**Kruhová inverze**

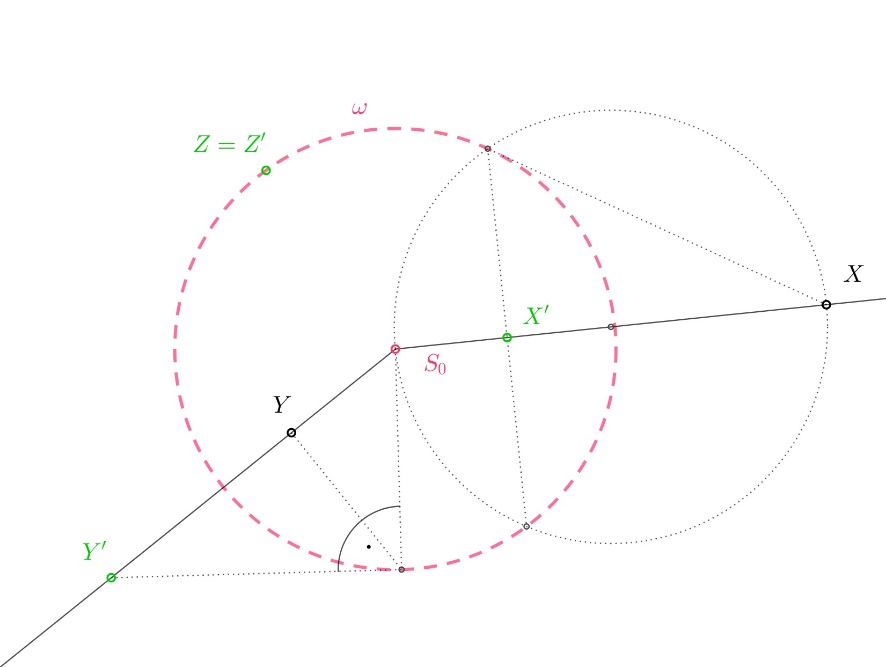
Nekolineárním zobrazením rozumíme takové zobrazení, v němž obrazem přímky nemusí být přímka. Některá nekolineární zobrazení patří k tzv**. kruhovým zobrazením**. Ta splňují podmínku, že obrazem přímky je přímka nebo kružnice a obrazem kružnice je kružnice nebo přímka. Je vidět, že mezi lineárními zobrazeními existují i taková zobrazení, která jsou současně kruhová; např. podobnost. U jiných to neplatí; např. osová afinita, tam je obrazem kružnice zpravidla elipsa.

**Def.** Nechť je dána kružnice . K bodu přiřadíme bod tak, aby bod ležel na přímce a aby platilo: . Takto určené zobrazení se nazývá **kruhová inverze**, kružnice ω se nazývá **základní (řídící) kružnice** a bod se nazývá **střed kruhové inverze**.

Základní vlastnosti kruhové inverze:

1. Kruhová inverze je zobrazení množiny na sebe.
2. Z definice je zřejmé, že kruhová inverze je jednoznačně určena základní (řídící) kružnicí .
3. Kruhová inverze není vzájemně jednoznačné zobrazení v euklidovské rovině . Vzájemnou jednoznačnost zajistíme tak, že k ní přidáme jeden nevlastní bod, tj. a obdržíme tzv. Möbiovu rovinu. Při tomto zobrazení přiřadíme (leží na všech přímkách roviny).

Konstrukce obrazu k danému vzoru X:



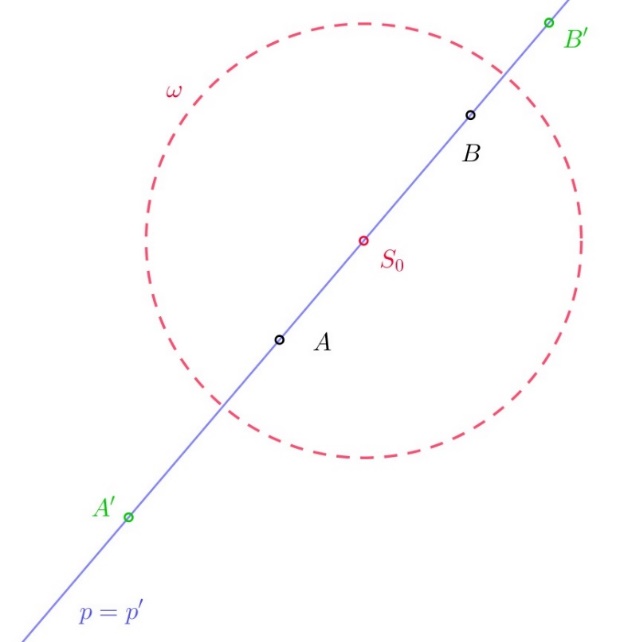
Správnost konstrukce v prvních dvou případech vyplývá z Euklidovy věty o odvěsně.

