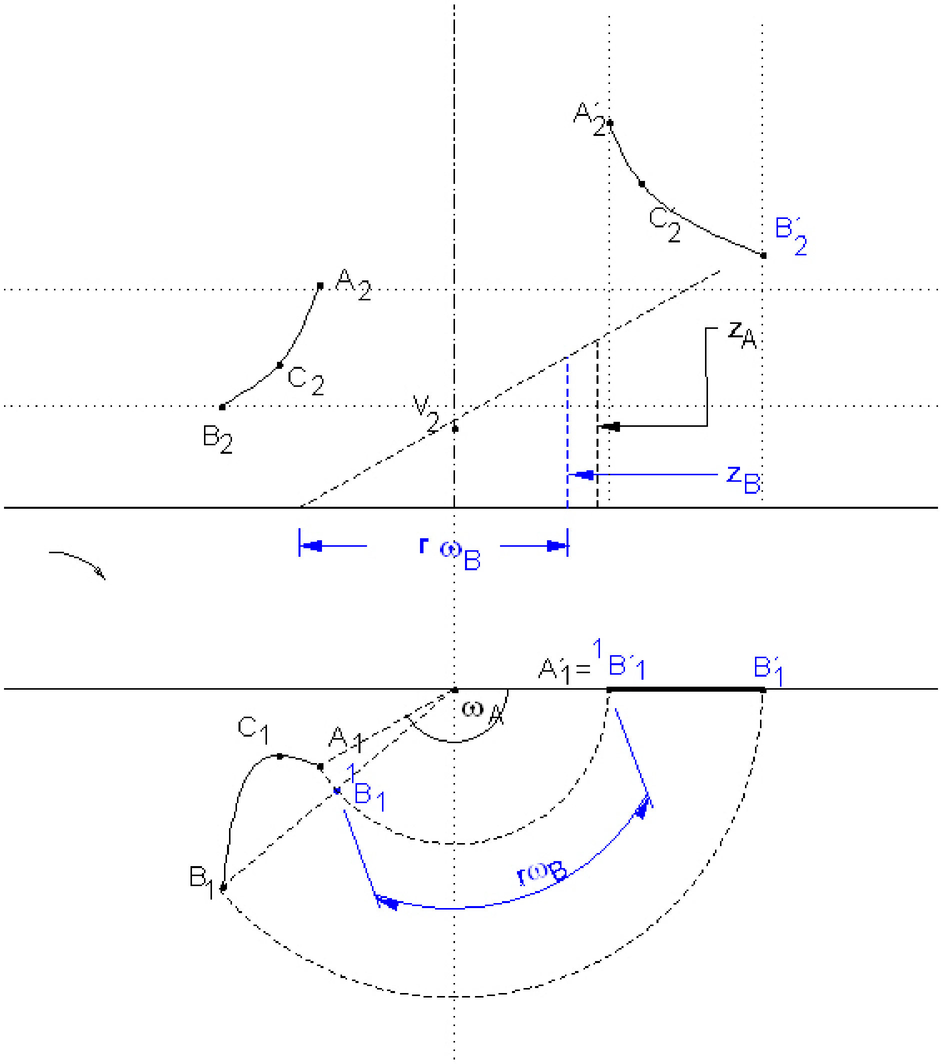
[2] Pokud je úhel ω větší než 60° rozdělíme ho například na poloviny nebo čtvrtiny a rektifikujeme jen část.



Obr. 4.1.3

Příklad 4.1.3 Určete hlavní meridián šroubové plochy $\Phi(k)$ dané tvořící křivkou k.
Řešení:

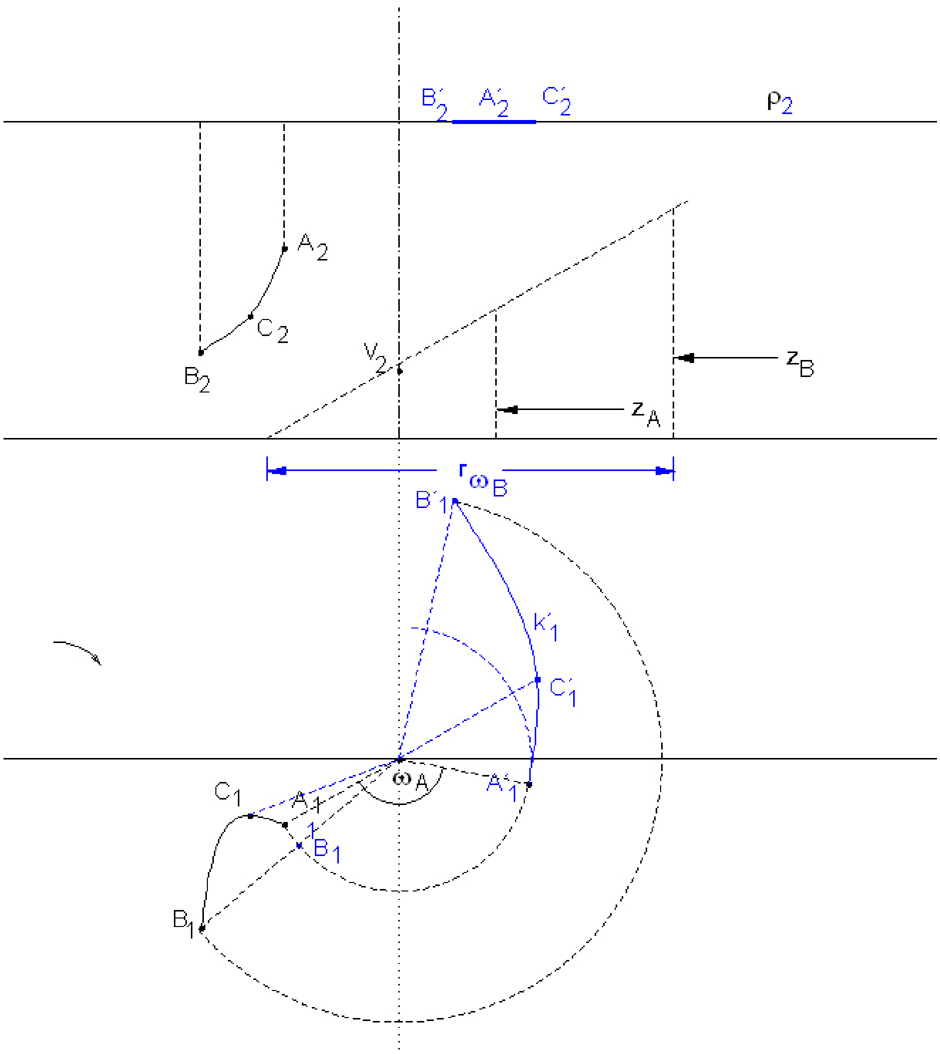
Pravotočivá šroubová plocha je dána křivkou k. Hlavní meridián leží v rovině μ procházející osou a rovnoběžné s nárysnou. Dostatečný počet bodů křivky k přešroubujeme do roviny μ podle příkladu 4.1.1. Pro každý bod tak dostáváme různou velikost otočení a tím i posunutí. Není však nutné sestrojovat pro každý bod základní trojúhelník. Sestrojme např. základní trojúhelník pro bod A, má odvěsny r, v_0, kde r je poloměr šroubovice l bodu A. Přešroubujeme bod A do bodu A' ležícího v rovině π. Pro otočení ω_A sestrojíme ze základního trojúhelníku posunutí z_A. Pro bod B zjistíme velikost posunutí takto: Sestrojíme bod ^1B ležící na šroubovici l bodu A tak, že $^1B1$ je průsečík $l1$ a $o1B1$. Určíme velikost otočení $\omega_{^1B}$ = ω_B a k němu z již sestrojeného základního trojúhelníku určíme posunutí $z_{^1B} = z_B$.



Obr. 4.1.4

Příklad 4.1.4 Sestrojte normální řez šroubové plochy $\Phi(k)$.
Řešení:

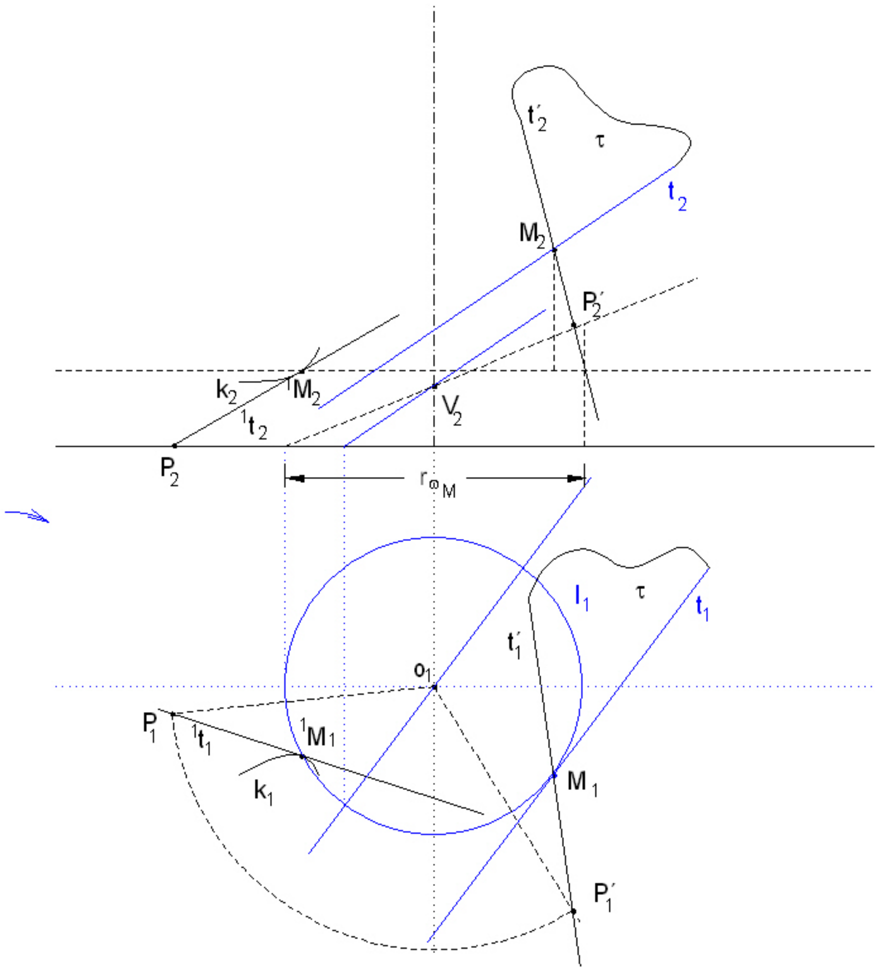
Šroubová plocha je dána křivkou k, sestrojíme řez rovinou ρ kolmou k ose o. Jako v příkladě 4.1.1 přešroubujeme dostatečný počet bodů křivky k do roviny ρ, pro každý bod jsou různá posunutí a tím i otočení. Opět nemusíme sestrojovat základní trojúhelníky šroubovic všech bodů, stačí sestrojit základní trojúhelník šroubovice l bodu A a v základním trojúhelníku pak ke konkrétním posunutím bodů B dostáváme úsečky délky $r\omega_B$, které nanášíme na kružnici $l1$, získáme body ${}^1B$ a na polopřímkách $o1^1B1$ pak leží půdorysy bodů B.



Obr. 4.1.5

Příklad 4.1.5 Určete tečnou rovinu v bodě M plochy $\Phi(k)$, který je zadán půdorysem $M1$.
Řešení:

Šroubová plocha je dána křivkou k. Bod M leží na šroubovici l. Abychom mohli určit jeho nárys, sestrojíme na křivce k bod ${}^1M$, který šroubovým pohybem přejde do bodu M. Máme tak dáno otočení ω_M, určíme odpovídající posunutí podle předchozího. Tečnou rovinu v bodě M určíme různými tečnami ke dvěma křivkám procházejícím bodem M. Sestrojíme tečnu t šroubovice l bodu M a tečnu t' ke křivce k', která vznikne přešroubováním křivky k do bodu M.
Křivku k' nemusíme sestrojovat. V bodě ${}^1M$ určíme tečnu ${}^1t$ křivky k a tu přešroubujeme do přímky t' procházející bodem M. Tečnu t šroubovice l v bodě M sestrojíme užitím směrové kuželové plochy této šroubovice. Přímky t a t' určují tečnou rovinu τ plochy $\Phi(k)$ v bodě M.



