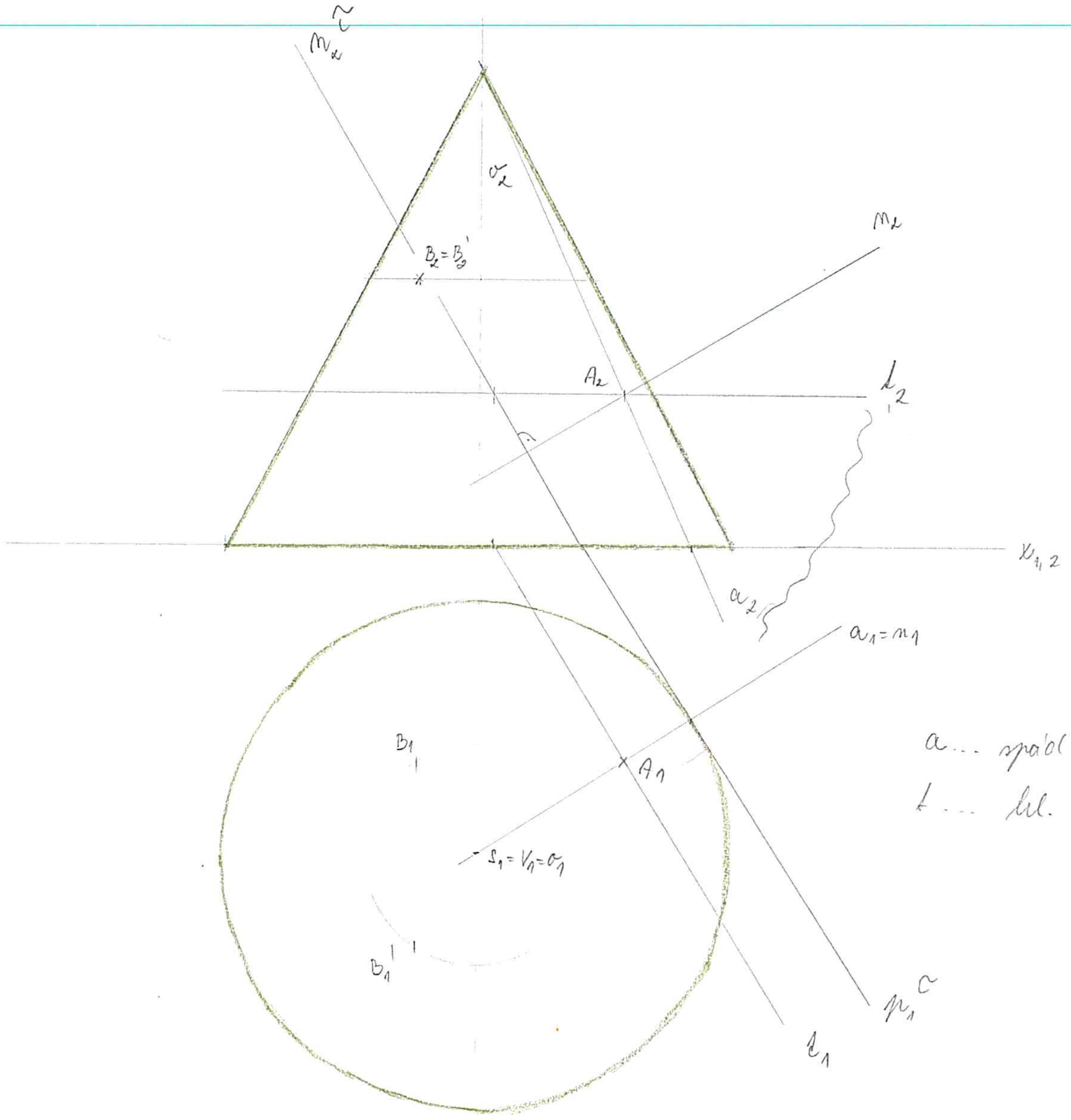
4)




a ... spád. př.
t ... hl. př.

