**Geometrická zobrazení v rovině**

**Def.** Geometrickým zobrazením v rovině ρ rozumíme takové zobrazení množiny bodů roviny ρ na množinu bodů roviny ρ, kdy ke každému bodu je přiřazen právě jeden bod . Bod se nazývá vzor, bod jeho obraz v daném zobrazení. Body , pro jejichž obrazy platí , se nazývají **samodružné body** zobrazení. Množina obrazů všech bodů útvaru se nazývá obrazem útvaru **.** Je-li, říkáme, že je samodružný útvar daného zobrazení.

Geometrické zobrazení v rovině nyní rozdělíme na jednotlivé typy. Některé z těchto typů byly probírány na střední škole, uvedeme z nich hlavní vlastnosti bez důkazů.

**Shodná zobrazení**

**Def.** Prosté zobrazení roviny ρ na sebe nazýváme shodné zobrazení roviny ρ, právě když pro každé dva body a jejich obrazy v rovině ρ platí: .

**Def.** Říkáme, že útvary jsou shodné, právě když existuje shodné zobrazení , v němž obrazem útvaru je útvar , tj. .

Každé shodné zobrazení má tyto vlastnosti:

1. Obrazem úsečky je úsečka s ní shodná.
2. Obrazem polopřímky je polopřímka , obrazy opačných polopřímek jsou opačné polopřímky.
3. Obrazem přímky je přímka .
4. Obrazy rovnoběžných přímek jsou rovnoběžné přímky.
5. Obrazem poloroviny je polorovina , obrazy opačných polorovin jsou opačné poloroviny.
6. Obrazem úhlu je úhel shodný s úhlem .

Shodné zobrazení můžeme názorně realizovat pohybem (přemístěním). Přemístíme-li útvar na útvar tak, že se útvary pohybují pouze v dané rovině, říkáme, že útvary jsou spolu **přímo shodné**. Útvary jsou spolu **nepřímo shodné,** jestliže musíme při přemístění jeden z nich překlopit.

 Mějme dána dvě zobrazení a v rovině. Složením zobrazení a nazýváme takové zobrazení , v němž pro všechny body roviny platí: bod je obrazem bodu v zobrazení  právě tehdy, když existuje bod takový, že je obrazem bodu zobrazení a je obrazem bodu v zobrazení . Symbolicky zapisujeme a , přičemž Z nazýváme **složené zobrazení**. Platí následující věta:

**V1.** Složením dvou shodných zobrazení v rovině je shodné zobrazení v rovině.

**Pozn.** Pro skládání zobrazení je třeba zachovávat přesně pořádek zobrazení, protože při skládání neplatí komutativní zákon.

 Ke každému shodnému zobrazení existuje inverzní shodné zobrazení, tedy platí: a rovněž .

Základní shodná zobrazení v rovině:

* Identita
* Otočení (rotace)
* Středová souměrnost (je to zvláštní případ otočení o )
* Posunutí (translace)

<https://www.geogebra.org/m/bbmzffwm#material/mpg4q8ny>

Z toho jsou:

* **Přímé**: identita, otočení, středová souměrnost, posunutí.
* **Nepřímé**:osová souměrnost, posunuté zrcadlení

**Identita**

**Def.** Zobrazení v rovině ρ, které přiřazuje každému bodu roviny ρ týž bod , se nazývá **identita**.

**V2.** Má-li shodnost alespoň tři samodružné body, které neleží v přímce, je to identita

**Osová souměrnost**

**Def.** Nechť je v rovině dána přímka . Osovou souměrností nazýváme zobrazení v rovině, v němž je každý bod osy samodružný a každému bodu je přiřazen bod tak, že je osa úsečky . Přímka se nazývá **osou** dané osové souměrnosti.

Základní vlastnosti osové souměrnosti:

1. Samodružné body jsou právě všechny body osy .
2. Není-li bod samodružný, je přímka kolmá k ose .
3. Samodružné přímky osové souměrnosti jsou osa a všechny přímky kolmé k ose.
4. Osová souměrnost je jednoznačně určena svou osou.
5. Osová souměrnost je shodnost nepřímá, tj. mění smysl obíhání obvodu trojúhelníka.

Obr. 1.



**Otáčení (rotace)**

**Def.** Nechť je v rovině dán bod  a orientovaný úhel **Otáčením** rozumíme zobrazení v rovině, v němž je bod samodružný a každému bodu je přiřazen bod tak, že orientovaný úhel je roven orientovanému úhlu a . Bod se nazývá **střed otáčení**, orientovaný úhel se nazývá úhel **otáčení.**

Obr. 2.



Pozn.: Je-li , dostáváme zvláštní případ otáčení, tj. **středovou souměrnost** se středem .

Základní vlastnosti otáčení:

1. Jediný samodružný bod je právě střed .
2. Otáčení, které není středovou souměrností, nemá samodružnou přímku.
3. Otáčení, které není středovou souměrností, převádí každou přímku v přímku s ní různoběžnou.
4. V otáčení, které je středovou souměrností, jsou slabě samodružnými přímkami všechny přímky procházející středem souměrnosti.
5. Otáčení, které je středovou souměrností, převádí každou přímku v přímku s ní rovnoběžnou.
6. Otáčení je jednoznačně určeno svým středem a další dvojicí odpovídajících si bodů, (u středové souměrnosti stačí střed).
7. Otáčení je shodnost přímá.



**V.** Každé otáčení lze složit ze dvou osových souměrností, jejichž osy procházejí středem otáčení . A obráceně, složením dvou osových souměrností s různoběžnými osami vznikne otáčení. Jednu z těchto os lze zvolit libovolně, druhá je již jednoznačně určena.