Obr. 4.1.6

Příklad 4.1.6 Sestrojte bod a tečnu druhého zdánlivého obrysu $\Phi(k)$.
Řešení:

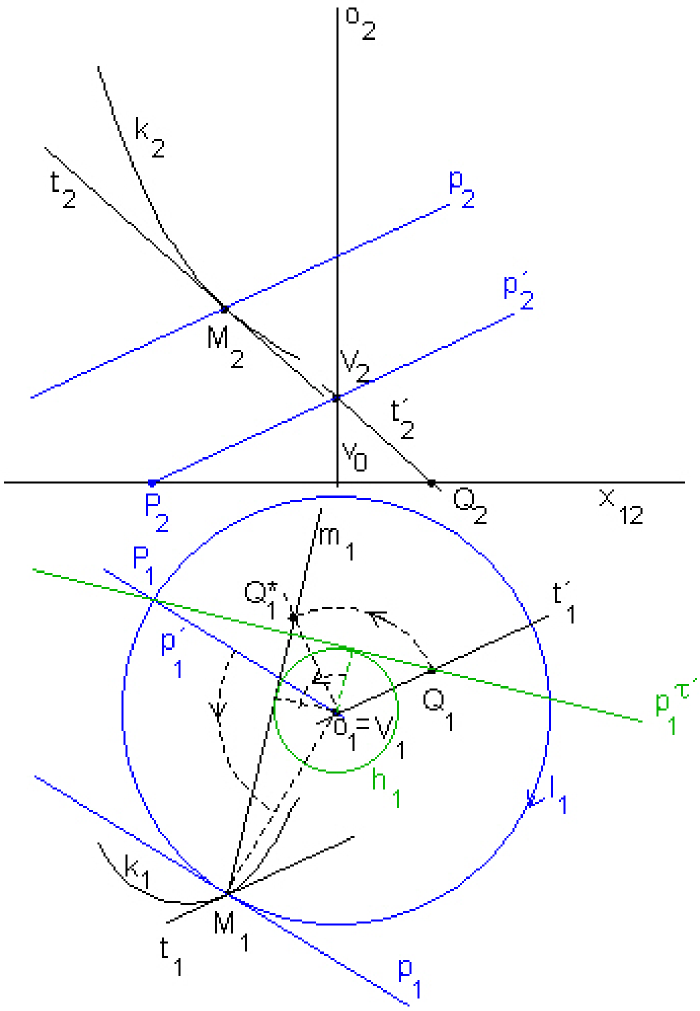
V libovolném bodě M tvořící křivky k plochy $\Phi(k)$ určíme tečnou rovinu podle příkladu 4.1.5. Abychom dostali bod druhého skutečného obrysu, musí přešroubovaná tečná rovina patřit směru osvětlení, tj. být kolmá k ν. Čili tečnou rovinu bodu M přešroubujeme do polohy kolmé k ν[3], bod dotyku je bodem druhého skutečného obrysu.

Příklad 4.1.7 Sestrojte půdorys hrany vratu rozvinutelné šroubové plochy, která se dotýká $\Phi(k)$ podél šroubovice l.
Řešení:

V bodě M tvořící křivky k určíme tečnou rovinu τ plochy $\Phi(k)$. Bod M vytvoří šroubovici l a rovina τ obalí dotykovou rozvinutelnou šroubovou plochu Ω. Tato plocha se dotýká $\Phi(k)$ podél šroubovice l. Hranu vratu h rozvinutelné plochy Ω sestrojíme stejně jako v kapitole Rozvinutelná plocha šroubová, příklad 1. Její půdorys $h1$ je kružnice o středu $o1$, dotýkající

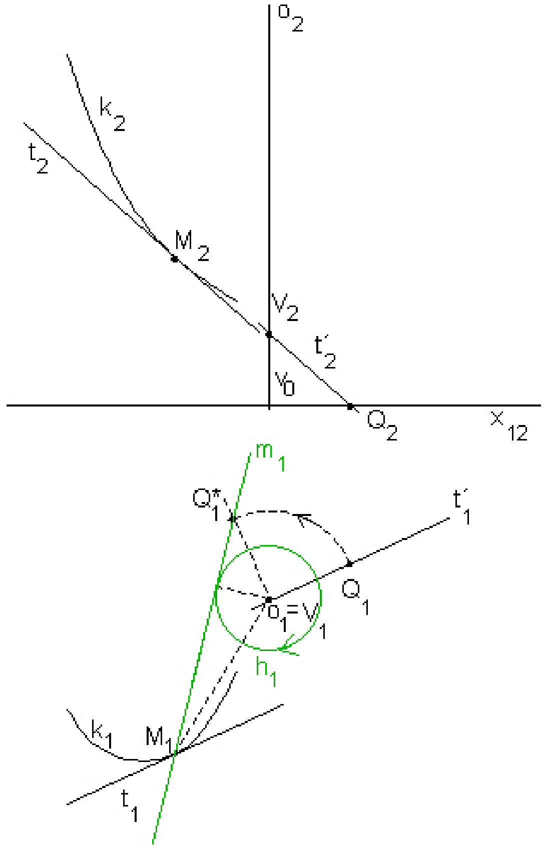
[3] Příklad 4.1.2.

se půdorysné stopy $p1^{\tau'}$, tečná rovina plochy $\Phi(k)$ v bodě M je určena tečnou t tvořící křivky k a tečnou p šroubovice l.



Obr. 4.1.7

Konstrukci půdorysu šroubovice h je možno zjednodušit: Uvažujme otáčení kolem $o1$ o úhel velikosti $90°$ *proti šipce* udávající klesání šroubového pohybu. Jestliže P, Q jsou po řadě půdorysné stopníky přímek p', t', pak v tomto otočení přejde $P1$ do $M1$ a $Q1$ do $Q1^*$. Přímka $p1^{\tau'} = P1Q1$ proto přejde do tečny $m1 = M1Q1^*$ kružnice 1. Příslušné zjednodušení je provedeno na obrázku 4.1.8.



Obr. 4.1.8

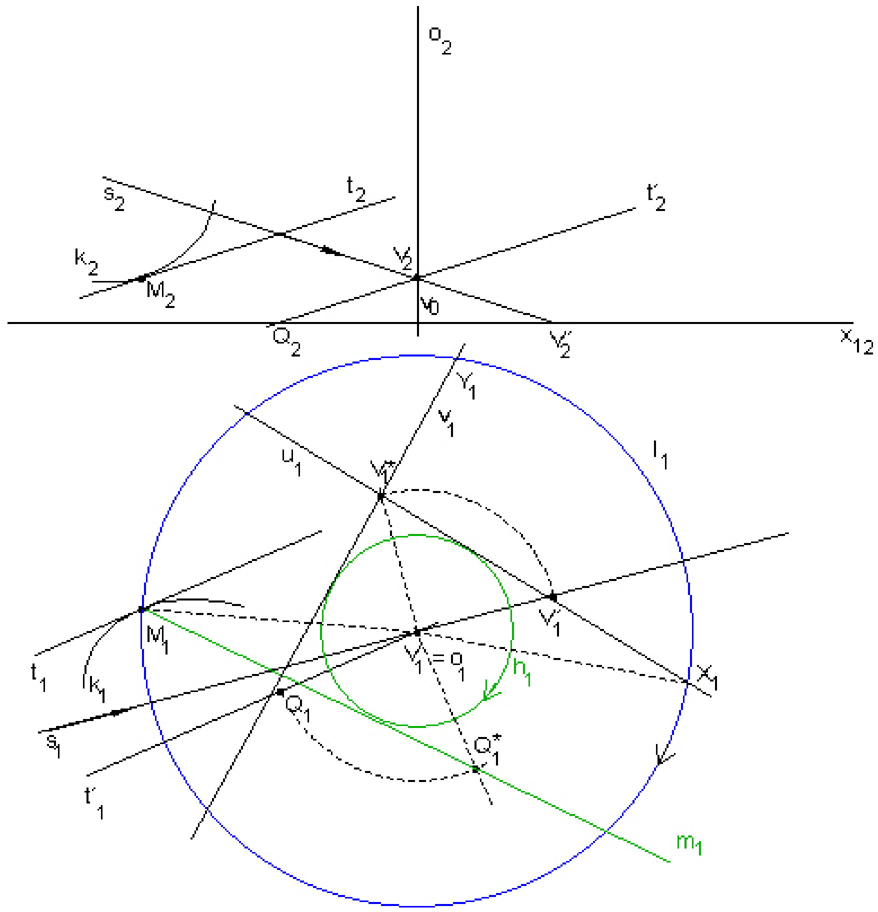
Příklad 4.1.8 Na $\Phi(k)$ určete bod meze vlastního stínu při rovnoběžném osvětlení.
Řešení:

V bodě M plochy $\Phi(k)$ sestrojíme tečnou rovinu τ, kterou podřídíme danému šroubovému pohybu. Podle předchozího bod M vytvoří šroubovici l plochy $\Phi(k)$ a rovina τ obalí rozvinutelnou šroubovou plochu Ω. Plochy $\Phi(k)$, Ω se podél šroubovice l dotýkají tzn. mají ve všech jejích bodech společné tečné roviny. Sestrojíme mez vlastního stínu na Ω, která je složena z přímek. Společné body těchto přímek a šroubovice l jsou body meze vlastního stínu na $\Phi(k)$, neboť tečné roviny k ploše $\Phi(k)$ v těchto bodech jsou světelné.

Rovnoběžné osvětlení je dáno orientovanou přímkou s. Bod M leží na tvořící křivce k. Sestrojíme půdorys h hrany vratu rozvinutelné šroubové plochy Ω a určíme půdorysy $u1, v1$ přímek meze vlastního stínu na Ω. Přímky u, v a šroubovice l, h leží na Ω. Otočíme-li $m1$ do $u1$, resp. $v1$ kolem $o1$, pak bod X_1, resp. Y_1, do kterého přejde M, je půdorysem průsečíku X, resp. Y přímky u, resp. v, se šroubovicí l. Nárysy bodů X, Y sestrojíme tak, že k úhlům $\measuredangle M_1 o_1 X_1$, $\measuredangle M_1 o_1 Y_1$ stanovíme příslušná posunutí.[4] Body X, Y patří podle předchozího mezi vlastního stínu na $\Phi(k)$, přitom ovšem X_1, Y_1 jsou půdorysy nekonečně mnoha bodů meze vlastního stínu, ležících na různých závitech plochy $\Phi(k)$. Na jednom závitu šroubovice l leží dva, jeden nebo žádný bod meze vlastního stínu. Popsanou konstrukci

[4] V obrázku nejsou sestrojena.

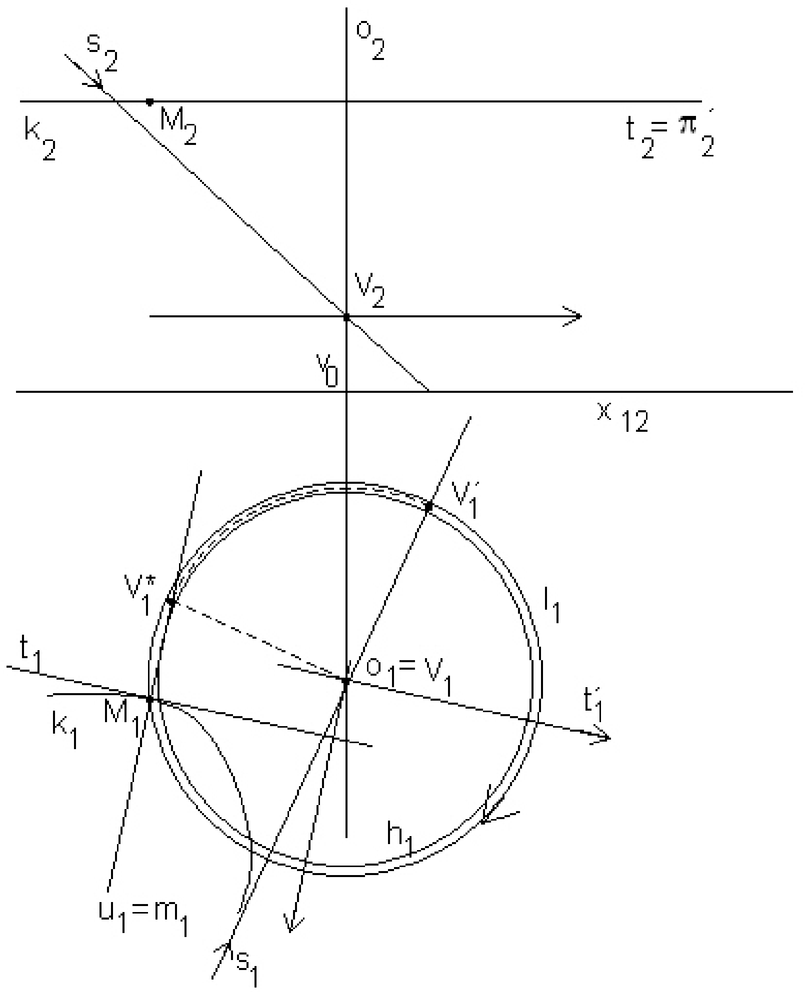
můžeme použít také ve speciálním případě k určení bodů druhého obrysu šroubové plochy, pak je směr osvětlení kolmý k ν, body V_1', V_1^* jsou nevlastní a přímky u_1, v_1 jsou rovnoběžné se základnicí.



