**Projektivní geometrie**

Znalosti z projektivní geometrie ulehčují studentovi práci při studiu deskriptivní geometrie. Zvláště to platí při studiu kuželoseček. Mnoho vět z projektivní geometrie, a také z projektivní geometrie kuželoseček je srozumitelných i bez studia jejich důkazů, proto důkazy nebudeme v tomto textu uvádět. Čtenář si může v případě zájmu vyhledat v uvedené literatuře.

**0. Úvod**

*Geometrie na ZŠ a SŠ: planimetrie (trojúhelník, úhel, kružnice, rovnoběžné přímky, shodná a podobná zobrazení) → EUKLIDOVSKÁ GEOMETRIE*.

*PROJEKTIVNÍ GEOMETRIE*

*Starší název tohoto poměrně rozsáhlého oboru geometrie byl „geometrie polohy“, což vlastně bylo jakési stručné vystižení daného oboru, protože opravdu zkoumá vzájemné vztahy geometrických útvarů. Také do této oblasti spadá pojem, známý i těm, kteří se matematikou nezabývají, a to je perspektiva nebo-li perspektivní zobrazování předmětů. Můžeme říci, že prvopočátky projektivní geometrie lze již hledat v Euklidových výkladech o optice, ale ovšem vědecké základy této vědecké disciplíny byly položeny mnohem později.*

**Euklides, Eukleidés** (asi 325 – 265 př. n. l.)

Vynikající antický matematik. Zabýval se snad všemi oblastmi matematiky. Nejvíce ho proslavilo 13 knih základů matematiky Stoicheia (latinsky Elementa), ve kterých shrnul veškeré poznatky tehdejší matematiky. Snažil se o systematickou výstavbu matematiky pomocí axiómů a definic, z nichž by se deduktivně odvozovaly další poznatky. Mimo jiné zformuloval základní postuláty geometrie (dnes Euklidovské geometrie), z nichž nejznámější je axiom rovnoběžnosti (k danému bodu a přímce lze sestrojit právě jednu rovnoběžku, která prochází daným bodem.) Zabýval se také teorií čísel a nalezl postup pro vyhledání největšího společného dělitele dvou celých čísel – Euklidův algoritmus. Zajímavostí je, že Euklidův algoritmus funguje i na jiných algebraických strukturách, například polynomech s reálnými koeficienty.

*Euklidovské konstrukce: pravítkem a kružítkem.*

*Nezávisle na sobě G. Mohr a L. Mascheroni dokázali, že konstrukce proveditelné pravítkem a kružítkem jsou proveditelné pouze kružítkem.*

**Georg Mohr**, [dánský](http://wikipedia.infostar.cz/d/de/denmark.html) [matematik](http://wikipedia.infostar.cz/m/ma/mathematician.html) narozený [1640](http://wikipedia.infostar.cz/1/16/1640.html) v [Kodani](http://wikipedia.infostar.cz/c/co/copenhagen.html), umřel [1697](http://wikipedia.infostar.cz/1/16/1697.html) v Kieslingswalde v Německu. Jeho jediným originálním příspěvkem pro [geometrii](http://wikipedia.infostar.cz/g/ge/geometry.html) byl důkaz, že libovolná geometrická konstrukce proveditelná [pravítkem a kružítkem](http://wikipedia.infostar.cz/r/ru/ruler_and_compass_constructions.html) může také být sestrojena pouze kružítkem. Tento důkaz publikoval v *Euclides Danicus*, [Amsterdam](http://wikipedia.infostar.cz/a/am/amsterdam.html), [1672](http://wikipedia.infostar.cz/1/16/1672.html). Ačkoli kniha byla zahrnuta v bibliografiích matematiky, nikdo tento důkaz nezkoumal a byl totálně přehlédnutý po 250 roků. Výsledek byl raději připisován Italovi [Lorenzovi Mascheroni](http://wikipedia.infostar.cz/l/lo/lorenzo_mascheroni.html)mu, který samostatně předložil tento důkaz o sto roků pozdněji (1797).

**Lorenzo Mascheroni** ([1750](http://wikipedia.infostar.cz/1/17/1750.html) - [1800](http://wikipedia.infostar.cz/1/18/1800.html)) byl [italský](http://wikipedia.infostar.cz/i/it/italy_1.html) [matematik](http://wikipedia.infostar.cz/m/ma/mathematician.html), který se nejprve zabýval humanitními obory (poezie a řecký jazyk), ale nakonec se stal profesorem matematiky v Pavii. V publikaci *Geometria del Compasso* (Pavia, 1797) ukázal, že libovolná geometrická konstrukce proveditelná [pravítkem a kružítkem](http://wikipedia.infostar.cz/r/ru/ruler_and_compass_constructions.html) může také být sestrojena pouze kružítkem. Nicméně, priorita k tomuto výsledku patří [Georgu Mohr](http://wikipedia.infostar.cz/g/ge/georg_mohr.html)ovi, který ho vydal už v roce 1672.

*??? Otázka*

*Co se stane, budeme – li studovat geometrii, ve které se nevyskytují žádné kružnice, úhly, vzdálenosti, měření velikostí úseček a úhlů; používáme* ***pouze*** *pravítko.*

*V tomto případě můžeme vyšetřovat zobrazení množiny bodů v přímce na množinu bodů jiné přímky, tedy vyšetřujeme vlastnosti polohy a rovnoběžnost, což jsou pouze vlastnosti, které se zachovávají rovnoběžným promítáním, tzv. invarianty rovnoběžného promítání.*

*V 16. století si potřeby malířství vynutily studium vlastností, které se zachovávají při středovém promítání (perspektivě). Jejich studiem se zabývá právě projektivní geometrie. O první jakési náznaky perspektivy se pokoušeli už v dobách před naším letopočtem. Egyptští malíři pozorovali, že předměty v bezprostřední blízkosti jsou veliké, a s rostoucí vzdáleností od pozorovatele ztrácejí na velikosti až „mizí“. Ve 14. století se objevuje malíř Giotto, který jako první vědomě zahrnul perspektivu do svých obrazů. Dalším významným perspektivcem byl Leonardo da Vinci. Teprve Quido Baldo del Monte (1545-1607) provádí důkaz o tom, že rovnoběžky v perspektivním obraze se sbíhají v jediném bodě, punctu concursuum. Po něm přichází Girard Desargues, který určuje body v prostoru souřadnicemi a jejich perspektivními obrazy za pomoci měřítek v souřadnicových osách. Když se na konci 18. století zrodila deskriptivní geometrie, jejímž tvůrcem je Gaspard Monge (1746-1818), dostalo se perspektivnímu zobrazování vědeckého podkladu.*

**Girard Desargues**, francouzský geometr narozený v roce 1593 v Lyoně (†1662). Byl členem vojenského stavu, při obléhání pevnosti La Rochelle se seznámil s Descartesem, pak usadil se v Paříži a zde s Pascalem, Robervalem, Gassendim a jinými učenci utvořil společnost, jakousi soukromou akademii věd matematických, a sepsal hlavní svá díla, jimiž řadí se mezi zakladatele novější geometrie. Současníci jej pokládali za prvního geometra a Poncelet jej právem nazval »Mongem své doby«. Desargues se zabýval též gnómonikou, stereotomií a architekturou. Konec života strávil ve svém rodišti Lyonu, což bylo tehdy po Paříži druhé nejvýznamnější město a jehož radnice byla zbudována podle Desarguesových plánů. Jeho spisy byly dlouho rozptýleny a téměř neznámy, až do doby, kdy je Chasles vyhledal. Jsou to zejména: Methode univ. de mettre en perspective tes objets donnés réellement, ou en devis avec leurs proportions, me. sures, éloignements etc. (Paříž, 1636). V tomto díle je poprvé užito vlastností centrálních průmětů ke studiu geometrických útvarů a vyslovena základní věta o homologických trojúhelnících. Ještě znamenitější je druhý Desarguesův spis: Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cône avec un plan (t, 1639). Zde jsou vysloveny principy týkající se úběžných (nekonečně vzdálených) útvarů prostoru a základy teorie involuce.