Z konstrukce plyne, že obrazem vnější oblasti základní kružnice je její vnitřní oblast (kromě středu ), obrazem vnitřní oblasti je vnější oblast.

Dále ukážeme některé vlastnosti kruhové inverze, zejména odvodíme, co je obrazem přímky a kružnice.

Z definice kruhové inverze bezprostředně vyplývá, že obrazem každého bodu přímky procházející středem kruhové inverze je bod ležící opět na přímce procházející středem kruhové inverze. A nyní můžeme vyslovit následující větu:

**V1:** Obrazem přímky procházející středem kruhové inverze je táž přímka.

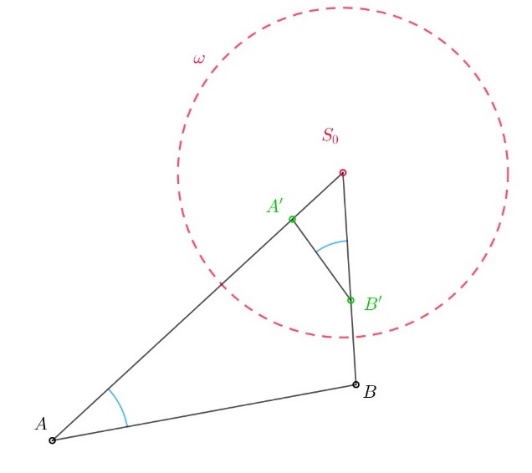


**Pozn.**

1. Říkáme také, že přímka je slabě samodružná, samodružné jsou pouze dva její body, a to průsečíky přímky s řídící kružnicí.
2. Obrazem úsečky na přímce , může být úsečka, polopřímka, resp. sjednocení dvou polopřímek.

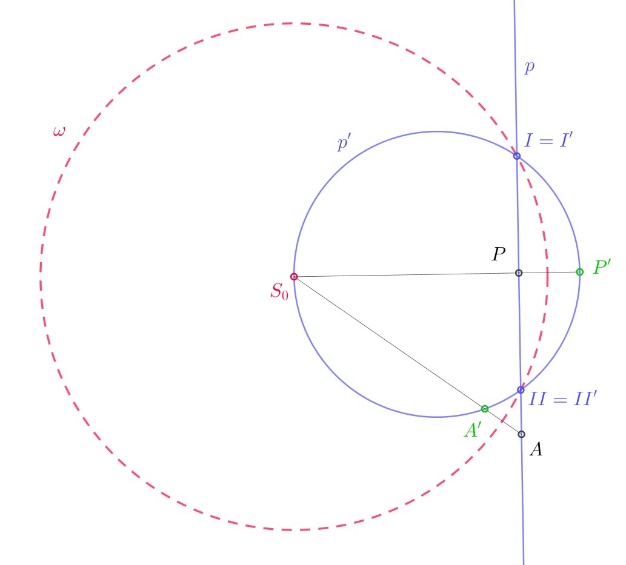
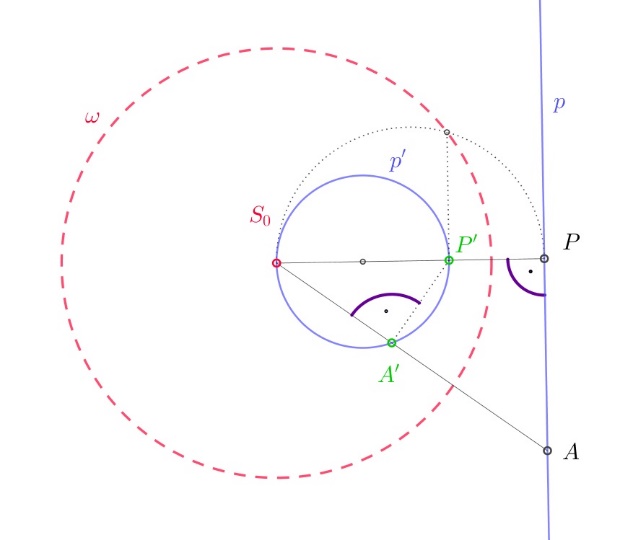
Pro odvození dalších vlastností uvedeme nejdříve pomocnou větu.