Obr. 4.1.9

Konstrukce bodů meze vlastního stínu šroubové plochy se zjednoduší, jestliže tvořící křivka k je normálním řezem. Pak je totiž půdorys bodu meze vlastního stínu na k patou normály ke k_1 vedené bodem V_1^*.[5] Prokážeme to aplikací předcházející obecné konstrukce: Je dána šroubová plocha normálním řezem k v rovině π'. K přímce s určující směr osvětlení jsou sestrojeny body V_1', V_1^* , z bodu V_1^* je vedena normála ke křivce k_1 protínající k_1 v bodě M_1, M_2 leží na k_2. Na šroubovici l bodu M určíme body meze vlastního stínu. Tečna ke křivce k v bodě M je rovnoběžná s π a proto jsou body Q, Q^* nevlastní. Z konstrukce bodu M pak plyne, že je $m_1 = M_1V_1^*$. Vzhledem k tomu, že m_1 je tečna ke kružnici h_1, platí $u_1 = m_1$ a bod M je tedy bodem meze vlastního stínu.

[5]Mez vlastního stínu je tedy *úpatnicí* křivky k_1 s pólem V_1^*.



Obr. 4.1.10

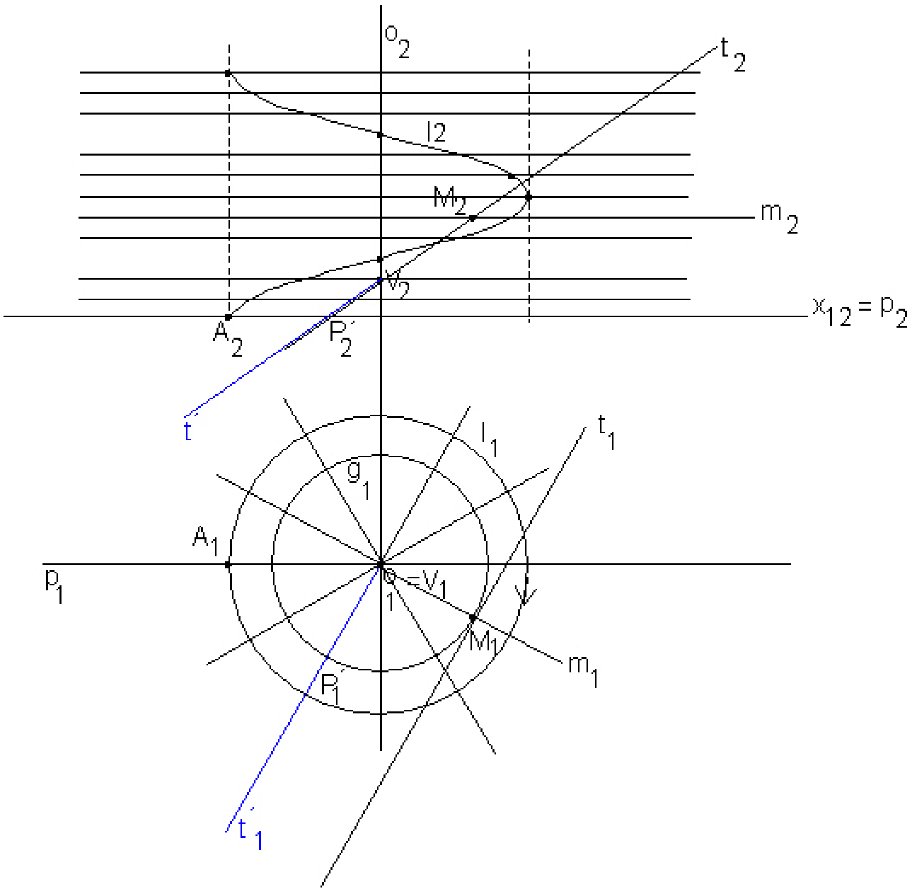
4.2 Přímkové šroubové plochy

Přímkové šroubové plochy $\Phi(p)$ vznikají šroubovým pohybem přímky p, která není rovnoběžná s osou o šroubového pohybu. Jestliže je přímka p kolmá, resp. kosá k ose o, nazývá se plocha$\Phi(p)$ *pravoúhlá, resp. kosoúhlá přímková šroubová plocha*. Jestliže přímka p je s osou o různoběžná, resp. mimoběžná, nazývá se plocha$\Phi(p)$ *uzavřená, resp. otevřená přímková šroubová plocha*. Jeda z přímkových šroubových ploch je rozvinutelná plocha – rozvinutelná šroubová plocha, která je je zvláštním případem kosoúhlé otevřené přímkové šroubové plochy. Všechny ostatní přímkové šroubové plochy jsou zborcené, a tedy nerozvinutelné.

Přímkové šroubové plochy $\Phi(p)$ budeme nyní zobrazovat v Mongeově promítání, osa o šroubového pohybu bude kolmá k půdorysně, budeme znát v_0 a orientaci. Budeme užívat již známých konstrukcí na šroubových plochách, případně na zborcených plochách.

4.2.1 Pravoúhlá uzavřená přímková šroubová plocha

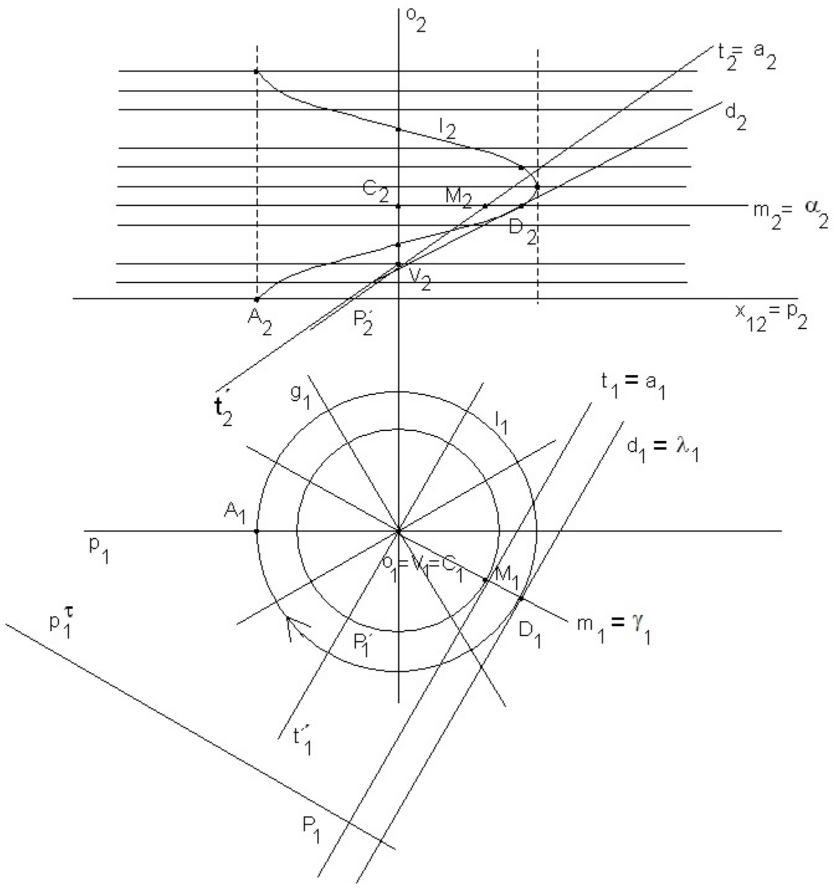
Plocha je vytvořena šroubovým pohybem přímky p, která protíná pravoúhle osu šroubového pohybu. Zobrazíme závit pravotočivé šroubové plochy $\Phi(p)$, která vzniká šroubováním přímky p rovnoběžné s π.
Půdorysy přímek plochy $\Phi(p)$ vytvářejí svazek o středu o_1. Jejich nárysy jsou přímky rovnoběžné se základnicí, vyjma přímek kolmých k ν, které se zobrazují v náryse jako body. Všechny body přímky p vytvářejí šroubovice plochy, které mají stejnou výšku závitu. Na obrázku 4.2.1 je zobrazena část šroubovice l, kterou opisuje bod A přímky p. Sestrojme tečnou rovinu τ plochy $\Phi(p)$ v bodě M přímky m plochy $\Phi(p)$: Bodem M vedeme dvě křivky plochy $\Phi(p)$ – přímku m a šroubovici g bodu M. Sestrojíme tečnu t šroubovice g v bodě M pomocí povrchové přímky t' směrové kuželové plochy o vrcholu V. Rovina τ je určena přímkami m, t.



Obr. 4.2.1

Vzhledem k tomu, že uvedená plocha je také plochou zborcenou platí, že každá rovina procházející přímkou m, je tečnou rovinou plochy $\Phi(p)$. Její bod dotyku se dá sestrojit s využitím některé dotykové zborcené kvadriky Ω dotýkající se Φ podél přímky m. Pravoúhlá uzavřená přímková šroubová plocha se někdy nazývá *přímý šroubový konoid* – dvě tvořící křivky jsou přímkami, z nichž jedna je vlastní a druhá nevlastní. Její tři řídící útvary jsou např. osa o, nevlastní přímka c^∞ půdorysny π a šroubovice l některého bodu tvořící přímky (v obrázku 4.2.2 šroubovice l bodu A).

Přímky o, c^∞ a tečna d šroubovice l v průsečíku D přímky m se šroubovicí l určují hyperbolický paraboloid Ω.[6] Ten se dotýká plochy $\Phi(p)$ podél přímky m. Tečnou rovinu τ v bodě M plochy Ω sestrojíme podle příkladu 4 v kapitole Zborcené plochy. Rovinu τ určují přímky m, a různých regulů, procházející bodem M. Ploše Ω patří přímka n kolmá k ν, jejíž nárys prochází průsečíkem o_2, d_2. Nárysy přímek prvního regulu tedy prochází n_2, proto $a_2 = M_2 n_2$ je nárysem přímky a prvního regulu plochy Ω procházející bodem M. Přímky o, d jsou rovnoběžné s touž řídící rovinou λ hyperbolického paraboloidu Ω a vzhledem k tomu, že o je kolmá k π je rovina λ rovněž kolmá k π. Přímka a je tedy rovnoběžná s řídící rovinou λ, proto je půdorys přímky a je rovnoběžný s λ_1 a samozřejmě prochází M_1.
Přímky a, m určují tečnou rovinu τ v bodě M plochy $\Phi(p)$.



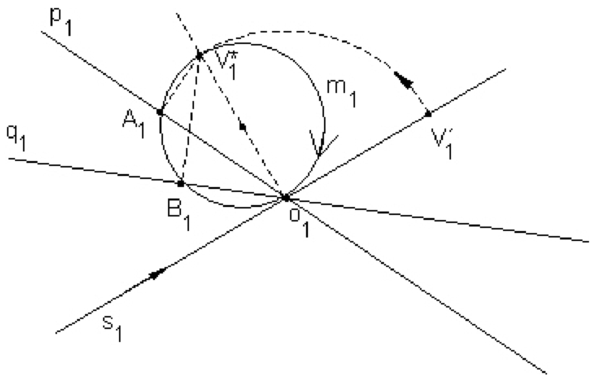
Obr. 4.2.2

Užitím dotykové kvadriky Ω můžeme také sestrojit asymptotickou a centrální rovinu přímky m. Asymptotická rovina α přímky m obsahuje přímku c^∞ a je tedy rovnoběžná s π. Centrální rovina γ[7] přímky m je tedy kolmá k π a proto $m_1 = \gamma_1$. Protože přímky m, o ležící v γ patří

[6] Přímky o, d, m patří jednomu regulu, přímka m patří druhému regulu plochy Ω.
[7] Tj. rovina procházející danou přímkou a kolmá k asymptotické

různým regulům hyperbolického paraboloidu Ω je jejich průsečík C bodem dotyku centrální roviny γ a tedy bodem *strikční křivky* plochy $\Phi(p)$, která je proto osou o.

