Kapitola IV
Konstrukce trojúhelníka

Tato kapitola je věnována konstrukcím trojúhelníka. Přesněji řečeno, jedná se o úlohy tohoto typu: Jsou vybrány tři prvky v trojúhelníku a jsou dána tři kladná čísla p, q, r. Ptáme se po možnosti zkonstruovat trojúhelník, v němž vybrané tři prvky (v daném pořadí) mají velikosti p, q, r (v daném pořadí). Například jsou-li vybrány strany $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ a čísla $\frac{3}{2}$, $\sqrt{2}$, e (e je základ přirozených logaritmů), chceme vědět, zda je možné zkonstruovat trojúhelník ABC takový, že $|BC| = \frac{3}{2}$, $|CA| = \sqrt{2}$, $|AB| = \mathrm{e}$. Zjednodušeně říkáme, že máme zkonstruovat trojúhelník, je-li dáno $a = \frac{3}{2}$, $b = \sqrt{2}$, $c = \mathrm{e}$. Podobně, jsou-li vybrány strana $\overline{BC}$, těžnice $\overline{BT_b}$ a poloměr kružnice vepsané a jsou-li dána čísla 2, $\frac{1}{4}\sqrt{37}$, $\frac{1}{2}$, chceme vědět, zda je možné zkonstruovat trojúhelník ABC takový, že v něm $|BC| = 2$, $|BT_b| = \frac{1}{4}\sqrt{37}$ a jeho kružnice vepsaná má poloměr $\frac{1}{2}$. Zjednodušeně zase říkáme, že máme zkonstruovat trojúhelník, je-li dáno $a = 2$, $t_b = \frac{1}{4}\sqrt{37}$, $\varrho = \frac{1}{2}$.

Předem upozorňujeme, že se nebudeme zabývat konstrukcí prvků, které jsou dány. Tak např. v první z uvedených dvou úloh budeme předpokládat, že v rovině máme k dispozici tři úsečky délek postupně $\frac{3}{2}$, $\sqrt{2}$, e (jakkoli v rovině umístěné), takže daná úloha vlastně vyžaduje z těchto tří úseček pouze „složit" trojúhelník. V druhé úloze podobně předpokládáme, že v rovině máme k dispozici úsečky délek postupně 2, $\frac{1}{4}\sqrt{37}$, $\frac{1}{2}$. Je-li jeden z vybraných prvků např. úhel $\sphericalangle BAC$ a jemu příslušné číslo je $\pi/7$, předpokládáme, že v rovině máme k dispozici úhel velikosti $\pi/7$. Budeme tedy zcela bezstarostní, co se týče konstrukcí prvků, které jsou dány, ale na druhé straně, jak brzy uvidíme, budeme věnovat extrémní pozornost konstrukcím prvků, které nejsou předem dány, zejména konstrukcím úseček a úhlů potřebné velikosti.

Musíme též alespoň trochu upřesnit, co rozumíme pod pojmem konstrukce. *Konstrukcí* zde budeme rozumět geometrickou konstrukci prováděnou pouze s pomocí kružítka (s proměnným poloměrem) a pravítka bez měřítka, které má pouze jednu hranu. (Můžete si představit, že jeho druhá hrana „je okousaná".) Čtenáře, který má hlubší zájem o teorii geometrických konstrukcí, odkazujeme na [13] nebo [17].

Je třeba rovněž říci, že pojmy rovina, kružítko a pravítko chápeme v idealizovaném smyslu. Rovina, se kterou pracujeme, je především matematický pojem (přesněji je to dvojrozměrný euklidovský prostor). Přesto si v její roli často představujeme „rovinu nákresny". Tato náhrada je velmi často užitečná, protože je názorná a pomáhá mnohé lépe a rychleji pochopit. V hlubších úvahách může ovšem představa „roviny nákresny" někdy trochu selhat. Tehdy je třeba, aby si čtenář uvědomil, že rovina je matematický pojem. V této knize ovšem nemáme prostor k tomu, abychom budovali teorii euklidovského prostoru (lze ji nalézt např. v [3]), a musíme spoléhat v některých směrech spíše na názor. Někdy to může způsobit, že čtenář bude mít (zcela pochopitelný) pocit, že některým věcem nerozumí zcela beze zbytku. Dodejme, že kružítko je idealizované např. v tom smylu, že je nastavitelné na libovolně velký poloměr, a pravítko v tom smyslu, že je nekonečně dlouhé. O kružítku a pravítku hovoříme ovšem zase spíše pro názornost. V teorii geometrických konstrukcí jsou tyto nástroje nahrazeny matematickými pojmy.

