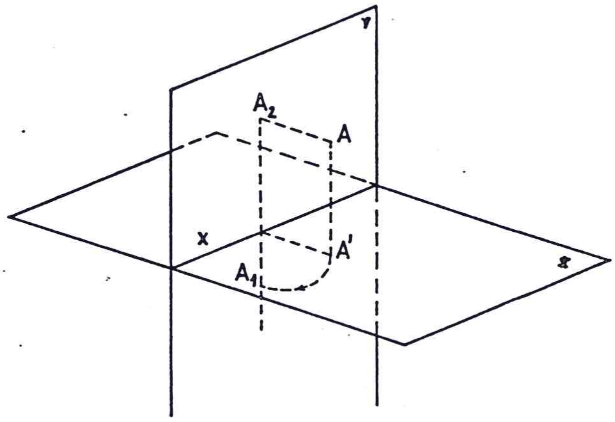
5. MONGEOVO ZOBRAZENÍ

V předcházejícím paragrafu jsme si ukázali, že volné rovnoběžné promítání je vhodné k názornému zobrazování prostorových útvarů i k ilustraci některých stereometrických vztahů, a že je tedy dobrou pomůckou při vyučování stereometrii. Poznali jsme však také, že útvar není svým obrazem jednoznačně určen, tzn. že z průmětu se nedají určit jeho rozměry a bez dodatečných podmínek ani tvar. To je hlanví důvod, proč volné rovnoběžné promítání nevyhovuje potřebám technické praxe, kde se požaduje vzájemně jednoznačné zobrazení mezi útvarem v prostoru a jeho obrazem. Ze zobrazovacích metod, které tuto vlastnost mají, se nejčastěji používá dvojice pravoúhlých promítání do dvou navzájem kolmých průměten, tzv. *Mongeovo zobrazení*, podle francouzského matematika G. Mongea – zakladatele deskriptivní geometrie.

5.1. ZÁKLADNÍ POJMY, ZOBRAZENÍ BODU

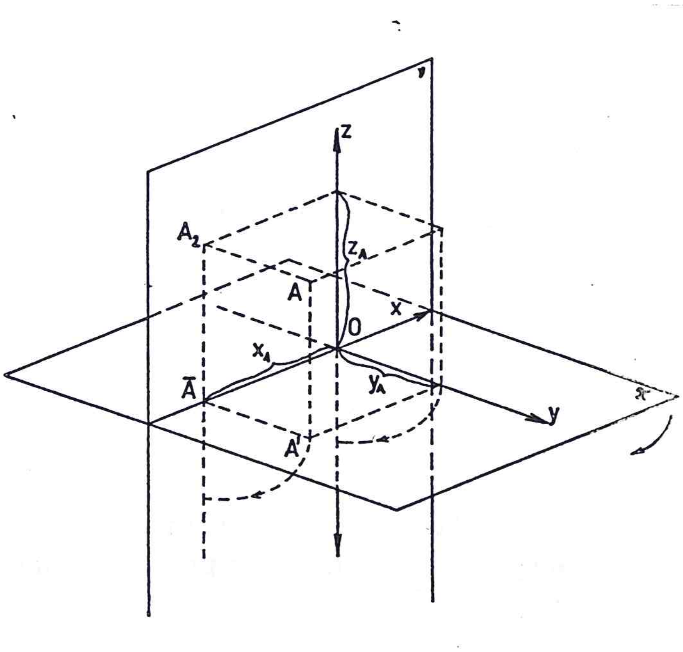
Za průmětny volíme navzájem kolmé roviny π, ν; π je *první průmětna (půdorysna)* a ν je *druhá průmětna (nárysna)*. Průsečnice x rovin π a ν je *osa (základnice)*.

Libovolný bod A pravoúhle promítneme do roviny π do bodu A' a do roviny ν do bodu A_2 (obr. 5.1.). Rovinu π pak sdružíme s ν otočením kolem osy x. Bod A' se otočí do bodu, který označíme A_1. (Otočení roviny π do ν můžeme nahradit rovnoběžným promítáním, jehož směr je určen přímkou $s = A'A_1$.) Body A_1, A_2 leží zřejmě na kolmici k ose x, tzv. *ordinále.* Bod A_2 je *druhý průmět (nárys)* bodu A. Vzhledem k jednoduššímu vyjadřování a také vzhledem k tradiční terminologii budeme *prvním průmětem (půdorysem)* bodu A nazývat bod A_1 (nikoliv A'). Body A_1, A_2 jsou pak *sdruženými průměty* bodu A. Jsou-li obráceně dány body A_1, A_2 v rovině ν ležící na ordinále, pak existuje právě jeden bod A, jehož sdružené průměty jsou body A_1, A_2. Zobrazení bodů prostoru na množinu uspořádaných dvojic bodů ležících na ordinálách v ν, ve kterém každému bodu přiřadíme jeho sdružené průměty, je vzájemně jednoznačné a nazývá se *Mongeovo zobrazení.* Při praktickém užití této metody obvykle ztotožňujeme nárysnu ν s nákresnou a osu x volíme rovnoběžně s (dolním) okrajem nákresny.



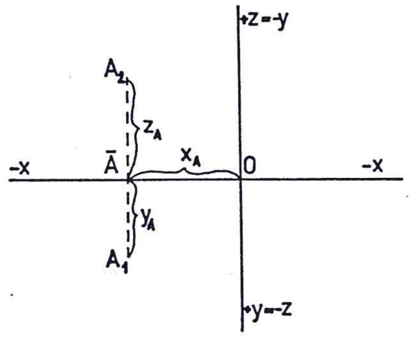
Obr. 5.1.

Poloha prostorového útvaru vzhledem k průmětnám π a ν bývá často dána pomocí *pravoúhlé souřadnicové soustavy* $(0, x, y, z)$, kterou volíme takto: Za první souřadnicovou osu považujeme základnici x a osu y resp. z volíme v π resp. v ν (obr. 5.2.). Orientaci provedeme tak, aby kladná poloosa ^+y osy y přešla při otáčení průmětny π do ν ve smyslu obr. 5.1. do polopřímky, ležící pod základnicí x. Přitom předpokládáme, že souřadnicová soustava $(0, x, y, z)$ je levotočivá (na obr. 5.2. jsou kladné poloosy na x, y, z vyznačeny šipkami). Skutečnost, že bod A má v $(0, x, y, z)$ souřadnice x_A, y_A, z_A značíme symbolem $A(x_A, y_A, z_A)$. Na obr. 5.2. je zvolen bod A a k němu jsou

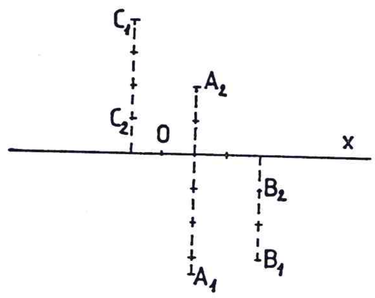


Obr. 5.2.

sestrojeny body A', A_1, A_2 podobně jako na obr. 5.1. Průsečík ordinály obsahující body A_1, A_2 s osu x je označen $\overline{A}$. Jestliže k bodu A sestrojíme obvyklým způso-



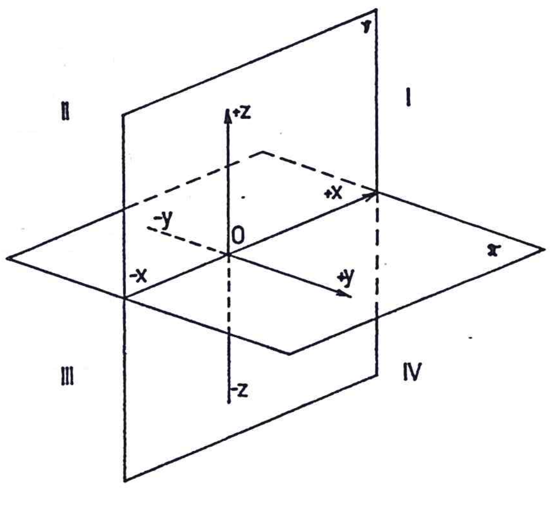
Obr. 5.3.



Obr. 5.4.

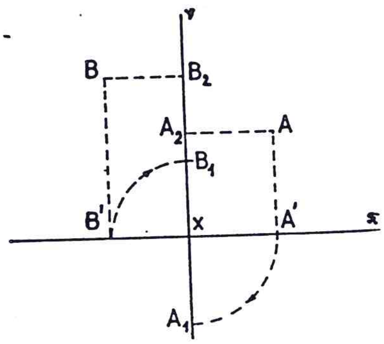
bem souřadnicový kvádr a na souřadnicových osách určíme jeho souřadnice x_A, y_A, z_A, pak platí $|x_A| = |0\overline{A}|, |y_A| = |\overline{A}A'| = |\overline{A}A_1|, |z_A| = |\overline{A}A_2|$. Na obr. 5.3. je sestrojen obraz osuřadnicové soustavy $(0, x, y, z)$ v nákresně s vyznačením kladných a záporných poloos na jednotlivých osách. Sdružené průměty A_1, A_2 bodu A jsou sestrojeny pomocí souřadnic x_A, y_A, z_A bodu A. V dalším budeme předpokládat, že souřadnicová soustava $(0, x, y, z)$ je určena jen počátkem $0 \in x$; jednotlivé osy a poloosy této soustavy již nebudeme vyznačovat. Na obr. 5.4. jsou sestrojeny sdružené průměty bodů $A(1; 3,5; 2), B(3; 3; -1), C(-1; -4; 1)$.

Všimeme si nyní podrobněji zobrazení bodů v Mongeově zobrazení v závislosti na zvolené souřadnicové soustavě $(0, x, y, z)$. Průmětny π, ν dělí prostor na čtyři kvadranty I, II, III, IV. Přitom předpokládáme, že body rovin π, ν nenáležejí žádnému z nich. Jako I označíme kvadrant, ve kterém leží body $A(x_A, y_A, z_A)$ takové, že $y_A > 0, z_A > 0$, který je tedy určen poloosami $^+y, ^+z$ (obr. 5.5.). Podobným způsobem označíme jako II resp. III resp. IV kvadrant určený poloosami $^-y, ^+z$ resp. $^-y, ^-z$ resp. $^+y, ^-z$. Na schéma-

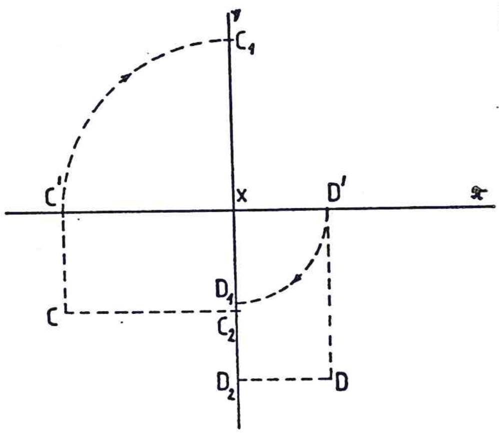


Obr. 5.5.

tickém obrázku 5.6. jsou určeny sdružené průměty bodů A, B, které leží v kvadrantech I, II a na obr. 5.7. jsou určeny sdružené průměty bodů C, D, které leží v kvadrantech III, IV.



Obr. 5.6.



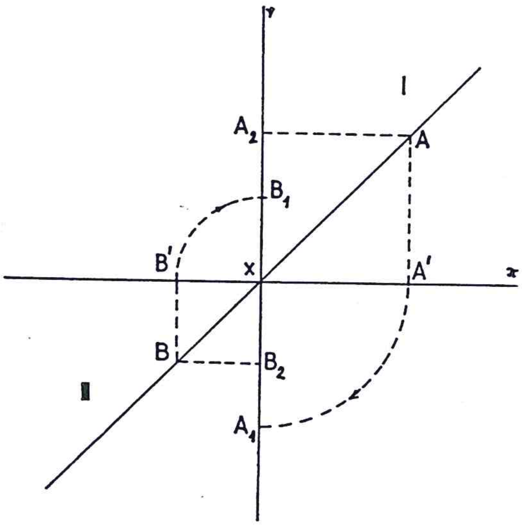
Obr. 5.7.

K snadnější orientaci poslouží následující tabulka jednotlivých případů:

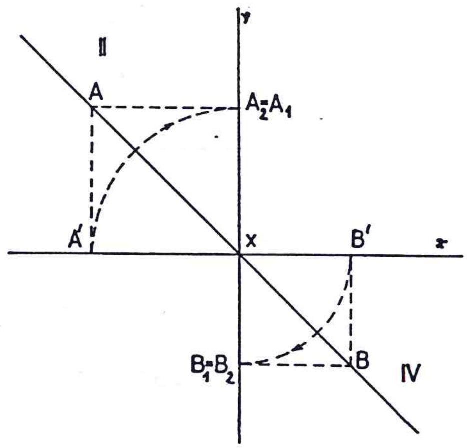
KVADRANT	y_A	z_A	
I	+	+	A_1 *pod* x A_2 *nad* x
II	−	+	A_1 *nad* x A_2 *nad* x
III	−	−	A_1 *nad* x A_2 *pod* x
IV	+	−	A_1 *pod* x A_2 *pod* x

Bod A leží v průmětně π resp. ν, právě když platí $A_2 \in x$ resp. $A_1 \in x$.

Na závěr ještě uvedeme dva zvláštní případy, které se dosti často vyskytují při konstrukčních úlohách. Jestliže bod leží v kvadrantu I nebo II a jeho vzdálensoti od průměten π a ν jsou stejné, pak jeho sdružené průměty jsou souměrně sdružené podle osy x. Body této vlastnosti leží v rovině procházející osou x a půlící úhel kvadrantů I, III, která se nazývá *rovina souměrnosti* (na obr. 5.8. leží bod A v kvadrantu I a bod B v kvadrantu III). Jestliže jsou obráceně sdružené průměty bodu souměrně sdružené podle osy x, pak tento bod leží v rovině souměrnosti. Platí tedy: Množina bodů, jejichž sdružené průměty jsou souměrně sdružené podle osy x, je rovina souměrnosti. Nazveme-li *rovinou totožnosti* rovinu, která prochází osou x a půlí úhel kvadrantů II a IV, pak podobně platí: Množinou bodů, jejichž sdružené průměty splývají, je rovina totožnosti (na obr. 5.9. leží bod A v kvadrantu II a bod B v kvadrantu IV).



Obr. 5.8.



Obr. 5.9.

CVIČENÍ

1. Zobrazte body $A(2;-3;4), B(-1;-2;-1), C(4;2;-3), D(-2;1;2)$ a rozhodněte, ve kterých kvadrantech leží.

2. Určete, jakou speciální polohu k průmětnám mají body $A(3;0;-2), B(0;2;0), C(3;0;0), D(2;4;4), E(-1;3;-3), F(1;-2;-2)$ a zobrazte je.

3. Určete souřadnice bodů, které jsou souměrně sdružené s body $A(3;2;3), B(-2;-3;1), C(1;3;-4)$

   (a) podle průmětny π,

   (b) podle průmětny ν,

   (c) podle osy x.

   Příslušné dvojice bodů zobrazte.

4. Stanovte souřadnice bodů, které půlí vzdálenosti bodu $A(2;3;5)$ od rovin π, ν.

5. Určete souřadnici z_A bodu $A(1;-4;z_A)$, který leží

   (a) v rovině souměrnosti

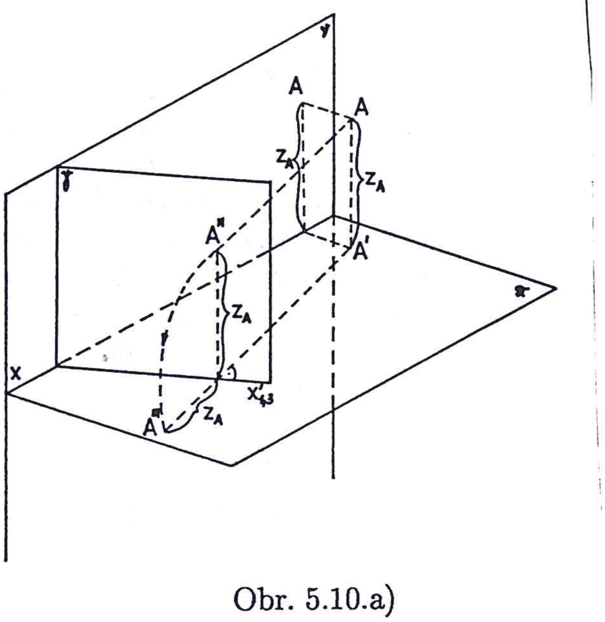
   (b) v rovině totožnosti.

5.2. TŘETÍ PRŮMĚTNA

Z praktických důvodů zavádíme někdy v Mongeově zobrazení ještě další (třetí) pomocnou průmětnu, kterou většinou volíme ve speciální poloze jak k průmětnám π, ν, tak k danému útvaru. Tím můžeme dosáhnout zjedodušení konstrukcí, případně zvýšení názornosti zobrazení, především při zobrazování těles. V tomto odstavci uvedeme jen konstrucki třetího průmětu bodu a v dalších ukážeme užití třetí průmětny na konkrétních úlohách.

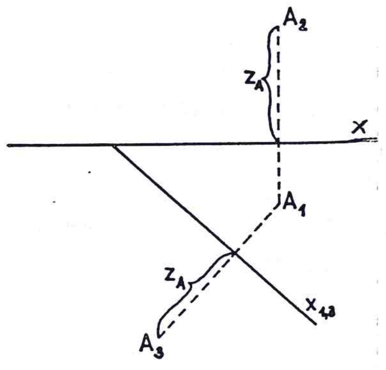
TŘETÍ VEDLEJŠÍ PRŮMĚTNA

Třetí průmětnu volíme kolmou k některé z průměten π, ν. Je-li kolmá jen k jedné průmětně, nazývá se *vedlejší*, je-li kolmá k oběma a tím i k ose x, nazývá se *hlavní*. Na obrázku 5.10.a) je zvolena třetí průmětna γ kolmá k průmětně π a její průsečnice s π je označena x'_{13}. Jsou zde sestrojeny pravoúhlé průměty A', A_2, A'' bodu A do rovin π, ν, γ a γ je otočena do π kolem přímky x'_{13}. Při tomto otočení přejde bod A'' do bodu A'''. Dále otočíme rovinu π do roviny ν kolem přímky x a tím bod A'do bodu A_1, přímku x'_{13} do x_{13} a bod A''' do A_3. Bod A_3 je třetí průmět (bokorys) bodu A. Podle obr. 5.10.a) je vzdálenost bodu A_2 od základnice x stejná jako vzdálenost bodu A''' od přímky x'_{13} a tím i jako vzdálenost bodu A_3 od přímky x_{13} (obr. 5.10.b), kde je zobrazena situace v nákresně).

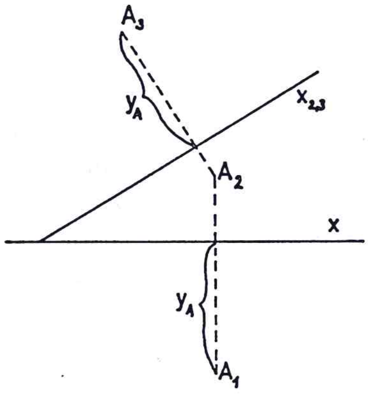


Obr. 5.10.a)

Zvolme třetí průmětnu γ kolmou k průmětně ν. Bod A opět pravoúhle promítneme do roviny γ do bodu A'' a bod A'' otočíme kolem přímky $x_{23} = \gamma \cap \nu$ do nárysny ν do bodu A_3. Na obr. 5.11. jsou znázorněny průměty A_1, A_2, A_3 v nákresně. Přitom je vzdálenost bodu A_3 od přímky x_{23} stejná jako vzdálenost půdorysu A_1 od základnice x.