1. **Bod na plášti (podstavě)**
   dáno $A_1$ a podmínka, že A leží na plášti
   dáno $B_2$, B leží na plášti
2. **Tečná rovina v bodě na plášti**
   $A \in \tau$, $\tau$ ... tečná r.
3. **Normála v bodě A k rovině $\tau$**
   v případě, že není k dispozici tečná rovina. půdorys n: $n_1 = V_1A_1$
   nárys: pomocí otočení

6)

# Rovinné řezy kuželové plochy

1, Vzájemná poloha roviny a kuželové plochy

a) rovina vrcholová

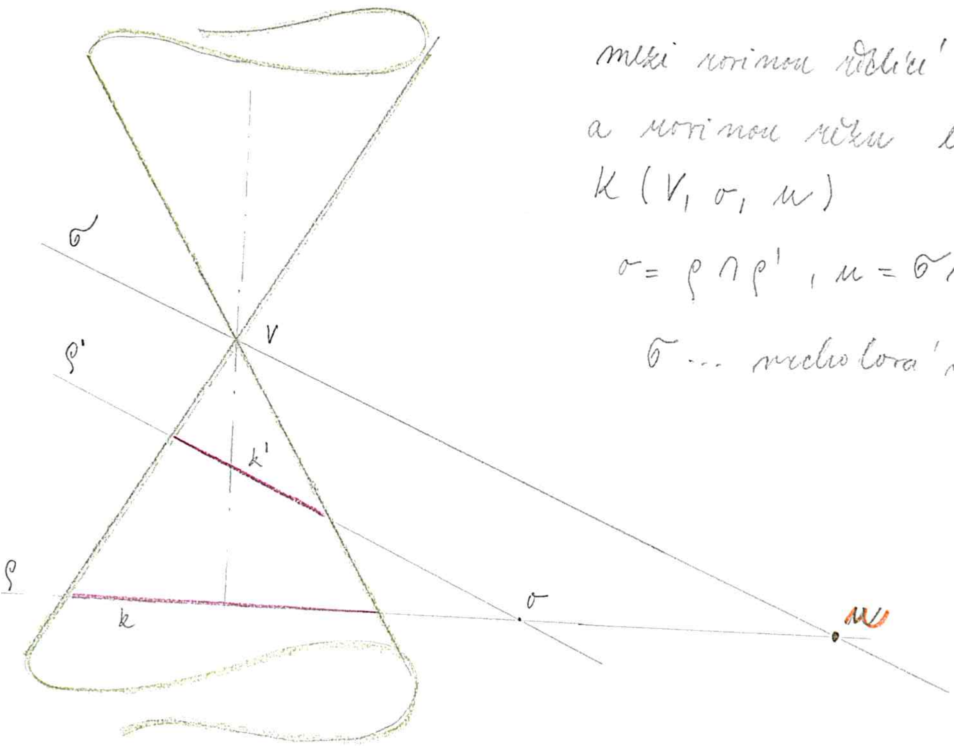
b) -||- není vrcholová

ad a) • obsahuje vrchol

• -||- jednu povrchovou přímku

• protíná kužel. pl. ve dvou různoběžných přímkách

ad b) ELIPSA

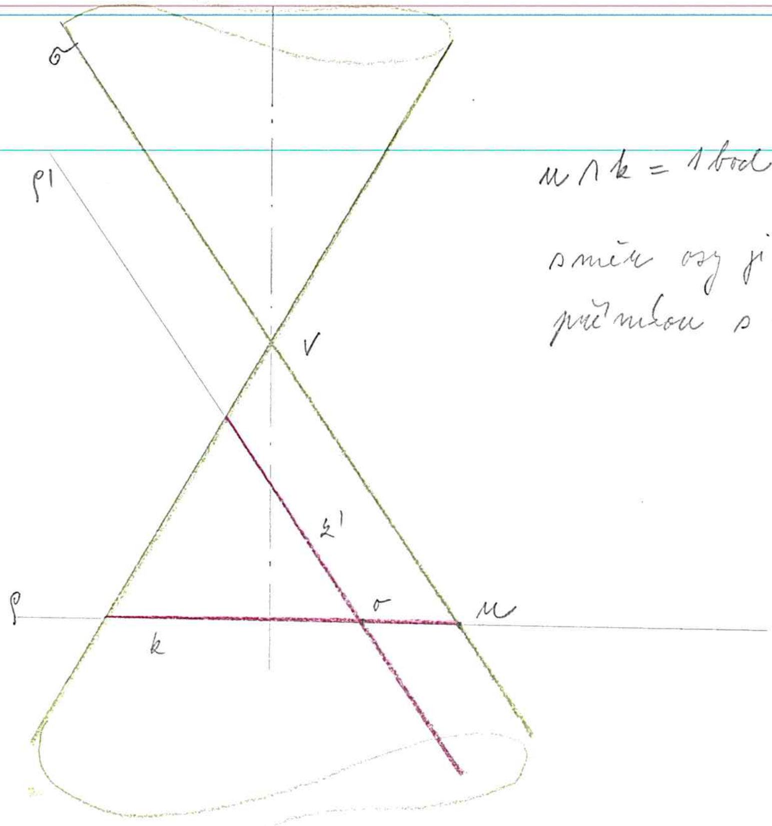



mezi rovinou řídící kružnice a rovinou řezu existuje kolineace $K(V, o, u)$

$o = \rho \cap \rho'$, $u = \sigma \cap \rho$

$\sigma$ ... vrcholová rovina, $\sigma \parallel \rho'$

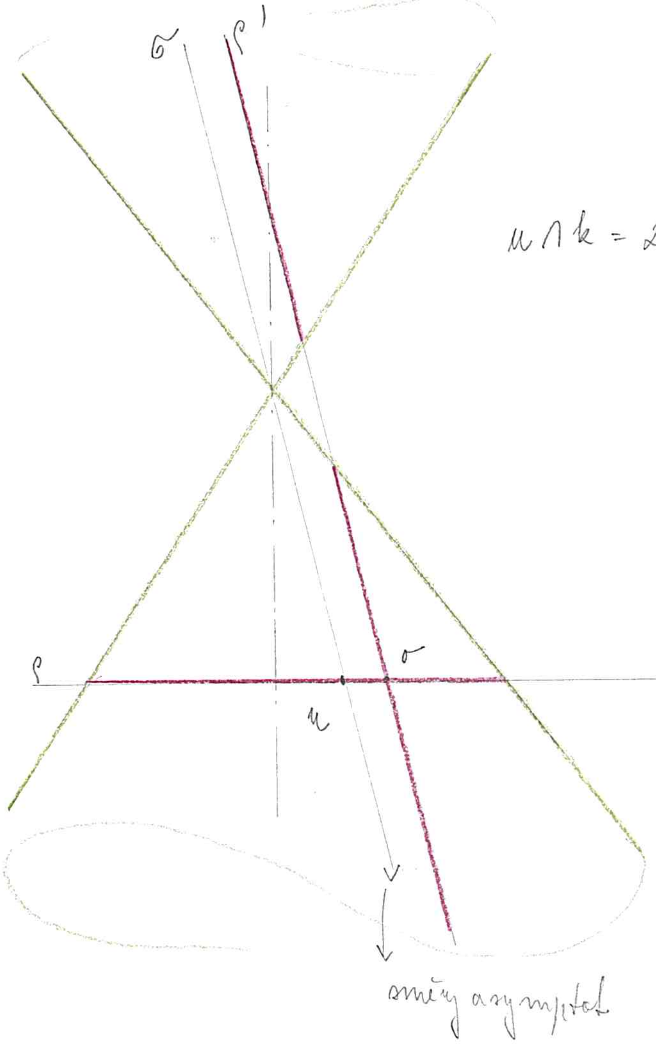
## PARABOLA




$u \cap k = 1$ bod

směr osy je určen povrchovou přímkou s níž je rovina řezu ||

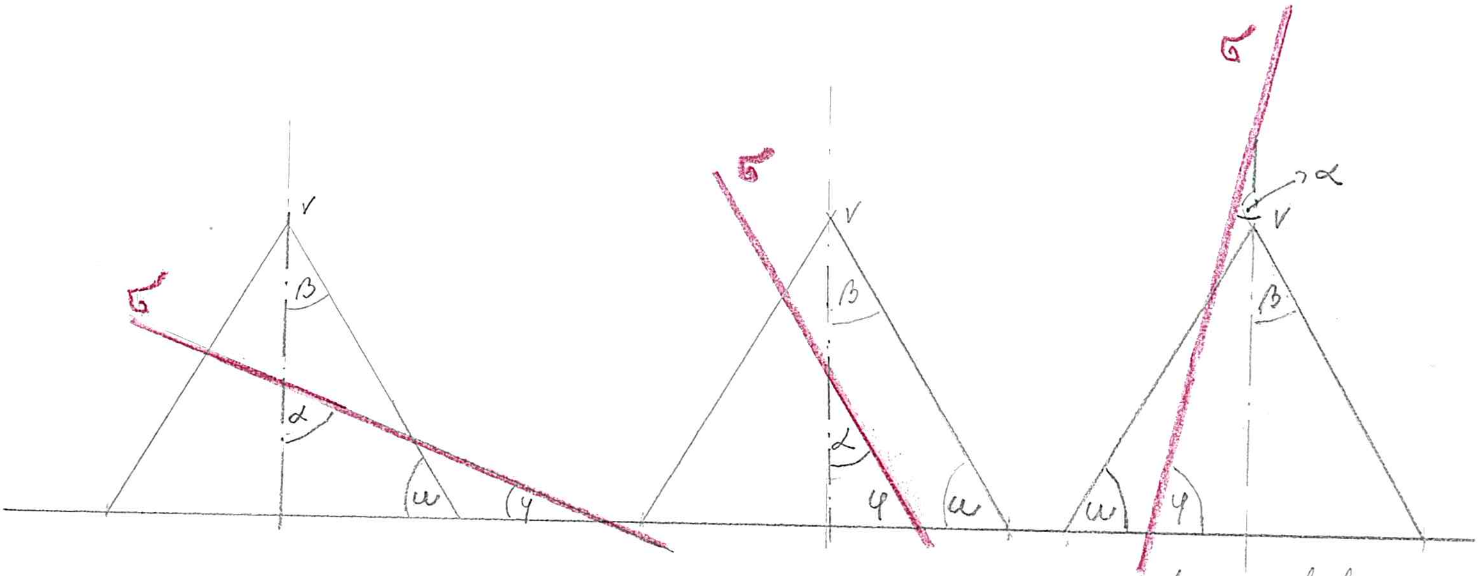
## HYPERBOLA




$u \cap k = 2$ body