Upozorněme, že ne vždy lze na základě daných údajů trojúhelník zkonstruovat. Důvody k tomu mohou být dvojího druhu. Například máme-li zkonstruovat trojúhelník, je-li dáno $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$, při prvním pokusu se přesvědčíme, že to nejde, protože příslušné kružnice se vůbec neprotínají (matematicky řečeno, není splněna trojúhelníková nerovnost $c < a + b$). Obecně o úlohách tohoto typu lze říci, že trojúhelník nelze zkonstruovat, protože trojúhelník požadovaných vlastností vůbec neexistuje. Existuje však ještě mnohem hlubší důvod, proč někdy trojúhelník nelze zkonstruovat. Příkladem je druhá úloha ze začátku této kapitoly. Máme zkonstruovat trojúhelník, je-li dáno $a = 2$, $t_b = \frac{1}{4}\sqrt{37}$, $\varrho = \frac{1}{2}$. Lze dokázat, že trojúhelník s těmito vlastnostmi existuje. Zároveň však lze dokázat, že ho nelze zkonstruovat pouhým kružítkem a pravítkem. Obecně o úlohách tohoto typu lze říci, že trojúhelník existuje, ale nelze ho zkonstruovat, protože nástroje, které jsme si vybrali, nás příliš omezují. (O možnostech lepšího vybavení dalšími nástroji viz např. [17]).

Nyní uvedeme informace nutné pro pochopení struktury této kapitoly. Především je třeba říci, že pro konstrukce trojúhelníka vybíráme pouze tyto prvky: strany, úhly, výšky, těžnice, osy úhlů, kružnici opsanou, kružnici vepsanou. Čtenář by proto v této knize marně hledal úlohy v trojúhelníku, v nichž se vyskytují např. kružnice připsané, nebo úlohy, ve kterých známe třeba součet dvou stran apod. Rovněž zde nejsou řešeny úlohy polohové (tj. úlohy, ve kterých je předem dána poloha některého prvku trojúhelníka). Po formální stránce zde nejsou probírány všechny úlohy, které lze z výše uvedených prvků sestavit, ale můžeme čtenáře ujistit, že jsou probírány všechny typy úloh, které z nich lze sestavit. Tzn. že zde např. nenajdou úlohu, ve které je dáno β, v_a, t_c (resp. c, u_c, ϱ), ale najdeme zde úlohu, ve které je dáno α, v_b, t_c (resp. a, u_a, ϱ). První úloha (včetně jejího řešení) totiž vzniká pouhou permutací z úlohy druhé. (Vezmeme-li permutaci $\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}$, tj. převádíme-li prvky příslušné vrcholu A na prvky příslušné vrcholu B, prvky příslušné vrcholu B na prvky příslušné vrcholu A a prvky příslušné vrcholu C necháváme beze změny, přechází úloha α, v_b, t_c v úlohu β, v_a, t_c. Připomeňme, že při libovolné permutaci zůstává r a ϱ beze změny.) Tuto skutečnost musíme mít na paměti, hledáme-li v této kapitole úlohu, která nás zajímá.

Řazení typů úloh v této kapitole je lexikografické (tj. stejného typu jako řazení slov ve slovníku). Prvky v trojúhelníku přitom řadíme do posloupnosti („abecedy“)

$$a,\ b,\ c,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ v_a,\ v_b,\ v_c,\ t_a,\ t_b,\ t_c,\ u_a,\ u_b,\ u_c,\ r,\ \varrho\,.$$

První je tedy úloha a, b, c, následuje úloha a, b, α. Úloha a, b, β není uvedena, neboť vzniká permutací z úlohy předchozí. Poslední je úloha u_a, r, ϱ, neboť úlohy u_b, r, ϱ a u_c, r, ϱ z ní vznikají permutací. Typů úloh, které takto vznikají, je celkem 150. Z toho 98 typů lze řešit pomocí kružítka a pravítka, u zbývajících 52 typů to možné není.

