

SBÍRKA ÚLOH STEREOMETRIE

Polohové vlastnosti útvarů v prostoru

Sbírka úloh STEREOMETRIE – Polohové vlastnosti útvarů v prostoru
Mgr. Marie Chodorová, Ph.D.
Grafická úprava a sazba: Marcel Vrbas

OBSAH

SEZNAM POUŽÍVANÝCH SYMBOLŮ	5
A. ZÁKLADY STEREOMETRIE	7
A.1 Základní stereometrické pojmy	7
A.2 Zobrazování prostorových útvarů v rovině	9
B. POLOHOVÉ VLASTNOSTI ÚTVARŮ V PROSTORU	13
B.1 Vzájemná poloha čtyř bodů	13
B.2 Vzájemná poloha dvou přímek	14
B.3 Průnik roviny a tělesa	16
B.4 Vzájemná poloha dvou rovin	26
B.5 Vzájemná poloha tří rovin	29
B.6 Vzájemná poloha přímky a roviny	31
B.7 Průnik přímky s hranicí tělesa	33
VÝSLEDKY ÚLOH	37

SEZNAM POUŽÍVANÝCH SYMBOLŮ

A, B	body A, B
a, b	přímky a, b
$\leftrightarrow AB$	přímka A, B
$\rightarrow AB$	polopřímka AB
AB	úsečka AB
ρ, σ	roviny ρ, σ
$\leftrightarrow ABC$	rovina ABC
$\leftrightarrow Ap$	rovina Ap (rovina určená bodem A a přímkou p)
$\leftrightarrow pq$	rovina pq (rovina určená přímkami pq)
S_{AB}	střed úsečky AB
$\sphericalangle AVB$	konvexní úhel AVB
$a \parallel b$	přímka a je rovnoběžná s přímkou b
$a \not\parallel b$	přímka a není rovnoběžná s přímkou b
$a \cap b = P$	průsečík P přímek a, b
$a \cap \beta = p$	průsečnice p rovin a, β
$ AB $	vzdálenost bodů A, B ; délka úsečky AB
$ Ap $	vzdálenost bodu A od přímky p
$ Aa $	vzdálenost bodu A od roviny a
$ ab $	vzdálenost rovnoběžných přímek a, b
$ a\beta $	vzdálenost rovnoběžných rovin a, β
$ \sphericalangle AVB $	velikost konvexního úhlu AVB
$ \sphericalangle ab $	odchylka přímek a, b
$ \sphericalangle pa $	odchylka přímky p a roviny a
$ \sphericalangle a\beta $	odchylka rovin a, β
V	objem tělesa
S	povrch tělesa

A. ZÁKLADY STEROMETRIE

A.1 Základní stereometrické pojmy

Stereometrie, neboli geometrie v prostoru se zabývá řešením prostorových geometrických úloh. Aby student byl schopen řešit úlohy na dané téma musí se seznámit s některými stereometrickými pojmy a větami.

Za základní útvary ve stereometrii považujeme **body, přímky a roviny**. Dále uvedeme jejich vlastnosti a vztahy.

URČENÍ PŘÍMKY

- dvěma různými body A a B je určena jediná přímka.

URČENÍ ROVINY

- přímkou a bodem, který neleží na této přímce,
- třemi body, které neleží na jedné přímce,
- dvěma různoběžkami,
- dvěma různými rovnoběžkami.

VZÁJEMNÁ POLOHA PŘÍMEK a, b

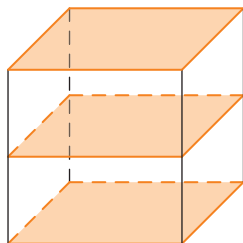
- rovnoběžné: a, b leží v téže rovině a současně $a \cap b = \emptyset$ – různé,
- rovnoběžné splývající: $a = b$
- různoběžné: $a \cap b = R, R$ – průsečík,
- mimoběžné: a, b neleží v téže rovině a současně $a \cap b = \emptyset$.

VZÁJEMNÁ POLOHA DVOU ROVIN α, β

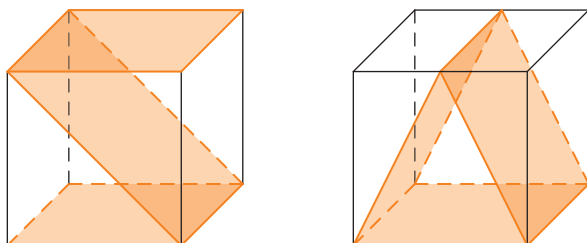
- rovnoběžné: $\alpha \cap \beta = \emptyset$ – různé,
- rovnoběžné splývající: $\alpha = \beta$,
- různoběžné: $\alpha \cap \beta = r, r$ – průsečnice.

VZÁJEMNÁ POLOHA TŘÍ ROVIN

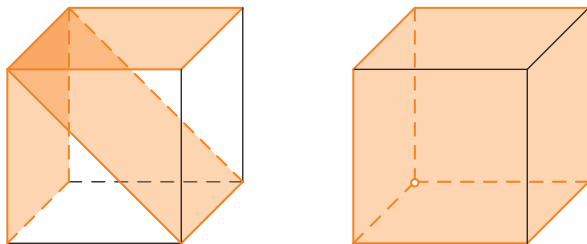
- Všechny tři roviny jsou navzájem rovnoběžné.



- Dvě roviny jsou rovnoběžné, třetí je protíná ve dvou rovnoběžných přímkách.
- Každé dvě roviny jsou různoběžné a všechny tři průsečnice jsou navzájem rovnoběžné a různé.



- Každé dvě roviny jsou různoběžné a všechny průsečnice splývají v jedinou přímku.
- Každé dvě roviny jsou různoběžné, jejich průsečnice jsou navzájem různoběžné a protínají se v jednom společném bodě.



VZÁJEMNÁ POLOHA PŘÍMKY a A ROVINY ρ

- rovnoběžné: $a \cap \rho = \emptyset$ – různé,
- přímka a leží v rovině ρ : $a \in \rho$,
- různoběžné: $a \cap \rho = R$, R – průsečík.