*Jeho žákem byl* ***Blaise Pascal*** *(1623 – 1662). Cílem Pascala a Desarguese bylo pomocí projektivní geometrie popsat Apolloniovu teorii kuželoseček, což bylo považováno za vrchol geometrie ve Staré Řecku ( Euklides, Archimédes, Apollonius, Pappos atd.).*

### *Nový rozvoj projektivní geometrie začal pracemi Gaspara Mongea (narozen: 9 května 1746 v Beaune, zemřel: 28 července 1818 v Paříži) a jeho žáků, především J. V. Ponceleta a Felixe Kleina.*

*Za zakladatele projektivní geometrie je považován* ***Jean-Victor Poncelet, který měl připravené základy ke studiu projektivních vlastností kuželoseček.***

Francouzský matematik **Jean-Victor Poncelet** se narodil 1. července 1788 v Metách v rodině advokáta. V Metách navštěvoval základní školu i tamní lyceum, kde se výborně učil. Po skončení lycea nastoupil roku 1807 na Polytechnickou školu v Paříži, která byla vojenským učilištěm. Po jejím ukončení pokračoval roku 1810 ve studiu na Škole vojenských inženýrů v Metách. Zakončil ji roku 1812 a téhož roku jej povolali do armády jako vojenského inženýra v hodnosti poručíka. V armádě se zabýval zejména stavbou mostů. Byl jedním ze zakladatelů moderní projektivní geometrie, kterou současně s ním objevil Joseph Gergonne. Objevil také cirkulární body v nekonečnu. Za Napoleonova tažení do Ruska pracoval Jean-Victor Poncelet od roku 1812 jako inženýr. Ale ještě téhož roku byl ruskými vojsky u Moskvy zajat a téměř 2 roky žil jako zajatec. Na úkor stravy si začal opatřovat papír a psací potřeby a začal mj. rozpracovávat nové odvětví matematiky – projektivní geometrii- pojednání o analytické geometrii Applications d'analyse et de géométrie. Pojednání bylo publikováno až po 50 letech. Po návratu do Francie pracoval ve zbrojnici v Metách a pokračoval ve svých výzkumech v projektivní geometrii. Své výsledky publikoval, ve Francii se však nedočkal uznání. V letech 1815 až 1825 působil Poncelet v Metách jako armádní inženýr. V roce 1822 publikoval Traité des propriétés projectives des figures, ve které studoval vlastnosti, které zůstávají při projekci invariantní. Tato jeho práce obsahuje základní myšlenky projektivní geometrie, jako je perspektiva, involuce a cirkulární body v nekonečnu. Poncelet se na základě prací ve zbrojnici začal zabývat také mechanikou. Navrhl novou konstrukci vodního kola se zahnutými lopatkami, čímž zvýšil jeho účinnost. Studoval také mechanické vlastnosti materiálů, pružnost a pevnost, studoval nosníky atd. V letech 1838-1848 přednášel mechaniku na pařížské Sorboně. V následujících letech 1848-1850 byl náčelníkem Polytechnické školy v hodnosti brigádního generála. Zemřel 22. prosince 1867 v Paříži.

*Ponceletovi spolu s Josephem Gergonnem se připisuje tzv. princip duality (záměna: bod – přímka)*

*Ale studiem invariantních vlastností, které se zachovávají při rovnoběžném promítání, se zabývá afinní geometrie. Pojem afinní pochází od švýcarského matematika L. Eulera. Tedy každé tvrzení, které platí v afinní geometrii, platí rovněž v euklidovské geometrii, ale ne naopak (afinní geometrie nemá metriku).*

**Leonhard Paul Euler** ([15. dubna](http://cs.wikipedia.org/wiki/15._duben) [1707](http://cs.wikipedia.org/wiki/1707) [Basilej](http://cs.wikipedia.org/wiki/Basilej), [Švýcarsko](http://cs.wikipedia.org/wiki/%C5%A0v%C3%BDcarsko) – [18. září](http://cs.wikipedia.org/wiki/18._z%C3%A1%C5%99%C3%AD) [1783](http://cs.wikipedia.org/wiki/1783) [Petrohrad](http://cs.wikipedia.org/wiki/Petrohrad), [Rusko](http://cs.wikipedia.org/wiki/Rusk%C3%A9_imp%C3%A9rium)) byl průkopnický švýcarský [matematik](http://cs.wikipedia.org/wiki/Matematika) a [fyzik](http://cs.wikipedia.org/wiki/Fyzika). Je považován za nejlepšího matematika [18. století](http://cs.wikipedia.org/wiki/18._stolet%C3%AD) a za jednoho z nejlepších matematiků vůbec. Byl také velmi plodným autorem knih, jeho sebrané spisy čítají 60—80 svazků. Eulerův vliv na matematiku vyjadřuje výrok připisovaný [Pierru Simonu de Lapleceovi](http://cs.wikipedia.org/wiki/Pierre_Simon_de_Laplace) : "Čtěte Eulera, čtěte Eulera, je to učitel nás všech." Euler provedl mnoho objevů na poli [diferenciálního počtu](http://cs.wikipedia.org/wiki/Diferenci%C3%A1ln%C3%AD_po%C4%8Det) a [teorie grafů](http://cs.wikipedia.org/wiki/Teorie_graf%C5%AF). Zavedl také spoustu nových moderních matematických pojmů a symbolů, obzvlášť v [matematické analýze](http://cs.wikipedia.org/wiki/Matematick%C3%A1_anal%C3%BDza). Je také proslulý svými pracemi v [mechanice](http://cs.wikipedia.org/wiki/Mechanika), [optice](http://cs.wikipedia.org/wiki/Optika) a [astronomii](http://cs.wikipedia.org/wiki/Astronomie). Eulerův portrét se objevil na desetifranku šesté série [švýcarské bankovky](http://cs.wikipedia.org/wiki/%C5%A0v%C3%BDcarsk%C3%BD_frank) a na švýcarských, ruských a německých [poštovních známkách](http://cs.wikipedia.org/wiki/Po%C5%A1tovn%C3%AD_zn%C3%A1mka). Na jeho počest byl po něm pojmenován [asteroid](http://cs.wikipedia.org/wiki/Asteroid) 2002 Euler. [24. května](http://cs.wikipedia.org/wiki/24._kv%C4%9Bten) je připomínán [luteránském](http://cs.wikipedia.org/wiki/Luter%C3%A1ni) kalendáři svatých.

 *Za zlatý věk geometrie můžeme pokládat 19. století. V tomto období hrála velkou roli projektivní geometrie, která byla zavedena již dříve. Projektivní přístup – nejobvyklejší metoda pro 19. století.*

 Němečtí geometři: Ferdinand Möbius (1770 – 1868), Julius Plücker (1801 – 1868), Jakob Steiner (1796 – 1863).

*Zásluhy na vybudování algebraických základů projektivní geometrie pomocí zavedení homogenních souřadnic se připisují F. Kleinovi.*

**Felix Christian Klein** ([25. dubna](http://cs.wikipedia.org/wiki/25._duben) [1849](http://cs.wikipedia.org/wiki/1849), [Düsseldorf](http://cs.wikipedia.org/wiki/D%C3%BCsseldorf), [Prusko](http://cs.wikipedia.org/wiki/Prusko) – [22. června](http://cs.wikipedia.org/wiki/22._%C4%8Derven) [1925](http://cs.wikipedia.org/wiki/1925), [Göttingen](http://cs.wikipedia.org/wiki/G%C3%B6ttingen), [Německo](http://cs.wikipedia.org/wiki/N%C4%9Bmecko)) byl [německý](http://cs.wikipedia.org/wiki/N%C4%9Bmecko) [matematik](http://cs.wikipedia.org/wiki/Matematik). Zabýval se především [geometrií](http://cs.wikipedia.org/wiki/Geometrie) (zejména [neeukleidovskou](http://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Neeukleidovsk%C3%A1_geometrie&action=edit&redlink=1)), ale také [teorií grup](http://cs.wikipedia.org/wiki/Teorie_grup) a [teorií funkcí](http://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Teorie_funkc%C3%AD&action=edit&redlink=1). Roku [1872](http://cs.wikipedia.org/wiki/1872) formuloval tzv. [Erlangenský program](http://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Erlangensk%C3%BD_program&action=edit&redlink=1), jehož hlavní myšlenkou je studovat jednotlivé geometrické struktury pomocí jejich [symetrií](http://cs.wikipedia.org/wiki/Symetrie) a [invariantů](http://cs.wikipedia.org/wiki/Invariant_%28matematika%29), a tak docílit hlubšího propojení [geometrie](http://cs.wikipedia.org/wiki/Geometrie) s [algebrou](http://cs.wikipedia.org/wiki/Algebra). Tento program výrazně ovlivnil rozvoj [matematiky](http://cs.wikipedia.org/wiki/Matematika) a [fyziky](http://cs.wikipedia.org/wiki/Fyzika) ve dvacátém století. Felix Klein patří k velmi významným matematikům a vytvořil vlivné dílo nadčasové hodnoty. Jeho nejhlubší myšlenky se týkají zejména principiálních souvislostí mezi [geometrií](http://cs.wikipedia.org/wiki/Geometrie) a [algebrou](http://cs.wikipedia.org/wiki/Algebra) ([teorií grup](http://cs.wikipedia.org/wiki/Teorie_grup)). V této oblasti spolupracoval se [Sophusem Liem](http://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Sophus_Lie&action=edit&redlink=1). Oba tito vědci realizovali základy Kleinova [Erlangenského programu](http://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Erlangensk%C3%BD_program&action=edit&redlink=1), který výrazně ovlivnil nejen rozvoj moderní matematiky, ale velmi přispěl např. též k rozvoji teorie relativity a částicové fyziky. Klein se přitom zabýval zejména diskrétními grupami symetrií, zatímco Lie spojitými symetriemi. Při studiu [neeukleidovských geometrií](http://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Neeukleidovsk%C3%A1_geometrie&action=edit&redlink=1) Klein objevil dvojrozměrnou uzavřenou plochu, která má pouze jeden povrch. Tato plocha se dnes po něm nazývá [Kleinova láhev](http://cs.wikipedia.org/wiki/Kleinova_l%C3%A1hev). Objevil též jeden z mimořádně významných a studovaných útvarů moderní matematiky, známým jako [Kleinova kvartická křivka](http://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Kleinova_kvartick%C3%A1_k%C5%99ivka&action=edit&redlink=1) či Kleinova kvartika, fascinující svou symetrií a pozoruhodnými souvislostmi napříč matematikou. Kleinova kvartika představuje v jistém smyslu zobecnění [Platónských těles](http://cs.wikipedia.org/wiki/Plat%C3%B3nsk%C3%A9_t%C4%9Bleso) pro případ, kdy jsou stěny tvořeny 24 pravidelnými sedmiúhelníky. Toto zobecnění je možné v prostoru s hyperbolickou geometrií. Klein ukázal, že tento útvar má právě 168 různých diskrétních symetrií (při uvažování zrcadlových symetrií 336) a tyto symetrie klasifikoval. Jde tedy o první případ tzv. [Hurwitzovy plochy](http://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Hurwitzova_plocha&action=edit&redlink=1), dosahující maximální možný počet symetrií pro zadaný [genus](http://cs.wikipedia.org/wiki/Genus) této plochy (v daném případě genus=3). V třírozměrném eukleidovském prostoru může být Kleinova kvartika reprezentována jako jistá plocha se třemi otvory (genus=3) a základní symetrií čtyřstěnu. Tento Kleinem objevený útvar v sobě slučuje tolik pozoruhodných vztahů a překvapivých souvislostí, že některými vlivnými matematiky bývá dokonce považován za „opravdu centrální část matematiky“.