Obr. 5.10.b)

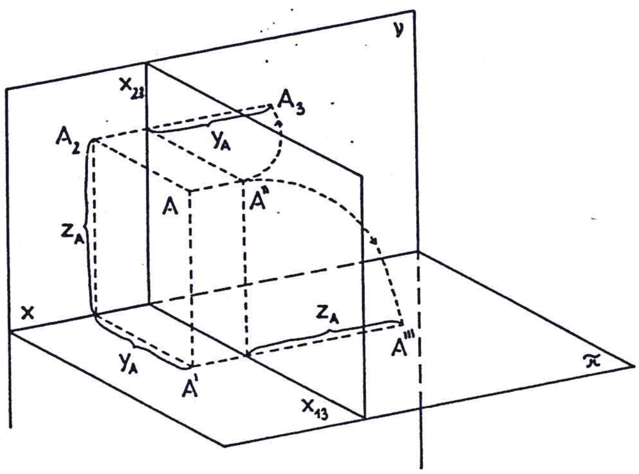


Obr. 5.11.

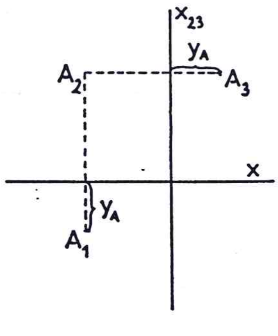
TŘETÍ HLAVNÍ PRŮMĚTNA

Předpokládejme, že třetí průmětna γ je komá k základnici x. Bod A promítneme pravoúhle do roviny γ do bodu A'' a rovinu γ otočíme do π nebo do ν. Otočíme-li γ do ν kolem průsečnice $x_{23} = \gamma \cap \nu$, pak bod A'' přejde do třetího průmětu A_3 bodu A, přímka x_{23} je kolmá k x a vzdálenost bodu A_3 od x_{23} je stejná jako vzdálenost bodu A_1 od základnice x (obr. 5.12.a), b). Otočíme-li rovinu γ do π kolem průsečnice $x'_{13} = \gamma \cap \pi$, pak bod A'' přejde do bodu $A''' \in \pi$ a po otočení roviny π do ν obdržíme přímku $x_{13} \perp x$ a třetí průmět A_3 bodu A. Vzdálenost bodu A_3 od x_{13} je stejná jako vzdálenost bodu A_2 od základnice x (obr. 5.12. a), c).

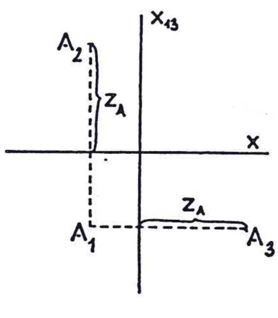
V Mongeově promítání se otáčení promítacích rovin do průměten vyskytuje často a proto se pro ně zavádí zvláštní název – *sklápění*.


y
x23
A3
A2
yA
A
A''
zA
x
zA
A'''
yA
A'
x13
π

a)


x23
yA
A2
A3
x
yA
A1

b)

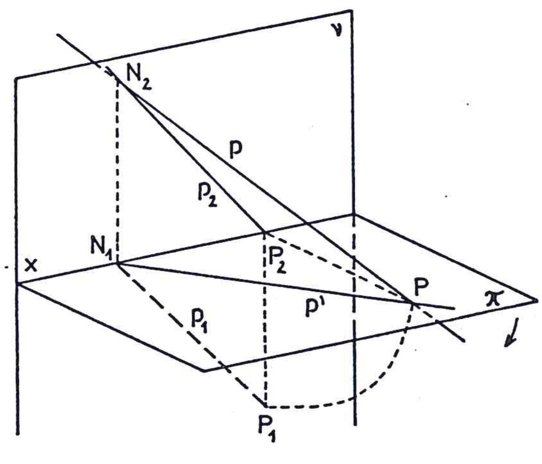

x13
A2
zA
x
zA
A1
A3

c)

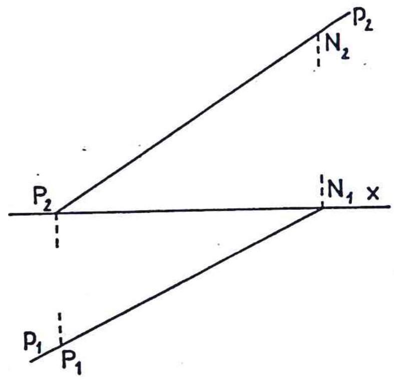
Obr. 5.12.

5.3. ZOBRAZENÍ PŘÍMKY

Předpokládejme nejdříve, že přímka p není kolmá k základnici. Pak není kolmá k žádné průmětně a její pravoúhlé průměty p', p_2 do průměten π, ν jsou opět přímky, z nichž žádná není kolmá k základnici. Přímky p, p' leží v první promítací rovině přímky p, která je kolmá k π. Při otočení půdorysny π do ν přejde přímka p' do p_1. Podobně přímky p, p_2 leží v druhé promítací rovině přímky p, která je kolmá k ν. Pak p_1 resp. p_2 jsou *první průmět (půdorys)* resp. *druhý průmět (nárys)* přímky p a p_1, p_2 jsou sdružené průměty přímky p. Mějme obráceně dány přímky p_1, p_2 v ν z nichž žádná není kolmá k základnici (obr. 5.13). Jestliže otočíme p_1 do přímky p' v π a proložíme přímkou p' resp. p_2 rovinu kolmou k π resp. ν, pak jsou tyto roviny různoběžné a protínají se v jediné přímkce p, jejíž sdružené průměty jsou p_1, p_2.



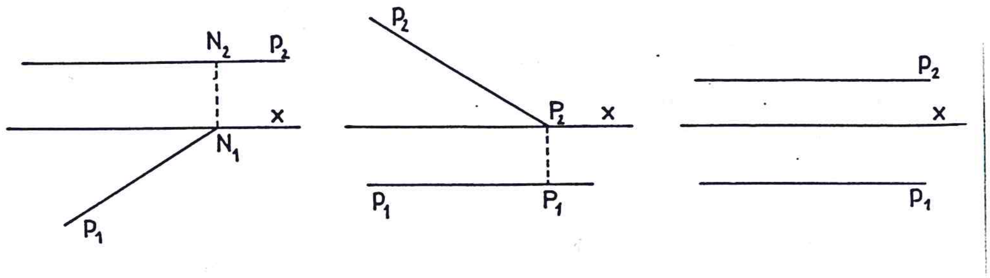
Obr. 5.13.



Obr. 5.15.

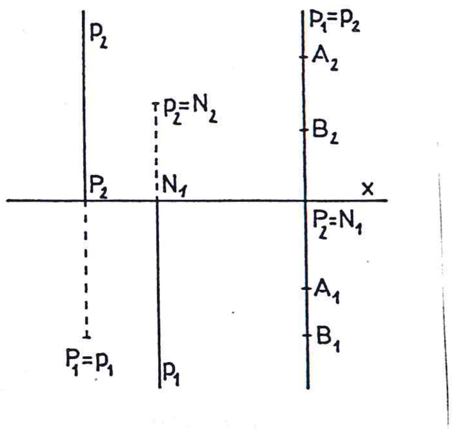
Na obr. 5.14.a) jsou zakresleny sdružené průměty přímky p v případech $p \| \pi, p \| \nu$ a $p \| x$.

Předpokládejme nyní, že přímka p je kolmá k základnici x. Je-li kolmá k půdorysně, pak je jejím prvním průmětem bod a druhým průmětem je přímka kolmá k základnici (obr. 5.14.b). Podobně pro $p \perp \nu$ je p_2 bod a p_1 je přímka



Obr. 5.14. a)

kolmá k základnici. Obráceně je možno považovat každou přímku v nákresně kolmou k x spolu s incidentním bodem za sdružené průměty přímky kolmé k jedné z průměten. Není-li p kolmá k žádné z průměten, pak její promítací roviny splývají a platí $p_1 = p_2, p_1 \perp x$. V tomto případě však není přímka p svými sdruženými průměty určena a proto ji zadáváme dvěma různými body (na obr. 5.14.b) je $p = AB$). Neleží-li přímka v půdorysně, pak její průsečík s půdorysnou se nazývá *první (půdorysný) stopník* a znaší se obvykle P. Podobně definujeme *druhý (nárysný) stopník* N přímky.



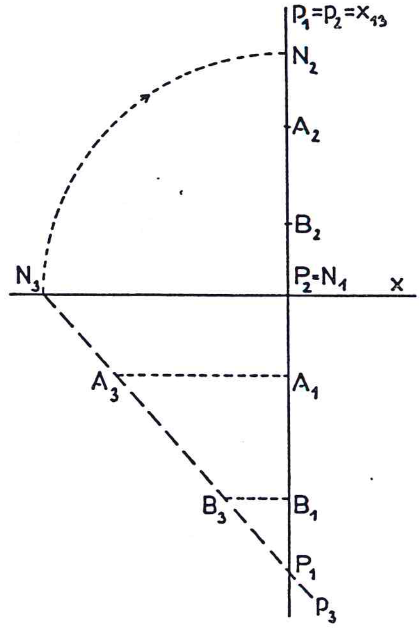
Obr. 5.14.b)

Ú l o h a 5.1. Určete sdružené průměty stopníků přímky p, která je dána sdruženými obrazy p_1, p_2.

Ř e š e n í : Předpokládejme nejdříve, že přímka p není kolmá k základnici. Pokud existuje půdorysný stopník P, pak P_2 leží na ose x a P_1 je pak průsečík ordinály bodu $P2$ s přímkou p_1. Podobně je $N_1 = p_1 \cap x$ a $N_2 \in p_2$ (obr. 5.15. a 5.13.). Je-li např. $p \perp \pi$, pak $P_1 = p_1$ a $P_2 = p_2 \cap x$ (obr. 5.14.b). Vzhledem k $p \| \nu$ je buď $p \subset \nu$ nebo p, ν nemají společný bod. Podobně postupujeme v případě $p \perp \nu$. Předpoládejme nyní, že přímka p je kolmá k základnici a není přitom kolmá k žádné průmětně. Nechť je $p = AB$. Přímkou p proložíme třetí hlavní průmětnu. Pomocí sklopení této průmětny do π sestrojíme podle obr. 5.12.c) třetí průměty A_3, B_3 bodů A, B a položíme $p_3 = A_3B_3$ (obr. 5.16.). Pak je $P_2, N_1 \in x, P_1 = p_3 \cap p_1, N_3 = p_3 \cap x$ a N_2 sestrojíme pomocí vztahu $|N_1N_3| = |N_1N_2| = |z_N|$.

V dalším budeme formulovat úlohy a cvičení stručněji jen pomocí zadání útvarů v prostoru a nebudeme již zdůrazňovat, že pracujeme s jejich sdruženými průměty. Úlohu 1 formulujeme v tomto smyslu volněji takto: "Určete stopníky přímky p."

Nyní budeme vyšetřovat sdružené průměty *dvojic přímek*. Jsou-li p, q *rovnoběžné přímky* a žádná z nich není kolmá k základnici, pak jsou jejich první i druhé průměty rovnoběžné, čili platí $p \| q \Rightarrow p_1 \| q_1, p_2 \| q_2$. Za daných předpokladů platí i obráceně $p_1 \| q_1, p_2 \| q_2 \Rightarrow p \| q$ neboť pak jsou první resp. druhé promítací roviny určené přímkami p_1, q_1 resp. p_2, q_2 rovnoběžné a přímky p, q jimi určené jsou rovnoběžné.



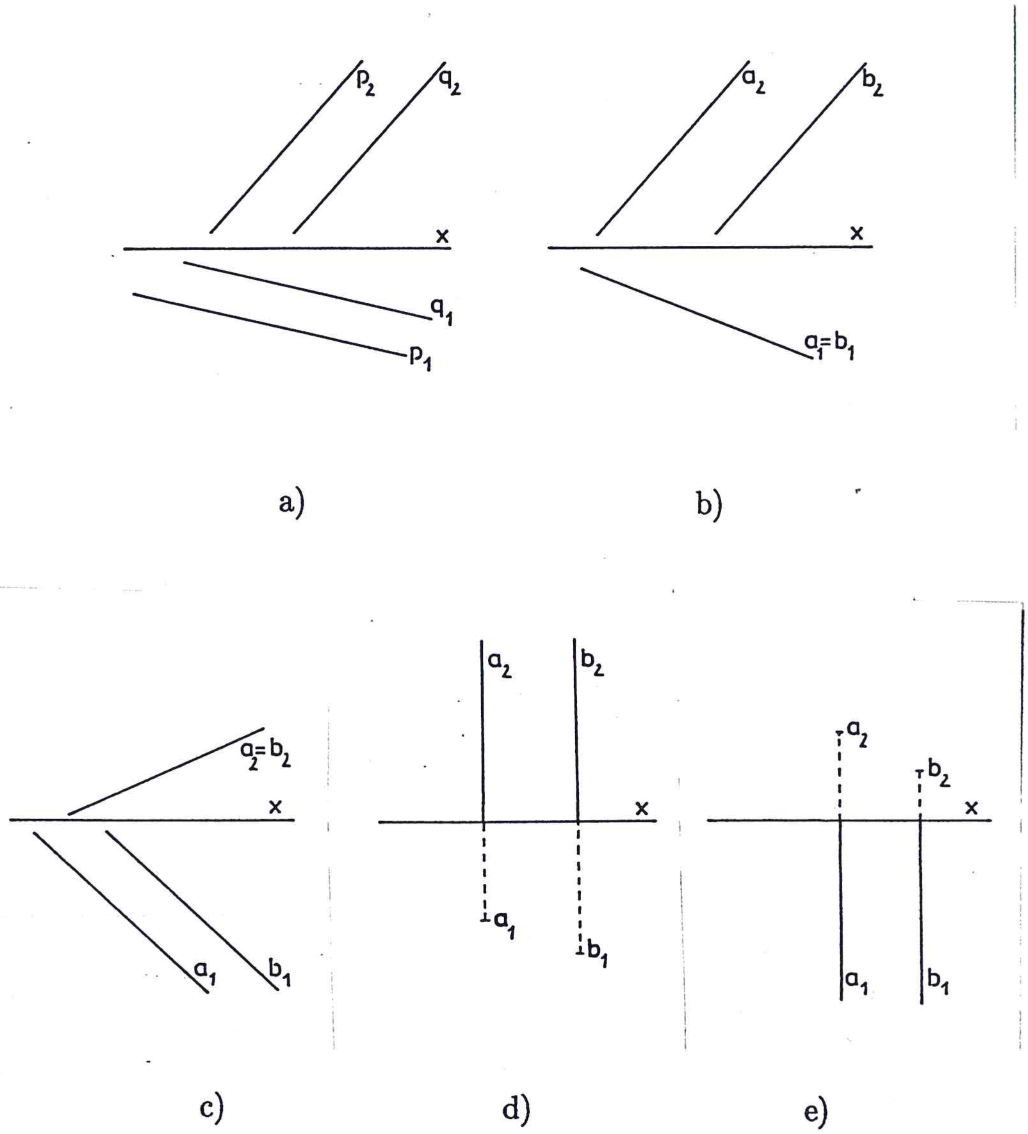
Obr. 5.16.

Na obr. 5.17.a) jsou sestrojeny sdružené průměty rovnoběžných přímek p, q, které neleží v žádné promítací rovině, na obr. b) resp. c) leží přímky p, q v první resp. druhé promítací rovině. Každé dvě přímky kolmé k jedné průmětně jsou rovnoběžné. Na obr. 5.17.d), e) jsou zobrazeny přímky a, b kolmé k půdorysně nebo k nárysně.

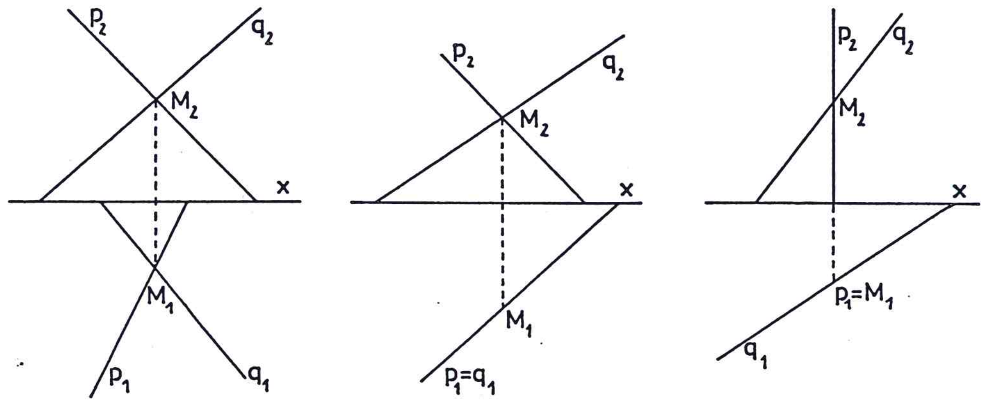
Jsou-li přímky p, q různoběžné a mají-li obecnou polohu vzhledem k průmětnám, pak jsou p_1, q_1 a p_2, q_2 různoběžné přímky a body $M_1 = p_1 \cap q_1$, $M_2 = p_2 \cap q_2$ leží na ordinále. Platí také obrácené tvrzení. Na obr. 5.18. jsou kromě obecného případu a) zobrazeny sdružené průměty různoběžných přímek p, q, jestliže p, q leží v první promítací rovině (obr. b) popř. jestliže $p \perp \pi$ (obr. c).

Leží-li přímky $p = AB, q = CD$ v rovině kolmé k základnici, pak o jejich vzájemné poloze rozhodneme zavedením třetí hlavní průmětny podle obr. 5.16. (cvičení).

Na obr. 5.19. jsou zobrazeny mimoběžné přímky p, q v různých polohách. (Jsou-li p_1, q_1 i p_2, q_2 různoběžné, pak jejich průsečíky neleží na ordinále – obr. a).

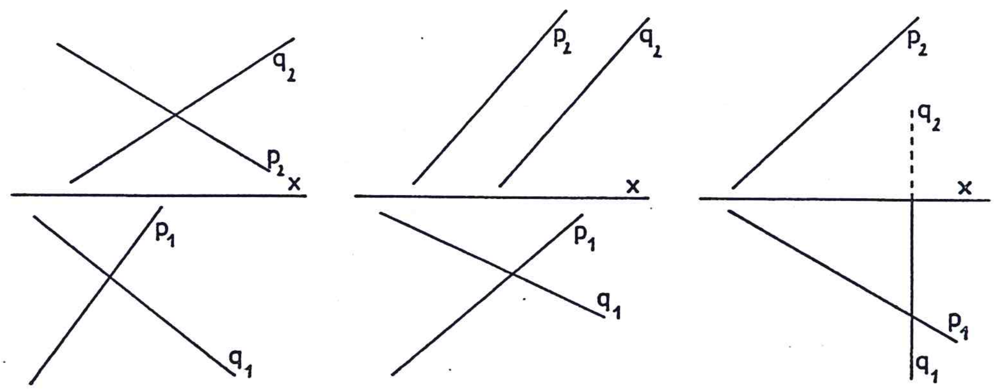

p2
q2
x
q1
p1
a2
b2
x
a1=b1
a)
b)
a2=b2
x
a1
b1
a2
b2
x
a1
b1
a2
b2
x
a1
b1
c)
d)
e)

Obr. 5.17.



a) b) c)

Obr. 5.18.



a) b) c)

Obr. 5.19.

CVIČENÍ

1. Sestrojte stopníky přímky $m = KL$ a na m určete bod A, jehož vzdálenost od ν je 4 a bod B, jehož vzdálenost od π je 4,5 $[K(-3;1;6,5), L(2,5;5;2)]$.

2. Sestrojte sdružené průměty přímky p, jestliže

   (a) $p \subset \pi$,

   (b) $p \subset \nu \quad p = x$.