Rovina, kt. není vrcholová, protíná kuželovou plochu v kuželosečce (křivce kolineární ke kružnici). O druhu kuželosečky rozhodneme pomocí vrcholové roviny σ rovnoběžné s rovinou řezu.

Je-li kuž. plocha rotační, můžeme provést klasifikaci řezů srovnáním odchylek roviny řezu od roviny povrchové kružnice s odchylkami povrchových přímek od roviny řídící kružnice.




elipsa

$0° \leq \varphi < \omega$

$0° < \omega < 90°$

$\varphi = 0°$ ... řez kruhový!

$\alpha > \beta > 0°$

parabola

$\varphi = \omega$

$\alpha = \beta$

hyperbola

$0° < \omega < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

$0° < \alpha < \beta$

**Quételet – Dandelinova věta** pro rovinné řezy rotační kuželové plochy $(0 < \varphi < \omega)$

Rotační kuželová plocha je proťata rovinou, která není vrcholová ani kolmá k její ose a která s rovinou povrchové kružnice plochy svírá menší úhel než povrchové přímky plochy, v **elipse**. Ohniska průsečné elipsy jsou dotykové body kulových ploch, které jsou vepsány kuželové ploše a dotýkají se roviny řezu.

**Důkaz:**

Je dána rotační kuželová plocha $\Phi$ o ose $o$ a rovina řezu $\sigma$ není vrcholová ani kolmá k její ose a která s rovinou povrchové kružnice plochy svírá menší úhel než povrchové přímky plochy $(0 < \varphi < \omega)$. Druhou průmětnu (nárysnu) zvolíme tak, aby byla kolmá k rovině řezu $\sigma$ a rovnoběžná s osou kuželové plochy. Rovina $\sigma$ je tedy promítací a zobrazí se jako přímka. Průmět kuželové plochy je ohraničen průměty přímek $a$, $b$. Průmětem řezu je úsečka $A_2B_2$; přitom $A$, $B$ jsou průsečíky obrysových přímek $a$, $b$ plochy s rovinou řezu.

Do kuželové plochy vepíšeme dvě kulové plochy $\varkappa'$, $\varkappa''$ tak, aby se dotýkaly roviny řezu. Jejich druhé obrazy jsou kruhy $\varkappa'_2$, $\varkappa''_2$, které mají středy $S'_2$, $S''_2$ na $o_2$ a dotýkají se přímek $a_2$, $b_2$, $\sigma_2$. Dotykové body ploch $\varkappa'$, $\varkappa''$ s rovinou řezu $\sigma$ označíme $F'$, $F''$. Dotykové kružnice $k'$, $k''$ kuželové plochy a kulových ploch $\varkappa'$, $\varkappa''$ leží v promítacích rovinách $\lambda'$, $\lambda''$, které jsou kolmé k ose plochy $o$.