Kapitola je rozdělena na dva články. První článek je věnován úlohám, které nelze řešit pomocí kružítka a pravítka. Jejím cílem je dát čtenáři návod, jak může sám dokázat, že některé úlohy nejsou řešitelné pomocí kružítka a pravítka. Tato část nemá nic společného s nějakou systematickou teorií a je pouhou sbírkou receptů, jak postupovat. I po přečtení těchto receptů, bude-li čtenář chtít sám dokázat neřešitelnost některé úlohy, bude muset prokázat určitou dávku vynalézavosti a samostatnosti. Doufáme však, že takto alespoň vzbudíme u čtenáře zájem o hlubší studium řešitelnosti úloh pomocí kružítka a pravítka. V tomto směru se lze obrátit na velké množství učebnic, např. na [1], [13], [16], [17]. (Upozorňujeme, že se jedná o teorie výrazně algebraického charakteru.) My provádíme podrobný důkaz neřešitelnosti pouze u tří úloh, a to u úloh č.102, 138 a 147.

V druhém článku této kapitoly je systematicky probráno všech 98 zmíněných typů úloh. Tato část začíná přehlednou tabulkou všech uvažovaných typů úloh, kde jsou jednotlivé úlohy očíslovány a která slouží k rychlému nalezení úlohy v textu. Není-li úloha řešitelná pomocí kružítka a pravítka, najdeme v této tabulce (N) a v textu u ní je pouze napsáno „úloha není euklidovsky řešitelná“. Výjimkou jsou pouze úlohy č. 102, 138 a 147. Je-li

úloha řešitelná pomocí kružítka a pravítka, uvádíme u složitějších úloh nejprve rozbor a u všech úloh konstrukci, podmínky řešitelnosti a počet řešení. U některých složitějších úloh se rozbor neobejde bez výpočtů. Konstrukci uvádíme poměrně stručně a bez jakéhokoli zdůvodňování. Podmínky řešitelnosti jsou podmínky kladené na velikosti vybraných prvků trojúhelníka, které jsou nutné a postačující k tomu, aby hledaný trojúhelník vůbec existoval. (Bylo by možná správnější je nazývat podmínky existence. Mají smysl i u úloh neřešitelných, kde je ovšem neuvádíme.) Tyto podmínky pro nedostatek místa neodvozujeme. Počtem řešení rozumíme maximální počet (jako obvykle kladně orientovaných) trojúhelníků, z nichž žádné dva nejsou na sebe převeditelné přímou euklidovskou transformací, tj. otočením složeným s posunutím. (Osovou symetrii nepřipouštíme, neboť mění orientaci trojúhelníka.) Počet řešení pro nedostatek místa nekomentujeme. Upozorňujeme, že počet řešení uvádíme vždy za předpokladu splnění podmínek řešitelnosti. (Nepovažovali jsme za nutné zdůrazňovat, že v případě, kdy nejsou splněny podmínky řešitelnosti, je počet řešení 0.) V případě, že úloha má nekonečný počet řešení, označujeme to obvyklým symbolem ∞. Někteří autoři takové úlohy nazývají podurčené. V tabulce budou označeny (P).

1. O důkazech neřešitelnosti úloh pomocí kružítka a pravítka

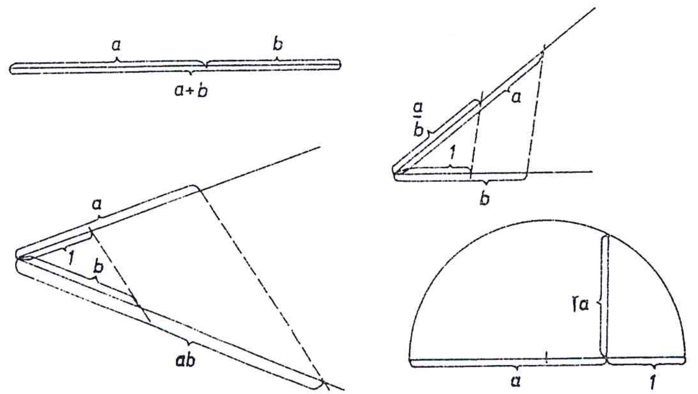
Tvrdíme-li, že úloha určitého typu je neřešitelná pomocí kružítka a pravítka, neznamená to, že je neřešitelná za každých podmínek. Znamená to přesně, že pro vybrané prvky v trojúhelníku lze předepsat takové jejich velikosti, že trojúhelník s vybranými prvky předepsaných velikostí sice existuje, ale není možné ho sestrojit pomocí kružítka a pravítka. Například chceme-li dokázat, že úloha typu a, t_b, ϱ není euklidovsky řešitelná, stačí (jak jsme již uvedli na začátku této kapitoly) zvolit $a = 2$, $t_b = \frac{1}{4}\sqrt{37}$, $\varrho = \frac{1}{2}$. Lze totiž dokázat, že trojúhelník s $a = 2$, $t_b = \frac{1}{4}\sqrt{37}$, $\varrho = \frac{1}{2}$ existuje, ale nelze ho zkonstruovat s pomocí kružítka a pravítka. Na druhé straně ovšem, zvolíme-li $a = \sqrt{3}$, $t_b = \frac{3}{2}$, $\varrho = \frac{1}{2}$, potom příslušný trojúhelník nejen existuje, ale lze ho dokonce s pomocí kružítka a pravítka zkonstruovat. (Čtenář nechť si spočítá délky zbývajících dvou stran tohoto trojúhelníka. Zjistí, že $b = c = \sqrt{3}$. Jedná se tedy o rovnostranný trojúhelník, s jehož konstrukcí není žádný problém.)