3. Na přímce $p = AB$ zobrazte bod, který leží

   (a) v rovině souměrnosti,

   (b) v rovině totožnosti

   $[A(-1;0;2), B(3;4;3)]$.

4. Bodem C veďte přímky $m \| \pi$ a $n \| \nu$ různoběžné s přímkou $a = AB$ $[A(-5;11;1,5), B(4;1,5;7), C(0;3,5;2,5)]$.

5. Zobrazte rovnoběžník, jehož jeden vrchol je A, úhlopříčka leží na přímce $e = RQ$, dvě strany jsou rovnoběžné s π a dvě s ν $[A(-4;2;3), R(2;-2;8), Q(-2;8;1)]$.

6. Rozhodněte o vzájemné poloze přímek $p = AB, q = CD$

   (a) $[A(0;1;1), B(0;3;4), C(0;2;2), D(0;0;5)]$

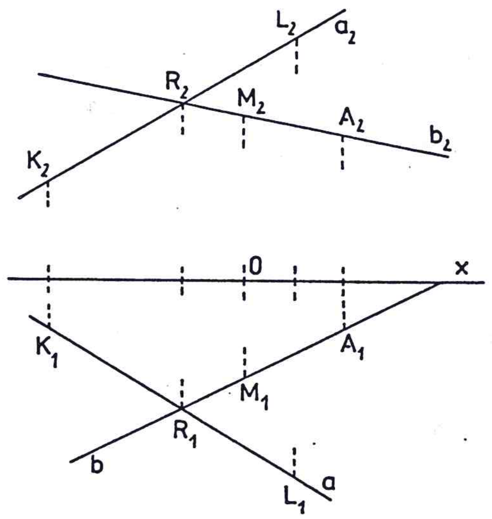
   (b) $[A(1,5;2;1), B(1,5;5;3), C(-1,5;3,5;5,5), D(-1,5;-1;2,5)]$.

5.4. ZOBRAZENÍ ROVINY

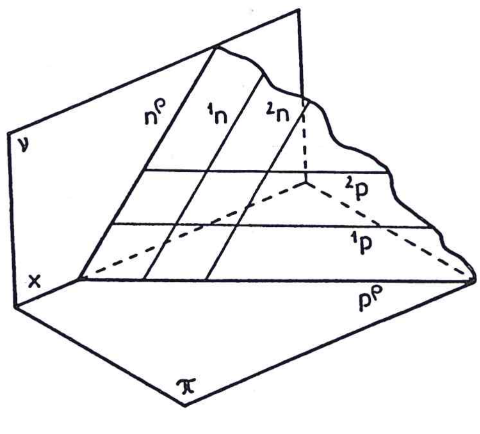
Prvním i druhým průmětem roviny, která není kolmá k žádné z průměten π, ν, je opět rovina. Je-li rovina kolmá k některé průmětně, pak jejím příslušným průmětem je přímka.

Ú l o h a 5.2. Rovina ϱ je dána bodem A a přímkou $a = KL$. Určete sdružené průměty bodu $M \in \varrho$ [A(2;1;3), K(-4;1;2), L(1;4;5), M(0;2;?)] .

Ř e š e n í : Protože $A_1 \notin a_1$, není rovina ϱ kolmá k π, jejím prvním průmětem je celá průmětna π a existuje tedy bod $M \in \varrho$, pro který $x_M = 0, y_M = 2$. Jestliže položíme $b = AM$, pak $b \subset \varrho$ a $b_1 = A_1M_1$. Přímky a, b jsou různoběžné, protínají se v bodě R, přičemž $R_1 = a_1 \cap b_1$. Proto platí $R_2 \in a_2$ a $b_2 = A_2R_2$ (obr. 5.20.). Bod M_2 je průsečíkem ordinály jdoucí bodem M_1 s přímkou b_2.



Obr. 5.20.



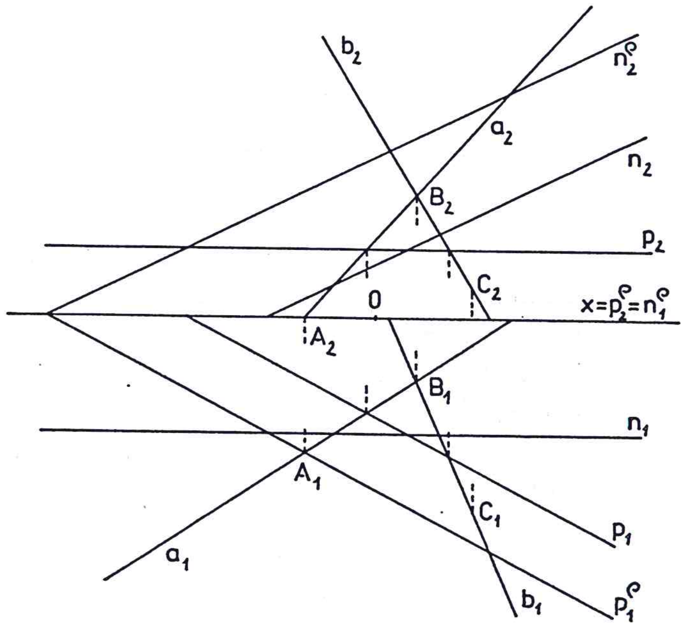
Obr. 5.21.

Není-li rovina rovnoběžná se žádnou průmětnou, pak její přímky rvnoběžné s π resp. s ν se nazývají *první hlavní přímky (hlavní přímky první osnovy)* resp. *druhé hlavní přímky (hlavní přímky druhé osnovy)*. Hlavní přímky téže osnovy jsu navzájem rvnoběžné. První hlavní přímka ležící v π se nazývá *první* *(půdorysná) stopa* roviny a druhá hlavní přímka ležící v ν se nazývá *druhá (nárysná) stopa* roviny. Stopy roviny jsou tedy její průsečnice s průmětnami. Hlavní přímky první osnovy roviny ϱ budeme značit písmenem p a půdorysnou stopu p^ϱ. Jestliže budeme pracovat s více hlavními přímkami první osnovy, odlišíme je indexy, např. ${}^1p, {}^2p, \dots$ (obr. 5.21.). Podobně pro halvní přímky druhé osnovy budeme používat symbolů $n, {}^1n, {}^2n, \dots$ a nárysnou stopu budeme značit n^ϱ.

Ú l o h a 5.3. V rovině $\varrho = ABC$ sestrojte některou hlavní přímku první resp. druhé osnovy a stopy p^ϱ, n^ϱ $[A(-2;3,5;0), B(1,5;2;3;), C(3,5;5;1)]$.

Ř e š e n í : Protože hlavní přímky první osnovy jsou rovnoběžné s π, jsou jejich druhé průměty rovnoběžné s osou x. Zvolíme tedy $p_2 \| x$ a pomocí průsečíků přímky p s přímkami $a = AB, b = BC$ určíme p_1 (obr. 5.22.). Protože je $p^\varrho \subset \pi$, platí $p_2^\varrho = x$ a p_1^ϱ určíme stejně jako v předchozím případě. Můžeme přitom využít vztahu $p_1 \| p_1^\varrho$. Podobně zvolíme $n_1 \| x$, určíme n_2 a k přímce $n_1^\varrho = x$ sestrojíme n_2^ϱ. Ze vzájemné polohy rovin π, ν, ϱ plyne, že přímky p_1^ϱ, n_2^ϱ se protínají na ose x.

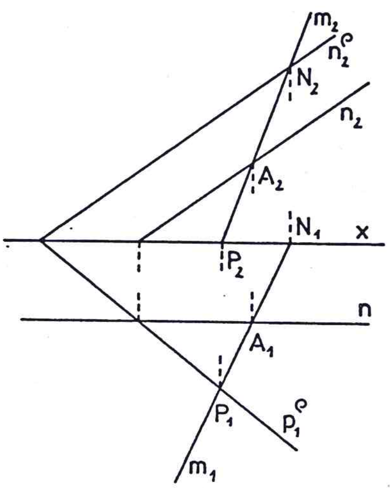
Je zřejmé, že první resp. druhá stopa roviny je množinou prvních rep. druhých stopníků přímek této roviny. Je-li rovina ϱ v obecné poloze vzhledem k průmětnám, pak platí $x = p_2^\varrho = n_1^\varrho$ (obr. 5.22.). V tomto případě označení p_2^ϱ, n_1^ϱ obvykle vynecháváme a vyznačujeme jen p_1^ϱ, n_2^ϱ. Jesltiže obě stopy roviny ϱ existují a jsou různé, pak je jimi ϱ jednoznačně určena. Zadání roviny pomocí stop umožňuje přehledné řešení úloh a pohodlné modelování roviny v prostoru, proto ho budme často používat.



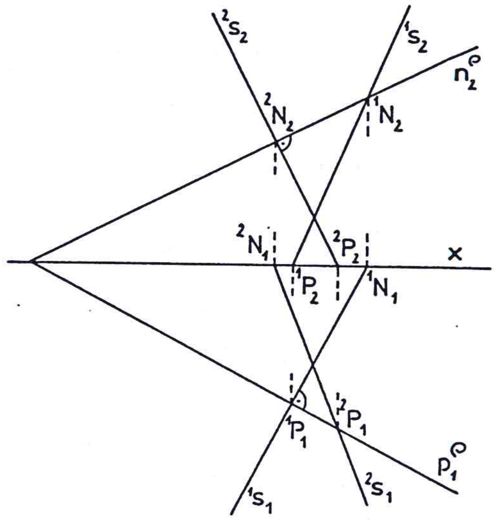
Obr. 5.22.

Ú l o h a 5.4. Rovina ϱ je dána stopami. Sestrojte druhý průmět A_2 bodu $A \in \varrho$, je-li dán první průmět A_1.

Ř e š e n í : Postupujeme stejně jako při řešení úlohly 5.2.: Bodem A vedeme přímku $m \subset \varrho$. Pak je $A_1 \in m_1$, pomocí průsečíků P, N přímky m se stopami určíme m_2 a využijeme vztahu $A_2 \in m_2$ (obr. 5.23.). Místo obecné přímky m roviny ϱ se často volí její hlavní přímka. Na obrázku 5.23. je bodem A vedena hlavní přímka n druhé osnovy. Při konstrukci je využito vztahů $n_1 \| x, n_2 \| n_2^\varrho$.



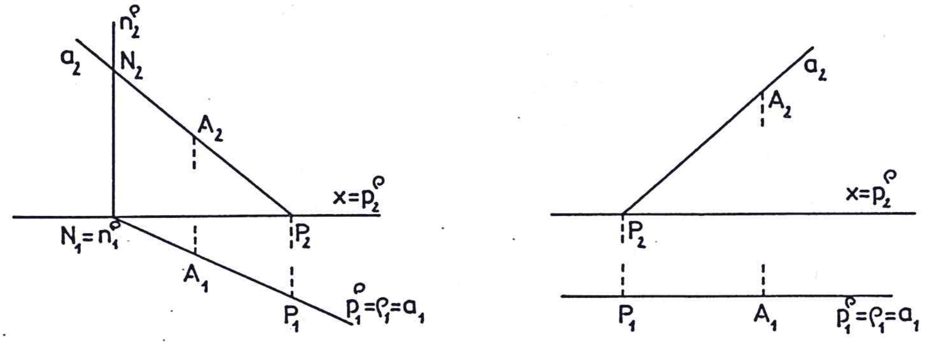
Obr. 5.23.



Obr. 5.24.

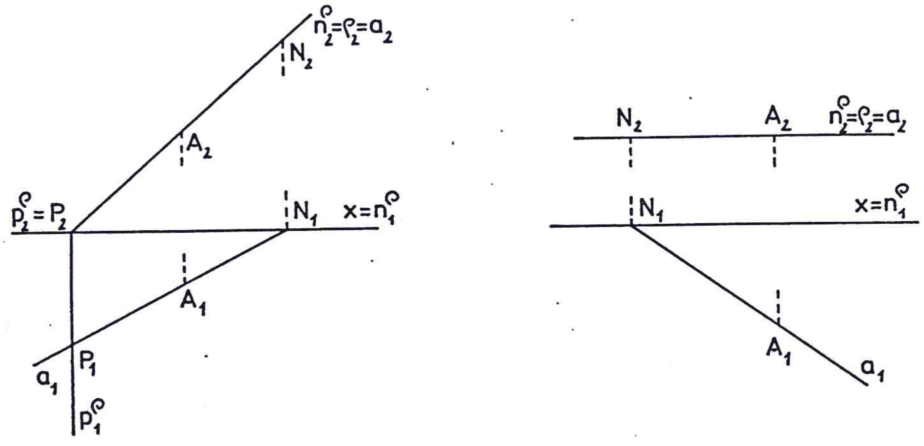
Při řešení některých konstruktivních úloh se používají kromě hlavních přímek roviny ještě tzv. *spádové přímky*: Přímky roviny kolmé k prvním hlavním přímkám se nazývají *první spádové přímky (spádové přímky první osnovy)* a přímky roviny kolmé ke druhým hlavním přímkám se nazývají *druhé spádové přímky (spádové přímky druhé osnovy)*. Z věty o pravoúhlém průmětu dvou kolmých přímek, z nichž jedna je rovnoběžná s průmětnou (věta 1.57., odst. 1.3.), dostáváme, že první průmět spádové přímky první osnovy je kolmý na první průměty hlavních přímek první osnovy. Podobně druhý průmět spádové přímky druhé osnovy je kolmý na druhé průměty hlavních přímek druhé osnovy. Na obrázku 5.24. jsou sestrojeny sdružené průměty spádových přímek ${}^1s, {}^2s$ obou osnov v rovině ϱ, která je určena stopami. Platí ${}^1s_1 \perp p_1^\varrho$ a přímka ${}^1s_2$ je sestrojena pomocí stopníků ${}^1P, {}^1N$ přímky ${}^1s$. Podobně sestrojíme sdružené průměty spádové přímky ${}^2s$ druhé osnovy.

Zatím jsme se zabývali rovinami, které zaujímaly obecnou polohu vzhledem k průmětnám. Nyní se stručně zmíníme o některých zvláštních případech. Na doprovodných obrázcích zobrazíme vždy stopy roviny ϱ, zvolíme v ϱ přímku a a určíme stopníky P, N pokud existují.



a) b)

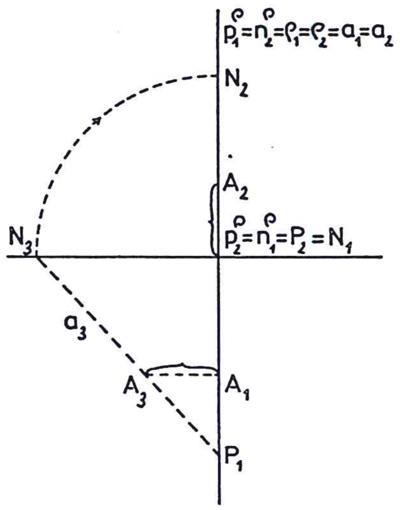
Obr. 5.25.



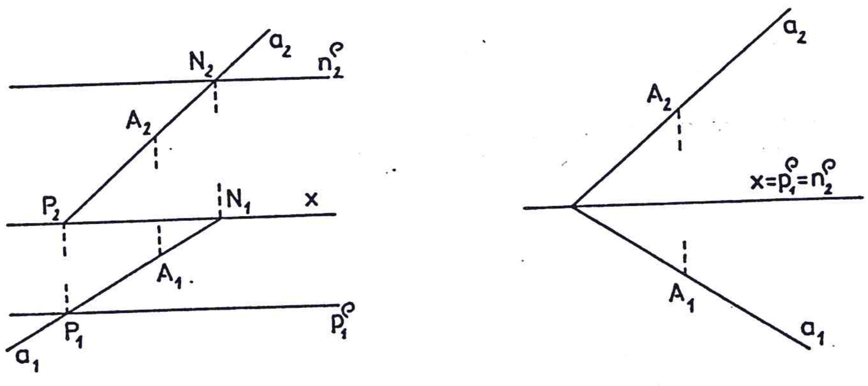
a) b)

Obr. 5.26.

Je-li rovina ϱ kolmá k první průmětně, pak je její první průmět přímka. Není-li navíc rovnoběžná s nárysnou, je druhá stopa n^{ϱ} kolmá k základnici x (obr. 5.25.a). Je-li $\varrho \| \nu$, pak je ϱ_1 přímka a $\varrho_1 \| x$. Druhá stopa roviny ϱ neexistuje (obr. 5.25.b). Na obrázku 5.26. jsou podobně zobrazeny roviny kolmé k druhé průmětně. Předpokládejme, že $\varrho \perp x$. Pak $p_1^{\varrho} = n_2^{\varrho}, p_1^{\varrho} \perp x$ a $p_2^{\varrho}, n_1^{\varrho}$ jsou splývající body. Přímka $a \subset \varrho$ je určena stopníky P, N. Rovinu ϱ můžeme považovat za třetí hlavní průmětnu. Na obr. 5.27. je pomocí sklopení roviny ϱ do půdorysny sestrojen třetí průmět a_3 přímky a a kromě toho jsou zde zobrazeny průměty A_1, A_2, A_3 bodu $A \in a$. Jestliže je $\varrho \| x$, pak platí $p_1^{\varrho} \| x \| n_2^{\varrho}$, jak vyplývá ze vzájemné polohy rovin π, ν, ϱ (obr. 5.28.a). Prochází-li rovina ϱ přímkou x, pak $x = p_1^{\varrho} = n_2^{\varrho}$ a rovina ϱ není svými stopami určena. Proto zadáváme ještě jeden její bod A (obr. 5.28.b).



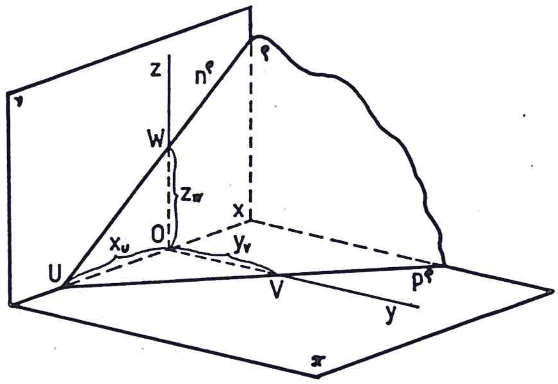
Obr. 5.27.



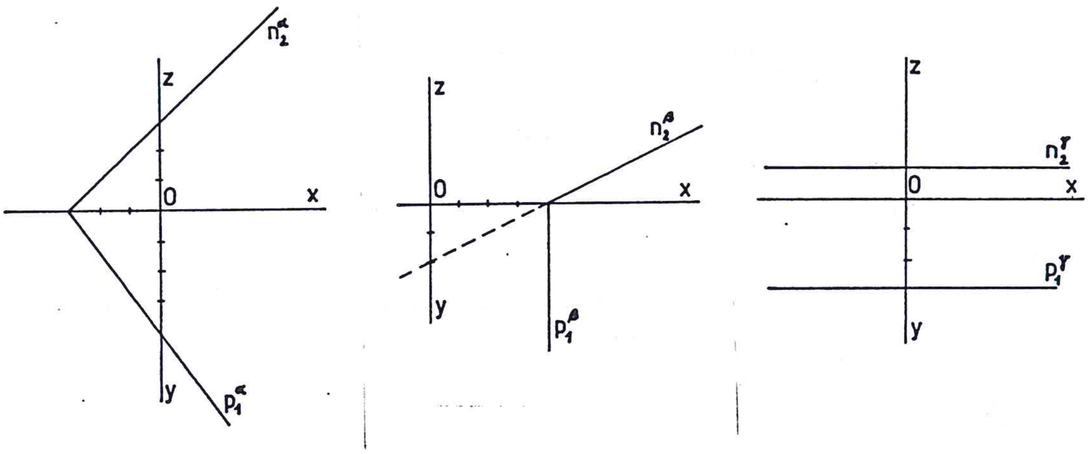
a) b)

Obr. 5.28.