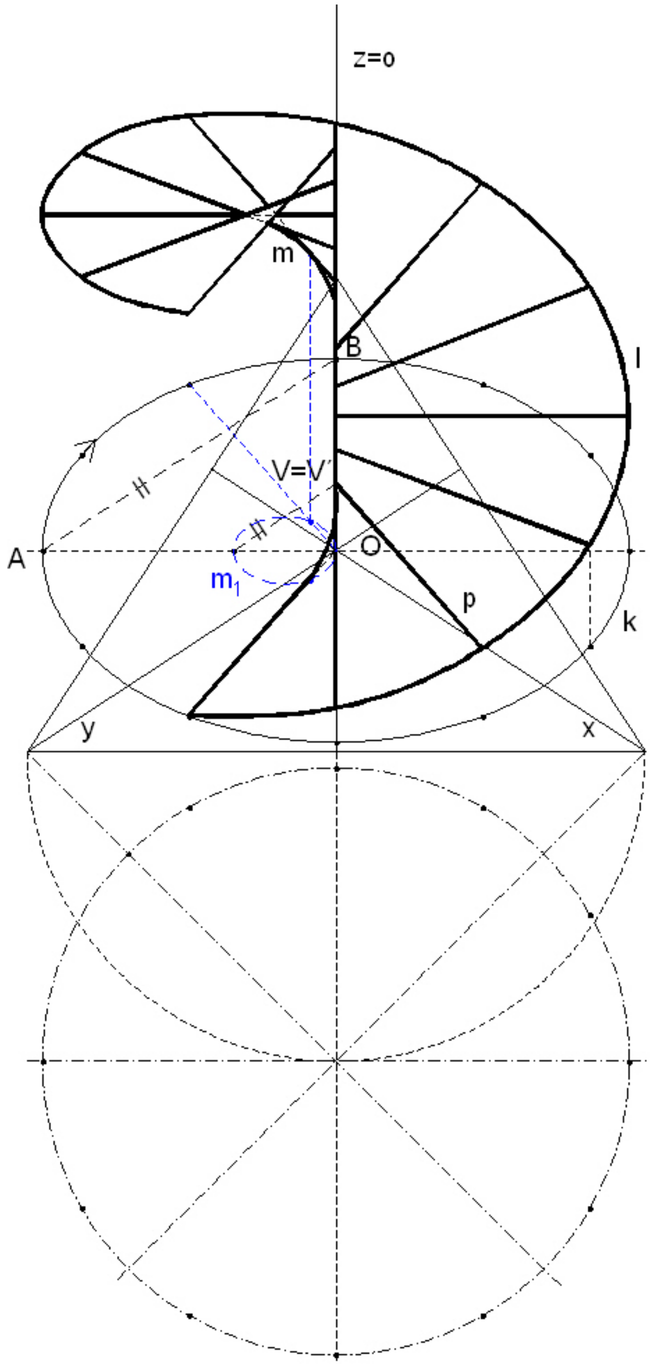
Tvořící přímka p plochy je *normálním řezem*, můžeme proto pro konstrukci meze vlastního stínu při rovnoběžném osvětlení užít zjednodušení uvedené v kapitole 4.1. Na obrázku 4.2.3 je znázorněna situace v půdorysně. Rovnoběžné osvětlení je dáno orientovanou přímkou s a jsou vyznačeny body V_1', V_1^*. Paty kolmic, sestrojených z bodu V_1^* na půdorysy přímek plochy, tzn. na přímky svazku o středu o_1, vytvářejí půdorys m_1 meze vlastního stínu m. Křivka m_1 je kružnice o průměru o_1V_1, jako množina vrcholů pravých úhlů, jejichž ramena procházejí body V_1^*, o_1. Křivka m je pak průnik rotační válcové plochy Ω' o řídící kružnici m_1 a ose o', s plochou $\Phi(p)$. Na obrázku jsou vyznačeny půdorysy A_1, B_1 bodů A, B meze vlastního stínu, ležících na přímkách p, q plochy $\Phi(p)$. Přitom předpokládáme, že A, B leží na tomtéž závitu plochy. Svírají-li p_1, q_1 úhel velikosti ω, pak je $z_B = v_0\omega$. Z vlastností středových a obvodových úhlů kružnice plyne $|\measuredangle A_1o_1'B_1| = 2\omega$. Mezí m vlastního stínu je proto šroubovice na válcové ploše Ω' která má poloviční výšku závitu než šroubový pohyb, určující $\Phi(p)$.



Obr. 4.2.3

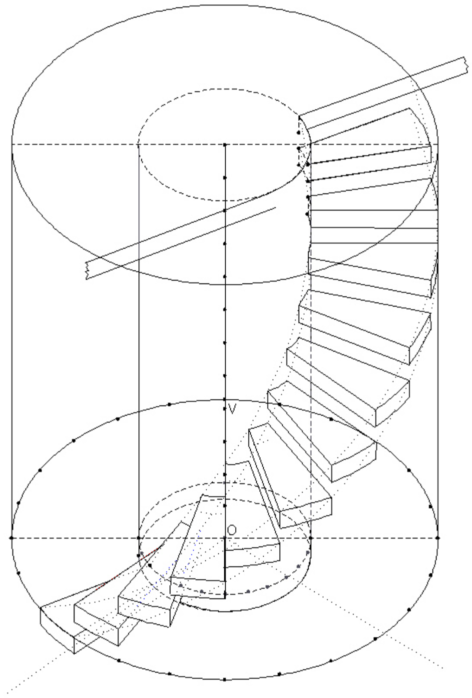
Na obrázku 4.2.4 je v pravoúhlé axonometrii zobrazen závit pravotočivé uzavřené přímkové šroubové plochy $\Phi(p)$ omezené osou o a šroubovicí l. Tato plocha tedy vznikne šroubováním úsečky. Ke konstrukci obrazu šroubovice l je využitou afinity mezi axonometrickým půddorysem šroubovice a otočeným půdorysem. K určení viditelnosti použijeme rovnoběžné osvětlení plochy $\Phi(p)$ jehož směr je shodný se směrem promítání, tj. kolmý k axonometrické průmětně. Jestliže zachováme označení z předchozího obrázku, pak je $V = V'$[8] K dalším konstrukcím využíváme obrazu kružnice k ve vodorovné rovině. Např. vzhledem k $|OV'| = |OV^*|$ je $V'V^*$ rovnoběžné s AB. Kružnice m_1 o průměru OV^* se zobrazuje jako elipsa homotetická s k. Obrys m dostaneme pomocí průsečíků přímek dané schodové plochy s rotační válcovou plochou o řídící kružnici m_1.

[8]Axonometrické průměty jsou označeny stejně jako v prostoru.



Obr. 4.2.4

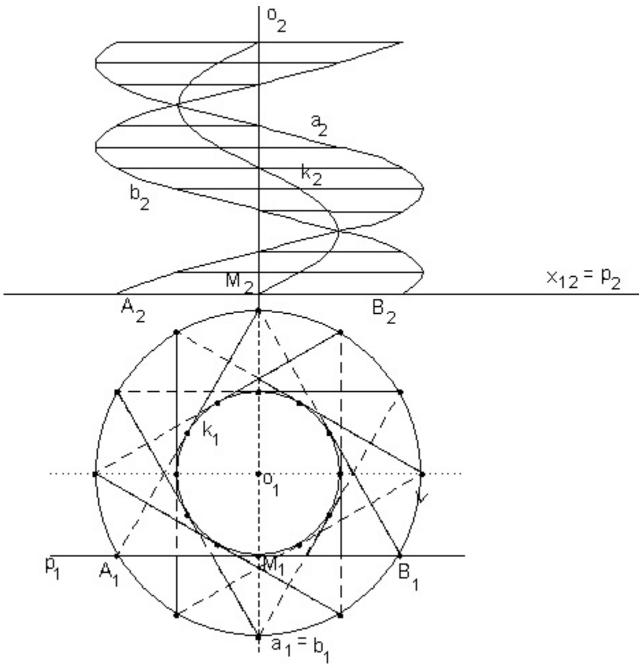
Plocha se v praxi často vyskytuje na točitých schodech, proto je rovněž nazývána *schodová plocha*. Jiný užívaný název je také *helikoid*.



Obr. 4.2.5

4.2.2 Pravoúhlá otevřená přímková šroubová plocha

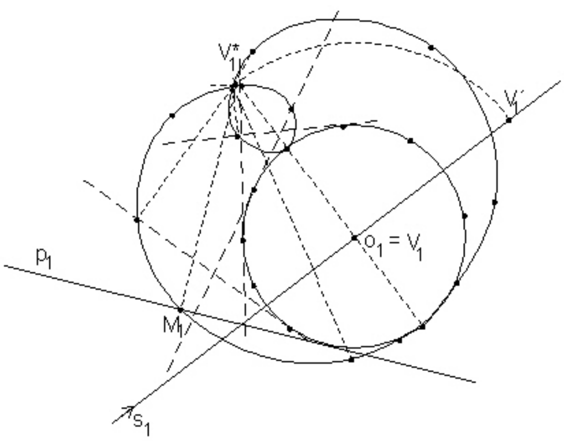
Plocha vzniká šroubováním přímky p, která je mimoběžná s osou o šroubového pohybu a kolmá k o.



Obr. 4.2.6

Je zobrazena část jednoho závitu pravotočivé plochy $\Phi(p)$ omezená šroubovicemi a, b bodů A, B přímky p stejně vzdálených od o. Bod M přímky p nejbližší k o, vytváří hrdelní šroubovici k. Plocha $\Phi(p)$ je množina přímek protínajících šroubovice a, b a rovnoběžných s π. Tečnou rovinu v bodě plochy a bod dotyku tečné roviny sestrojujeme podobně jako u schodové plochy.

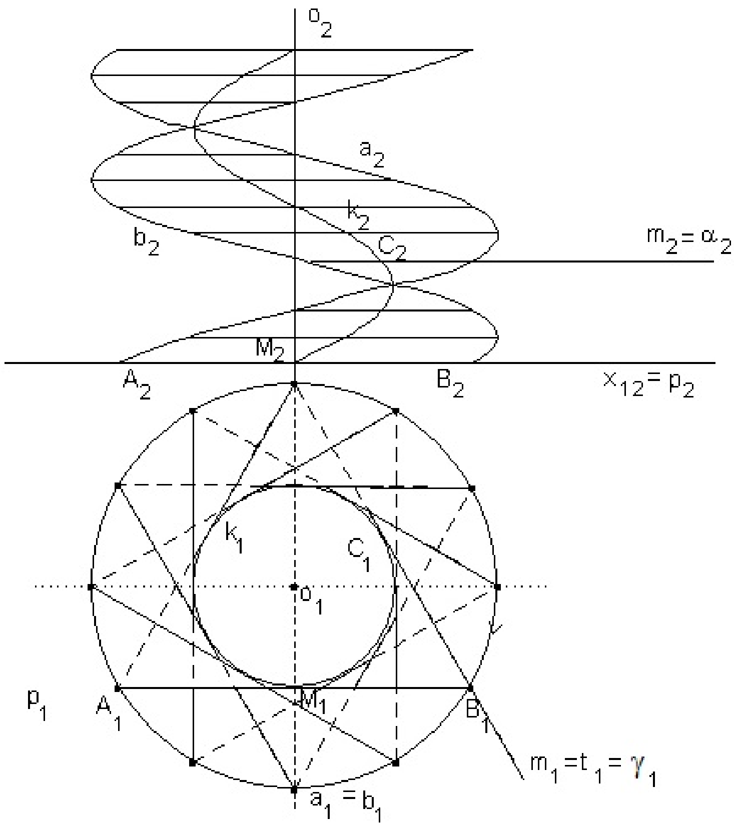
Půdorys m_1 meze vlastního stínu při rovnoběžném osvětlení sestrojujeme opět pomocí pat kolmic k půdorysům normálních řezů plochy. Na obrázku je zobrazena jen situace v půdorysu. Jsou dány půdorysy hrdelní šroubovice k, přímky s směru osvětlení, vržený stín V' vrcholu směrové kuželové plochy a jeho otočení V^*. Půdorysy přímek plochy $\Phi(p)$[9], jsou tečny půdorysu k_1 šroubovice k a paty kolmic sestrojených z V_1^* na tyto tečny vytvářející tzv. *úpatnici kružnice* k_1.