Abychom tedy dokázali, že úloha daného typu není řešitelná pomocí kružítka a pravítka, musíme splnit tyto tři body:

1. Vhodně předepsat velikosti daných prvků trojúhelníka.
2. Dokázat, že trojúhelník s danými prvky předepsaných velikostí existuje.
3. Dokázat, že tento trojúhelník nelze zkonstruovat pomocí kružítka a pravítka.

(Nyní bude vhodné, budete-li paralelně sledovat některou z úloh č. 102, 138 nebo 147.) Volbu velikostí daných prvků můžeme provádět zkusmo s ohledem na požadavky bodů 2 a 3. Nebude-li naše volba šťastná, což zjistíme v bodě 2 nebo až v bodě 3, budeme již většinou do dané konkrétní problematiky vidět natolik, že budeme vědět, jak volbu pozměnit. V každém případě je však nutné, aby zvolené velikosti daných prvků byla konstruovatelná čísla. (Proč je to nutné, uvidíme později.) Tento pojem nyní vysvětlíme.

Je velmi dobře známo, že vyjdeme-li z úsečky délky 1, potom pomocí kružítka a pravítka můžeme zkonstruovat úsečku, jejíž délka je libovolné předem dané kladné racionální číslo m/n. Stejně tak dobře víme, že vyjdeme-li z úsečky délky 1, potom pomocí kružítka a pravítka můžeme zkonstruovat i úsečky, jejichž délky nejsou racionální čísla (např. úsečku délky $\sqrt{2}$). Algebra je schopna velmi přesně popsat, která kladná reálná čísla jsou délkami úseček konstruovatelných pomocí kružítka a pravítka, vyjdeme-li z úsečky délky 1. Taková čísla zde budeme nazývat *konstruovatelná*. Ostatní kladná reálná čísla budeme potom nazývat *nekonstruovatelná*. (Například čísla $\sqrt[3]{2}$ a π jsou nekonstruovatelná.) Nemáme zde tolik místa, abychom uváděli příslušné algebraické výsledky. Připomeňme však (viz obr. 95), že součet, součin a podíl dvou konstruovatelných čísel je opět konstruovatelné číslo a že druhá odmocnina z konstruovatelného čísla je opět konstruovatelné



Obr. 95

číslo. Každé kladné číslo tvaru $r \pm s\sqrt{t}$, kde r, s a t jsou racionální, je konstruovatelné.

Důkaz existence trojúhelníka s danými prvky předepsaných velikostí můžeme provést tak, že vypočteme velikost některého dalšího prvku (nebo alespoň získáme odhady pro jeho velikost). Tento nový prvek musíme zvolit tak, aby se dvěma z daných prvků vedl na úlohu, která je řešitelná. Pro důkaz existence trojúhelníka potom můžeme použít podmínky řešitelnosti této úlohy. Může být ovšem výhodnější vypočítat velikosti dvou nebo i tří dalších prvků. Zde velmi záleží na naší zkušenosti a šikovnosti.

Z teoretického hlediska je ovšem vůbec nejobtížnější dokázat, že daný trojúhelník (o jehož existenci jsme se již předtím přesvědčili) není možno zkonstruovat pomocí kružítka a pravítka. Zde velmi pomáhá algebra. Především však musíme připomenout některé pojmy.

