**Mocnost bodu ke kružnici**

**Def.** Nechť je dána kružnice , bod je libovolný bod a nechť je vzdálenost bodů . Reálné číslo nazýváme **mocnost bodu ke kružnici.**



**V1.** Nechť je dán bod , jehož vzdálenost od středu dané kružnice je . Potom pro mocnost bodu ke kružnici platí:

1. Pro každý bod , který leží vně kružnice , je mocnost kladné číslo. Libovolná sečna  kružnice  vedená bodem protíná kružnici  ve dvou různých bodech , pro které platí: . Jestliže je tečna s bodem dotyku , potom platí .
2. Pro každý bod , který leží na kružnici platí .
3. Pro každý bod , který leží uvnitř kružnice , je mocnost záporné číslo. Libovolná sečna  kružnice  vedená bodem protíná kružnici  ve dvou různých bodech , pro které platí: . Pro bod  je .



<https://www.geogebra.org/m/YZxfG8vu>

<https://www.geogebra.org/m/fJDeYwFW>

<https://www.geogebra.org/m/yEqdFwn9>

**Příklad:** Sestrojte kružnici, která prochází dvěma danými body a dotýká se dané přímky .



<https://www.geogebra.org/m/hktfqtce>

**Def.** Množina všech bodů v rovině, které mají stejnou mocnost ke dvěma daným kružnicím, se nazývá **chordála** daných **kružnic.**

Vlastnosti chordály:

1. Jsou-li dané kružnice a soustředné, tj. a , pak v rovině neexistuje žádný bod, který má stejnou mocnost k oběma daným kružnicím, a tedy neexistuje ani chordála.
2. Jsou-li dané kružnice a nesoustředné, pak jejich chordála je přímka kolmá na a platí:
3. jestliže se dané kružnice protínají v bodech , je jejich chordálou společná sečna ,
4. jestliže se dané kružnice dotýkají v bodě , pak je jejich chordálou společná tečna v bodě ,
5. jestliže kružnice leží uvnitř druhé nebo vně sebe, pak je chordála nesečnou každé z nich.

****

**Def.** **Ortogonálními kružnicemi** se nazývají kružnice, které se protínají pod pravým úhlem, tj. tečny kružnic v jejich průsečíku jsou k sobě kolmé.



**V2.** Chordála daných kružnic, resp. její vnější část vzhledem k těmto kružnicím, je množina středů kružnic, které jsou ke dvěma daným kružnicím ortogonální.

**Def.** Bod, který má stejnou mocnost ke třem kružnicím, jejichž středy neleží v přímce, se nazývá **potenční střed** (chordálový střed) těchto kružnic a značí se .



**V3.** Nechť jsou dány tři kružnice , jejichž středy jsou navzájem různé. Označme chordálu prvních dvou kružnic, druhé a třetí, první a třetí kružnice.

1. Jestliže středy daných kružnic leží v jedné přímce, pak buď dané kružnice nemají vůbec potenční střed, nebo všechny tři chordály splynou a kružnice mají nekonečně mnoho potenčních středů.
2. Jestliže středy daných kružnic neleží v jedné přímce, pak všechny tři chordály jsou různé a mají společný jediný bod, který je potenčním středem daných kružnic



Užití: Ke konstrukci chordály dvou neprotínajících se kružnic.

Vlastnosti potenčního středu:

1. Potenční střed tří kružnic (pokud leží ve vnější oblasti všech tří kružnic), je jediný bod v rovině, z něhož lze vést tečny ke všem třem kružnicím, pro které platí: , kde jsou body dotyku na tečnách ke kružnicím .
2. Potenční střed tří kružnic (pokud leží ve vnější oblasti všech tří kružnic), je středem jediné kružnice, která ortogonálně protíná všechny tři dané kružnice.
3. Potenční střed tří kružnic je jediný bod v rovině, který má stejnou mocnost ke třem kružnicím, jejichž středy neleží v přímce.

**Příklad:** (Apolloniova úloha) Sestrojte kružnici, která prochází body A, B a dotýká se dané kružnice.

Kružnice l‘ je libovolná kružnice procházející body A, B. Bod M je potenčním středem kružnic k,l‘,l1, l2. Přímka AB je společná chordála kružnic l‘,l1, l2.



<https://www.geogebra.org/m/bbmzffwm#material/zrpsd5ba>

**Def.** Množina všech kružnic v rovině, které mají společnou chordálu, se nazývá **svazek kružnic.**

Vlastnosti svazku kružnic:

1. Svazek kružnic je určen dvěma tzv. základními kružnicemi, nebo kružnicí a přímkou, která je chordálou daného svazku.
2. Středy všech kružnic svazku leží v jedné přímce, tzv. středné.

Typy svazků:

1. Má-li jedna z kružnic svazku s chordálou společné body, pak se svazek skládá ze všech kružnic, které těmito body procházejí. Takový svazek se nazývá **eliptický.**
2. Dotýká-li se jedna z kružnic svazku chordály, pak se svazek skládá ze všech kružnic, které se v tomto bodě chordály dotýkají. Takový svazek se nazývá **parabolický.**
3. Nemá-li jedna z kružnic svazku s chordálou společné body, pak všechny kružnice svazku jsou disjunktní navzájem i s chordálou (žádné dvě nejsou soustředné). Takový svazek se nazývá **hyperbolický.**



**V4.** Každým bodem v rovině, který neleží na chordále svazku, prochází právě jedna kružnice svazku.

**V5.** Množina všech kružnic v rovině, které protínají ortogonálně kružnice daného svazku, tvoří opět kružnice.

**Def.** Svazky kružnic, v nichž každá kružnice jednoho svazku protíná ortogonálně každou kružnici druhého svazku, nazýváme **sdružené svazky kružnic**, resp. **ortogonální svazky.**

****

Vlastnosti ortogonálních svazků.:

1. Je-li jeden ze dvou sdružených svazků hyperbolický, druhý je eliptický.
2. Svazek sdružený ke svazku parabolickému je parabolický.
3. Průsečíky všech kružnic svazku eliptického, který je sdružený k danému svazku hyperbolickému, můžeme považovat za kružnice s nulovým poloměrem v hyperbolickém svazku. Tyto body se nazývají **mezné body** hyperbolického svazku.
4. Eliptický svazek nemá mezný bod, parabolický svazek má jeden mezný bod, hyperbolický svazek má dva mezné body.
5. Svazek může být určen: a) dvěma kružnicemi b) chordálou a kružnicí c) kružnicí a mezným bodem.