**V2.** Nechť jsou obrazy bodů v kruhové inverzi, přičemž neleží na přímce. Potom platí: .



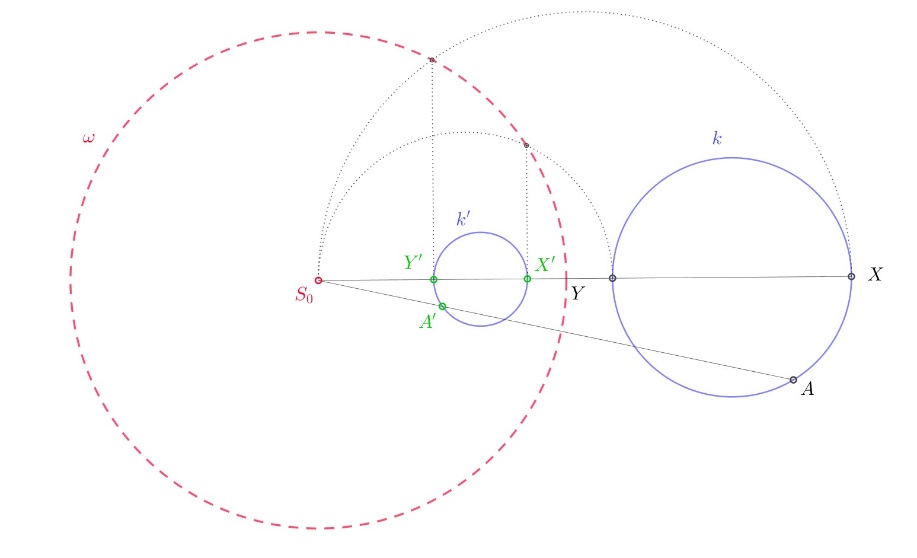
****

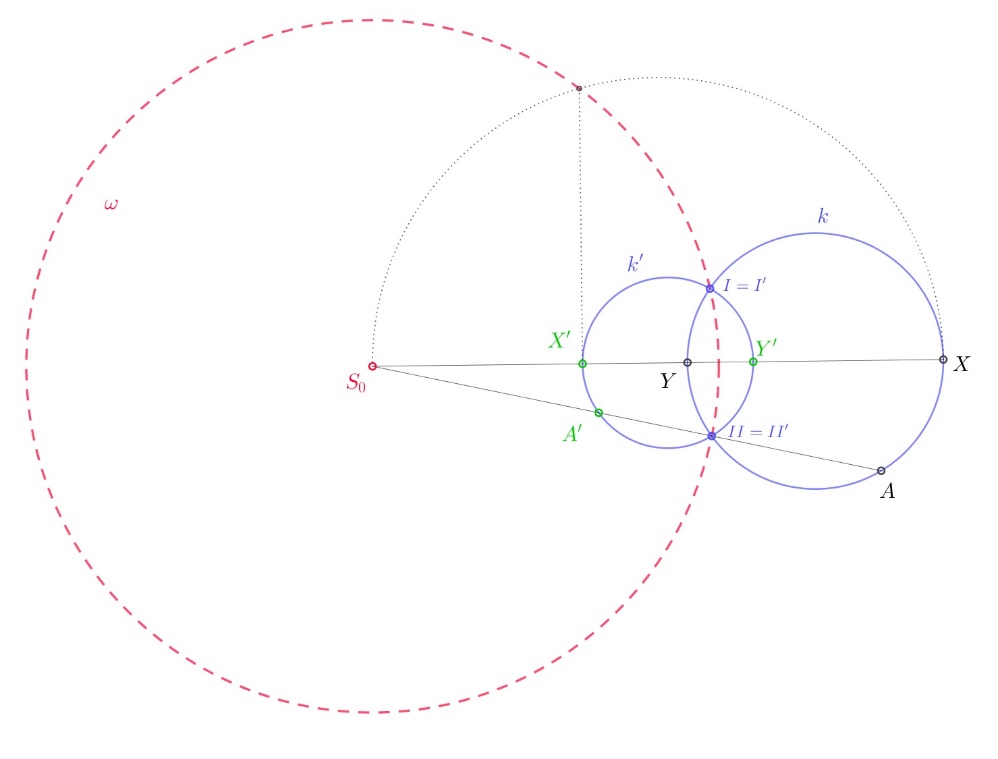
**V3.** Obrazem přímky , která neprochází středem kruhové inverze je kružnice procházející středem kruhové inverze (s výjimkou bodu ).