Jestliže určujeme rovinu stopami, pak je užitečné užívat souřadnicové soustavy $(0, x, y, z)$ zavedené v části 5.1. Průsečíky roviny ϱ, která neprochází počátkem 0 s osami x, y, z označíme U, V, W a souřadnice x_U, y_V, z_W bodů U, V, W nazveme *souřadnicemi roviny* ϱ (obr. 5.29.). Je-li roivna ϱ rovnoběžná s některou souřadnicovou osou, pak pro příslušnou souřadnici používáme tradičního symbolu ∞. Na obr. 5.30. jsou např. zobrazeny stopy rovin $\alpha(-3; 4; 3), \beta(4; \infty; -2), \gamma(\infty; 3; 1)$.



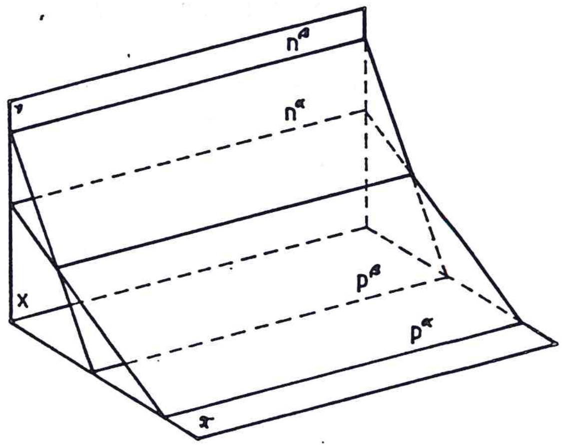
Obr. 5.29.



Obr. 5.30.

5.5. DVĚ ROVINY, PŘÍMKA A ROVINA

Nejprve uvažujme dvě rovnoběžné roviny. Předpkládejme nejdříve, že roviny $\alpha \| \beta$ nejsou rovnoběžné se žádnou z průměten π, ν ani s osu x. Pak jsou roviny α, β proťaty každou z průměten v rovnoběžných přímkách, které protínají osu x, tj. $p^\alpha \| p^\beta$ a $n^\alpha \| n^\beta$. Předpokládejme, že obráceně jsou půdorysné i nárysné stopy rovin α, β rovnoběžné a protínají osu x. Pak jsou přímky $p^\alpha, n^\alpha \subset \alpha$ a $p^\beta, n^\beta \subset \beta$ různoběžné a podle kritéria rovnoběžnosti dvou rovin je $\alpha \| \beta$. V případě, že jsou všechny stopy rovin α, β rovnoběžné s osu x, pak $x \| \alpha, x \| \beta$ a nemusí při tom platit $\alpha \| \beta$, jak je ukázáno na obr. 5.31.

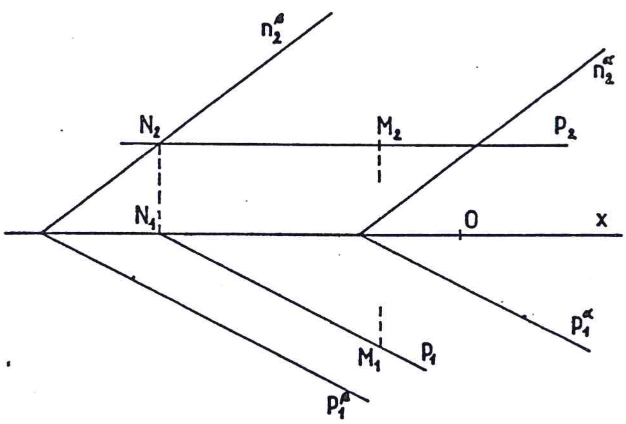


Obr. 5.31.

Platí-li $\alpha \| \pi, \beta \| \pi$ pak půdorysné stopy rovin α, β neexistují a $n^\alpha \| n^\beta$. Podobně z $\alpha \| \nu, \beta \| \nu$ plyne $p^\alpha \| p^\beta$.

Ú l o h a 5.5. Bodem M veďte rovinu rovnoběžnou s rovinou α $[\alpha(-3; 1; 3), M(-2; 2,5; 3)]$.

Ř e š e n í : Bodem M vedeme např. přímku p rovnoběžnou s hlavními přímkami první osnovy roviny α, čili položíme $p_1 \| p_1^\alpha$ a $p_2 \| x$ (obr. 5.32.). Pak p leží v hledané rovině β



Obr. 5.32.

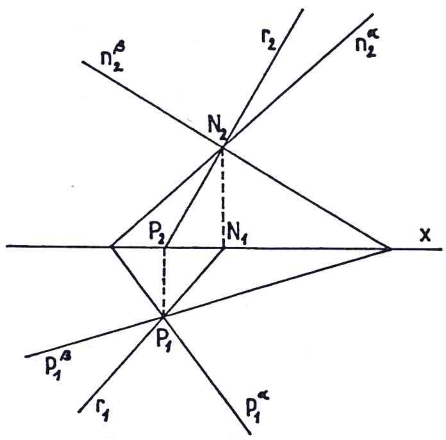
a proto její nárysný stopník N leží na nárysné stopě n^β, příčemž $n_2^\beta \| n_2^\alpha$. Současně je $p_1^\beta \| p_1^\alpha$.

Jsou-li roviny α, β *různoběžné*, pak je jejich průnikem průsečnice $r = \alpha \cap \beta$.

Ú l o h a 5.6. Sestrojte průsečnici rovin α, β.

Ř e š e n í : Uvedeme dva případy a doporučeujeme čtenáři jako vhodné cvičení prostorové představivosti, aby úlohu vyřešil i pro další speciální polohy rovin α, β (viz také cvičení 8). Předpokládáme, že roviny α, β jsou dány stopami.

1. Roviny α, β jsou v obecné poloze vzhledem k průmětnám. Průsečík P půdorysných stop leží v obou rovinách a je tedy bodem průsečnice $r = \alpha \cap \beta$. Podobně pro průsečík N nárysných stop platí $N \in r$ a proto $r = PN$. Sdružené obrazy průsečnice r jsou sestrojeny na obr. 5.33.



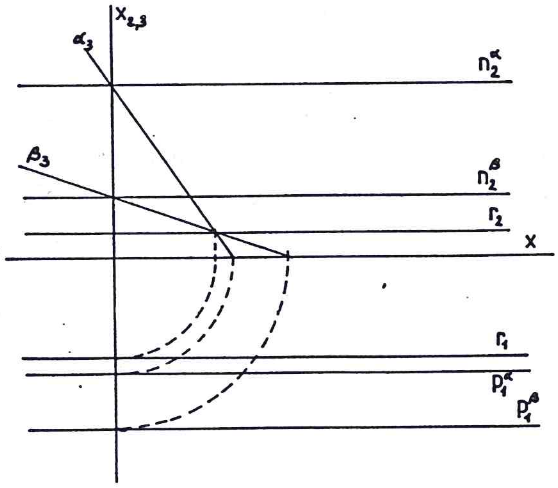
Obr. 5.33.

2. Roviny α, β jsou rovnoběžné s osou x. Jejich stopy i průsečnice r jsou pak také rovnoběžné s x. Jestliže zvolíme třetí hlavní průmětnu γ, pak $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$ a pravoúhlé průměty rovin α, β do γ jsou přímky. Rovinu γ otočíme do nárysny a sestrojíme třetí průmět α_3, β_3 rovin α, β podle obrázku 5.12.b). Průsečík přímek α_3 a β_3 je pak třetí průmět r_3 průsečnice r. Pomocí r_3 sestrojíme sdružené obrazy r_1, r_2 (obr. 5.34.).

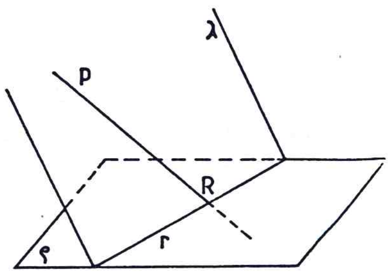
O vzájemné poloze přímky p a roviny ϱ rozhodneme tak, že přímkou p vedeme rovinu λ různoběžnou s ϱ a určíme průsečnici $r = \varrho \cap \lambda$ (obr. 5.35.). Je-li $p \| r$ pak, $p \| \varrho$ a ve speciálním případě $p = r$ je $p \subset \varrho$. Jsou-li přímky p, r různoběžné, pak je také přímka p různoběžná s rovinou ϱ a bod $R = p \cap r$ je jejím *průsečíkem* s ϱ. Úlohy o vzájemné poloze přímky a roviny formulujeme většinou jako úlohy na určení průsečíku přímky s rovinou.

Ú l o h a 5.7. Určete průsečíky přímky $p = KL$ s rovinou ϱ, je-li $K(3,5;0;1)$, $L(0;2;3)$ a a) $\varrho - 3;4;3)$ b) $\varrho = ABC$ $[A(-4;2,5;2), B(3{,}5;6;4), C(0;1;6)]$.

Ř e š e n í : a) Přímkou p vedeme pomocnou rovinu λ, na obrázku 5.36. je λ první promítací rovina přímky p. Jestliže je $r = \lambda \cap \varrho$, pak $p_1 = r_1$ a r_2 určíme z podmínky $r \subset \varrho$. Hledaný bod R je průsečíkem přímek p, r.



Obr. 5.34.



Obr. 5.35.

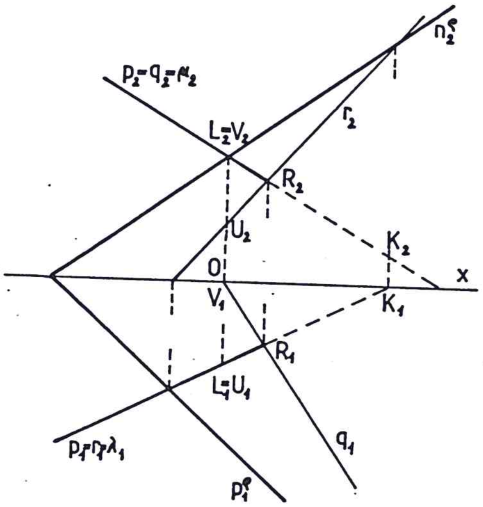
b) Úloha se často formuluje jako určení průsečíku přímky p s trojúhelníkem ABC. Přímkou p vedeme opět první promítací rovinu λ a pro $r = \lambda \cap \varrho$ je $r_1 = \lambda_1$ (obr. 5.37.). Protože je $r \subset \varrho$, protíná r přímky AB, BC v bodech X, Y. Dostáváme tedy postupně $X_1 = r_1 \cap A_1B_1, Y_1 = r_1 \cap B_1C_1, r_2 = X_2Y_2$ a $R_2 = r_2 \cap p_2$, kde $R = p \cap \varrho$.

Jak je ukázáno v řešení úlohy 5.7., je výhodné volit pomocnou rovinu λ jako promítací. Pak příslušné průměty přímek p a $r = \lambda \cap \varrho$ splývají (na obr. 5.36. a 5.37. je $p_1 = r_1$) a přímka r se nazývá *krycí*.

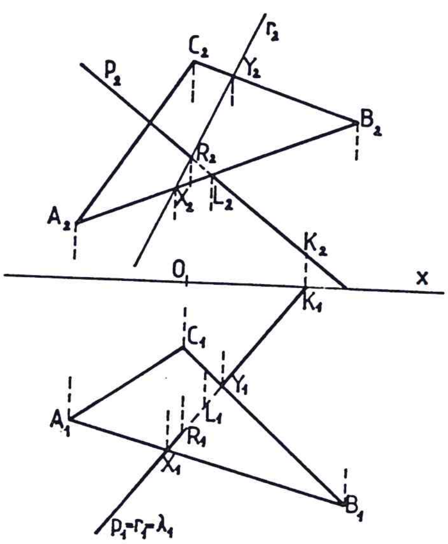
VIDITELNOST ÚTVARŮ

Při zobrazování geometrických útvarů určujeme pro větší názornost i jejich viditelnost. Přitom útvary bližší zakrývají útvary vzdálenější. Pro půdorys to znamenaá, že ze dvou bodů téže první promítací přímky je viditelný ten, který má větší souřadnici z. Podobně je v nárysu vidět ten bod téže druhé promítací přímky, který má větší souřadnici y.

Nechť různoběžné přímky a, b, z nichž žádná není promítací, leží v první promítací rovině λ a buď R jejich průsečík (obr. 5.38.). Veďme bodem $M \in$



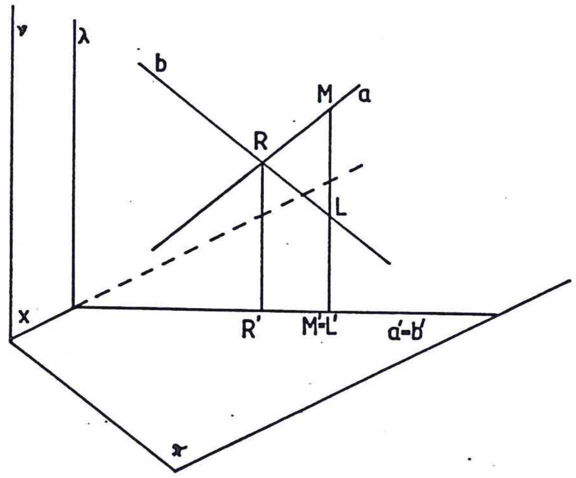
Obr. 5.36.



Obr. 5.37.

$a, M \neq R$ první promítací přímku a její průsečík s b označme L. Je-li $z_M > z_L$, pak je v prvním průmětu viditelná celá polopřímka $\vec{RM}$ a není viditelná polopřímka opačná. Současně není viditelná polopřímka $\vec{RL}$ a je viditelná polopřímka k ní opačná. Podobně uvažujeme v případě, že přímky a, b leží v druhé promítací rovině.

Na obrázku 5.36. je např. rozhodnuto o viditelnosti přímky p a roviny ϱ. Přímky p, r leží v první promítací rovině λ. První promítací přímka vedená bodem $L \in p$ protíná přímku r v bodě U. Protože je $z_L > z_U$, je v půdorysu vidět polopřímku $\vec{RL}$. Přímkou p je dále proložena druhá promítací rovina μ, která protíná rovinu ϱ v přímce q. Druhá promítací přímka vedena bodem L protíná přímku q v bodě V. Protože platí $y_L > y_V$, je v nárysu viditelná polopřímka $\vec{RL}$. Podobným způsobem je rozhodnuto o viditelnosti přímky p a trojúhelníku ABC na obr. 5.37.



Obr. 5.38.

CVIČENÍ

1. Zobrazte stopy roviny, která je určena
   (a) dvěma různoběžkami,
   (b) dvěma rovnoběžkami,
   (c) bodem a přímkou,
   (d) třemi body.
2. Danou přímkou proložte postupně roviny kolmé k π, ν a rovinu rovnoběžnou se základnicí x.
3. Zobrazte hlavní přímky roviny ϱ, je-li
   (a) $\varrho \| x$,
   (b) $x \subset \varrho$
   (c) $\varrho \perp \pi$
   (d) $\varrho \perp \nu$.
4. V rovině $\varrho(-5; 4; 5)$ zobrazte rovnoběžník $ABCD$ $[A(3; 2; ?), B(0; 3; ?), C(-1; 1; ?)]$.
5. Bodem M veďte rovinu rovnoběžou s rovinou $\varrho = ABC$ $[M(4,5; 2; 4), A(-1,5; 1,5; 2), B(1; 1,5; 5,5), C(4,5; 6; 2)]$.
6. Bodem $M(2; 4; 3)$ veďte roviny rovnoběžné s rovinou souměrnosti a totožnosti.
7. Bodem M veďte rovinu rovnoběžnou s rovinou ϱ
   (a) $M(0; 4; 2), \varrho(4; \infty; 3,5)$,
   (b) $M(0; 1; 1), \varrho(\infty; -3,5; -2,5)$.
8. Sestrojte průsečnici rovin α, β
   (a) $\alpha(2; 1; -2), \beta(-2,5; 2; 1)$,
   (b) $\alpha(3; 2,5; \infty), \beta(-2; 1; 1)$,
   (c) $\alpha(-3; \infty; 3), \beta(3; 2; \infty)$.

9. Zobrazte průnik trojúhelníků ABC, MNP a určete viditelnost $[A(3,5;6;1), B(-1,5;9;0), C(-3;0,5;5,5), M(4,5;1,5;8,5), N(0;0;7,5), P(-4;6,5;0)]$.

10. Sestrojte průsečík přímky $p = MN$ s rovinou ϱ a určete viditelnost

    (a) $M(2;1;2), N(-2;3,5;4), \varrho(-4;2,5;3)$,
    (b) $M(3;2;2), N(3;4;2), \varrho(-2;2;4)$,
    (c) $M(2;1;1,5), N(2;3;4), \varrho(-2;2;4)$,
    (d) $M(-3;2;0), N(0;2;2), \varrho(\infty;3,5;4)$,
    (e) $M(3;2;0), N(-1;4;2), \varrho(-3;\infty;3)$.

11. Sestrojte průsečík přímky $p = MN$ s rovnoběžníkem $ABCD$. Určete viditelnost $[M(-3,5;1,5;0), N(3;4;7), A(-1;0,5;5,5), B(3;2;2,5), C(0,5;5;1)]$.

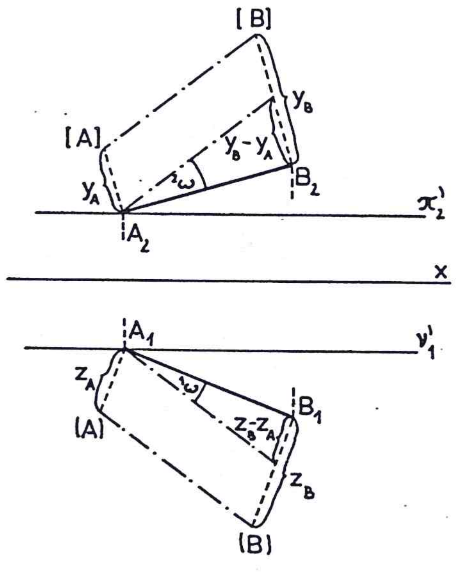
5.6. METRICKÉ ÚLOHY

V předcházejících odstavcích jsme se zabývali vzájemnou polohou základních geometrických útvarů (incidenčními vztahy). Nyní budeme řešit úlohy, ve kterých se již vyskytuje určování velikosti některých geometrických útvarů, např. úseček a úhlů. Úlohy tohoto typu se nazývají *metrické*.

Základní metrickou úlohou je určení velikosti úsečky, která je dána sdruženými průměty. Bývá zvykem tuto úlohu formulovat jako určení skutečé velikosti úsečky. Z vět o rovnoběžném promítání plyne, že je-li úsečka rovnoběžná s π resp. s ν, pak se v prvním resp. druhém průmětu zobrazuje ve skutečné velikosti. V následující úloze je úsečka volena v obecné poloze.

Ú l o h a 5.8. Určete skutečnou velikost úsečky $AB[A(-2;2;3), B(3;4;3,5)]$.