NĚKTERÉ DALŠÍ VLASTNOSTI BODŮ, PŘÍMEK A ROVIN:

- Bodem A lze vést právě jednu přímku a rovnoběžnou s přímkou b .
- Leží-li dva různé body přímky a v rovině ρ , pak každý bod přímky a leží v rovině ρ .
- Mají-li dvě různé roviny α a β společný bod A , pak mají i společnou přímku a , která prochází bodem A .
- Přímka a je rovnoběžná s rovinou ρ , právě když v rovině ρ existuje přímka rovnoběžná s přímkou a .
- Dvě roviny jsou rovnoběžné, právě když jedna z nich obsahuje dvě různoběžky, z nichž každá je rovnoběžná s druhou rovinou.
- Daným bodem A lze vést jedinou rovinu α rovnoběžnou s danou rovinou ρ .

A.2 Zobrazování prostorových útvarů v rovině

Rovinu, do níž geometrické útvary rovnoběžně promítáme, nazýváme průmětnou. Tuto průmětnu ztotožňujeme s nákresnou, tj. s rovinou tabule nebo sešitu. K názornému zobrazování prostorových geometrických útvarů a k ilustraci řešení některých stereometrických úloh užíváme **volné rovnoběžného promítání**.

Při zobrazování prostorových geometrických útvarů ve VRP dodržujeme jednoduchá pravidla:

1. Body zobrazujeme jako body.
2. Přímký zobrazujeme jako přímký nebo jako body.
3. Zachováváme incidenci bodů a přímký.
4. Rovnoběžné přímký zobrazujeme jako rovnoběžky nebo jako body.
5. Zachováváme poměr velikostí rovnoběžných úseček.
6. Obrazce ležící v rovinách rovnoběžných s průmětnou zobrazujeme ve skutečné velikosti.

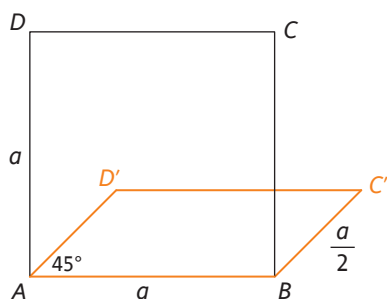
Při volném rovnoběžném promítání se jedná o zobrazení, ve kterém jsou bodům prostoru přiřazeny jisté body nákresny.

Pro názornost obrazů má praktický význam připojit následující úmluvy, které budeme respektovat:

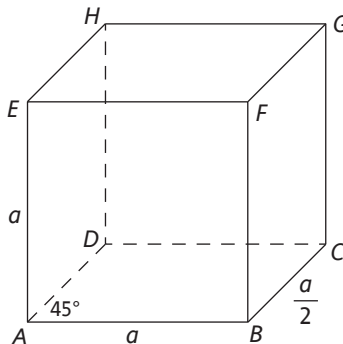
7. Obrazy přímký kolmých k průmětně (tyto přímký budeme nazývat **hloubkové**) kreslíme tak, aby svíraly s vodorovnou přímkou zvolený úhel, tzv. úhel zkosení. Většinou volíme úhel o velikosti 45° .
8. Obrazy úseček na hloubkových přímkách zkracujeme na polovinu jejich skutečné velikosti.

PRO NÁZORNOST ZOBRAZÍME NĚKOLIK ÚTVARŮ A TĚLES:

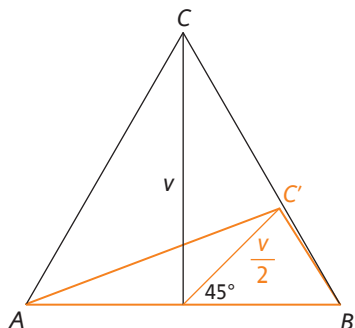
• čtverec $ABCD$



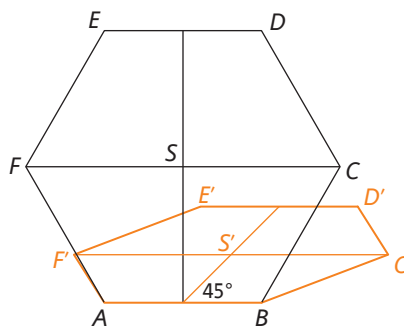
• krychle $ABCDEFGH$



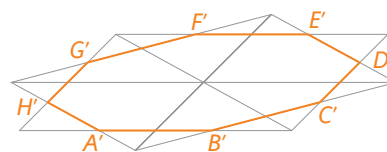
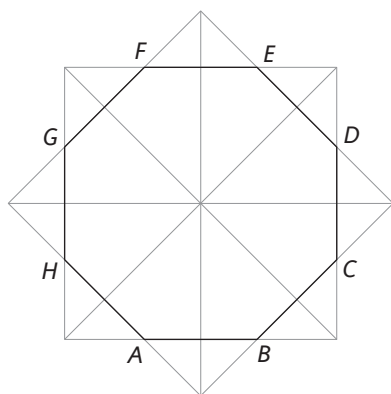
- rovnostranný trojúhelník ABC



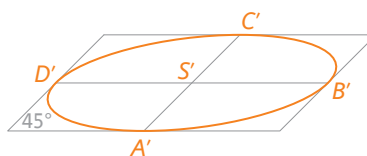
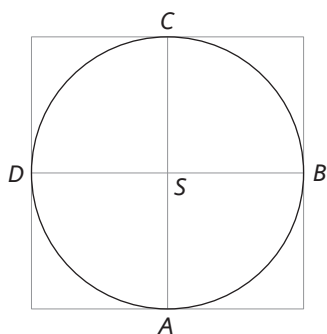
- pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$