*Zavedení nevlastních prvků se připisuje J. Keplerovi.*

**Johannes Kepler** ([27. prosince](http://cs.wikipedia.org/wiki/27._prosinec) [1571](http://cs.wikipedia.org/wiki/1571) [Weil der Stadt](http://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Weil_der_Stadt&action=edit&redlink=1) – [15. listopadu](http://cs.wikipedia.org/wiki/15._listopad) [1630](http://cs.wikipedia.org/wiki/1630) [Řezno](http://cs.wikipedia.org/wiki/%C5%98ezno)) byl [německý](http://cs.wikipedia.org/wiki/N%C4%9Bmecko) [matematik](http://cs.wikipedia.org/wiki/Matematik), [astrolog](http://cs.wikipedia.org/wiki/Astrolog) a [astronom](http://cs.wikipedia.org/wiki/Astronom). Především ve starší české literatuře se používá i počeštěná forma jeho křestního jména (Jan Kepler). Několik let působil v [Praze](http://cs.wikipedia.org/wiki/Praha) na dvoře císaře [Rudolfa II.](http://cs.wikipedia.org/wiki/Rudolf_II.) V Praze také formuloval dva ze tří [Keplerových zákonů](http://cs.wikipedia.org/wiki/Keplerovy_z%C3%A1kony). Kepler se ve svých pracích zabýval [astronomií](http://cs.wikipedia.org/wiki/Astronomie), [matematikou](http://cs.wikipedia.org/wiki/Matematika), [mechanikou](http://cs.wikipedia.org/wiki/Mechanika), [krystalografií](http://cs.wikipedia.org/wiki/Krystalografie) a [astrologií](http://cs.wikipedia.org/wiki/Astrologie). V roce [1615](http://cs.wikipedia.org/wiki/1615) vyšla jeho práce Nova Stereometria Doliorum Vinariorum, ve které počítal [objemy](http://cs.wikipedia.org/wiki/Objem) [těles](http://cs.wikipedia.org/wiki/T%C4%9Bleso), které vznikly rotací [kuželoseček](http://cs.wikipedia.org/wiki/Ku%C5%BEelose%C4%8Dka) kolem osy ležící v jejich rovině. Přitom použil infinitezimálních metod a toto dílo znamenalo významný krok ke vzniku moderních integračních metod. V práci Harmonices Mundi ([1619](http://cs.wikipedia.org/wiki/1619)) systematicky studoval mimo jiné problematiku konvexních a hvězdicovitých [mnohoúhelníků](http://cs.wikipedia.org/wiki/Mnoho%C3%BAheln%C3%ADk) a publikoval svůj třetí zákon.

**00. Princip axiomatické výstavby geometrie**

Axiomatická metoda spočívá v tom, že je dáno:

1. Konečný počet tzv. základních množin, jejichž prvky nazveme základní objekty (bod, přímka, rovina).
2. Množina základních tzv. primárních relací mezi prvky základních množin (relace incidence, relace „mezi“, v euklidovské geometrii relace shodnosti).
3. Požadavky, které základní objekty a relace mají splňovat, tzv. axiomy.

Všechny další odvozené objekty a relace budeme definovat pomocí základních a všechny věty o nich budeme dokazovat z axiomů užitím matematické logiky.

Soubor základních pojmů a axiomů se nazývá axiomatický systém.

Soubor všech základních i odvozených pojmů, všech axiomů a všech vět, které z axiomů vyplývají, se nazývá axiomatizovaná teorie nebo abstraktní teorie.

Jestliže základní pojmy, objekty i relace interpretujeme nějakými konkrétními nebo abstraktními pojmy, získáme interpretaci teorie. Je-li interpretace správná, tj. splňuje všechny axiomy, nazývá se modelem teorie.

Axiomatický systém musí splňovat určité požadavky:

1. **Bezespornosti –** tj. z daných axiomů nelze vyvodit výrok a současně jeho negaci. Je to nejdůležitější požadavek, důkaz bezespornosti – užitím modelu, kritérium – soustava je bezesporá, existuje-li alespoň jeden její model.
2. **Nezávislosti –** tj. požadujeme, aby nebylo zbytečně mnoho axiomů.
3. **Úplnosti –** tj. aby bylo dost axiomů na odvození teorie.

1. **Základní pojmy projektivní geometrie**

Projektivní geometrie se zabývá pojmy, které se promítáním (rovnoběžným, středovým) nemění.

 Nezbytnou součástí studia deskriptivní geometrie je znalost projektivní geometrie. Seznámíme se základními pojmy projektivní geometrie tak, abychom je mohli použít při studiu deskriptivní geometrie.

Osvojíme si je tak, abychom je mohli používat při projektivním zavedení kuželoseček a aplikovat je při řešení úloh o kuželosečkách.

**Incidence**

**Věta:** Jsou-li dva útvary incidentní, pak také jejich průměty jsou incidentní.

Neplatí věta obrácená!

* 1. **Afinní roviny**

**Definice 1.1.1:** Afinní rovina je dvojice množin B, P, kde B je neprázdná množina a P je systém jistých podmnožin množiny B a platí axiomy A1, A2, A3:

A1: ke každým dvěma bodům z množiny B existuje právě jedna přímka z množiny P, která prochází body ,

A2: ke každému bodu z množiny a ke každé přímce z množiny P existuje právě jedna přímka z množiny P, která prochází bodem a je rovnoběžná s přímkou ,

A3: existují tři nekolineární body.

 Uveďte příklady afinních rovin.



1. Eukleidovská rovina.
2. Nechť B obsahuje čtyři prvky a P obsahuje všechny dvouprvkové podmnožiny množiny B. Potom α = (B, P) je čtyřbodová afinní rovina. Pokuste se ji znázornit.
3. Nechť B obsahuje devět prvků a P jsou tříprvkové podmnožiny množiny B. Potom α = (B, P) je devítibodová afinní rovina. Pokuste se ji znázornit.
4. Reálná afinní rovina:

Nechť je těleso reálných čísel. Zvolme . je systém podmnožin množiny tvaru

**Některé vlastnosti afinních rovin**

**Věta 1.1.1:** Rovnoběžnost přímek v afinní rovině je relace ekvivalence.

**Věta 1.1.2:** Každé dvě různé přímky mají společný nejvýše jeden bod.

**Důsledek 1.1.3:** Každé dvě různoběžky mají společný právě jeden bod.

**Věta 1.1.4:** Každá přímka v afinní rovině obsahuje alespoň dva různé body.

**Věta 1.1.5:** Každá afinní rovina obsahuje alespoň čtyři body po třech nekolineární. Existuje afinní rovina, která obsahuje právě čtyři body.

**Důsledek 1.1.6:** Afinní rovina obsahuje ještě přímky podle, které jsou různé. Ty jsou buď rovnoběžné, pak je daná afinní rovina čtyřbodová, nebo jsou různoběžné, pak afinní rovina obsahuje ještě další body a přímky.