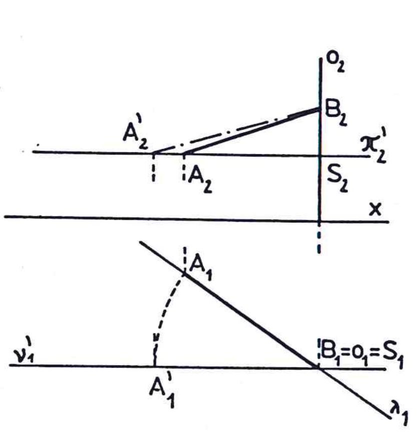
Ř e š e n í : Úlohu řešíme tak, že úsečku převedeme do polohy rovnoběžné s průmětnou. Nejpřirozenější způsob je sklopení promítací roviny přímky AB kolem její stopy do průmětny. Jestliže sklápíme do π, pak promítací lichoběžník ABA_1B_1 úsečky AB přejde do lichoběžníku $(A)(B)A_1B_1$, kde $|A_1(A)| = |z_A|, |B_1(B)| = |z_B|$ a $|(A)(B)| = |AB|$ (obr. 5.39.). Při sklápění do ν dostáváme lichoběžník $[A][B]A_2B_2$, kde $|A_2[A]| = |y_A|, |B_2[B]| = |y_B|$ a $|[A][B]| = |AB|$. Někdy je výhodné otočit promítací rovinu přímky AB do roviny rovnoběžné s průmětnou a použít tzv. rozdílového trojúhelníku. Na obrázku 5.39. je bod B otočen do roviny π' rovnoběžné s π a procházející bodem A do bodu B'. Pak je $B_1B'| = |z_B - z_A|$ a $|AB| = |A_1B'|$. Podobně je na obrázku 5.39. otočen bod B do roviny ν' rovnoběžné s ν a procházející bodem A do bodu B''. Platí $|B_2B''| = |y_B - y_A|$ a $|AB| = |A_2B''|$.



Obr. 5.39.

Skutečnou velikost úsečky AB je možné také určit otočením první (druhé) promítací roviny přímky AB do polohy rovnoběžné s druhou (první) průmětnou: Uvažujme první promítací rovinu λ přímky AB a za osu otáčení zvolme přímku

$o \perp \pi$ procházející bodem B (obr. 5.40.). Bod A probíhá kružnici ležící v rovině $\pi' \perp o$ o středu $S = \pi' \cap o$ a poloměru $|SA|$. Prvním průmětem této kružnice je kružnice o středu S_1 a druhým průmětem je úsečka. Jestliže otočíme bod A do bodu A' roviny ν' procházející osou o rovnoběžně s ν, pak $|A_1'B_1| = |A_1B_1|$ a $A_2' \in \pi_2'$. Protože bod B zůstává při otáčení na místě, platí $|AB| = |A_2'B_2|$.



Obr. 5.40.

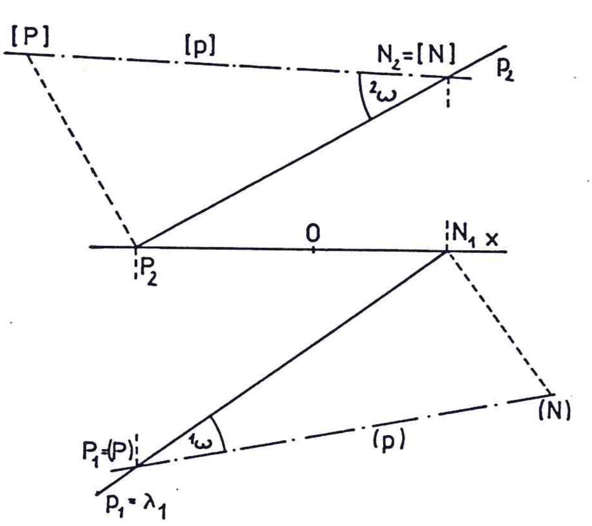
Mezi metrické úlohy patří také zjišťování odchylek. Princip řešení úloh tohoto typu ukážeme na dvou zvláštních případech. *První odchylka přímky p* je její odchylka od první průmětny, čili velikost úhlu určeného přímkou p a jejím pravoúhlým průmětem do π. *Druhá odchylka přímky p* je velikost úhlu určeného přímkou p a jejím pravoúhlým průmětem do ν.

Ú l o h a 5.9. Určete odchylky přímky $p = PN$ od průměten $[P(-4;5;0), N(3;0;4)]$.

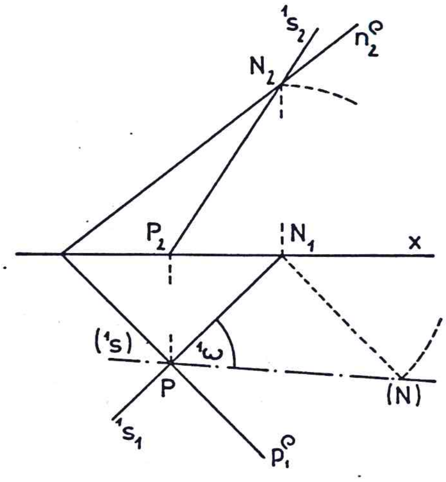
Ř e š e n í : První odchylku přímky p zjistíme skopením první promítací roviny λ přímky p do π, při kterém přejde přímka p do (p) (na obr. 5.41. jsou sklopeny stopníky P, N přímky p). Velikost $^1\omega$ úhlu $\sphericalangle\, p_1(p)$ je první odchylka přímky p. Sklopením druhé promítací roviny přímky p do ν, při kterém přejde p do $[p]$, obdržíme druhou odchylku přímky p jako velikost $^2\omega$ úhlu $\sphericalangle\, p_2[p]$. Odchylky přímky p od průměten můžeme také zjistit otočením promítacích rovin přímky p do rovin rovnoběžných s průmětnami. Na obrázku 5.39. jsou např. určeny odchylky $^1\omega, {}^2\omega$ přímky AB otočením do rovin π' a ν' a na obr. 5.40. je určena odchylka $^1\omega$.

První resp. *druhá odchylka roviny* je odchylka její spádové přímky první resp. druhé osnovy od průmětny π resp. ν. Na obr. 5.42. je určena první odchylka $^1\omega$ roviny ϱ dané stopami: Je zvolena spádová přímka ^1s první osnovy a její odchylka $^1\omega$ od půdorysny je určena podle úlohy 5.9. Druhou odchylku $^2\omega$ roviny ϱ určíme podobně.

Důležitou součástí metrických úloh jsou *úlohy o kolmosti*. Je-li přímka kolmá k rovině, pak je kolmá ke všem přímkám této roviny, tedy i k hlavním přímkám obou osnov. Z věty o průvoúhlém průmětu pravého úhlu, jehož jedno rameno je rovnoběžné s průmětnou, pak dostaváme (viz odst. 1.1., 1.3.): První resp. druhý průmět kolmice k rovině je přímka kolmá k prvnímu resp. druhému průmětu hlavních přímek první resp. druhé osnovy.



Obr. 5.41.



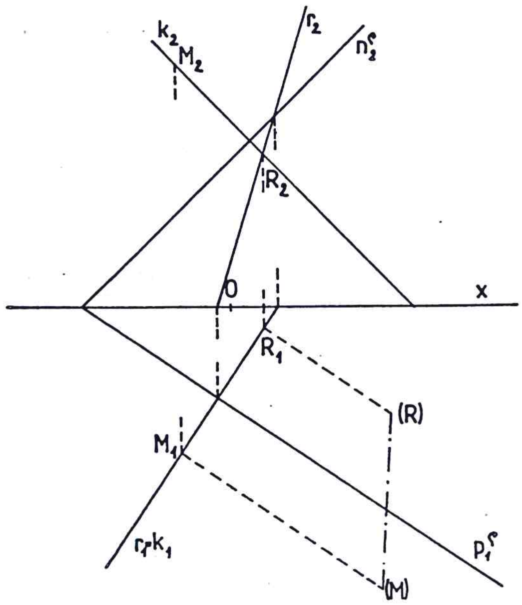
Obr. 5.42.

Ú l o h a 5.10. Určete vzdálenost bodu M od roviny $\varrho[M(-1;3;5), \varrho(-3;2;3)]$.

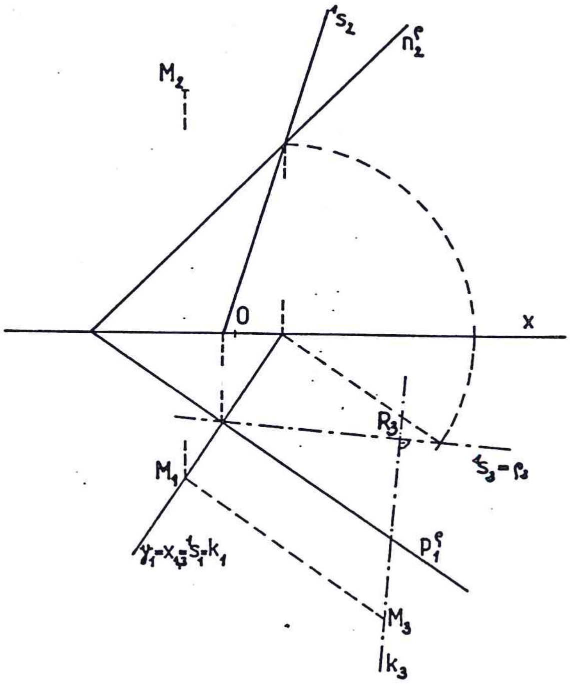
Ř e š e n í : Podle definice je vzdálenost bodu M od roviny ϱ rovna velikosti úsečky určené bodem M a patou R kolmice spuštěné z bodu M na rovinu ϱ. Pro sdružené průměty kolmice k rovině ϱ vedené bodem M platí $k_1 \perp p_1^\varrho, k_2 \perp n_2^\varrho$. Průsečík $R = k \cap \varrho$ sestrojíme pomocí krycí přímky r (úloha 5.7.) a skutečnou veliost úsečky MR určíme podle úlohy 5.8. (obr. 5.43.).

Úlohu je možné řešit také užitím třetí vedlejší průmětny γ, kterou vedeme např. bodem M kolmo k první stopě p^ϱ roviny ϱ. Pak je $\gamma_1 \perp p_1^\varrho$ a $x_{13} = \gamma_1$. Pravoúhlý průmět roviny ϱ do γ je přímka a proto také třetí průmět ϱ_3 roviny ϱ je přímka. K určení ϱ_3 stačí stanovit třetí průmět některé přímky ležící v ϱ, na obr. 5.44. je sestrojen třeí průmět ${}^1s_3$ spádové přímky ${}^1s = \gamma \cap \varrho$ (Konstrukce je provedena na obr. 5.10.b). Dále je sestrojen třetí průmět M_3 bodu M. Kolmice k_3 vedená bodem M_3 k přímce ϱ_3 je třetí průmět kolmice k vedené bodem M k rovině ϱ a $R_3 = \varrho_3 \cap k_3$ je třetí průmět průsečíku $R = \varrho \cap k$. Platí $|MR| = |M_3R_3|$.

Ú l o h a 5.11. Bodem M veďte rovinu ϱ kolmou k přímce $a = AB$ $[M(-1;1;3), A(0;2,5;4), B(3;1,5;2,5)]$.

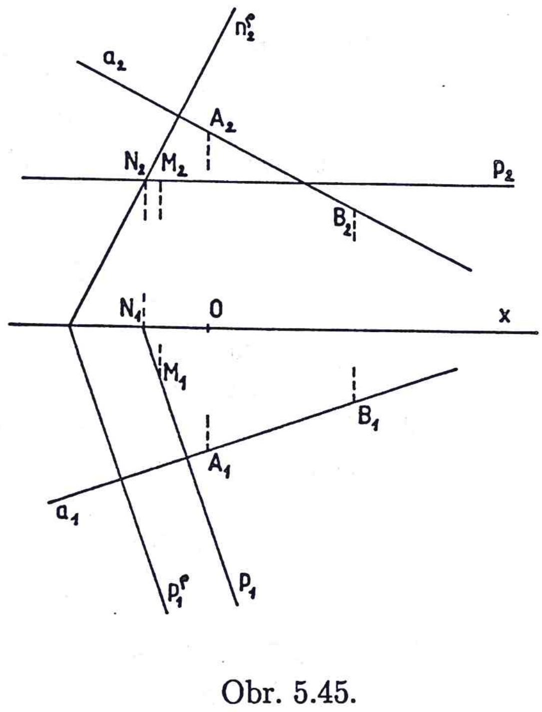


Obr. 5.43.



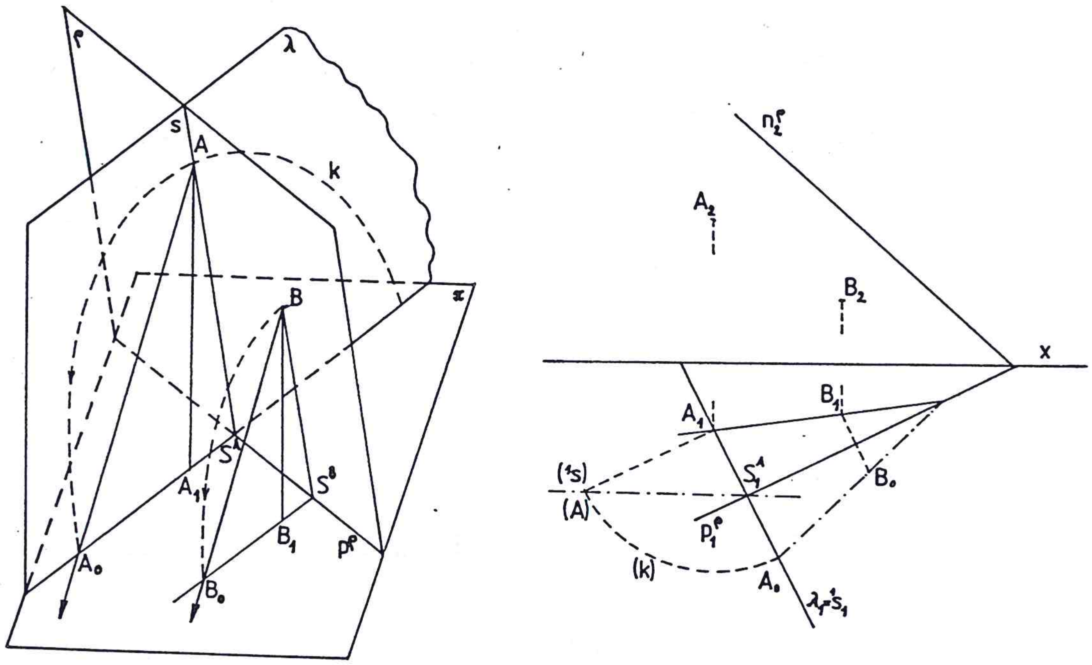
Obr. 5.44.

Ř e š e n í : Jestliže bodem M vedeme hlavní přímku p první osnovy roviny ϱ, pak je $p_1 \| a_1$ a $p_2 \| x$ (obr. 5.45.). Nárysným stopníkem N přímky p prochází nárysná stopa n^ϱ, která je kolmá na a_2. Současně je $p_1^\varrho \| p_1$.



Obr. 5.45.

Řešíme-li nějaké metrické úlohy v rovině nebo sestrojujeme-li geometrický útvar v rovině z daných podmínek, pak tuto *rovinu otáčíme do průmětny* nebo do polohy rovnoběžné s průmětnou. Je-li uvažovaná rovina promítací, pak její otáčení (sklápění) do příslušné průmětny realizujeme prostým přenášením souřadnic jednotlivých bodů (úlohy 5.8., 5.9.). Předpokládejme tedy, že rovina ϱ je v obecné poloze vzhledem k průmětnám. Otočíme ji např. do první průmětny kolem první stopy p^ϱ. Libovolný bod $A \in \varrho$ se otáčí po kružnici k ležící v rovině λ kolmé ke stopě p^ϱ. Přímka $s = \lambda \cap \varrho$ je spádovou přímkou první osnovy roviny ϱ a bod $S^A = p^\varrho \cap \lambda$ je středem kružnice k (obr. 5.46.a). Bod A přejde při otáčení do jednoho z průsečíků kružnice k s rovinou



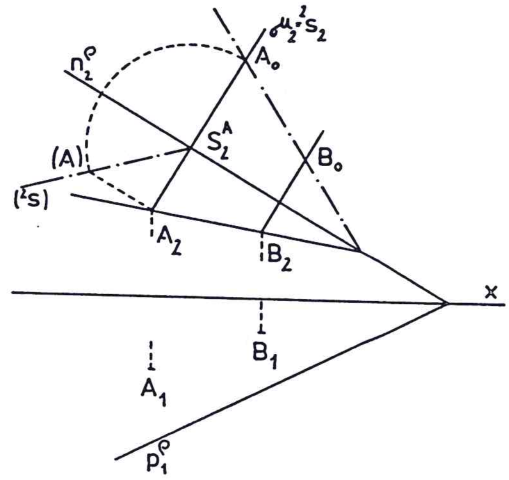
a) b)

Obr. 5.46.

π, např. do A_0. Volbou bodu A_0 je otočení roviny ϱ do π jednoznačně určeno. Zvolme v ϱ další bod B a otočme jej podle předchozího do bodu B_0. Z rovnoramenných trojúhelníků AS^AA_0, BS^BB_0 plyne pak $AA_0 \| BB_0$. Otočení roviny ϱ do π můžeme tedy nahradit promítnutím ϱ do π směrem s_{AA_0}. Tím dostáváme afinní zobrazení φ mezi rovinami ϱ, π o ose p^ϱ a směru s_{AA_0}. Pravoúhlým promítnutím zobrazení φ do roviny π obdržíme v π *pravoúhlou (osovou) afinitu* o ose p^ϱ, ve které $A_1 \longrightarrow A_0, B_1 \longrightarrow B_0$ atd. (viz kapitola 3.). Podobně otočením roviny ϱ kolem druhé stopy n^ϱ do nárysny dostáváme v nárysně pravoúhlou osovou afinitu o ose n^ϱ, ve které $A_2 \longrightarrow A0$ pro každý bod $A \in \varrho$. Platí tedy: První (druhé) průměty bodů roviny ϱ a obrazy těchto bodů v otočení roviny ϱ do $\pi(\nu)$ si odpovídají v pravoúhlé afinitě v $\pi(\nu)$ o ose $p^\varrho(n^\varrho)$.

Na obr. 5.46.b) je dána rovina ϱ stopami a v ní je zvolen bod A. Bod A

otočíme do π kolem stopy p^{ϱ} podle předchozího: Rovina otáčení λ bodu A je kolmá k π a její první průmět je přímka λ_1 kolmá k p_1^{ϱ}, přičemž $S_1^A = \lambda_1 \cap p_1^{\varrho}$ a ${}^1s_1 = \lambda_1$, kde ${}^1s = \lambda \cap \varrho$. Jestliže rovinu λ sklopíme do π, pak $({}^1s) = S_1^A(A)$ a $|S_1^A(A)|$ je poloměr kružnice k otáčení bodu A. Pomocí (k) pak určíme otočený bod A_0 (I když je A_0 první průmět otočeného bodu A, značíme jej bez indexu 1). Osou p_1^{ϱ} a dvojicí $A_1 \longrightarrow A0$ je jednoznačně určena afinita v rovině π a libovolný bod $B \in \varrho$ otočíme tak, že k bodu B_1 určíme odpovídající bod B_0 v této afinitě. Na obr. 5.47. je znázorněno otočení roviny ϱ do ν kolem stopy n^{ϱ}.



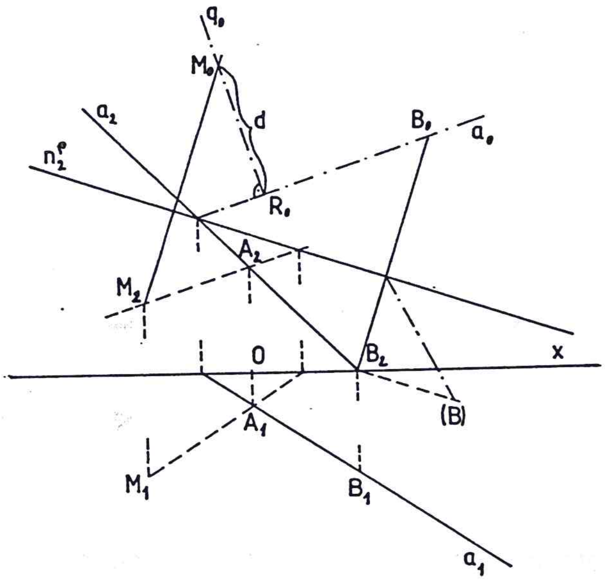
Obr. 5.47.