Obr. 4.2.7

Plocha $\Phi(p)$ je rovněž zborcená plocha a je určena např. řídícími šroubovicemi a, b a nevlastní přímkou půdorysny π.[10] Tečnou rovinu sestrojíme podobně jako u přímého šroubového konoidu. Asymptotická rovina každé přímky plochy je rovnoběžná s π, a proto je centrální rovina γ přímky kolmá k π.
Označíme-li C průsečík přímky p plochy s hrdelní šroubovicí k, pak tečná rovina plochy $\Phi(p)$ v bodě C je určena přímkou m a tečnou t šroubovice h. Protože je $m_1 = t_1$ a přímky m a t jsou různoběžné, je tedy rovina určená přímkami m a t kolmá k π, tj. jedná se o centrální rovinu γ. Bod C, jako bod dotyku roviny γ, je centrální bod a hrdelní šroubovice je strikční křivkou plochy $\Phi(p)$.

[9]Normálních řezů.
[10]Jedná se tedy o cylindroid nebo též Catalanovu plochu.



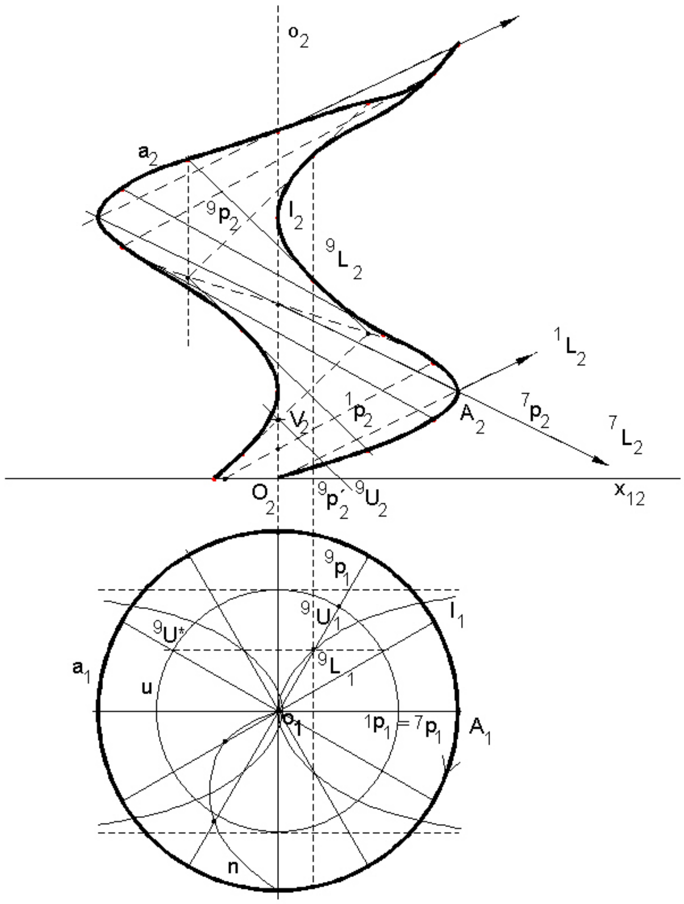
Obr. 4.2.8

4.2.3 Kosoúhlá uzavřená přímková šroubová plocha

Plochu $\Phi(p)$ vytvoří přímka p, protínající osu o, která svírá s osou o úhel různý od pravého. Sestrojme např. 12 poloh $^1p, ^2p, \dots, ^{12}p$ přímky p, přičemž ^1p a ^7p jsou rovnoběžné s ν. Přímka ^1p, která protíná osu o v bodě C leží v rovině μ rovnoběžné s ν a procházející osou o. Normálním řezem kosoúhlé uzavřené přímkové šroubové plochy je *Archimedova spirála*. Přímky ^1p a ^7p se protínají v bodě A, který vytvoří šroubovici a. Každým bodem šroubovice a procházejí vždy dvě přímky plochy $\Phi(p)$, které vznikají šroubovým pohybem přímek ^1p a ^7p. Šroubovice a je tedy dvojnásobnou křivkou plochy $\Phi(p)$. Půdorysem plochy $\Phi(p)$ je celá průmětna. Druhý zdánlivý obrys l_2 je obalová křivka nárysů tvořících přímek plochy. Body křivky l zkonstruujeme podle příkladu 4.1.8, směr osvětlení je kolmý k ν: Označme opět V vrchol směrových kuželových ploch šroubovic¨plochy $\Phi(p)$, V leží na ose o ve výšce v_0 nad půdorysnou.[11] Přímky p' rovnoběžné s přímkami p plochy Φ a procházející V leží na kuželové ploše Ω. Půdorysné stopníky U přímek p' leží na kružnici, označíme ji u. Otočíme v půdoryse stopník U každé přímky p' o $90°$ kolem o_1 proti šipce do bodu U^*. Bodem U^* vedeme rovnoběžku se základnicí, která protíná p_1 v půdoryse L_1 bodu L hledané křivky l. Z konstrukce je vidět, že pro polohy přímek 1 a 7 jsou body ^1L a ^7L nevlastní, a tedy

[11] Vržený stín V' bodu V i otočený V^* jsou tedy nevlastní, V'^{∞} je dán směrem kolmým k základnici a $v^{*\infty}$ je dán směrem rovnoběžným se základnicí.

tečny kružnice u rovnoběžné se základnicí jsou asymptotami půdorysu l_1 křivky l. Půdorys l_1 křivky l se nazývá *kappa křivka*. Protože jsou body ${}^1L$ a ${}^7L$ nevlastní, jsou i přímky ${}^1p$ a ${}^7p$ asymptotami křivky l, a tedy i v nárysе ${}^1p_2$ a ${}^7p_2$ jsou asymptotami l_2.

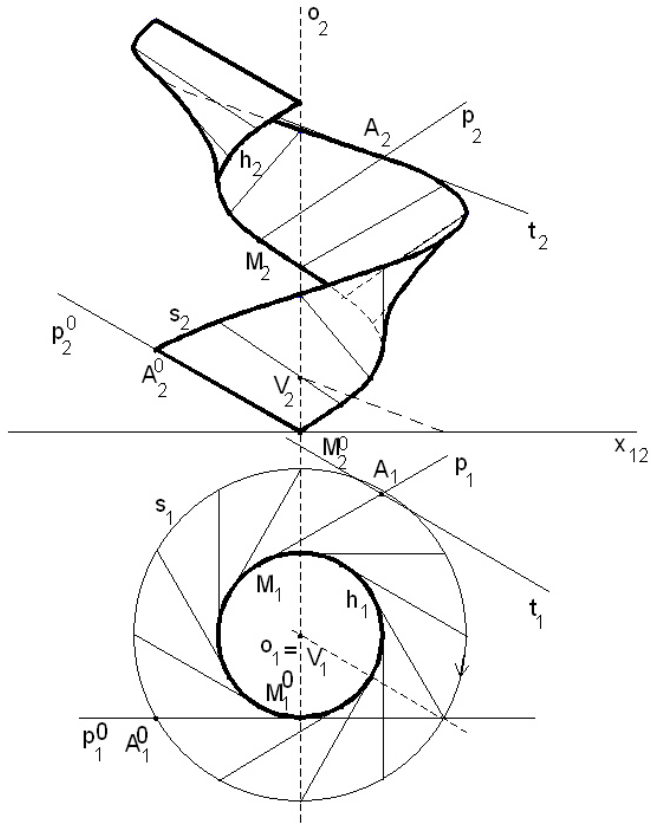


Obr. 4.2.9

Tato plocha se také používá na vývrtkách, proto je nazývána i *vývrtková plocha*.

4.2.4 Kosoúhlá otevřená přímková šroubová plocha

Plocha je vytvořena šroubovým pohybem přímky p, která neprotíná osu o a není k ní kolmá. Na obrázku 4.2.10 je zobrazena jen část závitu kosoúhlé otevřené přímkové šroubové plochy vytvořená šroubováním úsečky A_0M_0 tvořící přímky p_0, M_0 je bod hrdelní šroubovice h plochy. V bodě A tvořící přímky p je sestrojena tečná rovina plochy, je určena přímkou p a tečnou t šroubovice s v bodě A. Prvním zdánlivým obrysem plochy je půdorys h_1 hrdelní šroubovice h. Druhým zdánlivým obrysem je obálka nárysů přímek plochy.

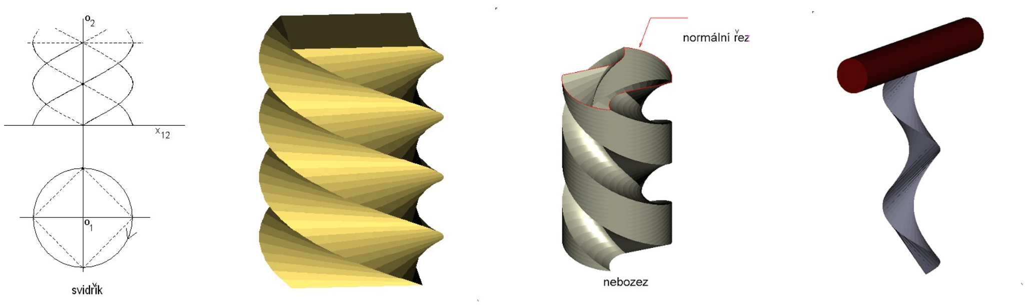


Obr. 4.2.10

Jestliže je dána šroubovice h a tečna p v některém jejím bodě, pak ve stejném šroubovém pohybu, jakým je určena šroubovice h, vytvoří přímka p rozvinutelnou plochu šroubovou, která je rovněž kosoúhlou otevřenou přímkovou šroubovou plochou. Tato plocha je rozvinutelná, ostatní kosoúhlé otevřené přímkové šroubové plochy jsou zborcené a je možné je určit třemi řídícími křivkami.

4.2.5 Užití přímkových šroubových ploch

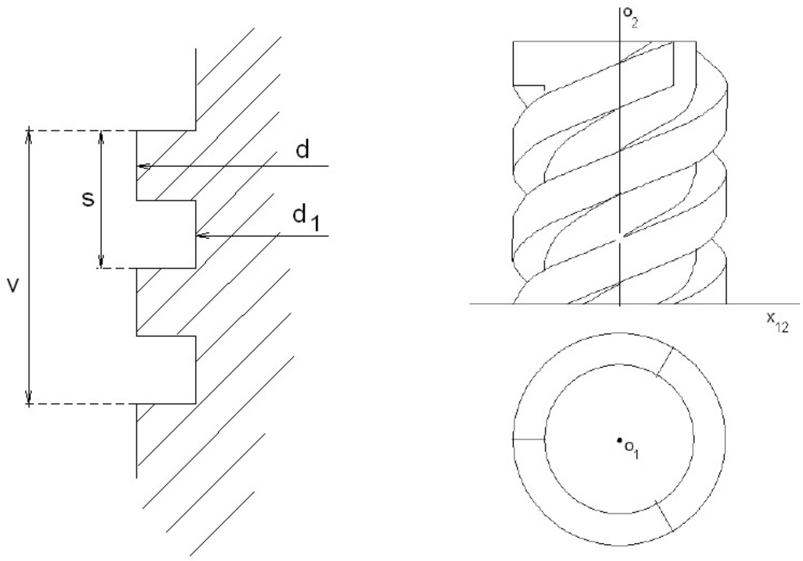
Přímkové šroubové plochy se používají jak ve stavební tak ve strojní praxi. *Schodová plocha* se užívá jako spodní část točitého schodiště, spojování podlaží v garážích, u šroubů, u pístového šoupátka, korunového vrtáku, lícních ploch křídel korunových vrtulí, listů jednoduchých ventilátorů, plochy šroubového transportéru, jako dekorativní plocha apod.
Otevřená pravoúhlá přímková šroubová plocha se užívá u svidříku, jehož normálním řezem je čtverec nebo obdélník, u nebozezů (normální řez je složen z částí přímkových i cyklických šroubových ploch), u šroubů , šroubových dopravníků apod.
Vývrtkové plochy se kromě šroubů používá i na vývrtkách.