**Definice 1.1.2:** Svazek rovnoběžek v afinní rovině je množina všech přímek rovnoběžných s danou přímkou z afinní roviny. Značíme . Svazek přímek v afinní rovině je množina všech přímek procházejících daným bodem afinní roviny. Značíme .

**Věta 1.1.7:** V každé afinní rovině existují alespoň tři různé svazky rovnoběžek a tři různé svazky přímek.

**Definice 1.1.3:** Říkáme, že množiny mají stejnou mohutnost, existuje-li bijektivní zobrazení jedné množiny na druhou.

**Pozn.** Konečné množiny stejné mohutnosti mají stejný počet prvků.

**Věta 1.1.8:** Mohutnost množiny přímek v každém svazku rovnoběžek v afinní rovině je stejná a je rovna mohutnosti množiny bodů na libovolné přímce.

**Věta 1.1.9:** Existuje-li v afinní rovině přímka obsahující právě bodů, pak afinní rovina obsahuje bodů a právě přímek.

**Definice 1.1.4:** Afinní rovina z předchozí věty se nazývá konečná afinní rovina a číslo je její řád.

 Afinní rovina, svazek rovnoběžek, svazek přímek, mohutnost množiny přímek.

* 1. **Projektivní roviny**

**Definice 1.2.1.:** Projektivní rovina je dvojice množin , kde je neprázdná množina a je systém jistých podmnožin množiny a platí axiomy P1, P2, P3:

P1: ke každým dvěma bodům z množiny existuje právě jedna přímka z množiny , která jimi prochází,

P2: ke každým dvěma různým přímkám z množiny existuje právě jeden bod z množiny , který leží na obou přímkách,

P3: existují čtyři body po třech nekolineární.

 Uveďte příklady projektivních rovin.



1. Nechť B obsahuje sedm prvků a P obsahuje všechny tříprvkové podmnožiny množiny B. Potom je sedmibodová projektivní rovina. Pokuste se ji znázornit. (Tuto projektivní rovinu lze získat také tzv. projektivním rozšířením afinní roviny.)
2. V trojrozměrném eukleidovském prostoru je dán pevný bod . Množiny B, P zvolme takto: B je množina všech přímek v , které procházejí bodem , přičemž každou rovinu chápeme jako množinu přímek, které v ní leží a prochází bodem . Dvojice splňuje všechny axiomy projektivní roviny, je tedy modelem projektivní roviny.

**Věta 1.2.1:** Každá přímka v projektivní rovině obsahuje alespoň tři různé body.

**Pozn:** V sedmibodové projektivní rovině neexistuje přímka, na které neleží žádný z bodů

**Věta 1.2.2:** V projektivní rovině existují alespoň čtyři přímky, z nichž žádné tři neprocházejí týmž bodem.

**Věta 1.2.3:** V projektivní rovině ke každým dvěma různým přímkám existuje bod , který neleží na žádné z nich.

**Věta 1.2.4:** Mohutnost množiny bodů na libovolné přímce je pro všechny přímky dané projektivní roviny stejná.

**Definice 1.2.2:** Svazek přímek v projektivní rovině je množina všech přímek procházejících daným bodem projektivní roviny. Značíme . Bod se nazývá střed svazku.

**Důsledek 1.2.5:** (Důsledek V. 1.2.4) Svazek přímek o libovolném středu v dané projektivní rovině má stejnou mohutnost jako množina bodů na libovolné přímce této roviny.

**Věta 1.2.6:** Existuje-li v projektivní rovině přímka obsahující právě bodů, pak projektivní rovina obsahuje právě bodů a právě přímek.

**Definice 1.1.4:** Projektivní rovina z předchozí věty se nazývá konečná projektivní rovina a číslo je její řád.

 Projektivní rovina, svazek přímek.

**1.3. Vztahy mezi afinní a projektivní rovinou**

Projektivní rovinu můžeme získat z afinní roviny tzv. projektivním rozšířením. K dané afinní rovině přidáme nevlastní přímku.

**Definice 1.3.1:** Nechť je afinní rovina a je libovolná přímky roviny . Svazek rovnoběžek budeme nazývat nevlastním bodem přímky a budeme ho značit . Množinu všech nevlastních bodů roviny budeme nazývat nevlastní přímka afinní roviny a označíme ji . Ostatní body roviny budeme nazývat vlastní.

**Věta 1.3.1:** Nechť je afinní rovina. nechť je množina obsahující všechny prvky množiny a všechny nevlastní body. Nechť obsahuje nevlastní přímku roviny a všechny přímky z množiny doplněné o nevlastní body. . Potom je projektivní rovina, která se nazývá projektivním rozšířením afinní roviny .

Nyní jsme z afinní roviny sestrojili jejím projektivním rozšířením projektivní rovinu. Můžeme ale použít obrácený postup a tzv. restrikcí získat z projektivní roviny rovinu afinní.

**Věta 1.3.2:** Nechť je projektivní rovina a je libovolná pevně zvolená přímka. Položme , .Potom je afinní rovina, která byly vytvořena restrikcí projektivní roviny.



Je otázka, zda pro dané přirozené číslo existuje afinní, respektive projektivní rovina řádu . Je zřejmé, že pokud existuje afinní rovina řádu , pak existuje i projektivní rovina téhož řádu. Platí následující věta.

**Věta 1.3.3: (Bruck - Ryserova)**

Jestliže děleno čtyřmi dává zbytek jedna nebo dva a zároveň pro libovolná celá čísla , pak rovina řádu neexistuje.



Např: Rovina řádu neexistuje. Jsou známy roviny řádu A také bylo dokázáno, že existují roviny řádu , kde je prvočíslo a . Není známo, zda existuje rovina řádu . Dosud nebyla sestrojena. Také zatím není známa rovina řádu , kde není mocninou prvočísla.

S existencí roviny řádu souvisí Eulerova úloha z roku 1776 o 36 důstojnících. V roce 1900 prokázal francouzský matematik Gaston Tarry, že řešení této úlohy neexistuje.

**Úloha:** Seřaďte 36 důstojníků šesti různých hodností a ze šesti různých pluků do čtverce tak, aby v každé řadě a v každém sloupci byly zastoupeny všechny hodnosti a všechny pluky.

**1. 4. Princip duality v projektivní rovině**

Nyní ukážeme, že v projektivní rovině jsou některé pojmy vzájemně zaměnitelné.

Dvojpoměr lze interpretovat dvojím způsobem:

(a) určuje geometrii bodů na přímce,

(b) určuje geometrii přímek ve svazku.

Platí:

Z každé věty **V** plynoucí v projektivní rovině z axiomů P1, P2, P3 dostaneme novou platnou větu **V\***, tzv. duální větu, zaměníme-li pojmy*: bod ↔ přímka; leží na přímce ↔ prochází bodem; kolineární ↔ procházející jedním bodem.*

Duální výrazy:

*přímá řada bodová ↔ svazek přímek,*

*průsečík přímek ↔ spojnice bodů.*

Princip duality platí pouze v projektivní rovině a nikoliv v afinní, protože k prvnímu axiomu neexistuje duální. Také nelze dualizovat metrické pojmy.

Odůvodnění plyne z matematické logiky. Každá věta dokazatelná z jednoho systému axiomů je v duálním znění dokazatelná z duálního systému axiomů. Vytváření nových vět a pojmů se nazývá duallizace.

Příklad dualizace:

P1: ke každým dvěma bodům z množiny existuje právě jedna přímka z množiny , která jimi prochází,

P1\* = P2: ke každým dvěma různým přímkám z množiny existuje právě jeden bod z množiny , který leží na obou přímkách.

Každá věta dokazatelná z jednoho systému axiomů je v duálním znění dokazatelná z duálního systému axiomů. Vytváření nových vět a nových pojmů se nazývá dualizace.

**Cvičení:** Dualizujte tři axiomy projektivní roviny a věta, které platí pro projektivní roviny.

**1.5. Roviny desarguesovské, pappovské a fanovské (antifanovské).**

Nechť je dána afinní rovina , respektive projektivní rovina . Budeme dále požadovat, aby platil ještě další čtvrtý axiom tzv. **Desarguesův**.

**A4:**

**a) malý –** jsou-li navzájem různé rovnoběžné přímky a navzájem různé body, přičemž a , potom

**b) velký –** jsou-li navzájem různé body takové, že přičemž jsou navzájem různé přímky a , potom

**P4:** Jsou-li dvě trojice navzájem různých bodů takových, že , pak body jsou kolineární.

**Definice 1.5.1:** Rovina, pro kterou platí Desarguesův axiom, se nazývá desarguesovská.



Čtyřbodová afinní rovina je desarguesovská, protože obsahuje pouze čtyři body, kdežto v předpokladu axiomu je šest bodů, implikace je tedy platná.