Obr. 3.



**Posunutí**

**Def.** Nechť je v rovině dán vektor . **Posunutím** rozumíme zobrazení v rovině, v němž je každému bodu přiřazen bod tak, že . Vektor se nazývá **vektor posunutí** a určuje směr a velikost tohoto posunutí.

Základní vlastnosti posunutí:

1. Nemá žádný samodružný bod.
2. Všechny přímky jsou navzájem rovnoběžné, všechny úsečky jsou shodné.
3. Všechny samodružné přímky jsou právě všechny přímky rovnoběžné se směrem posunutí.
4. Posunutí je jednoznačně určeno jednou dvojicí bodů: vzor – obraz .
5. Složením dvou rovnoběžných posunutí dostaneme buď identitu, nebo posunutí (nezáleží na pořadí skládání).

**V.** Každé posunutí lze složit ze dvou osových souměrností, jejichž osy jsou kolmé ke směru posunutí, přičemž vzdálenost os je rovna polovině velikosti posunutí. Jednu z těchto os lze zvolit libovolně, druhá je již jednoznačně určena.

Máme-li v rovině shodnost, která není žádnou ze základních uvedených shodností, lze na základě vlastností skládání shodností dospět k důležité větě:

**V.** Každé shodné zobrazení v rovině lze rozložit na osové souměrnosti, a to nejvýše tři.

- Důkaz:



Shodnosti bez samodružných bodů lze tedy dostat buď složením dvou osových souměrností, jejichž osy jsou rovnoběžné, nebo složením jistých tří osových souměrností.

**Posunuté zrcadlení**

 Nyní dokončíme klasifikaci shodných zobrazení. Zbývá ještě vyšetřit, zda existují shodná zobrazení bez samodružných bodů mezi takovými shodnostmi, které vzniknou složením tří osových souměrností s osami

1. Nechť: . Pak je .
2. Nechť: . Pak je .
3. Nechť: jsou tři navzájem různé přímky.

a) Nechť: . Potom , je translace.

 Obr. 4.



b) Nechť alespoň dvě ze tří os jsou různoběžky, přičemž třetí osa neprochází jejich průsečíkem.

 Obr. 5.



**Def.** Shodnost složená z osové souměrnosti a z translace ve směru její osy se nazývá **posunuté zrcadlení**.

Základní vlastnosti posunutého zrcadlení:

1. Nemá žádný samodružný bod.
2. Má jedinou slabě samodružnou přímku, tj. osu souměrnosti.
3. Posunuté zrcadlení je shodnost nepřímá.

**V.** Posunuté zrcadlení v rovině lze složit ze středové souměrnosti a osové souměrnosti, jejíž osa neprochází středem souměrnosti.

Platí**:**

1. Shodná zobrazení v rovině tvoří grupu.
2. Přímé zobrazení lze složit vždy ze dvou osových souměrností.
3. Nepřímé zobrazení lze složit vždy ze tří osových souměrností.
4. Každé shodné zobrazení v rovině lze rozložit v osové souměrnosti.

**Podobnost a stejnolehlost**

**Def.** Zobrazení v rovině se nazývá **podobné zobrazení** neboli **podobnost**, právě když každé úsečce přiřadíme úsečku , pro jejíž velikost platí: , kde . Číslo  se nazývá **poměr podobnosti**.

Jestliže , podobnost je shodnost.

**Def.** Dva geometrické útvary se nazývají podobné, právě když existuje podobné zobrazení, které převádí útvar v útvar , tj. .

Základní vlastnosti podobnosti:

1. Obrazem přímky je přímka .
2. Obrazem polopřímky je polopřímka .
3. Obrazy rovnoběžných přímek jsou rovnoběžné přímky.
4. Obrazem poloroviny je polorovina .
5. Obrazem úhlu je úhel , přičemž .

Důležitým případem podobného zobrazení v rovině je stejnolehlost (homotetie).

**Def.** Nechť je v rovině dán bod  a reálné číslo **Stejnolehlostí** rozumíme zobrazení v rovině, kdy každému bodu je přiřazen bod tak:

1. jestliže , pak
2. jestliže , pak platí přičemž je-li , bod leží na polopřímce , je-li , bod leží na opačné polopřímce k .

Bod  se nazývá **střed stejnolehlosti** a se nazývá **koeficient stejnolehlosti.**

<https://www.geogebra.org/m/ktfttqmz>

Stejnolehlost je současně i podobností.

Základní vlastnosti stejnolehlosti:

1. Stejnolehlost má jediný samodružný bod, a to je právě střed .
2. Samodružné přímky stejnolehlosti jsou všechny přímky procházející středem stejnolehlosti.
3. Stejnolehlost převádí každou přímku v přímku s ní rovnoběžnou.
4. Stejnolehlost je dána středem  a jednou dvojicí odpovídajících si bodů, které leží na přímce jdoucí bodem .
5. Stejnolehlost je přímá podobnost.
6. Dvě nesoustředné kružnice o různých poloměrech jsou stejnolehlé ve dvou stejnolehlostech, dvě nesoustředné kružnice o stejných poloměrech jsou stejnolehlé v jedné stejnolehlosti, která je středovou souměrností.

**V.** Každou podobnost v rovině lze složit ze stejnolehlosti a shodnosti, a to v libovolném pořadí.

**V. O určenosti podobného zobrazení v rovině**

Nechť jsou dány dvě trojice po řadě si odpovídajících si bodů neležících v přímce tak, že platí , , , kde . Potom existuje jediné podobné zobrazení .

Pozn. Pro dostáváme větu o určenosti shodného zobrazení.