Obr. 4.2.11

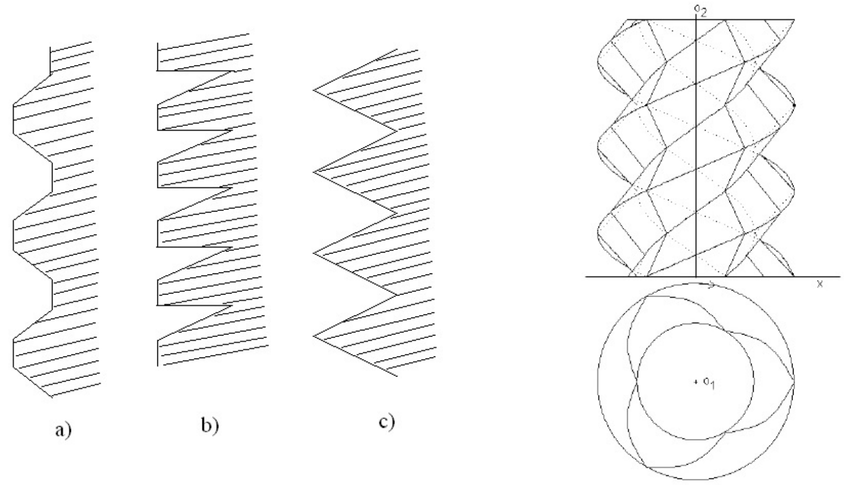
Šrouby

Šrouby jsou tvořeny částmi uzavřených přímkových šroubových ploch, slouží buď k převodu rotace v posuvný pohyb (šrouby pohybové) nebo ke spojení (upevnění) dvou nebo více částí (šrouby spojovací či upevňovací). U pohybových šroubů se užívá buď plochého závitu nebo lichoběžníkového. Na obrázku 4.2.12 vlevo je znázorněn osový řez tzv. *plochého šroubu*. Je tvořen částmi pravoúhlé uzavřené přímkové šroubové plochy a částmi rotační válcové plochy. Je zde vyznačen průměr d šroubu a průměr d_1 *jádra*. Veličina $h = \frac{1}{2}(d – d_1)$ se nazývá *hloubka závitu*. Vzdálenost s dvou sousedních obdélníků se nazývá *rozteč*. Výška v závitu příslušného šroubového pohybu musí být celistvým násobkem rozteče. V případě $v = ns$ říkáme, že závit je n-chodý. Na obrázku 4.2.12 vlevo je profil *plochého dvojchodého šroubu*, na obrázku 4.2.12 vpravo je zobrazen v Mongeově projekci *trojchodý plochý šroub*.



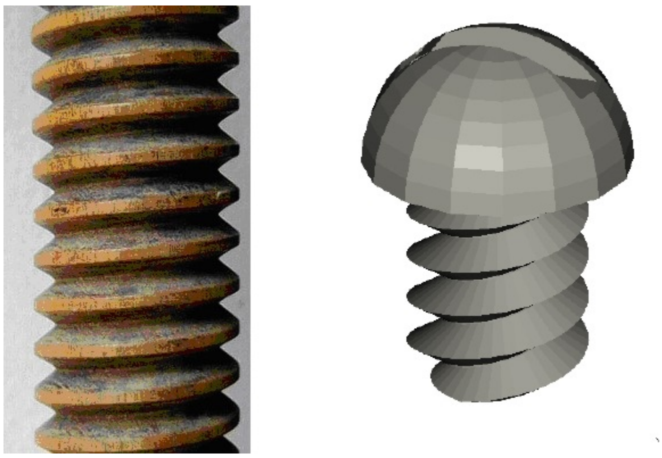
Obr. 4.2.12

Osové řezy šroubů mohou být složeny z lichoběžníků (lichoběžníkové šrouby), rovnoramenných trojúhelníků (ostré šrouby).



Obr. 4.2.13

Lichoběžníkové šrouby jsou potom složeny z částí vývrtkových, případně i schodových ploch a z části rotačních válcových ploch. Ostré šrouby jsou složeny z částí vývrtkových ploch.



Obr. 4.2.14

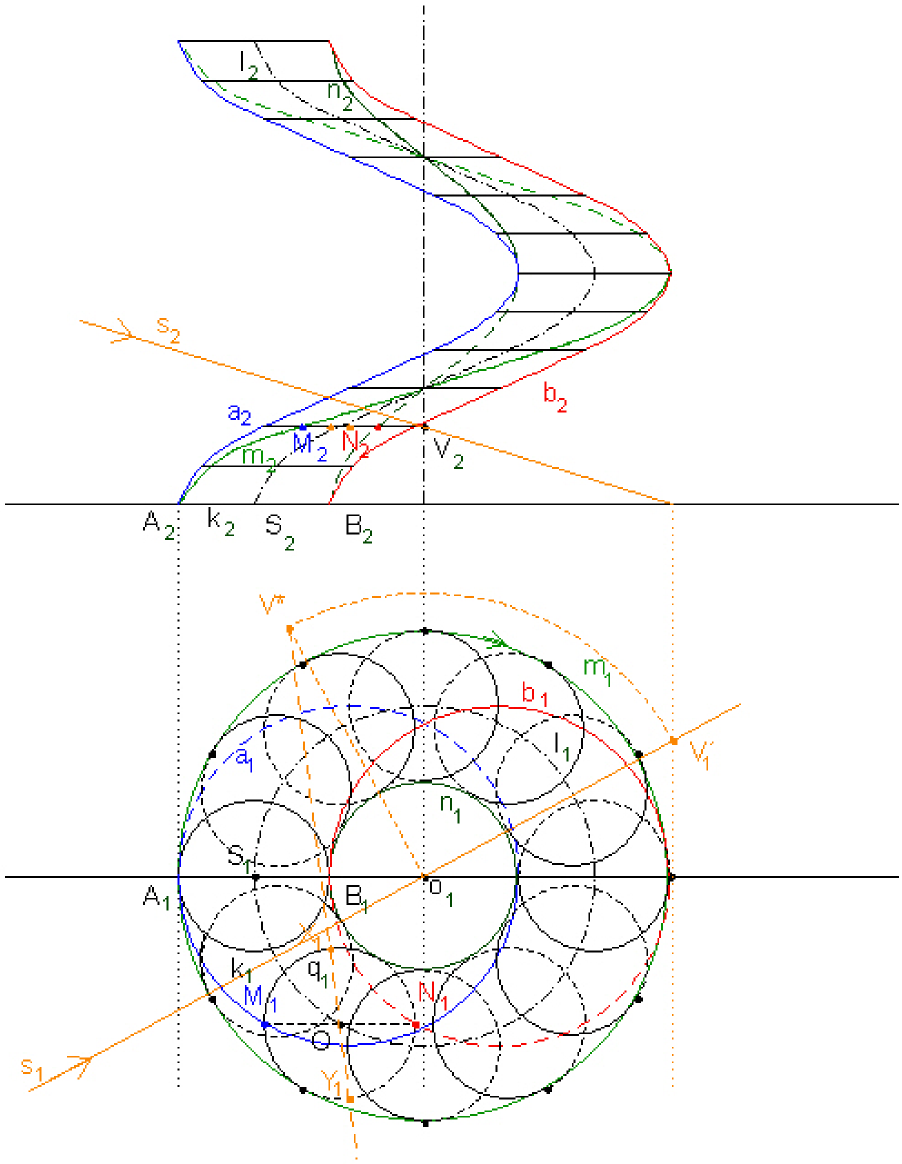
4.3 Cyklické šroubové plochy

Cyklické šroubové plochy vznikají šroubovým pohybem k ružnice. Cyklické šroubové plochy dělíme podle polohy roviny ρ kružnice k, která vytváří plochu $\Phi(k)$, vzhledem k ose o šroubového pohybu nebo vzhledem ke šroubovici l, kterou vytváří střed kružnice k. Jestliže je rovina ρ kružnice k kolmá k ose o šroubového pohybu, nazývá se plocha $\Phi(k)$ *normální cyklická šroubová plocha*. Jestliže rovina ρ kružnice $k$obsahuje osu o šroubového pohybu, nazývá se plocha $\Phi(k)$ *osová cyklická šroubová plocha*. Jestliže je rovina ρ kružnice k kolmá ke šroubovici l vytvořené středem tvořící kružnice k, nazývá se plocha $\Phi(k)$ *Archimedova serpentina*.

Cyklické šroubové plochy budeme nyní zobrazovat v Mongeově promítání, osa o šroubového pohybu je kolmá k půdorysně, známe v_0 a orientaci. Budeme užívat již známých konstrukcí na šroubových plochách.

4.3.1 Normální cyklická šroubová plocha

Plocha vzniká šroubováním kružnice k ležící v rovině ρ kolmé k ose o šroubového pohybu.[12] Tvořící kružnice je tedy *normálním řezem* plochy.



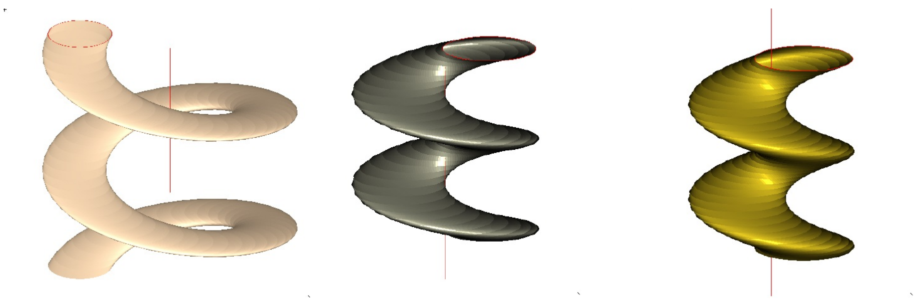
Obr. 4.3.1

Sestrojíme pravotočivou normální cyklickou šroubovou plochu, tvořící kružnice k leží v π. Střed S kružnice k vytváří šroubovici l středů všech přešroubovaných kružnic, je-

[12]Jestliže ve speciálním případě leží S střed kružnice k na ose šroubového pohybu, pak je $\Phi(k)$ rotační válcová plocha. Tento případ neuvažujeme.

jichž půdorysy jsou kružnice a nárysy úsečky. Koncové body A, B průměru kružnice k, který protíná osu o, vytvářejí při šroubovém pohybu rovníkovou, resp. hrdelní šroubovici m, resp. n, které jsou prvním skutečným obrysem plochy $\Phi(k)$. Prvním zdánlivým obrysem jsou kružnice m_1, n_1 – obálky půdorysů kružnic plochy.
Druhý zdánlivý obrys tvoří dvě zobecnělé sinusoidy a_2, b_2 shodné se sinusoidou l_2, jako koncové body druhých průmětů kružnic plochy $\Phi(k)$. Křivka a_2, resp. b_2 vznikne posunutím v rovině (nárysně) křivky l_2 o vektor kolmý na o_2, jehož velikost je rovna poloměru kružnice k. Půdorysem křivky a, resp. b je tedy kružnice a_1, resp. b_1, kterou dostaneme posunutím kružnice l_1 ve směru rovnoběžném se základnicí o poloměr kružnice k. Druhým skutečným obrysem jsou šroubovice a, b, které sice leží na dané ploše, ale nejsou vytvořeny ve šroubovém pohybu o ose o, ale vzniknou v prostoru posunutím šroubovice l o vektor kolmý k ose o velikosti rovné poloměru kružnice k. Mez vlastního stínu plochy $\Phi(k)$ při rovnoběžném osvětlení určíme opět podle příkladu 4.1.8: Vrcholem V směrové kuželové plochy vedeme přímku s určující směr osvětlení a sestrojíme podle body V_1', V_1^*. Je-li o střed kružnice q plochy, pak průsečíky X_1, I_1 přímky $V_1^*O_1$ s q_1 jsou body půdorysu meze vlastního stínu. Půdorysem meze vlastního stínu je tedy *kruhová konchoida* o řídící kružnici l_1 a o pólu V_1^*.

Podle polohy kružnice k vzhledem k ose dostaneme různé tvary plochy. Vzhledem k jejímu využití jako ozdobného prvku ve stavební praxi se plocha také nazývá *vinutý sloupek*.