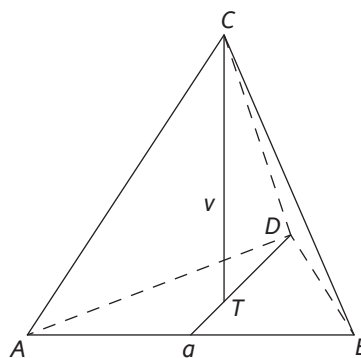
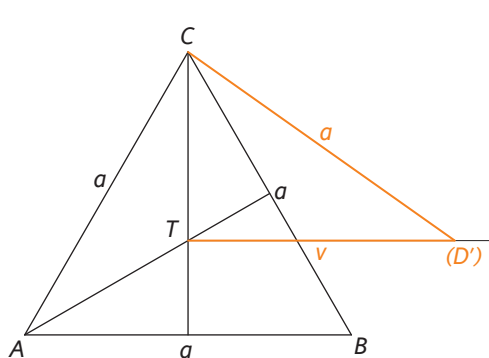
- pravidelný osmiúhelník $ABCDEFGH$



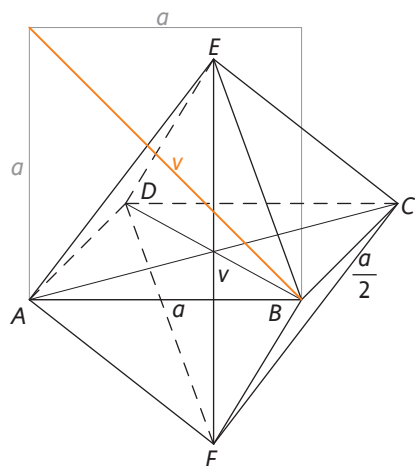
- kružnice (obrazem kružnice je elipsa)



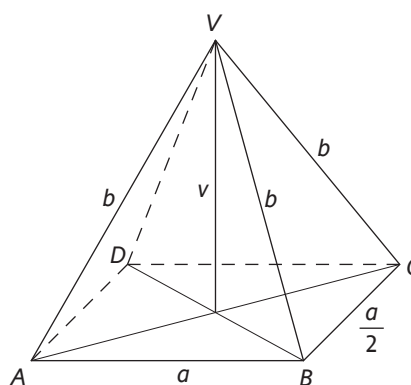
- pravidelný čtyřstěn $ABCD$
(Ke konstrukci pravidelného čtyřstěnu je nutné určit jeho výšku, a to tak, že sklopíme rovinu, která obsahuje výšku tělesa a hranu CD , do roviny podstavy.)



- pravidelný osmistěn $ABCDEF$



- pravidelný čtyřboký jehlan $ABCD$



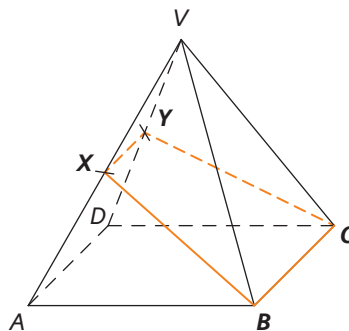
B. POLOHOVÉ VLASTNOSTI ÚTVARŮ V PROSTORU

B.1 Vzájemná poloha čtyř bodů

1.

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, zjistěte, zda uvedené body B, C, X, Y leží v jedné rovině. Bod X je střed hrany AV , bod Y je střed hrany DV .

Řešení:



Body B, C, X, Y leží v jedné rovině, protože hrana BC je rovnoběžná se střednou XY a rovnoběžné přímky leží v jedné rovině.

2.

Je dána krychle $ABCDEFGH$:

- zjistěte, zda body E, G, B, X leží v jedné rovině. Bod X je střed hrany BF ;
- zjistěte, zda body A, C, K, L leží v jedné rovině. Body K, L jsou středy hran EF, FG ;
- zjistěte, zda body K, L, B, X leží v jedné rovině. Bod K je střed hrany AE , bod L je střed hrany DH a bod X leží na hraně EF a platí $|XE| = 2|XF|$;
- zjistěte, zda v krychli $ABCDEFGH$ leží uvedené body K, L, M, S v jedné rovině. Bod K je střed hrany AE , bod L je střed hrany DH , bod M je střed hrany BF a bod S je střed krychle.

3.

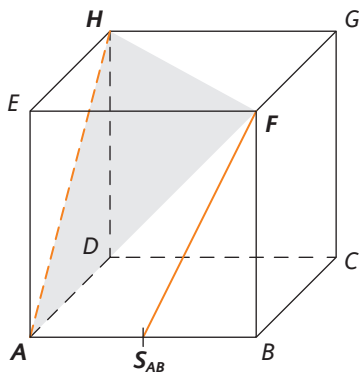
Je dán pravidelný osmistěn $ABCDEF$. Zjistěte, zda uvedené body B, D, F, K leží v jedné rovině. Bod K leží na úhlopříčce EF a platí $3|EK| = |FK|$.

B.2 Vzájemná poloha dvou přímek

4.

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Rozhodněte o vzájemné poloze přímek AH a $S_{AB}F$:

Řešení:



Body AFH je jednoznačně určena rovina, ale bod S_{AB} v této rovině zřejmě neleží, tedy přímky AH a $S_{AB}F$ jsou mimoběžné.

5.

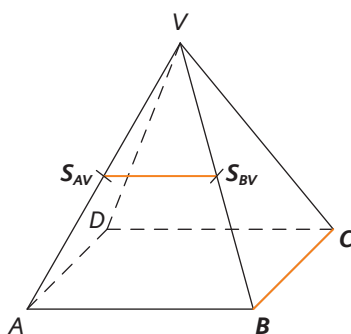
Je dána krychle $ABCDEFGH$. Rozhodněte o vzájemné poloze přímek:

- a) AS_{GH} a $S_{AB}D$
- b) AP a BS_{CG} , bod P je střed stěny $CDGH$
- c) AP a $S_{AE}S_{GH}$, bod P je střed stěny $CDGH$
- d) AS_{GH} a EC
- e) $S_{AB}S_{AD}$ a FH
- f) AH a $S_{BF}G$
- g) BD a $S_{BE}H$
- h) BH a $S_{AE}S_{CG}$

6.