Ú l o h a 5.12. Určete vzdálenost bodu M od přímky $a = AB$ $[M(-3; 4; 2), A(0; 1; 3), B(3; 3; 0)]$.

Ř e š e n í : Bod M a přímka a určují rovinu ϱ. V rovině ϱ vedeme bodem M kolmici q k přímce a, její průsečík s a označíme R. Pak je $d = |MR|$. Jestliže zvolíme bod $A \in a$, pak přímka $m = MA$ leží v rovině ϱ a nárysná stopa n^{ϱ} je spojnice nárysných stopníků přímek a, m. Rovinu ϱ otočíme kolem stopy n^{ϱ} do nárysny. Nejdříve je otočen bod B do bodu B_0 pomocí afinity určené osou n_2^{ϱ} a dvojicí bodů $B_2 \longrightarrow B_0$ je sestrojena přímka a_0 a bod M_0. Vedeme-li bodem M_0 kolmici q_0 k a_0 a položíme $R_0 = q_0 \cap a_0$, pak $d = |M_0R_0|$.

Ú l o h a 5.13. Sestrojte čtverec v rovině ϱ, je-li dán jeho střed S a vrchol A $[\varrho(-4; 3; 2), S(2; 2; ?), A(4; 1,5; ?)]$.

Ř e š e n í : Rovinu ϱ otočíme kolem půdorysné stopy do π: Určíme osovou afinitu v π o ose p_1^{ϱ} pomocí $S_1 \longrightarrow S_0$ a v této afinitě sestrojíme obraz A_0 bodu A_1 (obr. 5.49.). V otočení sestrojíme čtverec $A_0B_0C_0D_0$ o středu S_0 a k němu určíme rovnoběžník $A_1B_1C_1D_1$ v afinitě o ose p_1^{ϱ}, ve které $S_0 \longrightarrow S_1$. $A_1B_1C_1D_1$ je půdorys daného čtverce, nárys určíme z podmínky $ABCD \subset \varrho$.



Obr. 5.48.

Obr. 5.49.

CVIČENÍ

1. Určete skutečnou velikost úsečky AB a odchylky přímky AB od průměten

   (a) $[A(2;3;4), B(-3;4;-2)]$,

   (b) $[A(2;2;4), B(2;4;2)]$,

   (c) $[A(-2;1;3), B(2;3;3)]$.

2. Na přímku $a = AB$ naneste od bodu A úsečku velikosti 2 $[A(1;4;3), B(-3;2;1)]$.

3. Stanovte odchylky roviny ϱ od průměten

   (a) $[\varrho(-2;3;\infty)]$,

   (b) $[\varrho(\infty;3;4)]$.

4. Sestrojte rovinu souměrnosti úsečky AB

   (a) $[A(-1;2;3), B(3;3;5)]$,

   (b) $[A(-3;2;1), B(0;2;4)]$,

   (c) $[A(2;2;4), B(2;4;2)]$.

5. Trojúhelník ABC promítněte pravoúle do roviny ϱ $[A(-3;3;3), B(1,5;1,5;5), C(2;6;3), \varrho(-3;3;4)]$.

6. Určete vzdálenost rovnoběžných rovin ϱ, σ $[\varrho(5;6;4), \sigma(2,5;3;2)]$.

7. Bodem A veďte rovinu ϱ kolmou k rovinám α, β $[A(0;2;3), \alpha(-3;-6;2), \beta(3;3;4)]$.

8. Na přímce $a = AB$ stanovte body, které mají od roviny ϱ vzdálenost 2 $[A(-3,5;1,5;3), B(0;5;8), \varrho(6;5;8)]$.

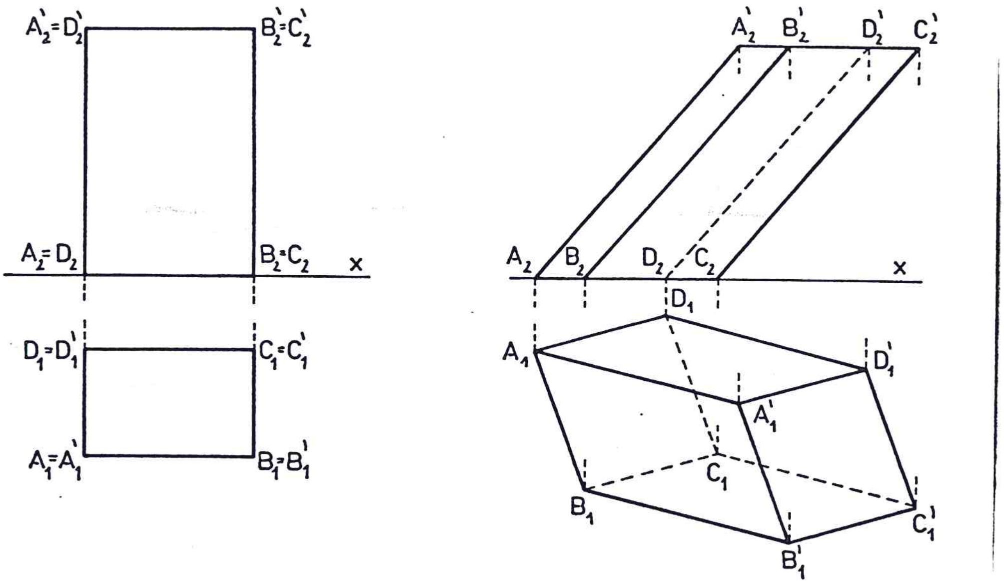
9. Sestrojte čtverec, je-li dán vrchol A a přímka $p = MN$, na které leží jeho úhlopříčka $[A(-1,5;3,5;2), M(2,5;3,5;3), N(-1;1;4,5)]$.

10. Zobrazte pravidelný pětiúhelník v rovině ϱ, jsou-li dány jeho sousední vrcholy A, B $[\varrho(3;3;-1,5), A(2;9,5;?), B(5;?;4,5)]$.

11. Určete odchylku přímky $p = MN$ od roviny ϱ $[M(-3;6;6), N(3;4,5;2,5), \varrho(-4;3;2,5)]$.

5.7. ZOBRAZENÍ JEDNODUCHÝCH TĚLES

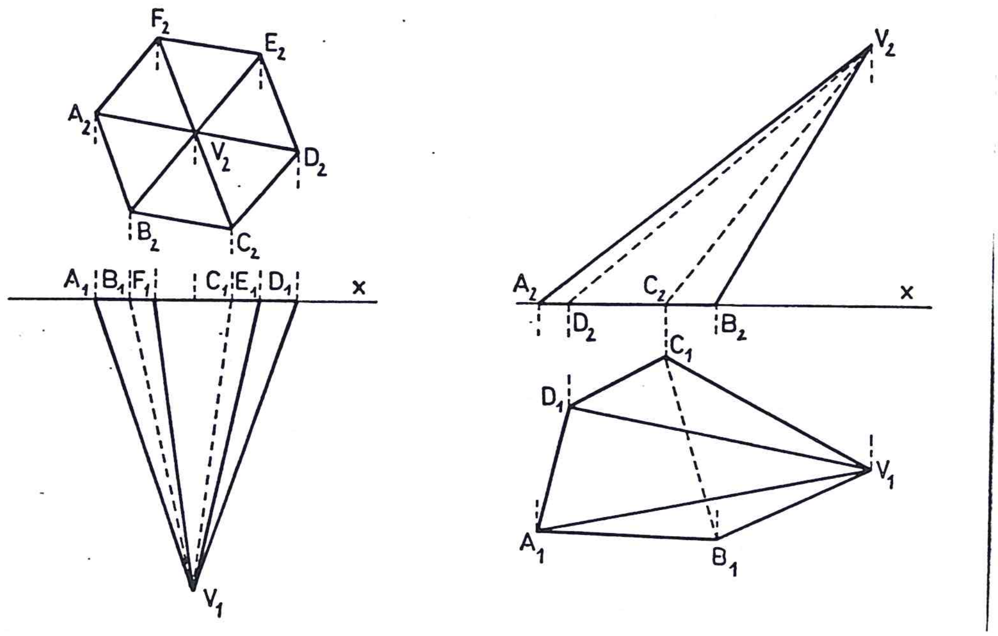
Prvním (druhým) průmětem jednoduchého tělesa (viz odst. 1.2.) v Mongeově zobrazení je množina prvních (druhých) průmětů všech bodů tohoto tělesa. Konstrukce sdružených průmětů jednoduchého tělesa je nejpohodlnější, je-li toto těleso v *základní poloze*, tj. je-li umístěno v prvním kvadrantu tak, že jedna jeho podstava leží v některé průmětně. Hranici prvního (druhého) průmětu tělesa nazýváme jeho *prvním (druhým) obrysem*.



a) b)

Obr. 5.50.

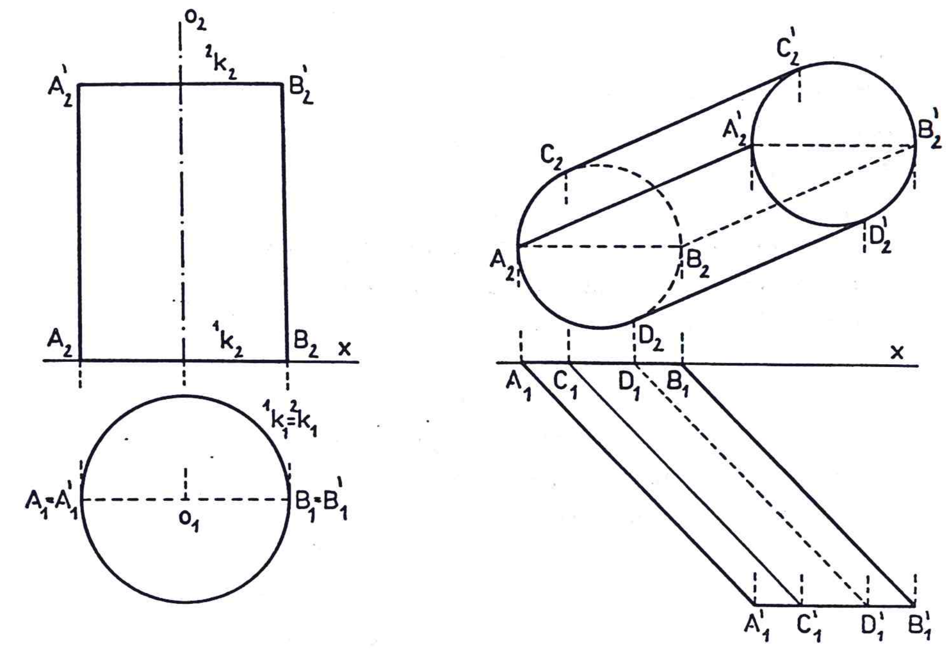
Pro určení sdružených průmětů jednoduchého hranatého tělesa stačí, jestliže určíme sdružené průměty všech jeho hran. Obrysy jednoduchých hranatých těles jsou mnohoúhelníky, jejichž strany jsou průměty některých bočních a podstavných hran tělesa. Pro zvýšení názornosti přitom vytahujeme viditelné hrany plně a neviditelné čárkovaně. Na obr. 5.50.a) je zobrazen kvádr s podstavou $ABCD$ v π, jehož stěna $AA'B'B$ je rovnoběžná s ν. Pak splývají první průměty obou podstav a druhé průmětny stěn ležících v rovinách rovnoběžných s ν. Na obr. 5.50.b) jsou sestrojeny sdružené průměty kosého čtyřbokého hranolu se čtvercovou podstavou v π. Protože horní podstava leží v rovině rovnoběžné s π, jsou první průměty obou podstav shodné čtverce a jejich druhé průměty jsou rovnoběžné úsečky téže velikosti, z nichž jedna leží na ose x. Viditelnost je určena podle části 5.5. Na obrázku 5.51.a) je zobrazen pravidelný šestiboký jehlan s podtavou v π a na obr. 5.51.b) čtyřboký jehaln s podstavou v π.



a) b)

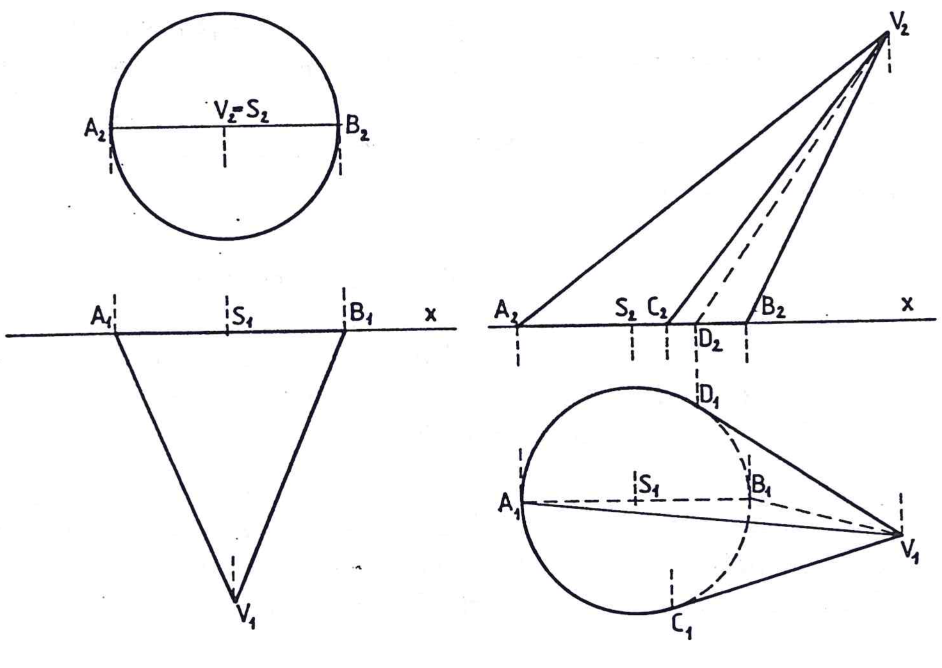
Obr. 5.51.

Obrysy válců a kuželů jsou ohraničeny částmi průmětů podstavných hran a průměty tzv. obrysových stran. Zobrazení válců a kuželů a konstrukci jejich obrysů ukážeme opět na příkladech: Leží-li podstava rotačního válce v π, pak půdorysy obou podstav splývají a prvním obrysem je kružnice. Nárysy podstav jsou úsečky a obrysové strany AA', BB' leží v rovině rovnoběžné s ν procházející osou o válce (obr. 5.52.a). Na obr. 5.52.b) jsou sestrojeny sdružené průměty nerotačního válce, jehož kruhová podstava leží v ν. Nárysy obou podstav jsou shodné kruhy. K druhému obrysu náležejí dva kruhové oblouky $C_2D_2, C_2'D_2'$ a úsečky C_2C_2', D_2D_2', které se dotýkají nárysů obou podstavných kružnic a jsou nárysem obrysových stran CC', DD' válce. Prvním obrysem válce



a) b)

Obr. 5.52.

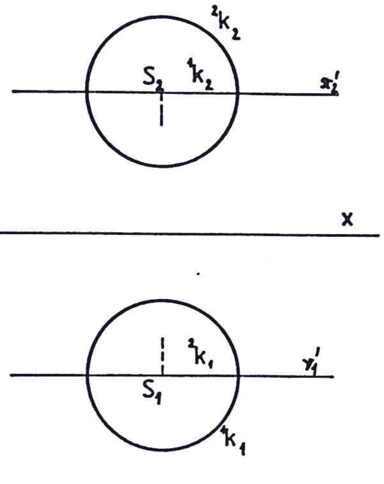


a) b)

Obr. 5.53.

je obvod rovnoběžníku, jehož dvě rovnoběžné strany $A_1B_1, A_1'B_1'$ jsou půdorysy obou podstav a druhé dvě A_1A_1', B_1B_1' jsou půdorysy obrysových stran AA', BB'. Na obrázku 5.53.a) je zobrazen rotační kužel s podstavou v ν a na obrázku 5.53.b) je zobrazen nerotační kužel s kruhovou podstavou v π. Podobně jako na obr. 5.52. jsou vyznačeny průměty obrysových stran.

Prvním i druhým obrysem koule jsou kružnice. První (druhý) obrys ${}^1k_1$ (${}^2k_2$) je půdorysem (nárysem) hlavní kružnice ${}^1k$ (${}^2k$) ležící v rovině $\pi'(\nu')$ rovnoběžné s $\pi(\nu)$ (obr. 5.54.).



Obr. 5.54.

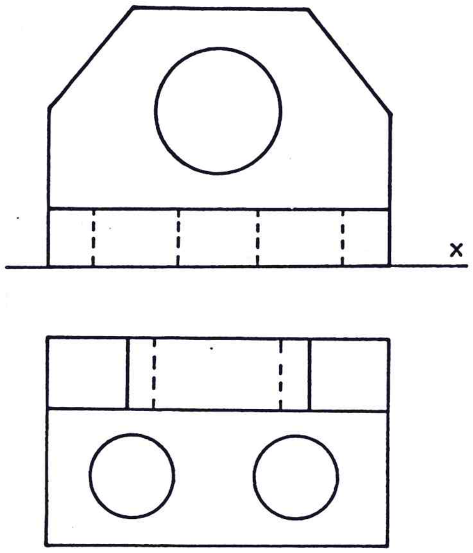
V praxi se často vyskytují tělesa složená z jednoduchých těles nebo z jejich částí. Na obr. 5.55. jsou např. znázorněny sdružené průměty tělesa složeného z hranolů s kruhovými otvory a na obr. 5.56. je zobrazeno těleso složené ze dvou souosých rotačních válců, z nichž jeden má čtyři vybrání. Dbáme na to, aby v každém průmětu byly vyznačeny všechny hrany vyskytující se na tělese, přičemž viditelné vytahujeme silně a neviditelné čárkovaně.

Sdružené průměty neposkytují vždy dostatečnou představu o daném tělese a dokonce jimi nemusí být toto těleso jednoznačně určeno. Proto často zavádíme ještě třetí hlavní průmětnu a sdružené průměty tělesa doplňujeme o jeho třetí průmět – bokorys, popřípadě ještě připojujeme obraz tělesa ve volném rovnoběžném promítání. Na obr. 5.57. je zobrazen půdorys, nárys a bokorys vodítka a jeho obraz ve volném rovnoběžném promítání. Na obr. 5.58. je provedeno totéž pro křížový závěs.

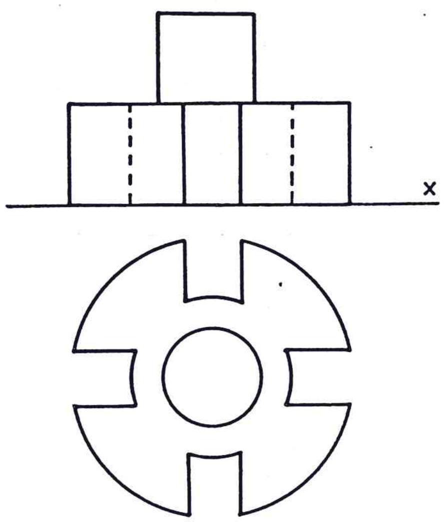
Zobrazování složitějších těles – strojních součástí – tvoří důležitou součást tzv. technického kreslení. Při kreslení technických výkresů se však kromě zásad deskriptivní geometrie uplatňují i požadavky praxe. Proto se zavádí různé druhy normalizace, předepisuje se druh materiálu, jakost povrchu, přípustná tolerance apod. Touto problematikou se však nebudeme zabývat.

Na závěr odstavce ukážeme aspoň na jednom příkladě, jak se sestrojují sdružené průměty tělesa, které není v základní poloze. Úlohy tohoto typu jsou vhodné na procvičení základních úloh, uvedených v předcházejících odstavcích.