**V4.** Obrazem kružnice procházející středem kruhové inverze (kromě bodu ) je přímka , která neprochází středem kruhové inverze.

**V5.** Obrazem kružnice neprocházející středem kruhové inverze je kružnice , která též neprochází středem kruhové inverze. Kružnice je obrazem kružnice ve stejnolehlosti se středem ve středu kruhové inverze.

****

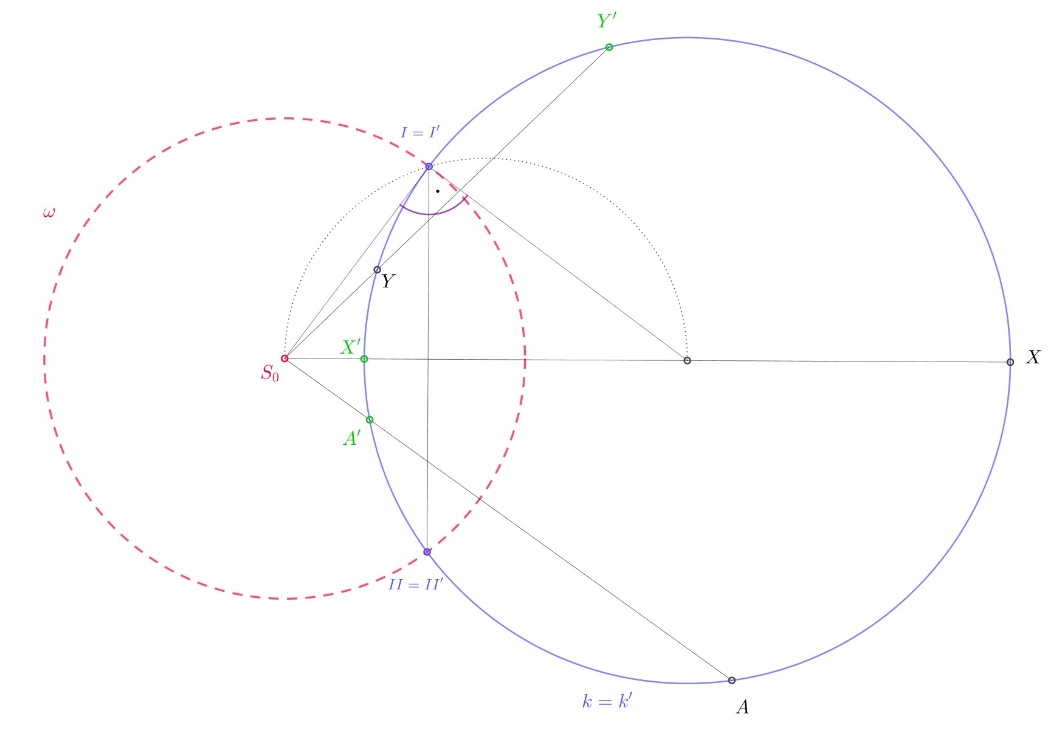
****

**Pozn.**

1. Na základě této věty je vidět, že kružnici zobrazuje na kružnici jak stejnolehlost, tak kruhová inverze, přičemž v každém z těchto zobrazení jsou jiné dvojice vzorů a obrazů.

2. Bod , který je obrazem středu  kružnice  v kruhové inverzi, není středem kružnice !

**V6.** Kružnice různá od základní kružnice je v kruhové inverzi samodružná právě tehdy, když protíná základní kružnici ortogonálně.