**Pozn. P4** je v projektivní rovině axiomem a v projektivním prostoru je větou.

**Pappův axiom**

**A5:** Jsou-li dvě navzájem různé přímky a navzájem různé body různé od průsečíku přímek takové, že platí , potom

**P5:** Jsou-li dvě navzájem různé přímky a navzájem různé body různé od průsečíku přímek , pak body jsou kolineární.

**Definice 1.5.2:** Rovina, pro kterou platí Pappův axiom, se nazývá pappovská.

Pro další axiom budeme potřebovat další nový pojem.

**Definice 1.5.3:** Množina čtyř bodů , z nichž žádné tři nejsou kolineární, se nazývá úplný čtyřroh. Body se nazývají vrcholy čtyřrohu, přímky spojující vrcholy se nazývají strany čtyřrohu. Strany a , a , a jsou protější strany. Body se nazývají diagonální body (vrcholy). Tvoří tzv. diagonální trojúhelník. 

Nyní již můžeme vyslovit Fanův axiom (platí pouze pro projektivní roviny).

**P6:** Diagonální body žádného úplného čtyřrohu obsaženého v projektivní rovině nejsou kolineární.

**Definice 1.5.4:** Rovina, která **nesplňuje** Fanpův axiom, se nazývá fanovská, v opačném případě se nazývá antifanovská.

Projektivní rovina řádu 2 je fanovská, rozšířená euklidovská rovina je antifanovská.

**Věta 1.5.1:** Každá pappovská projektivní rovina je desarguesovská.

Pozn.: Obrácená věta neplatí, existují roviny, které jsou desarguesovské, ale nejsou pappovské.

Musíme ověřit, zda v projektivní rovině, v níž platí axiomy P4, P5, P6, platí také duální axiomy.

 **(Duální Desarguesův axiom)** Jsou-li dvě trojice navzájem různých přímek, z nichž žádná trojice nepatří témuž svazku, a jsou-li body kolineární, potom přímky patří témuž svazku.

**Věta 1.5.2:** V projektivní rovině, v níž platí Desarguesův axiom, platí také duální Desarguesův axiom.

 **(Duální Pappův axiom)** Jsou-li dva různé body projektivní roviny, navzájem různé přímky procházející bodem a navzájem různé přímky procházející bodem , potom přímky patří témuž svazku.

**Věta 1.5.3:** V projektivní rovině, v níž platí Pappův axiom, platí také duální Pappův axiom.

Než vyslovíme duální Fanův axiom, musíme duslizovat pojem úplný čtyřroh.

**Definice 1.5.4.\*:** Množina čtyř přímek , z nichž žádné tři neprocházejí týmž bodem, se nazývá úplný čtyřstran. Přímky se nazývají jeho strany, průsečíky dvou stran se nazývají vrcholy čtyřstranu. Vrcholy a , a , a jsou protější vrcholy. Přímky spojující protější vrcholy se nazývají diagonální přímky. Tvoří tzv. diagonální trojúhelník.

 **(Duální Fanův axiom)** Diagonální přímky žádného úplného čtyřstranu obsaženého v projektivní rovině nepatří témuž svazku.

**Věta 1.5.4:** V projektivní rovině, v níž platí Fanův axiom, platí také duální Fanův axiom.

.

**1.6. Reálná afinní a projektivní rovina**

**Afinní rovina**

 **Věta 1.6.1:** Nechť je komutativní těleso (pole) reálnách čísel, a nechť je množina všech uspořádaných dvojic z pole , a je systém podmnožin . Pak je afinní rovina, kterou nazýváme (reálná) afinní rovina nad polem .

**Cvičení:** Popište afinní rovinu nad dvouprvkovým tělesem .

**Projektivní rovina**

U projektivní roviny vyjdeme z prostorového modelu projektivní roviny a odvodíme analytické vyjádření této roviny:

Nechť je dán prostor s KSS a v ní má počátek souřadnice . Zvolíme libovolný bod takový, že , což jsou homogenní souřadnice bodu . Nechť , 𝛌 Potom je množina všech uspořádaných trojic , z nichž aspoň jedno je různé od nuly, přičemž určují týž bod z , právě když existuje tak , že . A množina je tvořena rovinami procházejícími počátkem o rovnicích: , což jsou rovnice přímky v homogenních souřadnicích a je rovnice téže přímky.

Výše popsaná projektivní rovina pomocí homogenních souřadnic se nazývá reálná projektivní rovina.

**Věta 1.6.2:** Nechť je komutativní těleso (pole) reálnách čísel, a nechť je dána na množině relace ekvivalence následujícím způsobem: . Potom dvojice množin , kde je množina všech tříd této ekvivalence a je systém podmnožin . Pak je projektivní rovina, kterou nazýváme (reálná) afinní rovina nad polem .

Důkaz: Je třeba ověřit, že daná relace je relace ekvivalence a ověření platnosti tří axiomů projektivní roviny se provede výpočtem analogickým k důkazu věty o reálné afinní rovině.

 K reálné projektivní rovině lze také přejít projektivním rozšířením reálné afinní roviny. Každému vlastnímu bodu přiřadíme v projektivním rozšíření reálné afinní roviny bod a trojice s touto ekvivalentní. Každému nevlastnímu bodu, tj. směru danému přímkou , přiřadíme bod učený trojicí a trojice s touto ekvivalentní. Takto přiřazený bod nezávisí na volbě konkrétní přímky daného směru. Dále každé přímce , přiřadíme přímku a přiřadíme nevlastní přímku o rovnici . Rovina takto rozšířená je projektivním rozšířením reálné afinní roviny.

**Cvičení:** Sestrojte projektivní rozšíření afinní roviny nad dvouprvkovým tělesem .

Také obráceně lze z dané reálné projektivní roviny restrikcí získat reálnou afinní rovinu. V projektivní rovině zvolíme přímku o rovnici . Ke každému prvku projektivní roviny, pro který najdeme reprezentaci ve tvaru , pak přejdeme z homogenních souřadnic souřadnice bodu v afinní rovině a přímce o rovnici

**Izomorfismus projektivních rovin**

**Definice 1.6.1.** Dvě projektivní roviny se nazývají izomorfní, existuje-li mezi nimi bijektivní zobrazení, které zobrazí kolineární body opět na kolineární body.

**Věta 1.6.3:** Projektivní rovina popsaná pomocí homogenních reálných souřadnic je izomorfní s projektivní rovinou získanou rozšířením euklidovské roviny.

* Důkaz:

Nechť je dána projektivní rovina , její body jsou dány homogenními souřadnicemi a euklidovská rovina s kartézskými souřednicemi . Označme , kde je tvořena body a nevlastními body , tj. svazky rovnoběžek. Svazek rovnoběžek je jednoznačně určen směrnicí , kde Nevlastnímu bodu osy přiřadíme , osy přiřadíme a nevlastnímu bodu přímky přiřadíme . Tímto způsobem jsou nevlastní body popsány souřednicemi: .

Nyní definujeme zobrazení: a dokážeme, že se jedná o izomorfismus.
1. pro , definujeme zobrazení: , kde . Bod je určen až na násobek určen jednoznačně (). Tímto způsobem dostaneme libovolný bod euklidovské roviny a naopak, . Zobrazení je tedy vzájemně jednoznačné zobrazení.
2. pro definujeme zobrazení , kde je nevlastní bod, pro Tedy pro libovolné platí
Podle 1. a 2. je zobrazení vzájemně jednoznačné zobrazení na . Zbývá dokázat, žekolineární body se zobrazí opět na kolineární body. Zvolíme přímku o rovnici
a) předpokládáme , potom obrazem bodu přímky bude nevlastní bod , který leží na přímce roviny , která obsahuje vlastní body přímky .
b) je-li tj. , pak libovolný bod této přímky se zobrazí na nevlastní bod přímky roviny , (tj. nevlastní přímku). Kolinearita je zachována. ▪

**Poznámky o uspořádání a spojitosti v projektivní rovině**

 V euklidovské rovině je uspořádání na přímkce dáno vztahem „mezi“, který je základní, nedefinuje se a jeho vlastnosti jsou vyjádřeny v axiomech uspořádání.

**U1:** Jestliže body jsou tři navzájem různé body téže přímky a bod leží mezi a , pak také leží mezi a .

**U2:** Jsou-li dány dva body na přímce, existuje na této přímce aspoň jeden bod takový, že leží mezi a .

**U3:** Ze tří bodů na přímce leží nejvýše jeden mezi zbývajícími dvěma.

**U4:** (Paschův) Jestliže v dané rovině je dán trojúhelník a libovolná přímka , která neprochází žádným z jeho vrcholů a protíná úsečku , protíná pak také buď úsečku nebo úsečku .

V projektivní rovině je uspořádání bodů na přímce podobné uspořádání bodů na kružnici (přímky jsou uzavřené křivky), tj. ze tří různých bodů každý leží mezi zbývajícími dvěma. Uvažujeme na přímce v projektivní rovině čtyři navzájem různé body. Můžeme říci, které dva oddělují zbývající dva.

Obr.