V pravidelném čtyřbokém jehlanu $ABCDV$ rozhodněte o vzájemné poloze přímek BC a $S_{AV}S_{BV}$.

Řešení:



Přímky BC a $S_{AV}S_{BV}$ jsou mimoběžné, protože nemají žádný společný bod a neleží v jedné a téže rovině.

7.

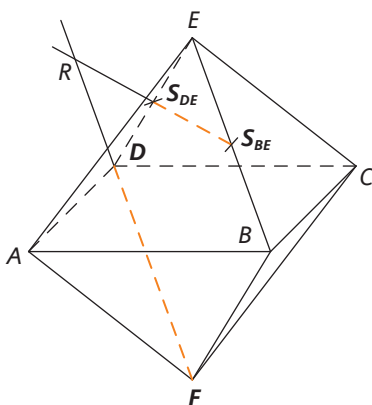
V pravidelném čtyřbokém jehlanu $ABCDV$ rozhodněte o vzájemné poloze přímek:

- a) AS_{DV} a BS_{CV}
- b) AB a $S_{CV}S_{DV}$
- c) BV a CD
- d) CV a $S_{AB}S_{AV}$
- e) DV a $S_{DB}S_{BV}$

8.

V pravidelném osmistěnu $ABCDEF$ rozhodněte o vzájemné poloze přímek DF a $S_{BE}S_{DE}$.

Řešení:



Přímky DF a $S_{BE}S_{DE}$ jsou různoběžné, protože body $BEDF$ tvoří úhlopříčný řez daného osmistěnu, tím pádem leží v jedné rovině, ve které leží i body S_{BE}, S_{DE} , tedy přímky DF a $S_{BE}S_{DE}$ leží v jedné a téže rovině a nejsou rovnoběžné, protože se protínají v bodě R .

9.

V pravidelném osmistěnu $ABCDEF$ rozhodněte o vzájemné poloze přímek:

- a) DS_{AF} a BS_{CE}
- b) AS_{CE} a $S_{AF}S_{CF}$
- c) AD a CS_{BF}

B.3 Průnik roviny a tělesa

Při konstrukci řezů na tělesech se řídíme těmito třemi pravidly:

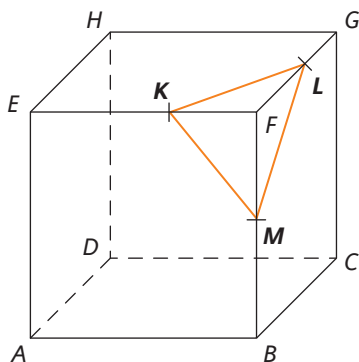
- **pravidlo č. 1:** strany řezu tvoří body, které leží v jedné stěně tělesa, (lze spojit body ležící v téže rovině stěny tělesa),
- **pravidlo č. 2:** strany řezu, které leží v rovnoběžných rovinách jsou navzájem rovnoběžné,
- **pravidlo č. 3:** jestliže dvě průsečnice tří rovin procházejí jedním bodem, musí jím procházet také třetí průsečnice.

Poznámka: V zadání příkladů nebude výslovně uváděno, kde body určující rovinu řezu leží, a tudíž čtenář se bude orientovat podle obrázku.

10.

Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou určenou body KLM .

Řešení:



Rovina řezu je určena body KLM . Protože bod K leží na hraně EF , bod L leží na hraně FG a body EFG určují rovinu, ve které leží horní podstava $EFGH$ krychle

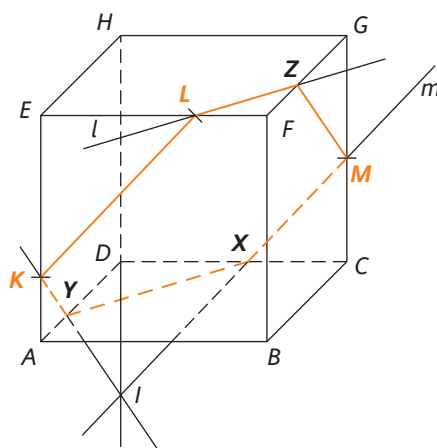
$ABCDEFGH$, proto v této rovině musí ležet i přímka KL , proto spojíme body KL a úsečka KL tak určuje jednu stranu řezu.

Analogicky totéž provedeme s body LM a KM , tedy podle pravidla č. 1 spojíme body KL , LM a MK , čímž je řez sestrojený.

11.

Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou určenou body KLM .

Řešení:

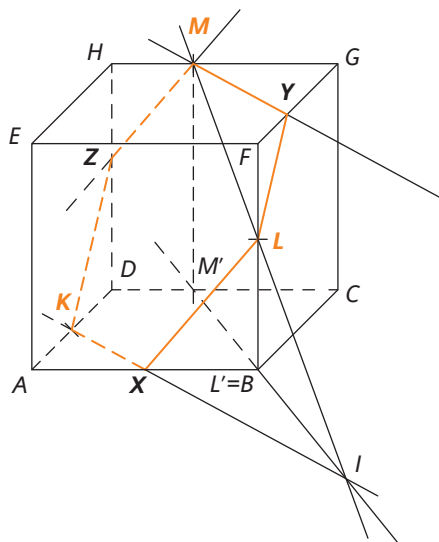


1. Body KL leží v téže rovině stěny $ABEF$ a podle pravidla č. 1 tvoří stranu řezu.
2. Roviny ABF a DCG jsou rovnoběžné, takže podle pravidla č. 2 vedeme bodem M rovnoběžku m s KL .
3. Průnik přímky m a hrany DC je bod X .
4. Další body řezu sestrojíme užitím pravidla č. 3. Roviny ADH , CDG a KLM se protínají v jednom bodě $I \in DH$, kterým procházejí všechny průsečnice těchto rovin. ADH a CDG se protínají v přímce HD a na ní bude ležet bod I , jímž procházejí další dvě průsečnice. Tento bod I určíme jako průsečík přímek HD a m . Přímka IK je průsečnice rovin ADH a KLM .
5. Bod řezu Y je průsečíkem přímky KI s hranou AD .
6. Bodem L vedeme rovnoběžku l s XY .
7. Průnik přímky l a hrany FG je bod Z .
8. Řez je určen body $LZMXKYK$.