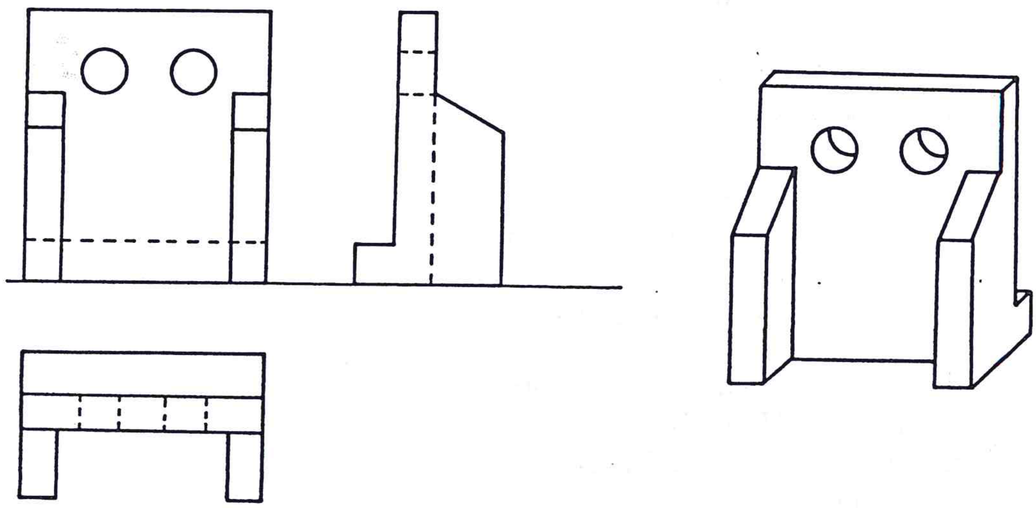
Ú l o h a 5.14. Zobrazte pravidelný čtyřboký jehlan, je-li dána jeho osa $o = VP$, hlavní vrchol V a vrchol A podstavy $[V(2;4;5), P(-2;1;0), A(-2;4;3,5)]$.



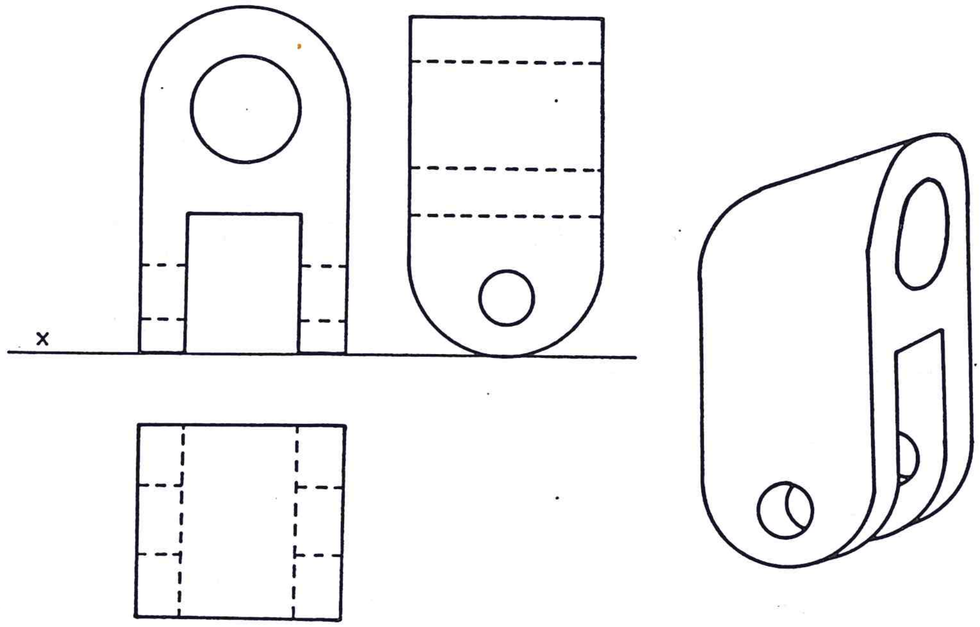
Obr. 5.55.



Obr. 5.56.



Obr. 5.57.



Obr. 5.58.

Ř e š e n í : Rovina ϱ kolmá k přímce o vedená bodem A je rovinou podstavy a průsečík $S = \varrho \cap o$ je střed podstavy. V rovině ϱ sestrojíme čtverec o středu S a vrcholu A. Podstavou a vrcholem V je daný jehlan určen. Konstrukce je provedena na obr. 5.59.: Stopy roviny ϱ určíme podle úlohy 5.11., bod S podle úlohy 5.7. Rovinu ϱ otočíme do půdorysny a sdružené průměty čtverce $ABCD$ podstavy sestrojíme podle úlohy 5.13. Viditelnost hran jehlanu určíme v obou průmětech podle části 5.

Obr. 5.59.

CVIČENÍ

1. Zobrazte kvádr s podstavou $ABCD$ v π, je-li jeho výška v $[A(-2; 3,5; 0), B(0; 1,5; 0), C(4; 4; 0), v = 6]$.

2. Sestrojte sdružené průměty šestibokého hranolu s podstavou v ν. Jeho podstavou je pravidelný šestiúhleník o středu S a vrcholu A, výška hranolu je $v = 5$. Boční hrany jsou rovnoběžné s π a jejich velikost je 8 $[S(-2; 0; 3), A(-4; 0; 2)]$.

3. Zobrazte pravidelný čtyřboký jehlan s podstavou v π, je-li dán střed S, vrchol A podstavy a velikost boční hrany b $[S(0; 4; 0), A(-1; 1,5; 0), b = 6]$.

4. Zobrazte válec s kruhovou podstavou $k = (S, r)$ v π, jehož strany jsou rovnoběžné s ν, je-li dán bod M druhé podstavné hrany $[S(-3; 4; 0), r = 3, M(4; 5,5; 6)]$.

5. Zobrazte rotační válec s podstavou v π, je-li dán střed S této podstavy, výška v a tečná rovina τ válce $[S(0; 4; 0), v = 6, \tau(6; 8; ?)]$.

6. Zobrazte kouli, je-li dán střed S a bod M jejího povrchu $[S(0; 4; 5), M(2; 3; 3)]$.

7. Zobrazte pravidelný šestiboký jehlan, jehož vrchol leží v ν a podstava v rovině $\varrho = SMP$. Bod S je středem podstavy a na přímce MP leží hrana podstavy $[S(0; 3; 3,5), M(0; 5,5; 6,5), P(-4; 1,5; 0)]$.

8. Sestrojte krychli, je-li dán její vrchol A a přímka $p = KL$, na níž leží hrana krychle, která je s bodem A v téže stěně. Zobrazte to řešení, pro něž je A nejnižším vrcholem vzhledem k π $[A(1; 3; 1,5), K(4; 4,5; 1), L(1; 5,5; 3,5)]$.

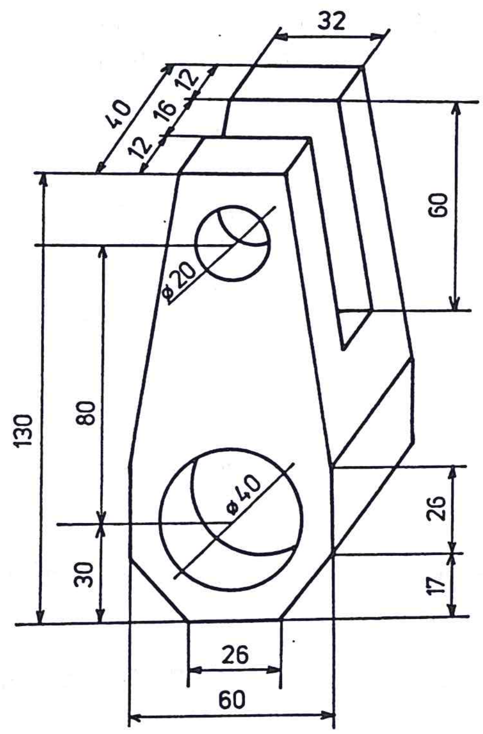
9. Zobrazte rotační kužel, který vznikne rotací trojúhleníku ABC kolem jeho strany BC $[A(-3; 6; 0), B(0; 4; 0), C(0; 4; 6)]$.

10. Sestrojte bokorysy těles zobrazených na obrázcích 5.55., 5.56. a jejich obrazy ve volném rovnoběžném promítání.

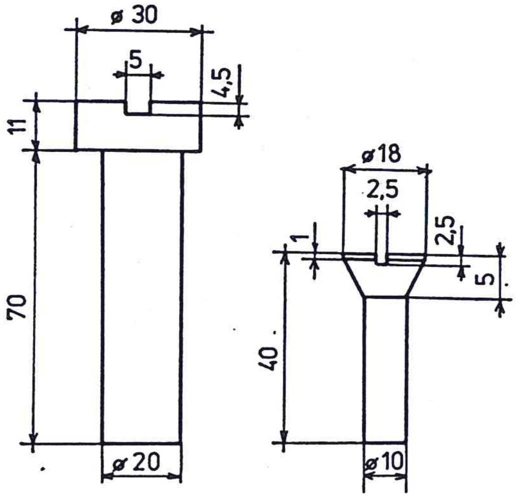
11. V měřítku 1 : 1 sestrojte sdružené průměty a bokorys vidlové páky zobrazené ve volném rovnoběžném promítání (těleso je okótováno obvyklým způsobem - obr. 5.60.).

12. Ve volném rovnoběžném promítání zobrazte šrouby, které jsou schematicky zobrazeny na obr. 5.61.

13. Na obr. 5.62. je dán nárys a bokorys součástky. Sestrojte její půdorys a zobrazte ji ve volném rovnoběžném promítání.



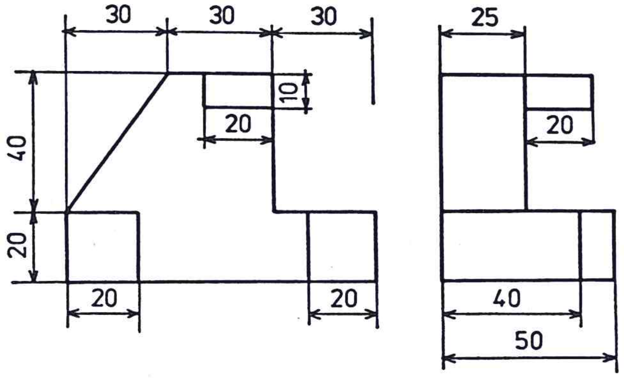
Obr. 5.60.



Obr. 5.61.

5.8. ŘEZ HRANOLU A JEHLANU ROVINOU, SÍTĚ

Řez jednoduchého tělesa rovinou je množina společných bodů obou útvarů. U hranatých těles je obecně řezem mnohoúhleník, jehož strany leží ve stěnách resp. v podstavě tělesa a vrcholy leží na jeho hranách. Při konstrukci řezu tělesa rovinou používáme tedy dvou základních úloh – určení průsečnice dvou rovin a průsečíku přímky s rovinou, které podle potřeby kombinujeme (Řezem hranatého tělesa rovinou může být také prázdná množina, vrchol, stěna apod., ale tyto případy nejsou konstrukčně zajímavé).

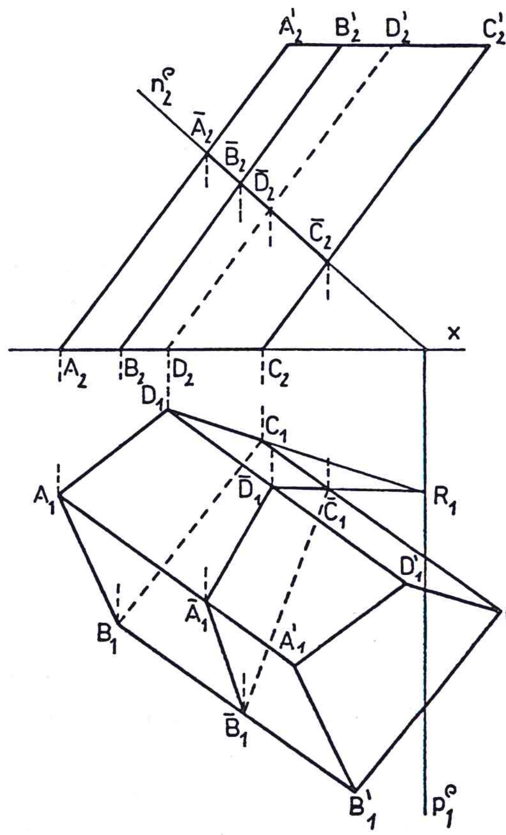


Obr. 5.62.

Ú l o h a 5.15. Sestrojte řez čtyřbokého hranolu, jehož podstava leží v π rovinou $\varrho \perp \nu$.

Ř e š e n í : Na obr. 5.63. je rovina ϱ zvolena tak, že protíná hranol ve čtyřúhelníku. Nárysem tohoto čtyřúhelníku je úsečka, jeho půdorys určíme pomocí průsečíků jednotlivých hran daného hranolu s rovinou ϱ.

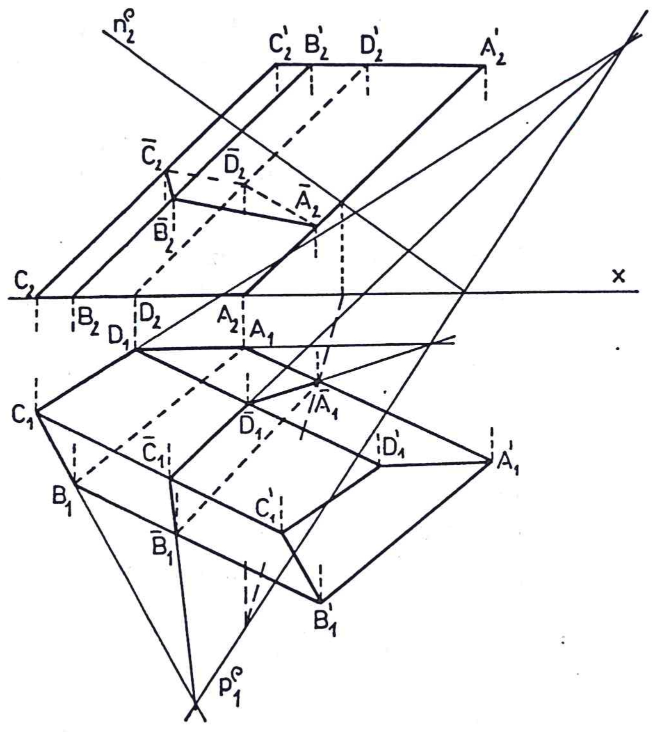
Rovinami π, ϱ a směrem $s_{AA'}$ je určena prostorová afinita o ose p^{ϱ}, ve které čtyřúhelníku podstavy $ABCD$ odpovídá čtyřúhelník $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ řezu. Pravoúhlým průmětem této afinity do π je afinita v π o ose p_1^{ϱ}, ve které čtyřúhelníku $A_1B_1C_1D_1$ odpovídá čtyřúhelník $\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{C}_1\bar{D}_1$. Přímky, které si v této afinitě odpovídají, se protínají na ose p_1^{ϱ} (na obr. 5.63. je např. $R_1 = C_1D_1 \cap \bar{C}_1\bar{D}_1 \in p_1^{\varrho}$). Uvedených vztahů používáme při konstrukci řezu hranolu rovinou, která není kolmá k žádné průmětně.



Obr. 5.63.

Ú l o h a 5.16. Sestrojte řez čtyřbokého hranolu, jehož podstava leží v π rovinou ϱ.

Ř e š e n í : Rovina ϱ je zvolena tak, že není kolmá k žádné průmětně (obr. 5.64.). Průsečík $\bar{A}$ přímky AA' s rovinou ϱ leží na hraně AA' a je tedy vrcholem řezu. Osou p_1^ϱ a dvojicí $A_1 \longrightarrow \bar{A}_1$ je určena afinita v π. Čtyřúhelník $\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{C}_1\bar{D}_1$ odpovídající v této afinitě čtyřúhelníku $A_1B_1C_1D_1$ je půdorysem řezu roviny ϱ s daným hranolem. Nárys sestrojíme pomocí ordinál.



Obr. 5.64.

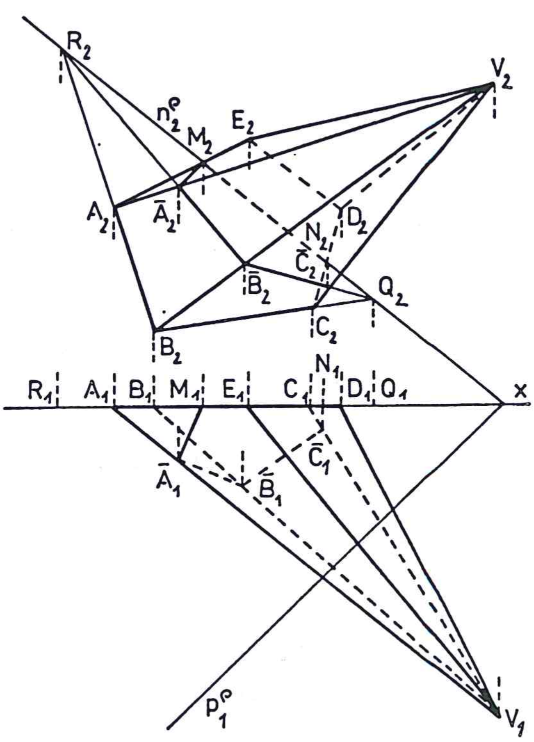
Ú l o h a 5.17. Sestrojte řez pětibokého jehlanu s podstavou v ν rovinou ϱ.

Ř e š e n í : Na obrázku 5.65. je rovina ϱ zvolena tak, že její nárysná stopa n^ϱ protíná obvod pětiúhelníku $ABCDE$ podstavy v bodech $M \in AE, N \in CD$. Tyto body – průsečíky hran AE, CD podstavy jehlanu s rovinou ϱ – jsou vrcholy mnohoúhelníku řezu. Jeho ostatní vrcholy je možné určit např. jako průsečíky hran AV, BV, CV s rovinou ϱ (Průsečíky přímek VE, VD s rovinou ϱ neleží na hranách VE, VD jehlanu a proto tyto hrany rovinu ϱ neprotínají). Abychom se vyhnuli opakování konstrukce průsečíků přímek s rovinami, postupujeme zpravidla takto: Určíme průsečík jedné hrany jehlanu s rovinou ϱ např. $\bar{A} = AV \cap \varrho$ a uvažujeme roviny $\nu, \varrho, \xi = ABV$.Pak platí $\nu \cap \varrho = n^\varrho, \nu \cap \xi = AB, \bar{A} \in \varrho \cap \xi$. Jestliže označíme $R = n^\varrho \cap AB$, pak ze vzájemné polohy rovin ν, ϱ, ξ dostáváme, že bodem R prochází průsečnice r rovin $\varrho \cap \xi$ a z toho pak plyne $r = R\bar{A}$. Bod $\bar{B} = BV \cap r$ je pak vrcholem mnohoúhelníku řezu. Jestliže uvedený způsob aplikujeme na roviny ν, ϱ, BCV, dostáváme $Q = BC \cap n^\varrho, \bar{C} = \bar{B}Q \cap CV$, kde $\bar{C}$ je další vrchol hledaného mnohoúhelníku.

Ú l o h a 5.18. Sestrojte síť kosého čtyřbokého hranolu s obdélníkovou podstavou v π.