Vlastnosti relace oddělování jsou vyjádřeny v axiomech uspořádání. Úplný systém axiomů projektivní roviny je dán ještě axiomem spojitosti, jehož obsah lze ilustrovat takto:

Pohybujeme-li se po kružnici z vnitřku druhé kružnice do jejího vnějšku, musí nastat situace, kdy kružnice mají společný bod.

**1. 7. Projektivní prostory**

**Definice 1.7.1:** Projektivním (trojrozměrným) prostorem se nazývá trojice množin , kde je neprázdná množina, její prvky nazýváme body, je systém jistých podmnožin množiny nazývaných přímky a je systém jiných podmnožin množiny nazývaných roviny, jsou-li splněny axiomy **T1 – T6:**

T1: ke každým dvěma bodům z množiny existuje právě jedna přímka z množiny , která jimi prochází,

T2: Třemi nekolineárními body prochází právě jedna rovina.

T3: Přímka a rovina mají společný alespoň jeden bod.

T4: Dvě roviny mají společnou alespoň jednu přímku.

T5: Existují čtyři body neležící v jedné rovině, z nich žádné tři nejsou nekolineární.

T6: Přímka obsahuje alespoň tři různé body.

Příklad: Euklidovský trojrozměrný prostor není projektivní, lze však z něj projektivní prostror získat projektivním rozšířením.

**Definice 1.7.2:** Trojici nekolineárních bodů nazveme trojúhelník. Body nazýváme vrcholy a přímky strany.

**Věta 1.7.1: (Desarguesova věta o trojúhelnících)** Platí-li pro dvě trojice navzájem různých bodů (ležících v téže rovině nebo různých rovinách) takových, že , pak body jsou kolineární.

Platí i věta obrácená:

**Věta 1.7.2:** Jsou-li dvě trojice navzájem různých bodů (ležících v téže rovině nebo různých rovinách) takové, že body jsou kolineární, pak .

**Princip duality v projektivním prostoru**

Z každé věty **V** týkající se incidence bodů, přímek a rovin projektivního dostaneme novou platnou větu **V\***, tzv. duální větu, zaměníme-li pojmy*: bod ↔ rovina; leží v rovině ↔ prochází bodem; protneme ↔ spojíme.* Přímka je autoduální pojem.

**Cvičení:** Dualizujte a ověřte platnost všech uvedených axiomů a vět projektivního prostoru.

**Základní útvary projektivního prostoru**

**I. řádu** – jednoparametrické lineární útvary

* Přímá řada bodová - , ozn.
* Svazek rovin -
* Svazek přímek – autoduální -

**II. řádu** – dvojparametrické lineární útvary

* Trs přímkový -
* Pole přímkové -
* Pole bodové -
* Trs rovin -

**III. řádu**

* Prostor bodový
* Prostor rovinový

**1.8. Dělicí poměr, dvojpoměr**

**Definice 1.8.1:** Jsou-li dva body na přímce , pak symbolem označíme jejich vzdálenost měřenou ve smyslu od bodu k bodu a budeme ji nazývat **orientovanou vzdáleností** bodů nebo **orientovanou délkou úsečky** s krajními boy , ozn. .

Orientovaná vzdálenost má tyto vlastnosti (body jsou vlastní):

Je-li smysl od bodu k bodu kladný, je

Je-li smysl od bodu k bodu záporný, je

Jestliže , potom je

Zřejmě platí .

Podobně, jsou-li tři libovolné body na přímce, platí

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

Nechť je čtvrtý bod na zvolené přímce a vynásobíme-li vztah (1) číslem dostaneme

|  |  |
| --- | --- |
| . | (2) |

Odkud po úpravě vychází

|  |  |
| --- | --- |
| . | (3) |

**Definice1.8.2:** Nechť jsou dva různé body přímky a nechť je libovolný bod téže přímky , přičemž předpokládáme . Potom číslo

se nazývá dělicí poměr bodu vzhledem k bodům

Dělicí poměr je nezávislý na orientaci přímky a volbě jednotky délky.

**Věta 1.8.1:** Dělicí poměr středu úsečky vzhledem k jejím krajním bodům je roven .

**Věta 1.8.2:** Každému číslu odpovídá jediný bod na přímce , jehož dělicí poměr vzhledem k bodům je roven číslu

**Zavedení nevlastních elementů**

Již dávno matematikové tušili, že dvě rovnoběžné přímky se protínají v „nekonečnu“ a jejich průsečíkem je „bod v nekonečnu“. Ale matematika potřebuje přesné pojmy a nikoliv takové neurčité pojmy. Pojem průsečíku dvou přímek tedy rozšíříme i pro případ dvou rovnoběžných přímek. Protože vlastně takový bod neexistuje, nazveme ho nevlastní bod. Definici dělícího poměru rozšíříme i pro nevlastní body.

Definujeme: .

Označíme: .

Nedefinujeme:

**Definice 1.8.3:** Dělicí poměr nevlastního bodu přímky vzhledem k libovolným dvěma bodům této přímky je roven .

**Věta 1.8.3:** Každému číslu existuje právě jeden bod na přímce , jehož dělicí poměr vzhledem k bodům je roven číslu.

Vedle nevlastních bodů zavádíme ještě nevlastní přímky a nevlastní rovinu. Jedná se o analogické úvahy k úvaze o zavedení nevlastního bodu. Říkáme, že dvě rovnoběžné roviny se protínají v nevlastní přímce. Konečně říkáme, že nevlastní body všech přímek v prostoru tvoří rovinu, tzv. nevlastní rovinu prostoru. Obyčejné body, které nejsou nevlastní, nazýváme vlastní. Podobě rozlišujeme i vlastní a nevlastní přímky a roviny. Pro souhrn všech vlastních bodů prostoru zavedeme název afinní prostor. Prostor, ve kterém mají rovnocenný význam vlastní i nevlastní body, se nazývá projektivní.

Základní vlastnosti nevlastních prvků:

1. Každá vlastní přímky je incidentní s jedním nevlastním bodem.
2. Každá vlastní rovina je incidentní s jednou nevlastní přímkou (která je tvořena všemi nevlastními body dané roviny).
3. Všechny nevlastní body prostoru tvoří nevlastní rovinu.
4. Všechny navzájem rovnoběžné přímky jsou incidentní s týmž nevlastním bodem.
5. Všechny navzájem rovnoběžné roviny jsou incidentní s touž nevlastní přímkou.
6. Přímka rovnoběžná s danou rovinou ji protíná v nevlastním bodě.
7. Přímka incidentní se dvěma různými nevlastními body je nevlastní.
8. Rovina incidentní se třemi navzájem různými nevlastními body, jež neleží v téže přímce, je nevlastní.

Dělicí poměr bodu vzhledem k bodům , jestliže bod je nevlastní, je roven .

Vlastnosti dělicího poměru:

Konstrukce bodu, jehož



**Pozn.** Dělicí poměr se středovým promítáním nezachovává.

**Definice 1.8.4:**  Nechť jsou tři navzájem různé body vlastní přímky , přičemž body jsou vlastní a bod je libovolný bod téže přímky, potom poměr , kde a jsou dělící poměry bodů vzhledem k bodům , se nazývá dvojpoměr bodů (v tomto pořadí). Bod může i nemusí být vlastní.

Označení:

1. Je-li , je
2. Je-li , je
3. Je-li , je
4. Je-li , je
5. Je-li , je

Úmluva: Kdykoliv v dalším textu budeme hovořit o dvojpoměru , vždycky budeme předpokládat, že všechny čtyři body jsou navzájem různé.

**Věta 1.8.4:** Jsou-li čtyři navzájem různé body téže přímky, je

Dvojpoměrem lze charakterizovat polohu bodu na přímce ke třem daným pevně zvoleným bodům na přímce. Každému bodu na přímce je přiřazena jediná hodnota dvojpoměru, ale také obráceně lze ke každé hodnotě dvojpoměru sestrojit právě jeden bod takový, že

Čtyři body na přímce můžeme seřadit do čtveřic podle pořadí různým způsobem. Počet těchto uspořádaných čtveřic bodů je roven 4! = 24.

Vzniká otázka jaké dvojpoměry všechny tyto čtveřice bodů mají. Platí věty:

**Věta 1.8.5:**

**Věta 1.8.6:** .

**Věta 1.8.7:** .

Dvojpoměry všech těchto 24 čtveřic nabývají celkem šesti hodnot, a to

Je-li , potom

**Definice 1.8.5:** Je-li , říkáme, že body tvoří harmonickou čtveřici bodů, nebo že body jsou harmonicky sdruženy vzhledem k bodům , nebo že body oddělují harmonicky body , nebo že bod je harmonicky sdružen s bodem vzhledem k bodům , nebo konečně že bod je čtvrtý harmonický k bodů .

**Věta 1.8.8:** Jsou-li body harmonicky sdruženy vzhledem k bodům , jsou také body harmonicky sdruženy vzhledem k bodům .

**Věta 1.8.9:** Jsou-li body harmonicky sdruženy vzhledem k bodům , jsou také body harmonicky sdruženy vzhledem k bodům .

