Axiomatická výstavba geometrie

Začínáme výčtem:

1. skupiny základních objektů
2. základních vztahů mezi těmito objekty
3. skupiny axiomů
4. Základní objekty, jimiž se geometrie zabývá, jsou body, přímky, roviny. Tyto pojmy se nedefinují a nepopisují.
5. Základní vztahy mezi základními objekty jsou „incidence“, vztah „mezi“ a „shodnost“. Tyto základní vztahy se nedefinují a nepopisují.

Geometrie vychází ze základních objektů a základních vztahů mezi nimi. Podstata spočívá v tom, že od základních objektů a základních vztahů se požaduje pouze to, aby se podřizovaly axiomům, a jinak zůstávají libovolnými.

Přehled Hilbertovy soustavy axiomů

1. Axiomy incidence
2. Každými dvěma navzájem různými body prochází právě jedna přímka.
3. Na každé přímce leží alespoň dva navzájem různé body.
4. Existují alespoň tři různé body, které neleží na téže přímce.
5. Ke třem libovolným bodům, neležícím v téže přímce, existuje jediná rovina, která jimi prochází.
6. V libovolné rovině existuje vždy bod s ní incidentní.
7. Jestliže dva různé body $A, B$ leží na přímce $a$ i v rovině α, pak přímka $a$ leží v rovině α.
8. Mají-li dvě roviny $α, β$ společný bod $A$, pak mají alespoň ještě jeden společný bod $B$.
9. Existují alespoň čtyři body neležící v téže rovině.
10. Axiomy uspořádání
11. Jestliže body $A, B, C$ jsou tři navzájem různé body téže přímky a bod $B$ leží mezi $A$ a $C$, pak také $B$ leží mezi $C$ a $A$.
12. Jsou-li dány dva body $A, B$ na přímce, existuje na této přímce aspoň jeden bod $C$ takový, že $B$ leží mezi $A$ a $C$.
13. Ze tří bodů na přímce leží nejvýše jeden mezi zbývajícími dvěma.
14. (Paschův) Jestliže v dané rovině je dán trojúhelník $ABC$ a libovolná přímka $a$, která neprochází žádným z jeho vrcholů a protíná úsečku $AB$, protíná pak také buď úsečku $BC$ nebo úsečku $AC$.
15. Axiomy shodnosti (úseček a úhlů)
16. Na libovolné úsečce lze od libovolného jejího bodu nanést úsečku shodnou s danou úsečkou.
17. Dvě úsečky, které jsou rovny třetí úsečce, jsou si rovny.
18. Nechť $A, B, C$ jsou body jedné přímky, $A´, B´, C´$ jsou body druhé přímky a nechť velikost úsečky $AB$ je rovna velikosti úsečky$ A´B´$, velikost úsečky $BC$ je rovna velikosti úsečky$ B´C´$. Jestliže úsečky $AB, BC, A´B´, B´C´$ nemají společné body, pak velikost úsečky $AC$ je rovna velikosti úsečky $A´C´$. (Umožňuje sčítání úseček.)
19. Od libovolného bodu dané přímky lze v jedné polorovině vyťaté touto přímkou sestrojit jen jeden úhel rovný danému.
20. Jestliže ve dvou trojúhelnících $ABC$ a $A´B´C´$ jsou si rovny velikosti stran $AB$ a $A´B´$, $AC$ a $A´C´$ a velikost úhlu $BAC$ je rovna velikosti úhlu $B´A´C´$, pak velikost úhlu $ABC$ je rovna velikosti úhlu $A´B´C´$.
21. Axiomy spojitosti
22. Nechť $A\_{1}$ je libovolný bod dané přímky, ležící mezi jejími libovolně zvolenými body $A, B$. Sestrojme posloupnost bodů $A\_{2}, A\_{3}, A\_{4}, …$ tak, aby $A\_{1}$ ležel mezi $A, A\_{2}$, dále $A\_{k}$ mezi $A\_{k-1}A\_{k+1}$ a aby platilo, že úsečky $A A\_{1}$, $A\_{1}A\_{2}$, … jsou navzájem kongruentní (shodné). Pak existuje v této posloupnosti bodů takový bod $A\_{n}$, že bod $B$ leží mezi body $A$ a $A\_{n}$.
23. (Axiom úplnosti přímky): Body přímky tvoří soustavu bodů, kterou nelze doplnit novými body, které bychom mohli považovat za náležející přímce, aniž bychom narušili dříve uvedené axiomy.
24. Axiom o rovnoběžkách

Buď dána libovolná přímka a libovolný bod, který na ní neleží. Pak v rovině určené touto přímkou a tímto bodem existuje nejvýše jedna přímka, která prochází daným bodem a je s danou přímkou rovnoběžná.

V eukleidovském prostoru, o jehož vybudování nám jde, se však spojitostí vyžaduje spojitost přímek.

Hilbert formuloval svůj uměle sestrojený axiom úplnosti proto, aby se vyhnul obtížím.

Oba Hilbertovy axiomy spojitosti lze nahradit jedním axiomem.

IV. 1´ (Dedekindův axiom): Jsou-li všechny body přímky rozděleny do dvou neprázdných množin $M\_{1}, M\_{2}$ tak, že

1. každý bod přímky patří právě jedné z množin $M\_{1}, M\_{2}$;
2. v jednom z obou uspořádání bodů na přímce každý bod jedné z množin předchází všem bodům druhé množiny, potom buďto v první množině existuje bod, následující za všemi body první množiny, nebo ve druhé množině existuje bod předcházející všem bodům v druhé množině.



Tvoří-li skupina axiomů spojitosti jediný axiom, tj. Dedekindův, pak IV 1, IV 2 jsou větami, které lze na základě Dedekindova axiomu dokázat.

Hilbertův axiomatický systém poskytuje základ pro několik typů geometrií:

|  |  |
| --- | --- |
| Platí-li skupiny axiomů: | dospějeme ke geometrii |
| I., II. nebo I., II., IV. | polohové |
| I., II., IV., V. nebo I., II., V. | afinní |
| I., II., III., IV., V. | eukleidovské |
| I., II., III., IV., H. | hyperbolické |

Axiom (H) – Lobačevského (pro hyperbolickou geometrii)

Bodem $A$, který neleží na přímce $a$, v rovině určené přímkou $a$ a bodem $A$, procházejí alespoň dvě různé přímky $b, c$, které nemají s přímkou $a$ žádný společný bod.



Z tohoto axiomu plyne, že bodem $A$ v rovině $(Ac)$ prochází nekonečně mnoho přímek, které neprotínají přímku $a$. Mezi tyto přímky patří všechny přímky, které procházejí bodem $A$ a které procházejí vnitřkem úhlu $(BAC)$.