**Důsledek:** Každá kružnice, která prochází dvěma inverzně sdruženými body, protíná základní kružnici ortogonálně.

V konstrukčních úlohách, které se řeší užitím kruhové inverze, se často pracuje s úhlem dvou přímek, resp. s úhlem přímky a kružnice, resp. s úhlem dvou kružnic. Protože úhlem přímky a kružnice, resp. s úhlem dvou kružnic rozumíme úhel přímky a tečny, resp. úhel dvou tečen, stačí zjistit v jakém vztahu je úhel dvou přímek a úhel jejich obrazů v kruhové inverzi. Odpověď nám dává následující věta.

**V7.** Velikost úhlu dvou různoběžných přímek se v kruhové inverzi zachovává.

**V8.** Protínají-li se kružnice pod úhlem , pak jejich obrazy kružnice se v kruhové inverzi protínají rovněž pod úhlem .

**Důsledky:**

1. Pro nulový úhel dostáváme: dotýkají-li se kružnice v bodě , potom:

1. je-li , jejich obrazy se dotýkají v bodě T´, kde T´ je obraz bodu v kruhové inverzi;
2. je-li , jejich obrazy jsou přímky .

2. Pro pravý úhel lze vlastnost formulovat takto: Dvě kružnice, které se protínají ortogonálně, se zobrazí na dvě kružnice, které se také protínají ortogonálně.

Uvedené vlastnosti kruhové inverze stačí k tomu, abychom mohli ukázat její užití při řešení konstrukčních úloh. Kruhovou inverzi používáme zejména v úlohách, v nichž se má sestrojit kružnice, která se dotýká daných kružnic, resp. přímek, nebo která protíná dané přímky nebo kružnice pod daným úhlem. Výhoda kruhové inverze spočívá v tom, že umožňuje přenést úlohy o kružnicích na úlohy o přímkách, které jsou zpravidla jednodušší. Kromě toho lze uvést obecný předpis, který lze využít ve všech úlohách.

Postup při řešení konstrukčních úloh metodou kruhové inverze:

1. Vhodně zvolíme základní kružnici kruhové inverze. Velmi důležitá je volba středu kruhové inverze, poloměr základní kružnice může být libovolný.

Ukazuje se, že střed kruhové inverze je vhodné zvolit takto:

1. Jsou-li dány v úloze body, pak střed kruhové inverze zvolíme v některém z daných bodů.
2. Jsou-li dány dotýkající se přímky a kružnice, pak střed kruhové inverze zvolíme v bodě dotyku.
3. Jsou-li dány protínající se přímky a kružnice, pak střed kruhové inverze zvolíme v některém průsečíku.
4. Jsou-li dány v úloze dvě kružnice bez společných bodů, pak střed kruhové inverze zvolíme v mezném bodě svazku kružnic, který je těmito kružnicemi určen.

Základní kružnici kruhové inverze můžeme výhodně zvolit tak, aby některou z daných kružnic protínala ortogonálně.

2. Všechny dané útvary zobrazíme ve zvolené kruhové inverzi. Danou úlohu tak převedeme (transformujeme) na jinou úlohu, kterou vyslovíme pro útvary inverzní k daným útvarům.

3. Řešíme novou úlohu s inverzními útvary. Zpravidla je jednodušší. Získáme inverzní obrazy hledaných útvarů.

4. Výsledky zobrazíme zpět v kruhové inverzi a přejdeme tak k původním vzorům.

Popsaný návod budeme ilustrovat na několika příkladech.

Kruhovou inverzi s výhodou používáme při řešení tzv. Apolloniových úloh.