12.

Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou určenou body KLM .

Řešení:

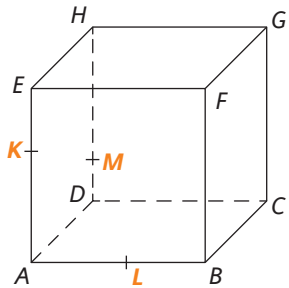


1. Nemůžeme využít žádné pravidlo. Sestrojíme průsečík přímky LM s rovinou podstavy ABC , a to tak, že sestrojíme pravouhlý průmět této přímky do roviny stěny ABC , což je přímka $L'M'$. Průsečík přímky LM s $L'M'$ je bod I , což je průsečík přímky LM s rovinou podstavy ABC .
2. Sestrojíme přímku KI a její průsečík s hranou AB je další bod řezu X .
3. Spojíme LX .
4. Bodem M vedeme rovnoběžku m s přímkou KX a její průsečík s hranou FG je bod řezu Y .
5. Spojíme LY .
6. Dále bodem M vedeme rovnoběžku l s přímkou LX .
7. Bod Z , který je průsečíkem přímky l s hranou HD , je bodem řezu a spojíme ho s bodem K .

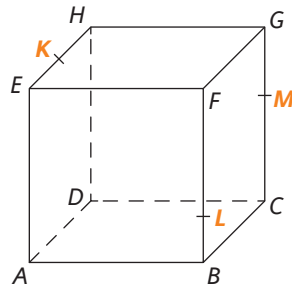
13.

Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou určenou body KLM :

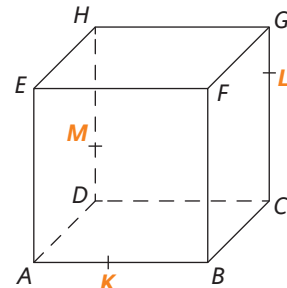
a)



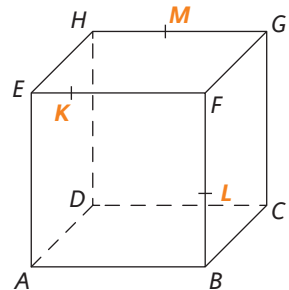
b)



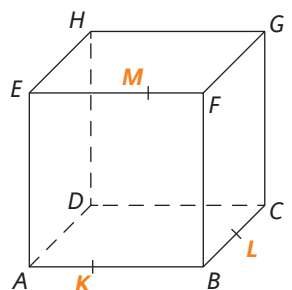
c)



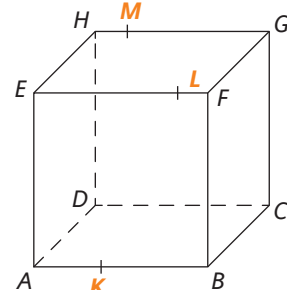
d)



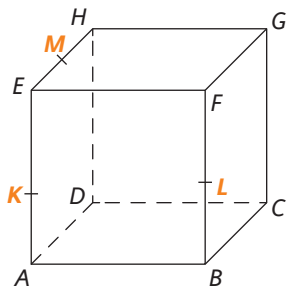
e)



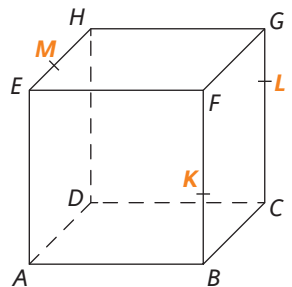
f)



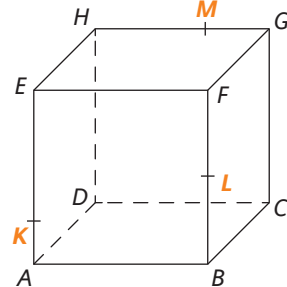
g)



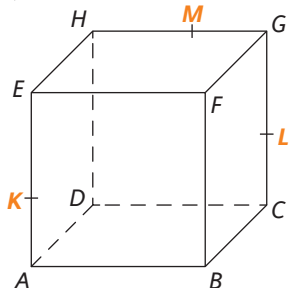
h)



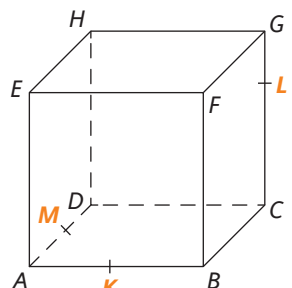
i)



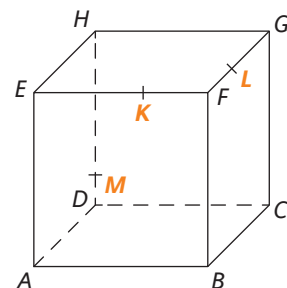
j)