**Věta 1.8.10:** Střed úsečky je harmonicky sdružen s nevlastním bodem přímky , určené body , vzhledem k bodům .

Dělící poměr, dvojpoměr, nevlastní bod, nevlastní přímka, harmonická čtveřice.

**1.9. Věta Pappova a její důsledky**

**Věta 1.9.1:** Dvojpoměr se středovým promítáním nemění.

Je samozřejmé, že platí i další věta.

**Věta 1.9.2:** Dvojpoměr se rovnoběžným promítáním nemění.

Uvedené věty využíváme ke konstrukci:

**Konstrukce 1.9.1:** Na přímce jsou dány tři různé body . Sestrojte bod tak, aby , kde je dané číslo.

*Provedení:* Bodem vedeme přímku . Na ní najdeme body tak, aby . Určíme přímky a . Jejich průsečíkem vedeme přímku rovnoběžnou s přímkou Průsečík přímky s přímkou je hledaný bod . Označíme-li a nevlastní bod přímky jako ´, pak podle Věty 1.6.1 platí



**Cvičení:**

Na přímce jsou dány tři různé body . Sestrojte bod tak, aby .

Pappovu větu můžeme vyslovit také tak, že dvojpoměr čtyř bodů je nezávislý na poloze přímky , je tedy určen přímkami . Můžeme tedy definovat dvojpoměr čtyř přímek.

**Definice 1.9.1:** Předpokládejme, že jsou čtyři přímky téže roviny procházející bodem . Nechť bod (resp. )je průsečíkem přímky (resp. ) s přímkou , která neprochází bodem . Potom dvojpoměr nazýváme také dvojpoměrem čtyř přímek v tomto pořadí a značíme ho , tj. *.*

Předchozí věty pro dvojpoměr čtyř bodů zůstávají v platnosti, i když dvojpoměr čtyř bodů nahradíme dvojpoměrem čtyř přímek.

**Definice 1.9.2:** Je-li , říkáme, že přímky tvoří harmonickou čtveřici bodů, nebo že přímky jsou harmonicky sdruženy vzhledem k přímkám , nebo že přímky oddělují harmonicky přímky , nebo že přímka je harmonicky sdružena s přímkou vzhledem k přímkám , nebo konečně že přímka je čtvrtá harmonická k přímkám .

Rozšíření definice i pro nevlastní body:

Dvojpoměrem čtyř nevlastních bodů v rovině rozumíme dvojpoměr čtyř přímek , které se z libovolného vlastního bodu S promítají po řadě na uvedené nevlastní body.

**Věta 1.9.3:** Ramena a osy úhlů se oddělují harmonicky**.**

**Věta 1.9.4:**, kde , … a bod  je libovolný bod v rovině.

V čem spočívá význam Pappovy věty?

**1.10. Harmonické vlastnosti úplného čtyřrohu a úplného čtyřstranu**

**Věta 1.10.1:** Na každé straně úplného čtyřrohu tvoří dva vrcholy, diagonální bod a průsečík diagonály se stranou harmonickou čtveřici bodů.

**Věta 1.10.1****\*:** V každém vrcholu úplného čtyřstranu tvoří dvě strany, diagonální přímka a spojnice diagonálního bodu s vrcholem harmonickou čtveřici přímek.

**Věta 1.10.2:** Dvojice protilehlých stran úplného čtyřrohu dělí harmonicky dvojici diagonál procházejících průsečíkem těchto stran.

**Věta 1.10.2****\*:** Dvojice protějších vrcholů úplného čtyřstranu dělí harmonicky dvojici diagonálních bodů ležících na spojnici těchto vrcholů.

**Věta 1.10.3:** Na diagonále úplného čtyřrohu tvoří harmonickou čtveřici bodů dva diagonální body a dva průsečíky této diagonály s dvojicí protějších stran procházejících třetím diagonálním bodem.

**Věta 1.10.3****\*:** V diagonálním bodě úplného čtyřstranu tvoří harmonickou čtveřici přímek dvě diagonální přímky a dvě spojnice tohoto diagonálního bodu s protějšími vrcholy ležícími na třetí diagonální přímce.

Těchto uvedených vlastností lze využít k ryze projektivní konstrukci čtvrtého harmonického bodu.

**Konstrukce 1.10.1:** Na přímce p jsou dány tři body . Máme sestrojit bod tak, aby platilo .

*Řešení:* Bodem vedeme libovolnou přímku a na ní zvolíme body tak, aby body byly navzájem různé. Průsečík přímek a označíme , průsečík přímek a označíme . Hledaný bod je pak průsečíkem přímek a . Odůvodnění této konstrukce plyne z harmonických vlastností úplného čtyřrohu .



Úplný čtyřroh, úplný čtyřstran.

**Cvičení:**

1. Ke třem rovnoběžkám sestrojte čtvrtou harmonickou.
2. Tři nevlastní body jsou dány jako nevlastní body stran trojúhelníka. Sestrojte na nevlastní přímce čtvrtý harmonický k těmto bodům.
3. Vyslovte vlastnosti úplného čtyřrohu, jeli tento čtyřroh rovnoběžník, resp. lichoběžník.

**1.11. Jednoparametrické lineární útvary.**

**Definice 1.11.1:** Přímá řada bodová je množina všech bodů na dané přímce , kterou nazýváme nositelkou té řady. Tuto přímou řadu bodovou značíme nebo .

**Definice 1.11.1 \*:** Svazek přímek je množina všech přímek v dané rovině, jež procházejí jedním bodem , který se nazývá střed tohoto svazku. Tento svaz přímek značíme nebo .

**Definice 1.11.2:** Jednoparametrickými lineárními útvary rozumíme přímou řadu bodovou a svazek přímek.

 Přímá řada bodová, svazek přímek.

**1.12. Perspektivní a projektivní zobrazení**

**Definice 1.12.1:** Buď přímá řada bodová, svazek přímek a předpokládejme, že střed svazku neleží na nositelce řady. Zobrazení , resp. definované vztahem , resp. se nazývá perspektivním zobrazením neboli perspektivitou svazku na řadu . Značí se , resp.

Takovou přímou řadu bodovou nazýváme pak řezem tohoto svazku a takový svazek přímek průmětem té řady.



**Definice 1.12.2:** Říkáme, že dvě přímé řady bodové a jsou vzájemně perspektivní právě když, obě řady jsou řezy téhož svazku přímek o středu . Značí se . Bod se nazývá středem perspektivnosti obou řad.

**Definice 1.12.2 \*:**  Říkáme, že dva svazky přímek a jsou vzájemně perspektivní právě když, oba svazky jsou průměty téže přímé řady bodové s nositelkou . Značí se Přímka se nazývá osa perspektivnosti obou těchto svazků.



**Věta 1.12.1:** Perspektivní zobrazení, neboli perspektivnost, je vzájemně jednoznačná příbuznost základních prvků, která zachovává dvojpoměr.

**Definice 1.12.3:** Prvek, který je v nějaké geometrické příbuznosti přiřazen sám sobě, se nazývá samodružný. Příbuznost, v níž je každý prvek samodružný, se nazývá identita.

**Věta 1.12.2:** V perspektivnosti dvou přímých řad bodových je průsečík jejich nositelek samodružný bod.

**Věta 1.12.2 \*:** V perspektivnosti dvou svazků přímek je spojnice jejich středů samodružná přímka.

**Věta 1.12.3:** Perspektivnost dvou přímých řad bodových s různými nositelkami (resp. dvou svazků přímek s různými středy) je jednoznačně určena dvěma páry odpovídajících si prvků, které nejsou samodružné.

Perspektivita řad a svazků je bijekce. Průsečík řad je samodružný bod, spojnice středů je samodružná přímka. Perspektivita zachovává dvojpoměr čtyř bůdů (prvků). Plyne to přímo z Pappovy věty, tedy harmonické čtveřici odpovídá opět harmonická čtveřice.

Co vznikne složením dvou perspektivit?

Jestliže budeme studovat dvě přímé řady bodové s touž třetí přímou řadou bodovou, dojdeme k závěru, že obecně složením dvou perspektivit nemusí být opět perspektivita. Tím se dostáváme k dalšímu pojmu.

**Definice 1.12.4:** Nechť jsou dvě ne nutně různé přímky. Zobrazení řady na řadu , které může být vyjádřeno složením konečného počtu perspektivit, se nazývá projektivní zobrazení. Stručně projektivitou řad. Značí se: .



V případě, že přímky p a p´ splynou, vidíme situaci na obrázku:



 Každá perspektivita je projektivitou ne naopak.

**Lemma:** Nechť a jsou dvě uspořádané trojice různých bodů na přímce . Pak existuje jediná projektivita převádějící , , .

Následující věta se nazývá základní věta projektivity – **fundamentální teorém**.