Buď $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ mnohočlen stupně n (to znamená, že $a_0 \neq 0$) s reálnými koeficienty. Řekneme, že reálné číslo ξ je *kořenem* tohoto mnohočlenu, jestliže $f(\xi) = a_0\xi^n + a_1\xi^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\xi + a_n = 0$. (Kořenem mnohočlenu mohou být i komplexní čísla, ale tím zde čtenáře nebudeme zatěžovat.)

Je-li $f(x)$ mnohočlen s racionálními koeficienty, řekneme, že je *rozložitelný v oboru racionálních čísel*, jestliže existují dva nekonstantní (tj. stupně většího nebo rovného 1) mnohočleny f_1 a f_2 s racionálními koeficienty takové, že $f(x) = f_1(x)f_2(x)$. Mnohočlen, který není rozložitelný v oboru racionálních čísel, se nazývá *nerozložitelný* (= *ireducibilní*) *v oboru racionálních čísel.*

Předpokládejme, že jsou vybrány tři prvky trojúhelníka a jsou předepsány jejich velikosti, přičemž každá z nich je konstruovatelným číslem. Je-li jedním z prvků úhel, potom slovy „velikost úhlu je konstruovatelným číslem" rozumíme, že sinus tohoto úhlu je konstruovatelným číslem. Předpokládejme, že trojúhelník s vybranými prvky předepsaných velikostí je možno zkonstruovat pomocí kružítka a pravítka. Potom z definice konstruovatelného čísla ihned vidíme, že rovněž velikost každého dalšího prvku tohoto trojúhelníku je konstruovatelným číslem.

Předpokládejme opět, že jsou vybrány tři prvky trojúhelníka, tj. jsou předepsány jejich velikosti, z nichž každá je konstruovatelným číslem, přičemž hledaný trojúhelník existuje. Dejme tomu, že zjistíme, že velikost ξ některého dalšího prvku uvažovaného trojúhelníka je kořenem mnohočlenu s racionálními koeficienty, který je nerozložitelný v oboru racionálních čísel, a že dokážeme, že žádný reálný kořen tohoto mnohočlenu není konstruovatelným číslem. Potom ovšem ani velikost ξ není konstruovatelným číslem a uvažovaný trojúhelník není možné zkonstruovat pomocí kružítka a pravítka. Kdyby to totiž bylo možné, potom podle předchozího odstavce by velikost ξ musela být konstruovatelným číslem.

K tomu, abychom mohli zjišťovat, kdy mnohočlen nemá žádné konstruovatelné kořeny, uvedeme dvě věty.

Věta 1 (Wantzelova). *Buď f mnohočlen s racionálními koeficienty nerozložitelný v oboru racionálních čísel. Nechť stupeň mnohočlenu f není mocninou čísla 2 (tj. je různý od čísel 1, 2, 4, 8, 16 atd.). Potom žádný reálný kořen mnohočlenu f není konstruovatelným číslem.*

Tato věta je obzvláště užitečná v případě, když zjistíme, že velikost ξ některého dalšího prvku trojúhelníka je kořenem mnohočlenu stupně 3(*kubického mnohočlenu*). Velmi často se ovšem stává, že takové ξ je kořenem mnohočlenu stupně 4 (*bikvadratického mnohočlenu*). V takovém případě je bohužel věta 1 nepoužitelná, neboť $4 = 2^2$. Proto pro vyšetřování tohoto případu uvádíme následující, poněkud speciální větu.

Věta 2. *Buď $f(x) = x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$ mnohočlen stupně 4 s racionálními koeficienty, který nemá ani jeden racionální kořen. Jestliže mnohočlen*

$$g(x) = x^3 - a_2x^2 + (a_1a_3 - 4a_4)x - a_4(a_1^2 - 4a_2) - a_3^2$$

(tzv. kubická resolventa mnohočlenu f) nemá rovněž ani jeden racionální kořen, potom žádný reálný kořen mnohočlenu f není konstruovatelným číslem.