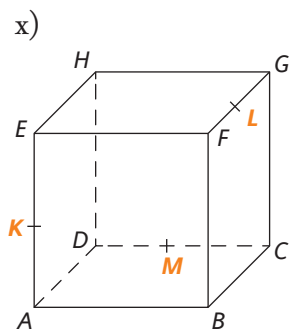
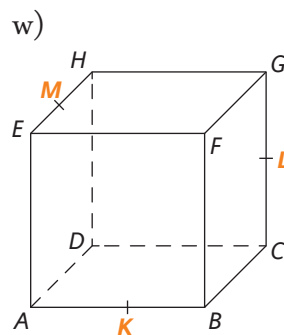
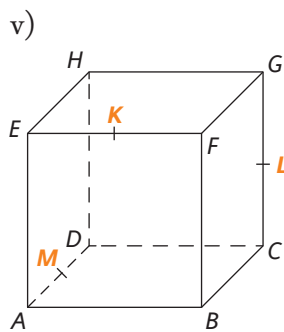
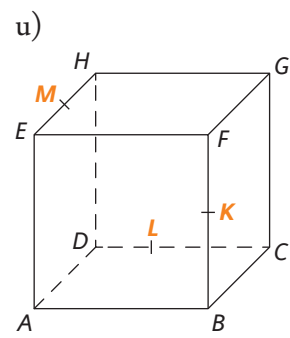
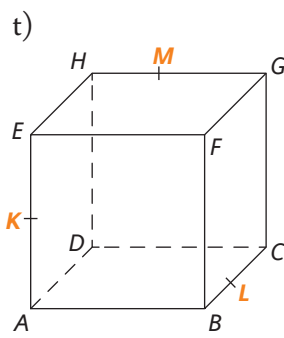
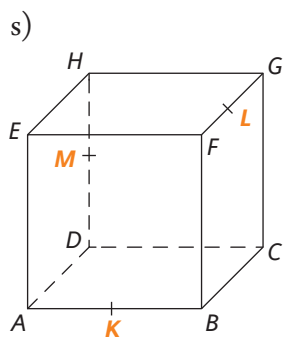
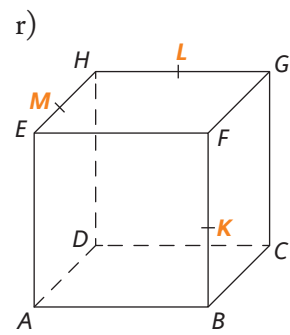
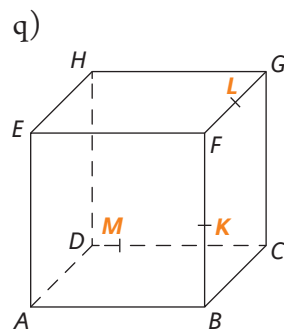
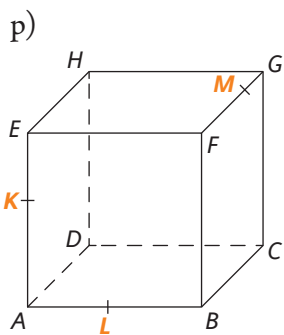
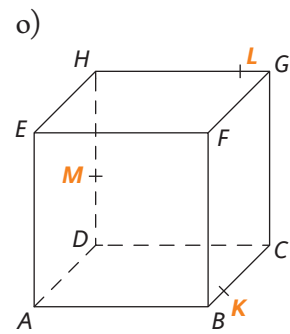
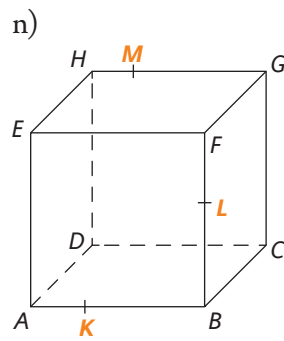
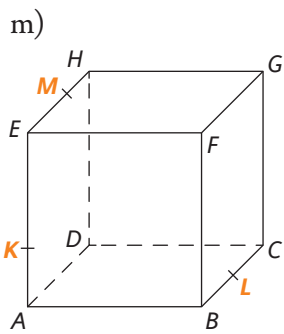


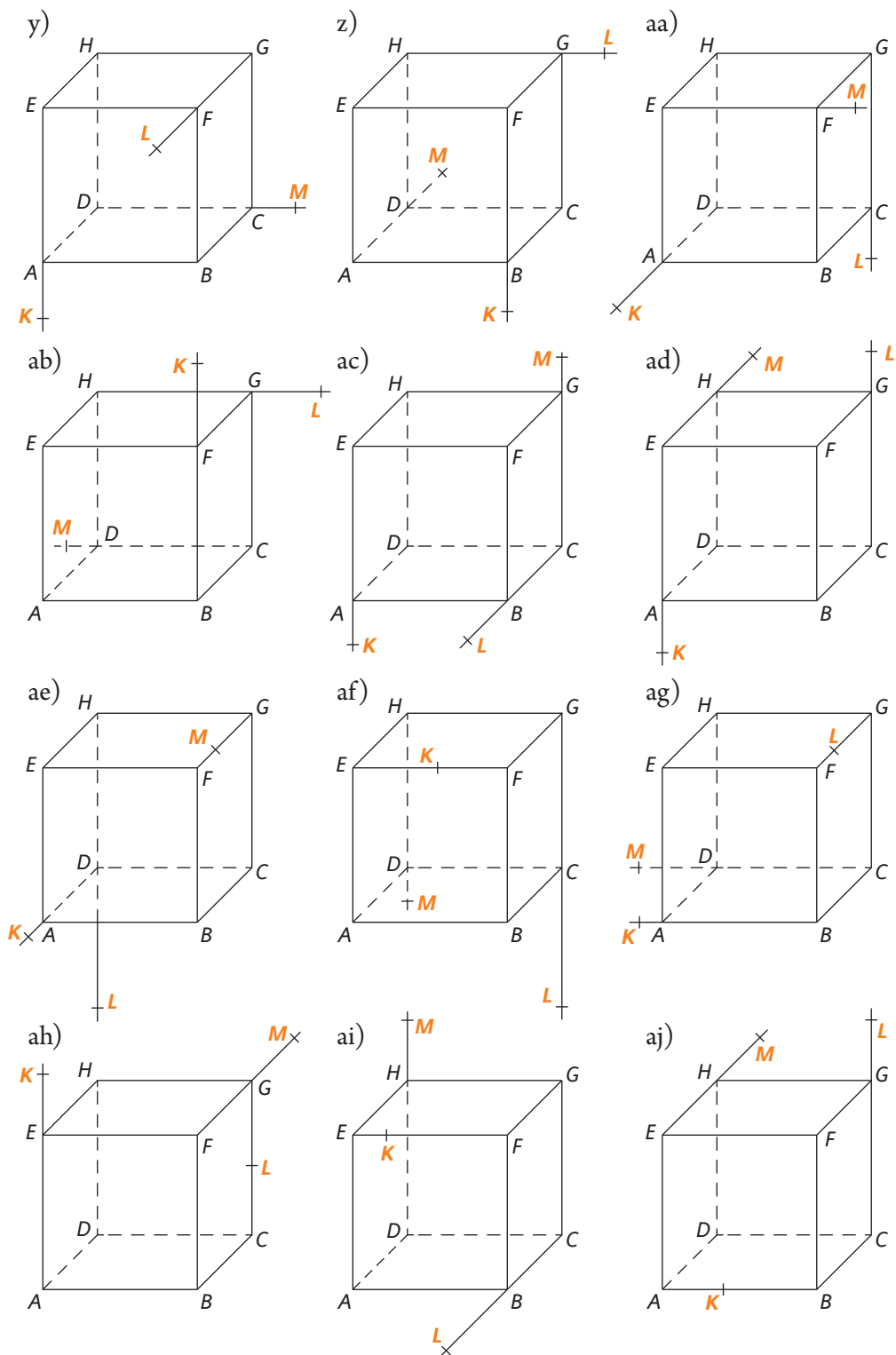
k)