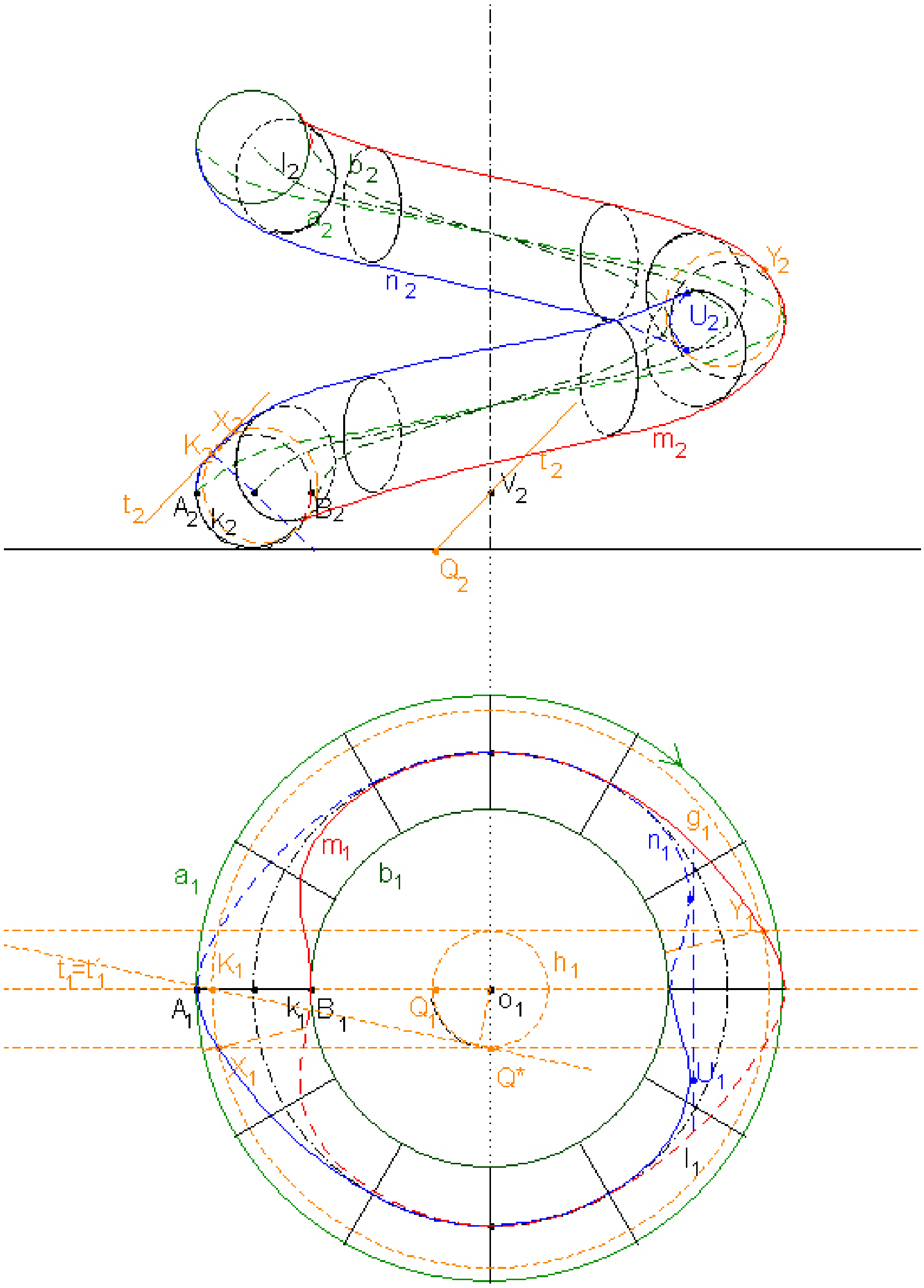


Obr. 4.3.2

4.3.2 Osová cyklická šroubová plocha

Tato plocha je vytvořena šroubováním kružnice k jejíž rovina ρ prochází osou o šroubového pohybu. Sestrojíme pravotočivou plochu vytvořenou šroubovým pohybem kružnice k ležící v rovině μ rovnoběžné s nárysnou. Střed kružnice k opisuje šroubovici l. Jednotlivé polohy kružnice k se v prvním průmětu jeví jako úsečky, jejich druhé průměty jsou obecně elipsy a ve zvláštních případech kružnice nebo úsečky.
Půdorysem plochy je mezikruží, jehož hranicí jsou kružnice a_1, b_1, půdorysy rovníkové, resp. hrdelní šroubovice a, resp. b, které vzniknou šroubováním koncových bodů A, B průměru kružnice k kolmého k ose o.
Druhý zdánlivý obrys je obálkou druhých průmětů tvořících kružnic plochy. Skládá se ze

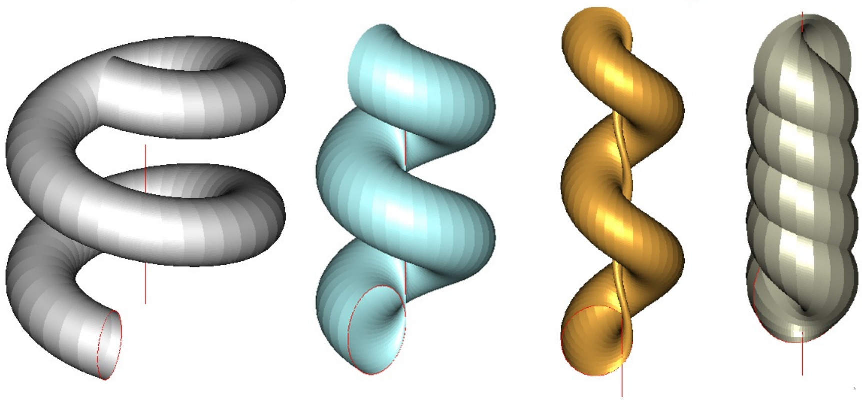
dvou větví m_2, n_2. Sestrojíme jej jako nárys meze vlastního stínu při rovnoběžném osvětlení směrem kolmým k nárysně podle příkladu 4.1.8. Zvolme bod K kružnice k, který opisuje šroubovici g. Vrcholem V směrové kuželové plochy vedeme přímku t' rovnoběžnou s tečnou t ke kružnici k ve zvoleném bodě K. Půdorysný stopník q přímky t' otočíme proti směru šipky udávající klesání šroubového pohybu o úhel $90°$ do bodu Q^* a sestrojíme kružnici h_1 o středu o_1, dotýkající se přímky $K_1Q_1^*$. Tečny k h_1 rovnoběžné se základnicí, protínají g_1 v půdorysech X_1, Y_1 bodů druhého skutečného obrysu. Nárysy bodů X, Y určíme pomocí kružnic plochy, které jimi procházejí.



Obr. 4.3.3

Ke křivkám m, n existují tečny kolmé k ν.[13] Nárysy jejich bodů dotyku U, V jsou body vratu druhého zdánlivého obrysu $m_2, , n_2$. Na obrázku 4.3.3 je vyznačena konstrukce jednoho z nich: Ke křivce n_1 je vedena tečna kolmá k zákadnici, jeden její bod dotyku je označen U_1. Nárys U_2 bodu vratu U křivky n sestrojíme opět pomocí kružnice plochy, která prochází bodem U.

Opět podle polohy kružnice k vzhledem k ose dostáváme různé tvary plochy. Pokud střed kružnice k leží na ose šroubového pohybu, nazývá se plocha také *kadeř* (viz obr 4.3.4). Třetí z ploch na obrázku 4.3.4 znázorňuje tzv. *plochu klenby sv. Jiljí*. Tento název pochází podle stejnojmenného opatství ve Francii, kde tato plocha byla poprvé použita.



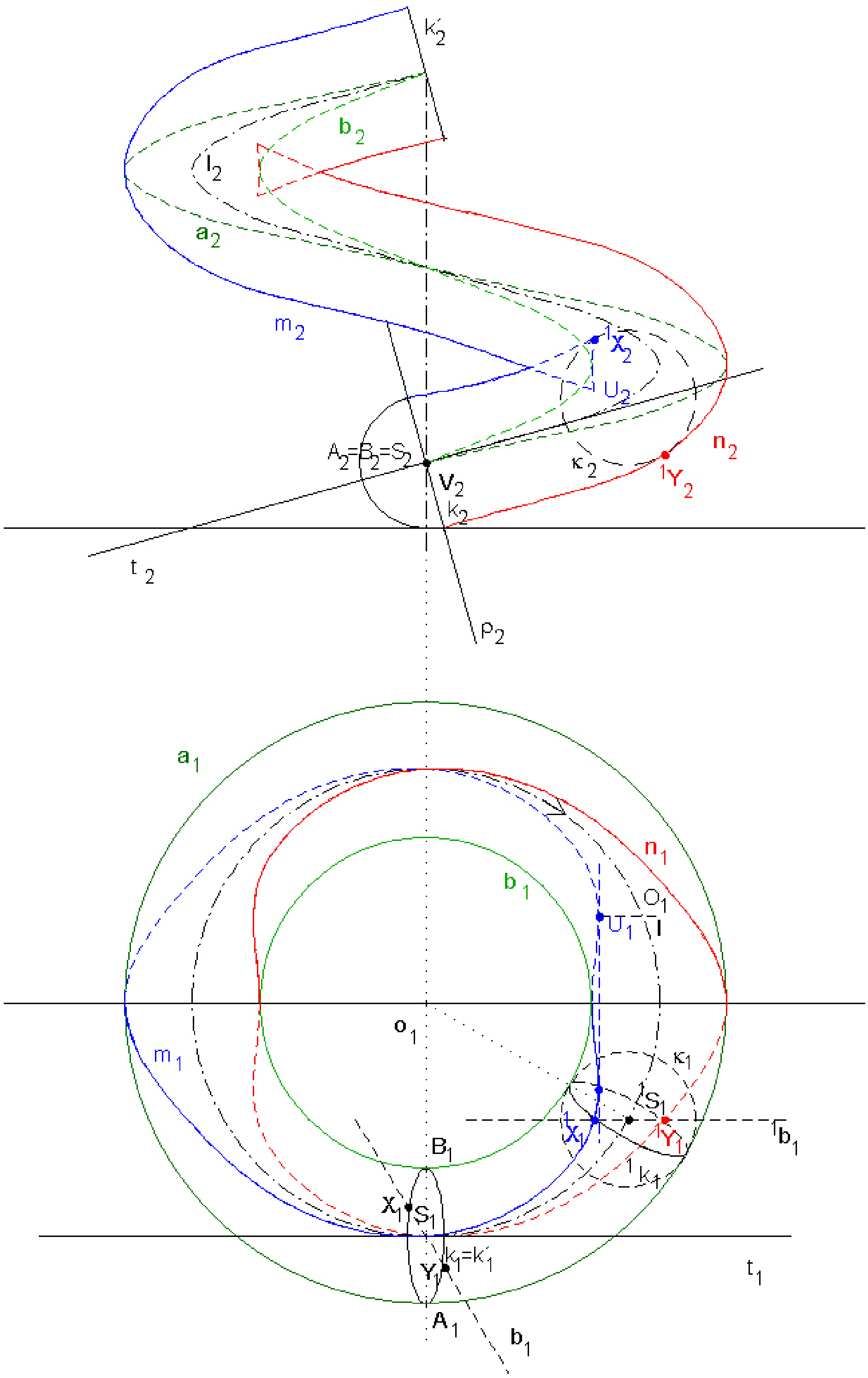
Obr. 4.3.4

4.3.3 Archimedova serpentina

Tato plocha vzniká šroubovým pohybem kružnice k, která leží v rovině ρ kolmé ke šroubovici l vytvořené středem S kružnice k. Sestrojíme pravotočivou plochu. Bod S je zvolen tak, aby tečna t k jeho šroubovici l byla rovnoběžná s nárysnou. Rovina ρ je pak kolmá k nárysně. Jestliže poloměr kružnice k označíme r, pak k_1 je elipsa s hlavní poloosou velikosti r. Je-li $\operatorname{tg} \alpha$ spád šroubovice l, pak rovina ρ a také všechny její polohy při šroubování, mají konstantní odchylku $90° - \alpha$ od půdorysny. Z toho vyplývá, že půdorysy všech tvořících kružnic plochy jsou shodné elipsy. Archimedova serpentina může vzniknout i jako *obálka kulových ploch* se středem na šroubovici l a poloměrem r.
Prvním skutečným obrysem plochy jsou rovníková a hrdelní šroubovice a, b vytvořené koncovými body A, B průměru kružnice k, který je kolmý k o. Prvním průmětem plochy je mezikruží, které je omezené kružnicemi a_1, b_1, tvořícími současně první zdánlivý obrys.
Druhý zdánlivý obrys je obálkou shodných kružnic se středy na sinusoidě l_2, druhých obrysů kulových ploch vytvářejících danou Archimedovu serpentinu. Body druhého zdánlivého obrysu tedy leží na kolmicích k tečnám sinusoidy l_2 ve vzdálenosti r od l_2. Druhý zdánlivý obrys se rozpadá na dvě části m_2, n_2 a je ekvidistantou sinusoidy $_2$. Jestliže je ^1k tvořící kružnice

[13] Tj. patřící směru osvětlení.

