**Množiny bodů dané vlastnosti**

**Def.** Množina všech bodů dané vlastnosti je množina bodů v rovině, která splňuje tyto dva požadavky:

1. každý bod množiny má danou vlastnost,
2. každý bod roviny, který má danou vlastnost, patří do množiny .

Základní množiny bodů dané vlastnosti:

1. Množina všech bodů, které mají od daného pevného bodu danou vzdálenost , je **kružnice .**
2. Množina všech bodů, které mají od dané přímky danou vzdálenost , jsou dvě přímky rovnoběžné s danou přímkou a ležící v opačných polorovinách vyťatých přímkou ve vzdálenosti od ní.



1. Množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou daných různých bodů je **osa úsečky** .

****

1. Množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou daných rovnoběžek je **osa pásu** jimi omezeného.

****

1. Množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou daných různoběžek jsou **osy úhlů** sevřeného přímkami .

****

1. Množina všech bodů, které jsou vrcholy úhlů shodných s daným úhlem a jejichž ramena procházejí dvěma danými body, neboli množina všech bodů , z nichž vidíme danou úsečku pod daným úhlem , jsou dva shodné kruhové oblouky souměrně sdružené podle přímky , přičemž body a platí pro ně .

****

1. Množina všech vrcholů pravých úhlů, jejichž ramena procházejí dvěma danými body , neboli množina všech bodů , z nichž vidíme danou úsečku pod úhlem 90, je kružnice sestrojená nad průměrem s výjimkou bodů , tzv. **Thaletova kružnice**.

****

1. Množina všech středů kružnic, které se dotýkají dané přímky v jejím daném bodě , je přímka kolmá k přímce a procházející bodem výjimkou bodu .

****

1. Množina všech středů kružnic, které se dotýkají dané kružnice v jejím daném bodě , je přímka bez svých bodů .

****

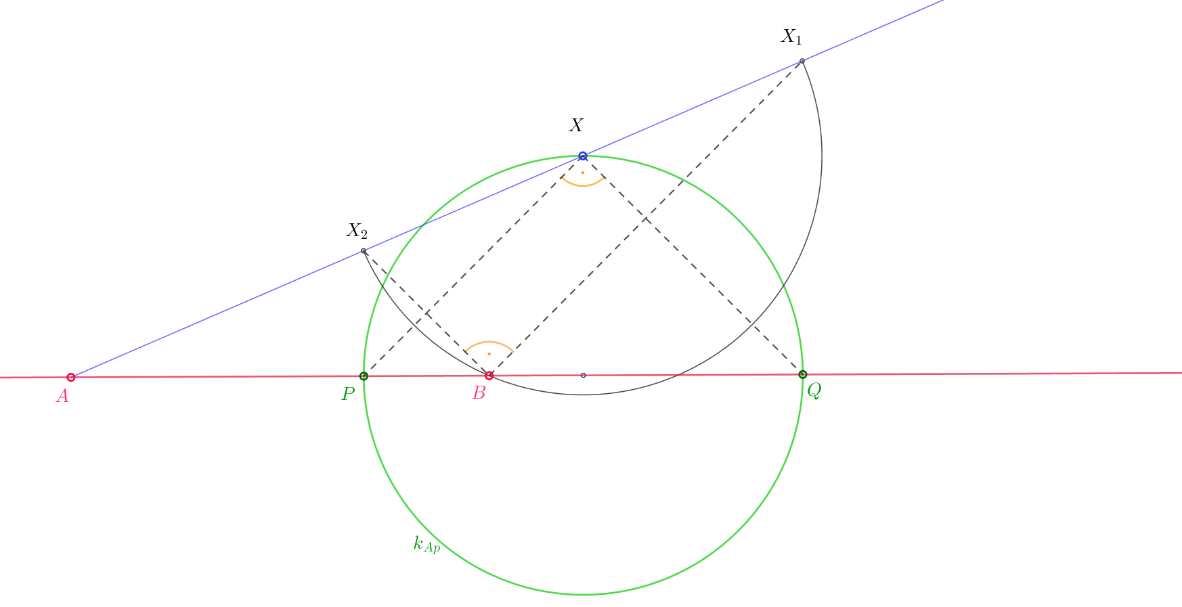
1. Množina všech středů tětiv dané kružnice, které mají společný jeden krajní bod , je kružnice sestrojená nad průměrem s výjimkou bodu .

****

1. Množina všech bodů , jejichž vzdálenosti od dvou daných různých bodů jsou v daném poměru , tj. , je tzv. **Apolloniova kružnice**, jejíž průměr leží na přímce a má krajní body , pro které platí .

****

* Důkaz:



Nechť jsou dva různé body a je reálné číslo takové, že. Pro , kde je dělicí poměr s absolutní hodnotou, určíme na přímce body . Body zřejmě patří do této množiny bodů, tedy leží na Apolloniově kružnici.

1. Nechť je libovolný bod, pro který platí . Ukážeme, platí-li pro bod : , potom bod leží na Apolloniově kružnici sestrojené nad průměrem . Označme průsečík přímky s rovnoběžkou vedenou bodem s  a průsečík přímky s rovnoběžkou vedenou bodem s . Z podobnosti trojúhelníků a plyne , takže . Podle předpokladu platí , proto musí být . Dále z podobnosti trojúhelníků a plyne , takže . Podle předpokladu platí , proto musí být . Dokázali jsme, že , což znamená, že kružnice sestrojená nad průměrem prochází bodem . Podle Thaletovy věty je kolmé na . Poněvadž a , tak z toho vyplývá, že , tedy bod leží na kružnici sestrojené nad průměrem .
2. Obráceně: Nechť bod je libovolný bod Apolloniovy kružnice nad průměrem , který neleží na přímce , proto platí . Jsou-li průsečík přímky s rovnoběžkami vedenými bodem s  a jsou trojúhelníky a a trojúhelníky a podobné, takže platí a , tedy . To znamená , tedy bod X je středem kružnice sestrojené nad průměrem . Z předpokladu a vzhledem k tomu, že a , tak z toho plyne, že . Podle Thaletovy věty leží bod na kružnici sestrojené nad průměrem, takže . Ze vztahu dosazením dostáváme . Tím jsme dokázali, že pro každý bod Apolloniovy kružnice platí vztah .▪