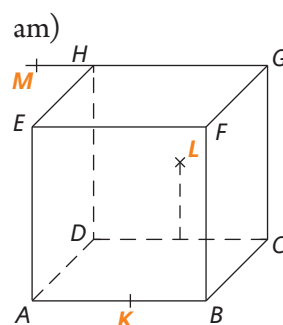
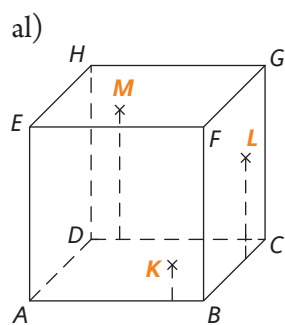
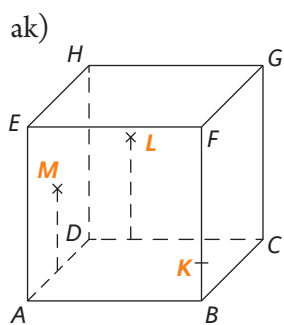


l)





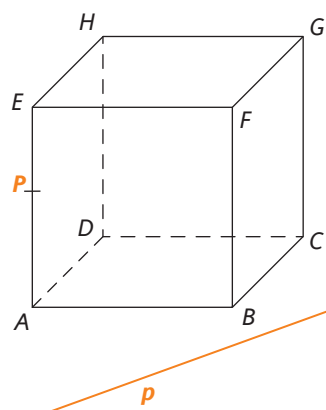




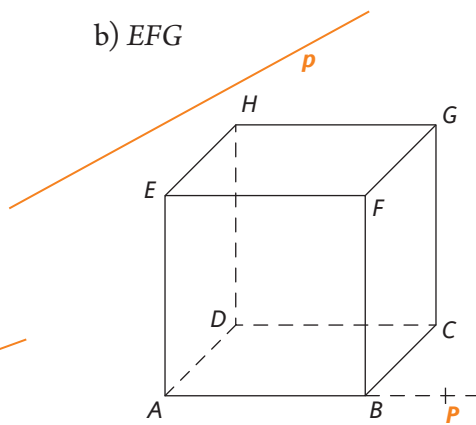
14.

Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou určenou bodem P a přímkou p , jestliže přímkou p leží v rovině:

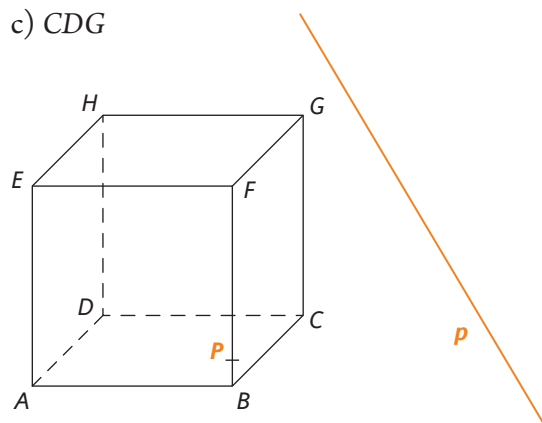
a) ABC



b) EFG



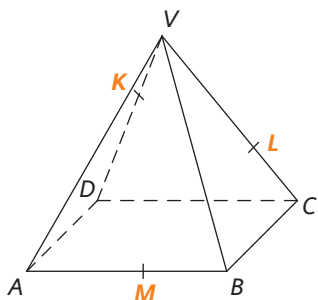
c) CDG



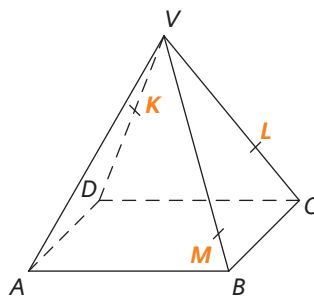
15.

Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ rovinou KLM :

a)

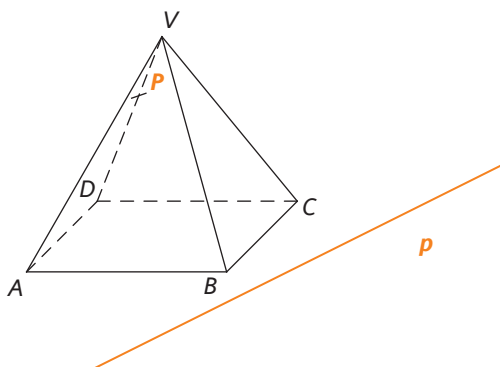


b)



16.

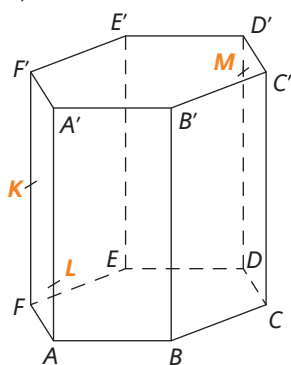
Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ rovinou bodem P a přímkou p , jestliže přímka p leží v rovině ABC .