Ř e š e n í : Předpokládejme pro jednoduchost, že boční hrany hranolu jsou rov –

noběžné s nárysnou (obr. 5.66.a). Vedeme rovinu ϱ kolmou k bočním hranám tak, aby protínala hranol v rovnoběžníku $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$, který nazýváme normálním řezem. Protože je rovina ϱ kolmá k nárysně, sestrojíme půdorys normálního řezu podle úlohy 5.15. Rovinu ϱ pak otočíme kolem půdorysné stopy p^{ϱ} do π buď podle obrázku 5.46.b) nebo užitím nárysu roviny ϱ, jak je zřejmé z obrázku 5.66.a). Normální řez $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ přejde v tomto otočení v rovnoběžník $\bar{A}_0\bar{B}_0\bar{C}_0\bar{D}_0$. Nyní již můžeme v nákresně sestrojit síť daného hranolu: Boční hrany jsou zřejmě v rozvinutí navzájem rovnoběžné. Protože všechny strany normálního řezu jsou kolmé k bočním hranám, přejde v rozvinutí obvod normálního řezu v úsečku. V nákresně tedy zvolíme přímku p a na ni přeneseme obvod normálního řezu, který určíme pomocí rovnoběžníku $\bar{A}_0\bar{B}_0\bar{C}_0\bar{D}_0$ (Útvary v rozvinutí značíme stejnými symboly jako odpovídající útvary v prostoru). Boční hrany jsou pak v rozvinutí kolmé k přímce p. Skutečné velikosti úseček na bočních hranách, nanášených od bodů $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$, zjistíme přímo z druhého průmětu hranolu. K rozvinutému plášti připojíme ještě obdélníkové podstavy, které se v prvním průmětu jeví ve skutečné velikosti.

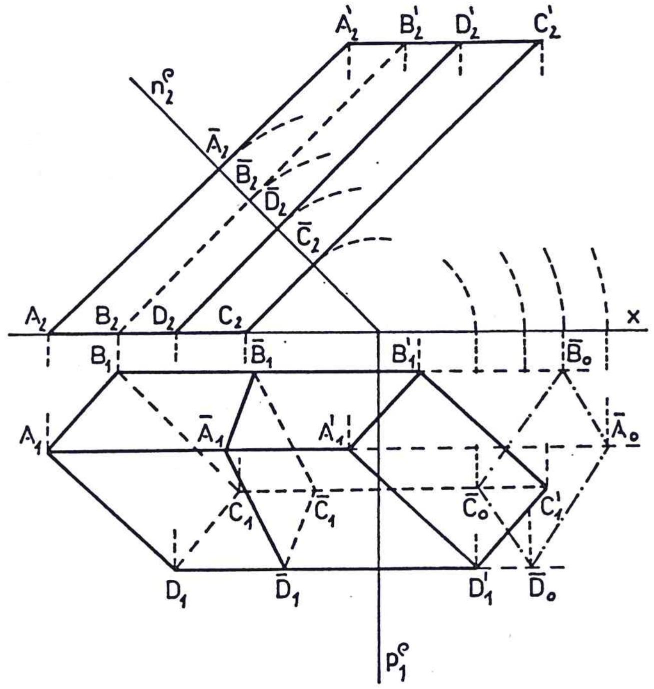


Obr. 5.65.

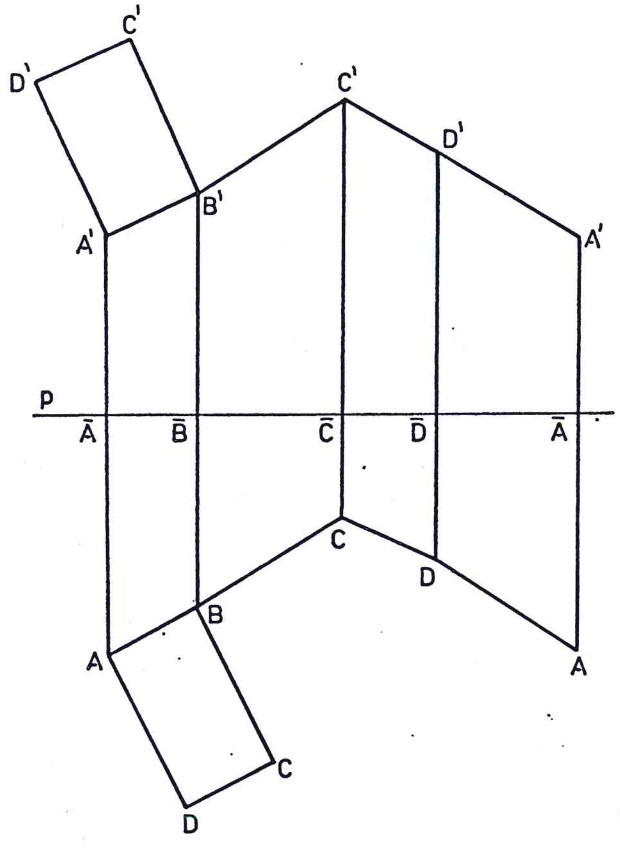
Ú l o h a 5.19. Sestrojte síť čtyřbokého jehlanu s podstavou v π.

Ř e š e n í : Určíme skutečné velikosti bočních hran jehlanu npř. otočením kolem přímky o kolmé k π a procházející hlavním vrcholem V jehlanu do roviny $\nu' \| \nu$ obsahující přímku o (obr. 5.67.a). Protože se první průmět podstavy jeví ve skutečné velikosti, můžeme již sestrojit trojúhelníky ABV, BCV, CDV, DAV bočních stěn ve skutečné velikosti z jejich stran. Tím obdržíme rozvinutý plášť tělesa (obr. 5.67.b) a k němu připojíme podstavu $ABCD$.

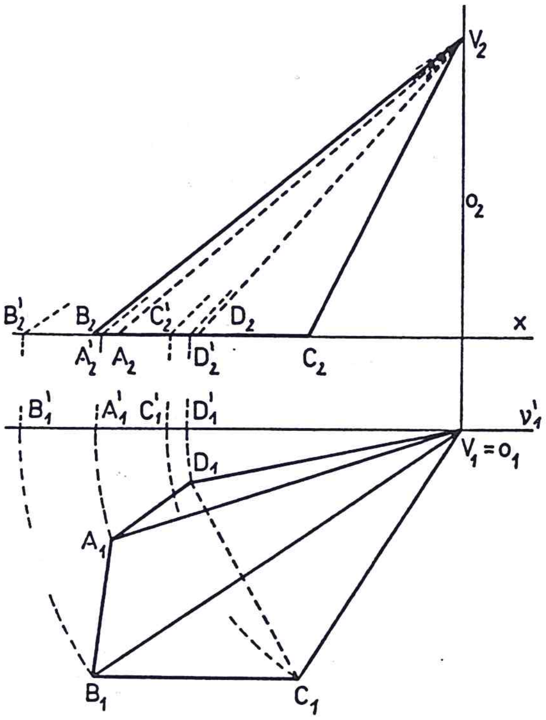
Je-li jehlan kolmý, pak jeho boční hrany mají stejnou velikost a vrcholy podstavy leží v rozvinutí na kružnici se středem V o poloměru $|AV|$.



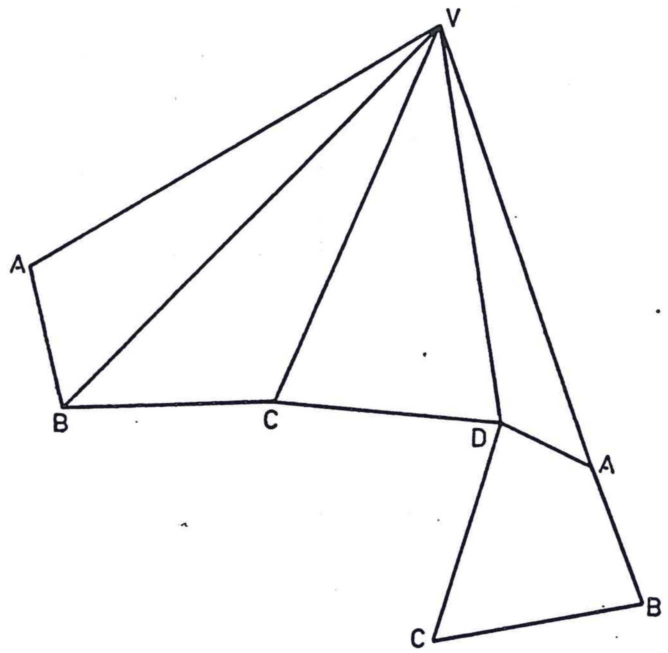
Obr. 5.66. a)



Obr. 5.66. b)



Obr. 5.67. b)



Obr. 5.67. b)

CVIČENÍ

1. Sestrojte řez pravidelného šestibokého jehalanu rovinou ϱ. Podstava jehlanu leží v ν a je dána středem S a vrcholem A, výška jehlanu je v. Sestrojte síť obou částí jehalnu určených řezem $[S(0;0;2), A(2;0;2), v = 7, \varrho(7;5;10)]$.

2. Sestrojte síť kosého čtyřbokého hranolu se čtvercovou podstavou v π, která je dána středem S a vrcholem A, jestliže druhá podstava más třed S' $[S(3;3;0), A(2;0,5;0), S'(-1;6;6)]$.

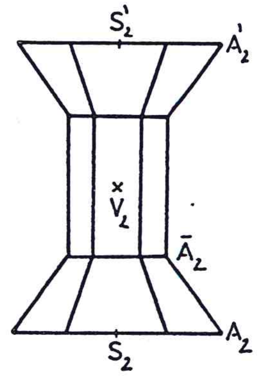
3. Pravidelný šestiboký jehlan s podstavou v π protněte rovinou ϱ a sestrojte skutečnou velikost řezu. Podstava je dána středem S a vrcholem A, v je výška jehalnu $[S(0;5;0), A(2;1;0), v = 8, \varrho(\infty;11;6)]$.

4. Krychli, jejíž stěna $ABCD$ leží v π a protější stěna je $EFGH$, protněte rovinou procházející středy hran AE, BC, GH. Sestrojte síť dolní části krychle ohraničené řezem $[C(3;2,5;0), D(-3;0,5;0)]$.

5. Čtyřboký jehlan s podstavou $ABCD$ v π o hlavním vrcholu V protněte rovinou kolmou k nejdelší boční hraně a procházející vrcholem podstavy, který je k této hraně protilehlý $[A(-3,5;3;0), B(0;1,5;0), C(3,5;4;0), D(-2;10;0), V(1;3,5;8)]$.

6. Kolmý trojboký hranol s podstavou ABC v π, o výšce v protněte rovinou ϱ a určete síť seříznuté části $[A(-5,5;1;0), B(-3,5;6;0), C(-1;2;0), v = 8, \varrho(5,5;4,5;4)]$.

7. Je dána skupina souosých těles skládající se ze dvou pravidelných šestibokých jehlanů a pravidelného hranolu, jejíž nárys je nakreslen na obrázku 5.68. Jehlany mají společný hlavní vrchol V, body S, S' jsou středy a A, A' vrcholy podstav. Vrchol $\bar{A}$ hranolu leží na $\bar{A}V$. Sestrojte síť dané skupiny těles $[S(0;5;0), A(3;5;0), V(0;5;4), S'(0;5;8), A'(3;5;8), \bar{A}(1,5;5;?)]$.

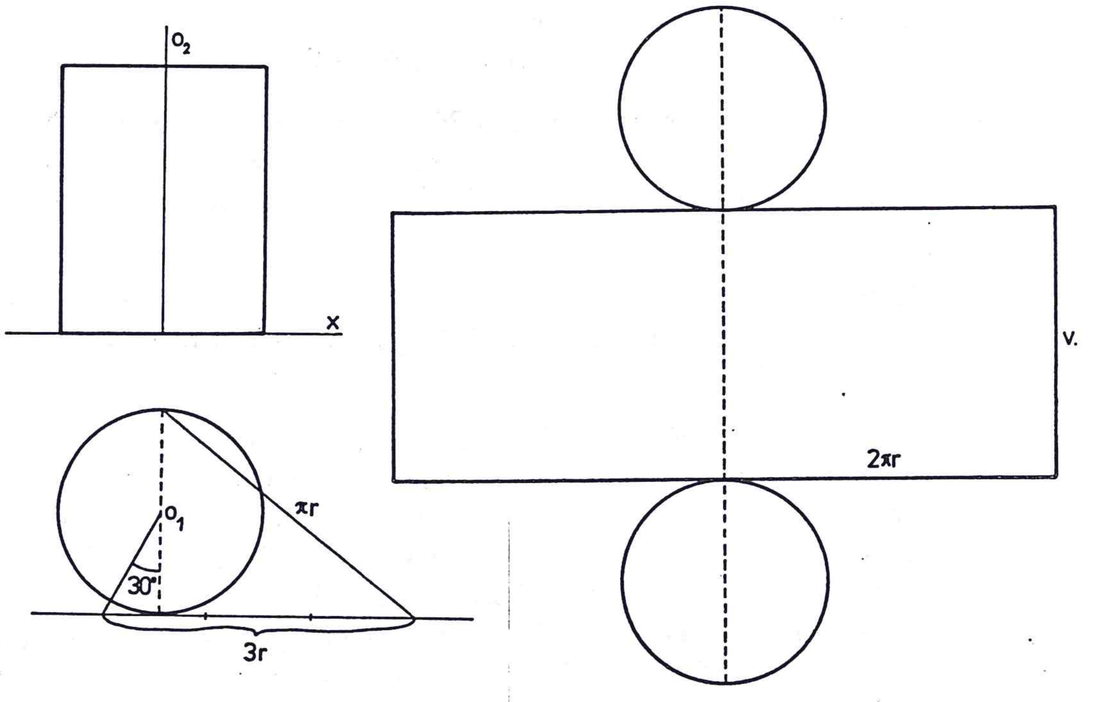


Obr. 5.68.

5.9. ÚLOHY O OBLÝCH TĚLESECH

Ú l o h a 5.20. Sestrojte síť rotačního válce.

Ř e š e n í : Na obrázku 5.69.a) je zobrazen rotační válec v základní poloze, jeho podstava ležící v π má poloměr r a výška je v. Rozvinutým pláštěm válce je obdélník, jehož strany mají velikosti v a $2\pi r$ (obr. 5.69.b). Přitom úsečku velikosti $2\pi r$ můžeme sestrojit jen přibližně, např. pomocí Kochaňského rektifikace (obr. 5.69.a). K plášti připojíme ještě podstavy válce (obr. 5.69.b).

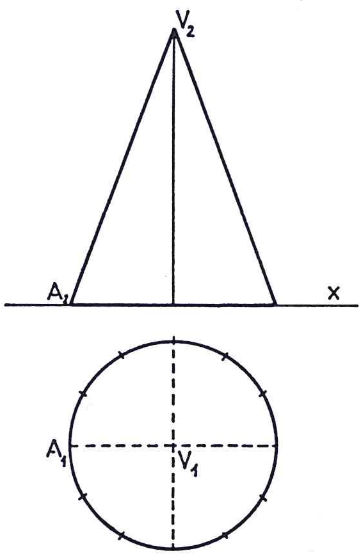


a) b)

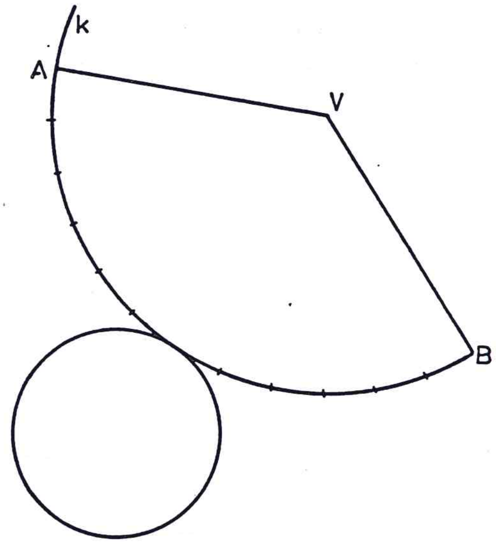
Obr. 5.69.

Ú l o h a 5.21. Sestrojte síť rotačního kužele.

Ř e š e n í : Všechny strany rotačního kužele mají stejnou velikost a procházejí bodem V. Rozvinutým pláštěm kužele je tedy kruhová výseč. Na obrázku 5.70.a) je zobrazen rotační kužel v základní poloze, jehož podstava má poloměr r. Strana AV kužele, ležící v rovině rovnoběžné s ν, se v nárysu jeví ve skutečné velikosti. Na obrázku 5.70.b) je zvolen bod V, z bodu V je



a)



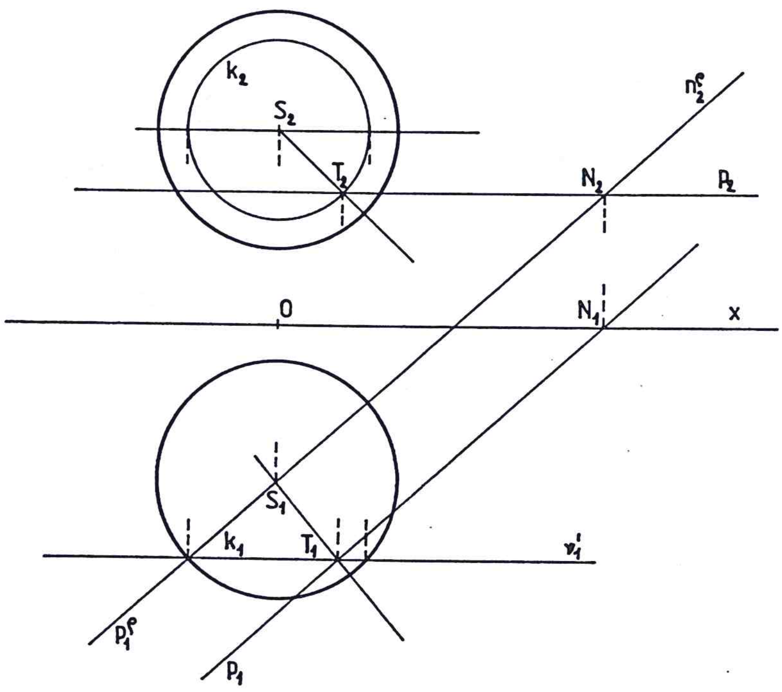
b)

Obr. 5.70.

opsána kružnice k o poloměru $|A_2V_2| = |AV|$ a na k je zvolen bod A. Od bodu A je na k nanesen oblouk veliosti $2\pi r$, který určíme přibližnou konstrukcí tak, že hranu podstavy kužele rozdělíme např. na 12 shodných oblouků a příslušné tětivy přenášíme od bodu A na kružnici k. Jestrliže druhý koncový bod takto získaného oblouku označíme B, pak plášť kužele v rozvinutí je kruhová výseč ohraničená kružnicí k a poloměry AV, BV. K plášti připojíme podstavu kužele. Přesnost konstrukce oblouku AB na kružnici k závisí na počtu stran pravidelného n-úhelníku vepsaného hraně podstavy.

Ú l o h a 5.22. Zobrazte kouli, která je dána středem S a poloměrem r, na jejím povrchu určete bod T a sestrojte v něm tečnou rovinu koule $[S(0;4;5), r = 3, T(1,5;6;?)]$.

Ř e š e n í : Prvním i druhým obrysem koule jsou kružnice o poloměru r. Rovina $\nu' \| \nu$ vedená bodem T protíná povrch koule v kružnici k. Prvním průmětem této kružnice je úsečka, jejíž velikost je rovna průměru kružnice k a nárysem je kružnice k_2 shodná s k (obr. 5.71). Bod T není jedoznačně určen, protože za jeho druhý průmět můžeme považovat každý z průsečíků ordinály bodu T_1 s kružnicí k_2. Na obr. 5.71. je zvolen ten z průsečíků, který má menší vzdálenost od π. Tečná rovina ϱ v bodě T je kolmá k přímce ST, její stopy jsou sestrojeny pomocí hlavní přímky p první osnovy podle úlohy 5.11.



Obr. 5.71.