Při snaze použít předchozí dvě věty narazíme ihned na problém, jak zjistit, zda daný mnohočlen s racionálními koeficienty je nerozložitelný v oboru racionálních čísel nebo zda nemá racionální kořen. Oba problémy jsou spolu úzce svázány. Jestliže totiž mnohočlen f s racionálními koeficienty má racionální kořen ξ, potom je rozložitelný v oboru racionálních čísel. Můžeme potom psát $f(x) = (x - \xi)\, g(x)$, kde stupeň $g(x)$ = stupeň $f(x) - 1$. Mnohočlen g vypočteme dělením mnohočlenu f mnohočlenem $x - \xi$. U mnohočlenů stupně 3, které se v těchto souvislostech často uvažují, je situace ještě jednodušší. Mnohočlen stupně 3 s racionálními koeficienty je rozložitelný v oboru racionálních čísel právě tehdy, když má racionální kořen. Je-li velikost ξ nějakého prvku v trojúhelníku kořenem mnohočlenu s racionálními koeficienty, potom je rovněž kořenem mnohočlenu s celočíselnými koeficienty. (Stačí první mnohočlen vynásobit vhodným celým číslem.)

K vyšetřování nerozložitelosti mnohočlenů s celočíselnými koeficienty v oboru racionálních čísel dáme čtenáři k dispozici dvě věty.

Věta 3 (Gaussova). *Buď f mnohočlen s celočíselnými koeficienty. Je-li $f(x) = f_1(x)f_2(x)$, kde f_1 a f_2 jsou dva nekonstantní mnohočleny s racionálními koeficienty, potom existují mnohočleny g_1 a g_2 s celočíselnými koeficienty, splňující* stupeň $g_1(x)$ = stupeň $f_1(x)$, stupeň $g_2(x)$ = stupeň $f_2(x)$, *takové, že* $f(x) = g_1(x)\,g_2(x)$.

Věta 4 (Eisensteinovo kritérium). *Buď $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ mnohočlen s celočíselnými koeficienty. Buď p prvočíslo takové, že platí*

$$p \nmid a_0, \qquad p | a_i \quad pro\ i = 1, \ldots, n, \qquad p^2 \nmid a_n.$$

($p|q$ značí, že p dělí q, $p \nmid q$ značí, že p nedělí q.) Potom mnohočlen f je nerozložitelný v oboru racionálních čísel.

Praktické použití těchto dvou vět nechť čtenář sleduje v úlohách č. 102, 138 a 147 (viz lexikografické uspořádání).

2. Konstrukce trojúhelníka

Na základě zmíněného lexikografického uspořádání a s ohledem na princip cyklické záměny lze uvažovat těchto 150 konstruktivních úloh zadaných základními prvky trojúhelníka:

1. a, b, c,
2. a, b, α,
3. a, b, γ,
4. a, b, v_a,
5. a, b, v_c,
6. a, b, t_a,
7. a, b, t_c,
8. a, b, u_a (N),
9. a, b, u_c,
10. a, b, r,
11. a, b, ϱ (N),
12. a, α, β,
13. a, α, v_a,
14. a, α, v_b,
15. a, α, t_a,
16. a, α, t_b,
17. a, α, u_a,
18. a, α, u_b (N),
19. a, α, r (P),
20. a, α, ϱ,
21. a, β, γ,
22. a, β, v_a,
23. a, β, v_b,
24. a, β, v_c (P),
25. a, β, t_a,
26. a, β, t_b,
27. a, β, t_c,
28. a, β, u_a (N),
29. a, β, u_b,
30. a, β, u_c,