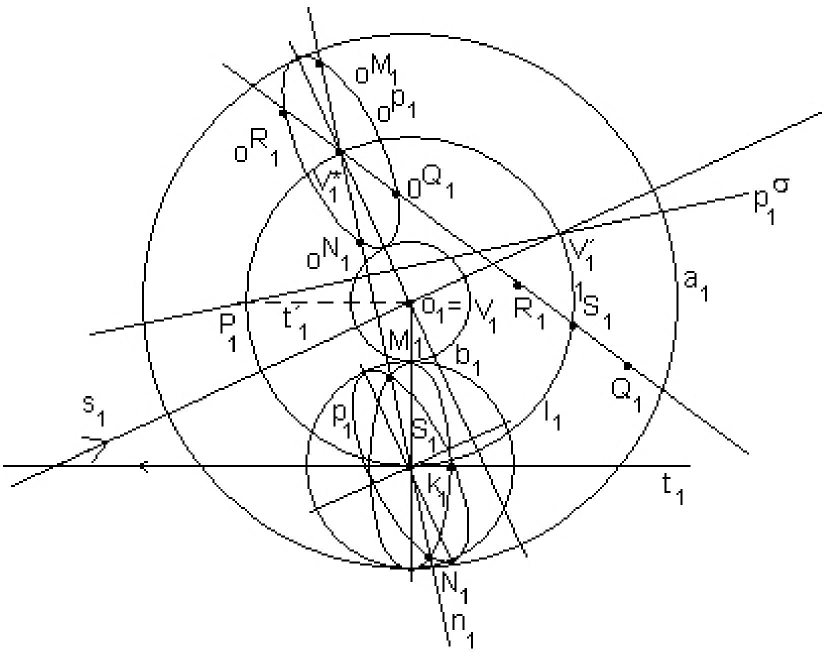
serpentiny se středem ^1S, pak body druhého skutečného obrysu na ^1k leží současně na hlavní kružnici kulové plochy ^1g o středu ^1S a poloměru r v rovině rovnoběžné s nárysnou.



Obr. 4.3.5

Jestliže tedy vedeme bodem ${}^1S_1$ přímku ${}^1b_1$ rovnoběžnou se základnicí, pak její průsečíky ${}^1X_1$, ${}^1Y_1$ s elipsou ${}^1k_1$ náležejí prvnímu průmětu m_1, n_1 druhého skutečného obrysu. Body ${}^1X_1$, ${}^1Y_1$ můžeme určit také bez vyrýsování elipsy ${}^1k_1$. Stačí otočit bod ${}^1S_1$ spolu s přímkou ${}^1b_1$ kolem o_1 do bodu S_1 a přímky b_1, určit průsečíky X_1, Y_1 přímky b_1 a již sestrojené elipsy k_1 a tyto body otočit nazpět do bodů ${}^1X_1$, ${}^1Y_1$ na ${}^1b_1$. Nárysy bodů ${}^1X_1$, ${}^1Y_1$ určíme např. pomocí hlavní kružnice kulové plochy ${}^1g$. Jestliže v některých bodech křivek m, n existují jejich tečny kolmé k nárysně, pak nárysy těchto tečen jsou body vratu křivek m_2, n_2. Na obrázku je vyznačena konstrukce jednoho z nich. Ke křivce m_1 je vedena tečna kolmá k základnici, jejíž bod dotyku je U_1. Z konstrukce bodů křivky m vyplývá, že U leží na tvořící kružnici plochy κ o středu O.[14] Současně ovšem leží U na hlavní kružnici kulové plochy κ o středu O a poloměru r v rovině rovnoběžné s nárysnou. Z toho snadno určíme nárys U_2 bodu U, což je bod vratu křivky m_2.

Na závěr si ukážeme princip konstrukce meze vlastního stínu při rovnoběžném osvětlení Archimedovy serpentiny. Na obrázku 4.3.6 je situace zobrazena jen v půdorysně, označení je voleno stejně jako na předchozím obrázku. Archimedova serpentina je určena kružnicí k ležící v rovině ρ, jejíž střed S vytváří šroubovici l. Osvětlení je dáno přímkou s procházející vrcholem V směrové kuželové plochy a protínající půdorysnu v bodě V'. Uvažujme kulovou plochu κ o středu S, která obsahuje kružnici k. Mez vlastního stínu na κ[15] protíná tvořící kružnici k v bodech M, N vlastního stínu plochy. Body M, N leží na průsečnici n rovin ρ a γ. Je-li t tečna šroubovice l v bodě S, pak je přímka n kolmá k oběma přímkám t, s.



Obr. 4.3.6

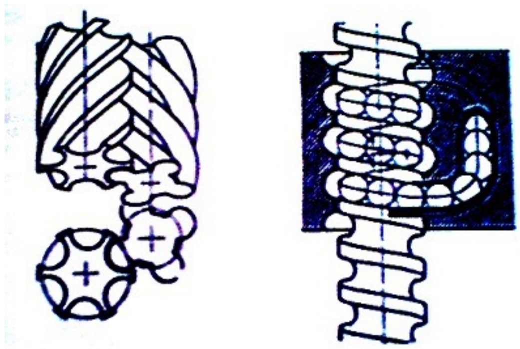
[14] U_1O_1 je rovnoběžná se základnicí.
[15] Což je hlavní kružnice p v rovině γ kolmé k s.

Vedeme-li bodem V rovnoběžku t' s přímkou t, pak její stopník P leží na l_1. Označíme-li σ rovinu určenou přímkami s, t', pak $p^\sigma = V'P$ je její půdorysná stopa a n je kolmá k σ, tedy n_1 je kolmá k p_1^σ. Nyní uvažujme otočení o středu $_1$ o pravý úhel proti šipce udávající klesání daného šroubového pohybu. Bod V_1' přejde v tomto otočení do bodu V_1^*, bod P_1 do S_1 a přímka p_1^σ do $S_1V_1^*$. Současně však vzhledem k tomu, že S_1 leží na n_1 a n_1 je kolmá k $p_1\sigma$ přejde přímka p_1^σ do n_1 a proto platí V_1^* leží na n_1. Jestliže je ${}^0p_1$ elipsa, kterou dostaneme jako obraz elipsy p_1 v posunutí bodu S_1 do V_1^*, pak přímka n_1 protíná ${}^p_1$ v bodech ${}^0M_1$, ${}^0N_1$, pro které platí $|{}^0M_1V_1^*| = |{}^0N_1V_1^*| = |S_1M_1| = |S_1N_1|$.

Tento výsledek není závislý na volbě bodu S a tím ani na konkrétní tvořící kružnici plochy a vyplývá z něho následující konstrukce prvních průmětů bodů meze vlastního stínu: Na kružnici l_1 zvolíme bod ${}^1S_1$, určíme průsečíky ${}^0R_1$, ${}^0Q_1$ přímky $V_1^*S_1$ s elipsou ${}^0p_1$ a body R_1, Q_1 na $V_1^*S_1$ takové, že $|{}^1S_1R_1| = |{}^1S_1Q_1| = |{}^0R_1V_1^*|$, pak patří půdorysu meze vlastního stínu. Tímto půdorysem je potom *kisoida* křivek p_1, l_1 pro pól V_1^*.

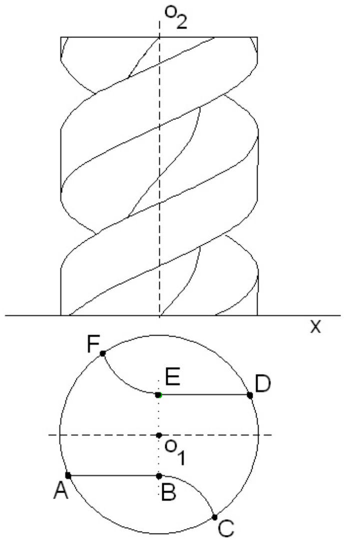
4.3.4 Užití cyklických šroubových ploch

Cyklických šroubových ploch se používá jako skluzů pro sypké materiály a také jako dopravních žlabů. V architektuře najdeme tyto plochy převážně na ozdobných motivech a sloupech, většinou v době baroka. Širší je však využití ve strojírenské praxi. Vinutý sloupek se užívá u šroubových vrtáků, jejichž příčný profil se skládá z úseček a oblouků kružnic. Rovněž příčné profily šroubových čerpadel se skládají z oblouků kružnic. Osové cyklické plochy se užívá u tzv. *metrických, Whitworthových závitů* nebo u závitů objímek žárovek. Části této plochy, která vznikne šroubováním půlkružnice, je možno použít také jako plochy klenby nad schodištěm. Archimedova serpentina se vyskytuje u šroubových potrubí, šroubových pružin, šroubových kuličkových ložisek.



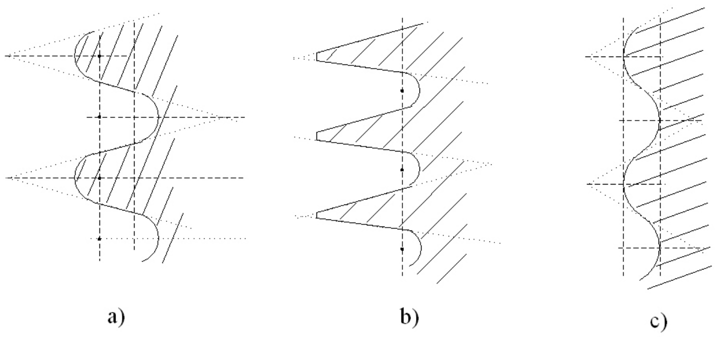
Obr. 4.3.7

Jak jsme uváděli u přímkových šroubových ploch, *nebozez* vznikne šroubováním profilu tvořeného úsečkami i částmi kružnic, n a obrázku je zobrazená část v Mongeově projekci, v půdoryse je vidět profil, jehož šroubováním ploch vzniká. Úsečky AB, DE vytvoří při šroubování části pravoúhlých otevřených přímkových ploch, oblouky BC, EF části normálních cyklických šroubových ploch a oblouky CD, AF část rotační válcové plochy.



Obr. 4.3.8

Na obrázku 4.3.9 jsou znázorněny osové řezy Whitworthova, pilového a oblého závitu. Povrch těchto závitů je složen z částí kosoúhlých uzavřených přímkových šroubových ploch a z částí osových cyklických šroubových ploch, v případě b) potom také z částí rotační válcové plochy.



Obr. 4.3.9

Oblý šroub

Obr. 4.3.10

Literatura

[1] MACHALA, F.: *Plochy technické praxe*, RUP Olomouc, 1986

[2] KADEŘÁVEK, J., KLÍMA, J., KOUNOVSKÝ, F.: *Deskriptivní geometrie II*, ČSAV Praha, 1954

[3] URBAN, A.: *Deskriptivní geometrie II*, SNTL Praha, 1967

[4] JUKL, M.: *Analytická geometrie kuželoseček a kvadrik*, VUP Olomouc, 2006

[5] PISKA, R, MEDEK, V.: *Deskriptivní geometrie II*, SNTL Praha, 1966

[6] ZAVADILOVÁ, P.: *Některé plochy technické praxe*, diplomová práce, PřF UP Olomouc, 2003

[7] SUCHÁNEK, D.: *Šroubové plochy a jejich využití v praxi*, diplomová práce, PřF UP Olomouc, 2004

[8] HAVLÍČEK, K.: *Úvod do projektivní geometrie kuželoseček*, SNTL Praha, 1956

[9] VOJTĚCH, J.: *Geometrie projektivní. Synthetické i analytické vyšetřování projektivních příbuzností a útvarů*, JČMF Praha, 1932