**Věta 1.12.4. (fundamentální teorém):** Nechť jsou dvě ne nutně různé přímky projektivní roviny. jsou tři navzájem různé body přímky a jsou tři navzájem různé body přímky . Pak existuje jediná projektivita přímky na přímku převádějící , , .

**Věta 1.12.5:** V rozšířené euklidovské rovině je fundamentální teorém ekvivalentní Pappovu axiomu.

**Věta 1.12.6:** Projektivnost dvou nesoumístných přímých řad bodových lze vytvořit složením nejvýše dvou perspektivit.

**Věta 1.12.7:** Každá vzájemně jednoznačná příbuznost dvou lineárních jednoparametrických útvarů, která zachovává dvojpoměr, je projektivnost.

Následující věta je kritérium, kdy je daná projektivita perspektivitou.

**Věta 1.12.8:** Dvě nesoumístné řady bodové jsou perspektivní, právě když jejich průsečík je samodružný bod.

**Věta 1.12.8\*:** Dva nesoumístné svazky jsou perspektivní, právě když jejich spojnice je samodružná přímka.

**Věta 1.12.9:** Jsou-li dány dvě nesoumístné projektivní řady bodové, potom jejich průsečíky přímek a , a , a leží na téže přímce, tzv. direkční ose daných řad. Direkční osa protíná nositelky v bodech, které v dané projektivitě odpovídají průsečíku obou nositelek.



**Věta 1.12.9 \*:** Jsou-li dány dva nesoumístné projektivní svazky, potom spojnice bodů , a procházejí týmž bodem, tzv. direkčním středem daných svazků. Spojnice direkčního středu se středy svazků jsou přímky, které v dané projektivitě odpovídají spojnici středů daných svazků. 

**Samodružné prvky soumístných projektivních útvarů útvarů**

**Věta 1.12.10:** V projektivnosti dvou soumístných řad bodových (svazků přímek) existují nejvýše dva (dvě) různé samodružné body (přímky). Má-li projektivnost tři různé samodružné prvky, potom je identitou.



**Věta 1.12.11:** Každá neidentická projektivnost dvou soumístných řad bodových (svazků přímek) má vždycky dva samodružné body (přímky), které jsou buď reálné různé, nebo splývající, nebo imaginárně sdružené. 

**Věta 1.12.12 :** Jsou-li různé samodružné body v projektivnosti dvou soumístných řad bodových, pak pro každý pársobě odpovídajících si bodů platí: , kde  je konstanta a nazývá se charakteristika dané projektivnosti.

**Pozn**. Pro dva soumístné svazky přímek platí duální věta.

Projektivitu soumístných řad lze určit:

* třemi páry odpovídajících si bodů,
* dvěma páry odpovídajících si bodů a samodružným bodem,
* jedním párem odpovídajících si bodů a dvěma samodružnými body (různé nebo splývající),
* dvěma různými samodružnými body a charakteristikou.

Perspektivita, projektivita, soumístné projektivní řady bodové, soumístné projektivní svazky přímek.

**Cvičení:**

1. Jsou dány dvě nesoumístné projektivní řady bodové určené páry odpovídajících si bodů . K danému bodu sestrojte a k danému bodu sestrojte . Dále sestrojte odpovídající body k nevlastním bodům přímek .

*Řešení:* Na přímce zvolíme body Z bodu promítneme body a z bodu promítneme body . Označíme a , , . K bodu najdeme bod tak, že určíme bod jakožto průsečík spojnice s přímkou a bod dostaneme jako průsečík přímky se spojnicí . Z obrázku je dále patrná i konstrukce bodu . Obr. 33.

 Obr.33.

1. Dualizujte cvičení 1.
2. Doplňte dvě soumístné projektivní řady , je-li dán jeden pár odpovídajících si bodů a dva samodružné body

*Řešení:* Zvolíme body tak, aby jejich spojnice procházela bodem . Z bodu promítneme bod A a z bodu promítneme bod A. Označíme a . K bodu B najdeme bod B tak, že určíme bod jakožto průsečík spojnice s přímkou a bod dostaneme jako průsečík přímky se spojnicí ´.

1. Doplňování perspektivity s nevlastními útvary.
2. Sestrojte bod, který odpovídá průsečíku nositelek dvou projektivních řad.
3. Je dána neperspektivní řada *[p]* a svazek *[P]*, doplňte další prvky.
4. Doplňte dva soumístné projektivní svazky, je-li dáno: *a, a´, x, y.*
5. Doplňte dvě soumístné projektivní řady, je-li dáno: *A, A´, B, B´, X*.
6. Doplňte dva soumístné projektivní svazky, je-li dáno: *a, a´, b, b´, x.*

**1.13. Involuce**

**Definice1.13.1:** Involutorním párem bodů (resp. přímek) rozumíme takový pár, pro který platí: , pak pro , tedy je involutorní pár.

Pozn. tvoří rovněž involutorní pár.

Následující věta je kritérium, kdy je daná projektita involucí.

**Věta 1.13.1:** Jestliže v projektivnosti dvou soumístných útvarů existuje kromě samodružných prvků alespoň jeden involutorní pár, potom jsou všechny páry involutorní a daná projektivnost je involutorní.

 V involuci nerozlišujeme vzor a obraz.

Ze základní věty projektivity dostáváme pro involuci následující větu:

**Věta 1.13.2:** Involuce je určena dvěma páry odpovídajících si prvků.

Příkladem involuce je středová souměrnost.

**Definice 1.13.2:** Střed involuce bodů se nazývá takový vlastní bod přímky, který odpovídá nevlastnímu bodu dané přímky.

 Pokud nevlastnímu bodu odpovídá opět nevlastní bod, střed involuce neexistuje. K pojmu střed involuce neexistuje duální pojem. Pro určení involuce stačí zadat střed involuce a pár odpovídajících si bodů.

**Věta 1.13.3:** Součin orientovaných vzdáleností odpovídajících si bodů v involuci od středu involuce je konstantní a nazývá se mocnost involuce (nikdy není rovna nule).

Platí také obrácená věta:

**Věta 1.13.4:** Je-li součin orientovaných vzdáleností dvou dvojic bodů na přímce od daného pevného bodu S této přímky konstantní, pak tyto páry určují involuci o středu S.

**Věta 1.13.5:** Involuce má dva různé samodružné prvky.

**Věta 1.13.6:** Involuce, jejíž samodružné prvky jsou reálné, se nazývá hyperbolická, involuce, jejíž samodružné prvky jsou imaginárně sdružené, se nazývá eliptická.

**Věta 1.13.7:** Jestliže se páryodpovídajících si prvků v dané involuci oddělují, je daná involuce eliptická, neoddělují-li se, je daná involuce hyperbolická.

**Věta 1.13.8:** Projektivnost je involucí právě tehdy, když je její charakteristika rovna -1.

**Věta 1.13.9:** Páry prvků oddělující dva pevné a vzájemně různé prvky harmonicky tvoří involuci. Oba dané prvky jsou jejími samodružnými prvky.

V involuci každý pár odpovídajících i prvků odděluje harmonicky dvojici samodružných prvků. Také obráceně páry prvků oddělující dva pevné různé prvky harmonicky tvoří involuci, v níž jsou oba dané prvky samodružné. Involuce může být také určena samodružnými prvky.

**Věta 1.13.10:** Páry kolmic procházejících jedním vlastním bodem tvoří eliptickou involuci, tzv. pravoúhlou involuci.

 V každé involuci přímek existuje jeden pravoúhlý pár, pokud jsou dva, daná involuce je pravoúhlá.

**Definice 1.13.3:** Samodružné přímky eliptické involuce se nazývají izotropické.

**Cvičení:**

1. Sestrojte střed involuce, je-li určena dvěma páry odpovídajících si bodů.
2. Involuce je dána středem *S* a párem odpovídajících si bodů *A→A´*, sestrojte další páry.
3. Involuce je dána středem *S* a párem odpovídajících si bodů *A→A´*, sestrojte samodružné body.
4. Přesvědčte se, že projektivita, která má jeden dvojnásobný samodružný bod, není involutorní.
5. Nechť jsou dvě nesoumístné projektivní řady. Nechť je libovolný bod její direkční osy, který neleží na . Potom páry přímek tvoří involuci ve svazku o středu *P*. Dokažte.
6. Involuce je dána dvěma páry odpovídajících si bodů, sestrojte střed, resp. samodružné body (užitím chordály).
7. Jsou-li dvě nesoumístné řady perspektivní, pak jejich direkční osa je diagonální stranou úplného čtyřrohu *ABA´B´*. Ověřte a vyslovte duální tvrzení.
8. Krajní body všech takových úseček na dané přímce, které mají společný střed, tvoří involuci. Dokažte. *(Návod k řešení: V 1.8.10, V 1.13.9)*
9. Dvojice přímek incidentních s daným bodem, které mají společné osy souměrnosti, tvoří involuci se samodružnými přímkami. Ověřte.
10. Sestrojte pravoúhlý pár involuce, která je určena dvěma páry odpovídajících si přímek.