31. $a, \beta, r,$
32. $a, \beta, \varrho,$
33. $a, v_a, v_b,$
34. $a, v_a, t_a,$
35. $a, v_a, t_b,$
36. $a, v_a, u_a,$
37. a, v_a, u_b (N),
38. $a, v_a, r,$
39. $a, v_a, \varrho,$
40. $a, v_b, v_c,$
41. $a, v_b, t_a,$
42. $a, v_b, t_b,$
43. $a, v_b, t_c,$
44. a, v_b, u_a (N),
45. $a, v_b, u_b,$
46. $a, v_b, u_c,$
47. $a, v_b, r,$
48. $a, v_b, \varrho,$
49. $a, t_a, t_b,$
50. $a, t_a, u_a,$
51. a, t_a, u_b (N),
52. $a, t_a, r,$
53. a, t_a, ϱ (N),
54. $a, t_b, t_c,$
55. a, t_b, u_a (N),
56. a, t_b, u_b (N),
57. a, t_b, u_c (N),
58. $a, t_b, r,$
59. a, t_b, ϱ (N),
60. a, u_a, u_b (N),
61. $a, u_a, r,$
62. a, u_a, ϱ (N),
63. a, u_b, u_c (N),
64. a, u_b, r (N),
65. a, u_b, ϱ (N),
66. $a, r, \varrho,$
67. α, β, γ (P),
68. $\alpha, \beta, v_a,$
69. $\alpha, \beta, v_c,$
70. $\alpha, \beta, t_a,$
71. $\alpha, \beta, t_c,$
72. $\alpha, \beta, u_a,$
73. $\alpha, \beta, u_c,$
74. $\alpha, \beta, r,$
75. $\alpha, \beta, \varrho,$
76. $\alpha, v_a, v_b,$
77. $\alpha, v_a, t_a,$
78. $\alpha, v_a, t_b,$
79. $\alpha, v_a, u_a,$
80. α, v_a, u_b (N),
81. $\alpha, v_a, r,$
82. $\alpha, v_a, \varrho,$
83. $\alpha, v_b, v_c,$
84. $\alpha, v_b, t_a,$
85. $\alpha, v_b, t_b,$
86. $\alpha, v_b, t_c,$
87. $\alpha, v_b, u_a,$
88. $\alpha, v_b, u_b,$
89. α, v_b, u_c (N),
90. $\alpha, v_b, r,$
91. $\alpha, v_b, \varrho,$
92. $\alpha, t_a, t_b,$
93. $\alpha, t_a, u_a,$
94. α, t_a, u_b (N),
95. $\alpha, t_a, r,$
96. $\alpha, t_a, \varrho,$
97. $\alpha, t_b, t_c,$
98. α, t_b, u_a (N),
99. α, t_b, u_b (N),
100. $\alpha, t_b, u_c,$ (N),
101. $\alpha, t_b, r,$
102. α, t_b, ϱ (N),
103. α, u_a, u_b (N),
104. $\alpha, u_a, r,$
105. $\alpha, u_a, \varrho,$
106. α, u_b, u_c (N),

107. α, u_b, r (N),
108. $\alpha, u_b, \varrho,$
109. $\alpha, r, \varrho,$
110. $v_a, v_b, v_c,$
111. $v_a, v_b, t_a,$
112. $v_a, v_b, t_c,$
113. v_a, v_b, u_a (N),
114. $v_a, v_b, u_c,$
115. v_a, v_b, r (N),
116. $v_a, v_b, \varrho,$
117. $v_a, t_a, t_b,$
118. $v_a, t_a, u_a,$
119. v_a, t_a, u_b (N),
120. $v_a, t_a, r,$
121. $v_a, t_a, \varrho,$
122. $v_a, t_b, t_c,$
123. v_a, t_b, u_a (N),
124. v_a, t_b, u_b (N),
125. v_a, t_b, u_c (N),
126. v_a, t_b, r (N),
127. $v_a, t_b, \varrho,$
128. v_a, u_a, u_b (N),
129. $v_a, u_a, r,$
130. $v_a, u_a, \varrho,$
131. v_a, u_b, u_c (N),
132. v_a, u_b, r (N),
133. v_a, u_b, ϱ (N),
134. $v_a, r, \varrho,$
135. $t_a, t_b, t_c,$
136. t_a, t_b, u_a (N),
137. t_a, t_b, u_c (N),
138. t_a, t_b, r (N),
139. t_a, t_b, ϱ (N),
140. t_a, u_a, u_b (N),
141. $t_a, u_a, r,$
142. t_a, u_a, ϱ (N),
143. t_a, u_b, u_c (N),
144. t_a, u_b, r (N),
145. t_a, u_b, ϱ (N),
146. t_a, r, ϱ (N),
147. u_a, u_b, u_c (N),
148. u_a, u_b, r (N),
149. u_a, u_b, ϱ (N),
150. u_a, r, ϱ (N).

1. $\underline{a, b, c}$

Konstrukce:

Zřejmá.

Podmínky řešitelnosti:

$(a + b > c) \wedge (b + c > a) \wedge (c + a > b)$,
trojúhelníkové nerovnosti.

Počet řešení:

1.

Poznámka:

Podmínky řešitelnosti úlohy **1** lze zkráceně zapsat též v ekvivalentním tvaru

$$a + b > c > |a - b|.$$