**Příčky v trojúhelníku, Cèvova věta, Van Aubelova věta, Menelaova věta**

* **Příčka v trojúhelníku** je úsečka s krajními body na hranici trojúhelníku, které neleží na téže straně.
* **Střední příčka v trojúhelníku** je úsečka spojující středy dvou stran trojúhelníku.
* **Cèviána** je úsečka spojující vrchol trojúhelníku s některým **vnitřním** bodem protilehlé strany, (např. těžnice, osa vnitřního úhlu jako úsečky, výška v ostroúhlém trojúhelníku, atd.)

Otázka: Za jakých podmínek se protínají tři cèviány ze tří vrcholů daného trojúhelníku v jednom společném bodě?

* tři cèviány z jednotlivých vrcholů se protínají po dvou ve třech různých bodech,
* nebo všechny tři cèviány se protínají v jednom společném bodě.

Giovanni Cèva byl italský matematik (1648 - 1734).

Cèvova věta stanovuje podmínku, kdy mají tři přímky procházející vrcholy trojúhelníku společný bod.

**Cèvova věta:** Nechť $K, L, M$ jsou po řadě vnitřní body stran $BC, CA, AB$ trojúhelníku $ABC$. Úsečky $AK,BL, CM$ se protínají v jedno bodě, právě když platí:

$\frac{\left|AM\right|}{\left|BM\right|}\frac{\left|BK\right|}{\left|CK\right|}\frac{\left|CL\right|}{\left|AL\right|}=1$ ….. (Ƈ)

Cèvova věta: V trojúhelníku $ABC$ se přímky $AK, BL $a $CM$, kde body$ K, L, M$ leží na stranách protilehlých odpovídajícím vrcholům, protínají v jednom bodě právě tehdy, když platí:$ \frac{\left|AM\right|}{\left|BM\right|}\frac{\left|BK\right|}{\left|CK\right|}\frac{\left|CL\right|}{\left|AL\right|}=1$.

Cèvova věta: Buď dán trojúhelník $ABC$. Buďte $K, L, M$ postupně body na přímkách $BC, CA, AB$, které nesplývají s žádným z vrcholů trojúhelníka $ABC$. Potom přímky $AK, BL $a $CM$ procházejí týmž bodem, nebo jsou rovnoběžné právě tehdy, když platí $\left(BCK\right)\left(CAL\right)\left(ABM\right)=-1$.

*Důkaz:*

*Cvičení 1.* Užitím Cèvovy věty dokažte, že se těžnice v trojúhelníku protínají v jednom bodě.

*Cvičení 2.* Užitím Cèvovy věty dokažte, že se výšky v trojúhelníku protínají v jednom bodě (tj.ceviány kolmé na protilehlé strany trojúhelníku mají jeden společný bod).

*Cvičení 3.* Užitím Cèvovy věty dokažte, že osy vnitřních úhlů trojúhelníku se protínají v jednom bodě.

**Věta:** Osa vnitřního úhlu trojúhelníku rozděluje protilehlou stranu na dvě části, jejichž délky jsou ve stejném poměru jako jim přilehlé strany trojúhelníku.

*Cvičení 4.* Nechť $G\_{a}, G\_{b}, G\_{c}$ jsou body dotyku stran trojúhelníku s jemu vepsanou kružnicí. Dokažte, že jim odpovídající ceviány se protínají v jednom bodě, tzv. Gergonneův bod.

*Cvičení 5*. Dokažte analogické tvrzenípro dotykové body$ N\_{a}, N\_{b}, N\_{c}$ kružnic vně připsaných stranám. Cèviány $ AN\_{a}, BN\_{b}, CN\_{c}$ se protínají v jednom bodě, tzv. Nagelův bod.

**Věta Van Aubelova:** Nechť R je průsečík cèvián $AK, BL $a $CM$ trojúhelníku $ABC$. Pak platí:

$$\frac{\left|CR\right|}{\left|MR\right|}=\frac{\left|CK\right|}{\left|BK\right|}+\frac{\left|CL\right|}{\left|AL\right|}$$

$$\frac{\left|AR\right|}{\left|KR\right|}=\frac{\left|AM\right|}{\left|BM\right|}+\frac{\left|AL\right|}{\left|CL\right|}$$

$$\frac{\left|BR\right|}{\left|LR\right|}=\frac{\left|BM\right|}{\left|AM\right|}+\frac{\left|BK\right|}{\left|CK\right|}$$

*Cvičení 6.* Užitím Van Aubelovy věty dokažte, že těžiště trojúhelníku dělí každou těžnici v poměru 1:2.

**Věta Menelaova:** V rovině je dán. Na přímkách $AB, BC, AC$ uvažujme po řadě body $X, Y, Z$ (různé od jeho vrcholů), z nichž buď právě dva, nebo žádný z nich jsou body trojúhelníku $ABC$. Body $X, Y, Z$ leží na přímce, právě když platí: $\frac{\left|AX\right|}{\left|BX\right|}\frac{\left|BY\right|}{\left|CY\right|}\frac{\left|CZ\right|}{\left|AZ\right|}=1$ …. (Ϻ)

*Cvičení 7.* A F F B ⋅ B D D C ⋅ C E E A = 1 {\displaystyle {\frac {AF}{FB}}\cdot {\frac {BD}{DC}}\cdot {\frac {CE}{EA}}=1} Uvažujme pravoúhlý trojúhelník $ABC$ a pravým úhlem při vrcholu $A $a s odvěsnami $\left|AB\right|=3,\left|AC\right|=4$. Nechť $D$ je vnitřním bodem jeho přepony $BC$ takový, že $\left|CD\right|=1$ a nechť $E$ je středem strany $AC$. Konečně $F$ značí průsečík přímek $DE$ a $AB$. Určete délku $AF$.

*Cvičení 8.* (Desarguesova věta, pozn. v projektivní rovině je to to axiom) Jsou-li $A, B, C, A´, B´, C´$ dvě trojice navzájem různých bodů takových, že $O=AA´ ∩ BB´ ∩CC´$, pak body $X= AB ∩ A´B´, Y= AC ∩ A´C´, Z= BC ∩ B´C´ $ jsou kolineární, tzn. leží na téže přímce.