Dokážeme, že řezem je elipsa, která má ohniska v bodech $F'$, $F''$ a hlavní osu $AB$. Na křivce řezu zvolíme libovolný bod $P$. Povrchová přímka $p$ plochy, která jím prochází, se dotýká kulových ploch $\varkappa'$, $\varkappa''$ v bodech $P'$, $P''$, které leží na kružnicích $k'$, $k''$. Protože délky tečen vedených z bodu ke kulové ploše jsou stejně veliké, platí:

$$\left.\begin{array}{l} |PF'| = |PP'| \\ |PF''| = |PP''| \end{array}\right\} \; |PF'| + |PF''| = |PP'| + |PP''| = |P'P''| = \text{konst}$$

$|P'P''| = |A'A''| = |B'B''|$ – délka strany rot. komol. kužele

Pro body $A$, $B$ platí:

$$|AF'| + |AF''| = |BF'| + |BF''| = |A'A''|$$

$$\text{Protože:} \left.\begin{array}{l} |AF'| = |AF''| + |F'F''| \\ |BF''| = |BF'| + |F'F''| \end{array}\right\} \text{dosadíme}$$

$$|AF''| + |F'F''| + |AF''| = |BF'| + |BF'| + |F'F''| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AF''| = |BF'| \Rightarrow |AF'| = |BF''|$$

$$\text{Proto: } |A'A''| = |AF''| + |AF'| = |AF''| + |BF''| = \underline{\underline{|AB|}}$$

Nalezená podmínka říká, že bod $P$ je bodem elipsy $e$ s ohnisky $F'$, $F''$ a hlavní osou $AB$.

Obráceně: Musíme dokázat, že každý bod elipsy $k$ je bodem řezu. Bodem $P$ a osou $o$ proložíme rovinu $\mu$, tato rovina $\mu$ protíná kuželovou plochu ve dvou povrchových přímkách $m', m''$ a tyto přímky protínají rovinu řezu $\sigma$ ve dvou navzájem různých bodech elipsy $M', M''$ dle výše uvedeného. Přímka $g$ protíná elipsu ve dvou bodech $M', M''$. Bod $P$ musí tedy splynout s jedním z nich. Každý bod elipsy je tedy bodem řezu.

$$g = \mu \cap \sigma$$

**Quételet – Dandelinova věta** pro rovinné řezy rotační kuželové plochy $(\varphi = \omega)$

Rotační kuželová plocha je proťata rovinou, která není vrcholová a která s rovinou povrchové kružnice plochy svírá stejný úhel jako povrchové přímky plochy, v **parabole**. Její ohnisko je dotykový bod kulové plochy, která je vepsána kuželové ploše a dotýká se roviny řezu.

$$|PP'| = |PF|$$

$$|PP'| = |QQ'| = |Q_2 Q_2'| = |P_2 f_2'|$$

$P_2 Q_2 Q_2' f_2'$ ... rovnoběžník ; $f' = \rho' \cap \sigma$

Ale $|P_2 f_2'| = |Pf'|$, tedy $|PF| = |Pf'|$

Bod $P$ je bodem paraboly s ohniskem $F$ a řídicí přímkou $f'$.

V: Pravoúhlým průmětem parabolického řezu rotační kuželové plochy do roviny kolmé k ose plochy je parabola, jejímž ohniskem je pravoúhlý průmět vrcholu plochy.

**Quételet – Dandelinova věta** pro rovinné řezy rotační kuželové plochy $\left(\omega < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$

Rotační kuželová plocha je proťata rovinou, která není vrcholová a která s rovinou povrchové kružnice plochy svírá větší úhel než povrchové přímky plochy, v **hyperbole**. Její ohniska jsou dotykové body kulových ploch, které jsou vepsány kuželové ploše a dotýkají se roviny řezu.

Platí: $|PF'| = |PP'|$

$|PF''| = |PP''|$

Dokazujeme: $\big||PF''| - |PF'|\big| = \big||PP''| - |PP'|\big| =$

$= |P'P''| = |A'A''| = |B'B''| = |AB|$

Platí: $|AA''| = |AF''|$

$$|F'F''| = |AF'| + |AF''| = |AA'| + \underbrace{|AA''|}_{|AA'|+|A'A''|} = 2|AA'| + |A'A''|$$

$$|F'F''| = |BF'| + |BF''| = \underbrace{|BB'|}_{|BB''|+|B''B'|} + |BB''| = 2|BB''| + |B'B''|$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow |AA'| = |BB''| = |BF''|$

Dosadíme: $|A'A''| = \big||AA''| - |AA'|\big| = \big||AF''| - |BF''|\big| = |AB|$

Bod $P$ je bodem hyperboly s ohnisky $F', F''$ a hlavní osou $AB$.