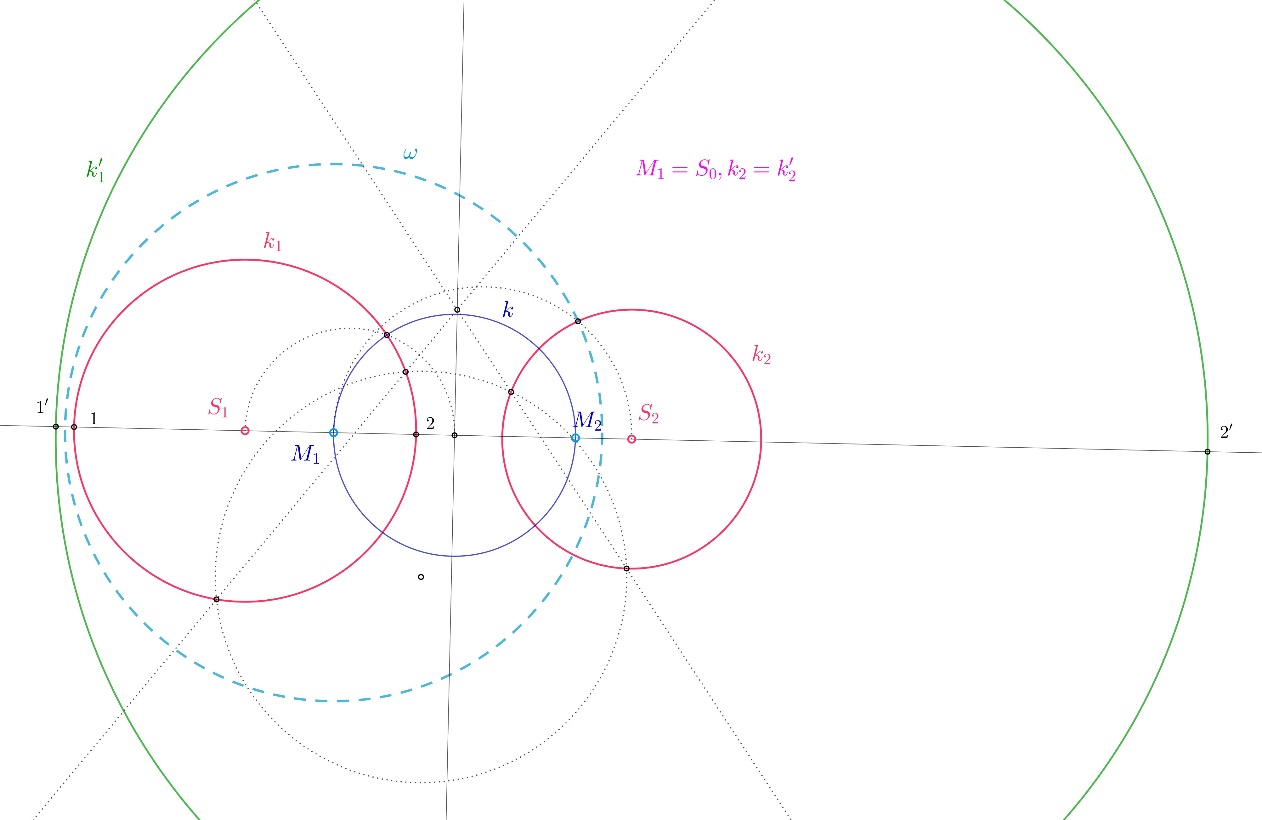
Obecnou Apolloniových úlohou rozumíme následující úlohu: Jsou dány tři kružnice . Sestrojte kružnici, resp. všechny kružnice, které se dotýkají daných kružnic. Z obecné Apolloniovy úlohy obdržíme sérii dalších úloh, když místo kružnic budeme uvažovat i body a přímky. Označíme-li bod, přímku a kružnici dostaneme deset případů.

**Deset Apolloniových úloh:**

U každé z uvedených úloh můžeme rozlišit několik případů vzhledem ke vzájemné poloze prvků . Připustíme-li také, že některý z daných bodů může být incidentní s danou přímkou nebo kružnicí, obdržíme dalších šest zvláštních případů Apolloniových úloh, tzv. Pappovy úlohy.

Pomocí kruhové inverze řešte úlohy: .

**V9.** Nechť jsou kružnice bez společných bodů. Je-li střed kruhové inverze v mezném bodě svazku kružnic určeného kružnicemi , potom obrazem kružnic jsou kružnice soustředné.



<https://www.geogebra.org/m/bpzmatfk#material/jrbmktqw>

**Příklad**: V omezené nákresně je dána přímka a na ní bod , dále je daný nepřístupný bod . Sestrojte kružnici , která prochází bodem a dotýká se přímky v bodě .

<https://www.geogebra.org/m/trtvngxg>