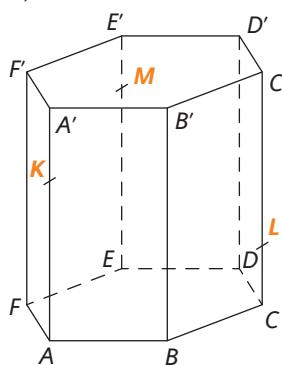
17.

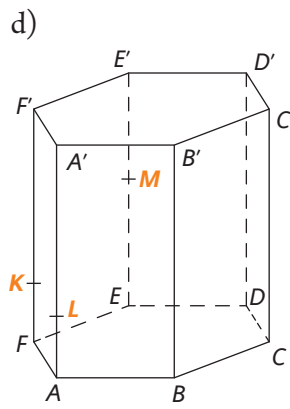
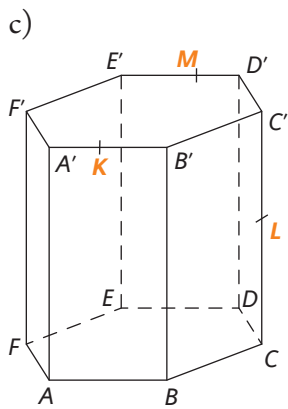
Sestrojte řez pravidelného šestibokého hranolu $ABCDEF A' B' C' D' E' F'$ rovinou KLM :

a)



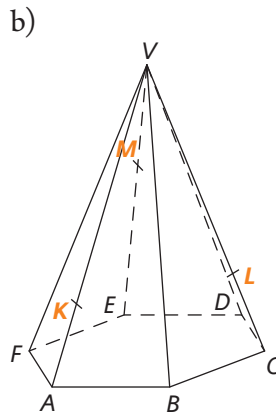
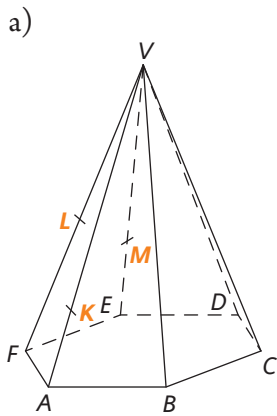
b)





18.

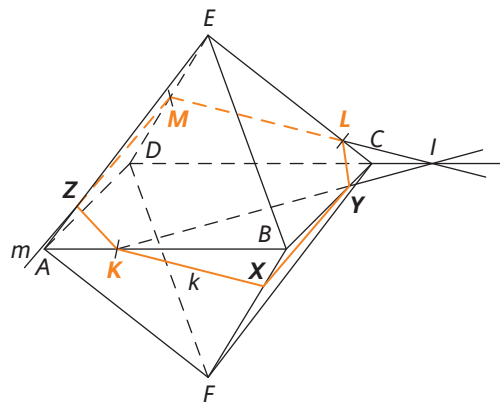
Sestrojte řez pravidelného šestibokého jehlanu $ABCDEFV$ rovinou KLM :



19.

Sestrojte řez pravidelného osmistěnu $ABCDEF$ rovinou KLM .

Řešení:

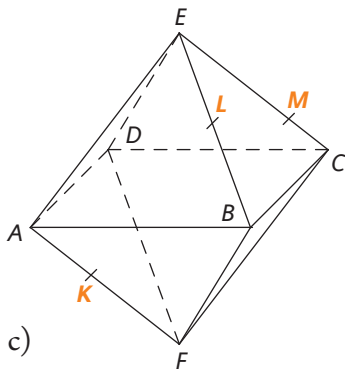


1. Body M, L leží v téže rovině stěny DCE a podle pravidla č. 1 tvoří stranu řezu.
2. Roviny ABF a DCE jsou rovnoběžné, takže podle pravidla č. 2 vedeme bodem K rovnoběžku k s ML .
3. Průnikem přímky k a hrany BF je bod X .
4. Dále už nemůžeme využít žádné pravidlo, musíme tedy sestrojít průsečík přímky LM s rovinou podstavy ABC . V tomto případě průsečík I sestrojíme jako průsečík přímky LM s hranou CD , protože CD je průsečnice rovin ABC a DCE .
5. Sestrojíme přímku KI a její průsečík s hranou BC je další bod řezu Y .
6. Spojíme LY a XY .
7. Podle pravidla č. 2 bodem M vedeme rovnoběžku m s přímkou XY , neboť roviny BCF a ADE jsou rovnoběžné a průsečík přímky m s hranou AE je bod řezu Z .
8. Spojíme ZK .
9. Řez je určen body $KXYLMZ$.

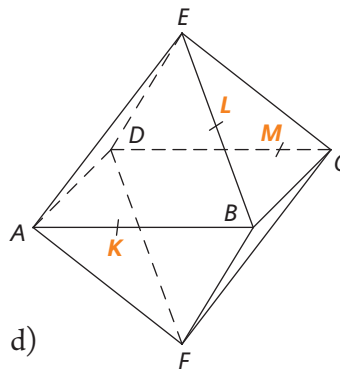
20.

Sestrojte řez pravidelného osmistěnu $ABCDEF$ rovinou KLM :

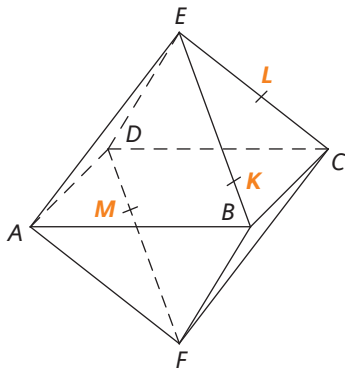
a)



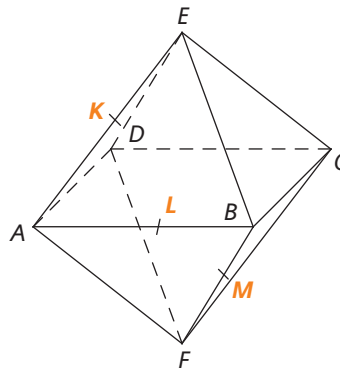
b)



c)



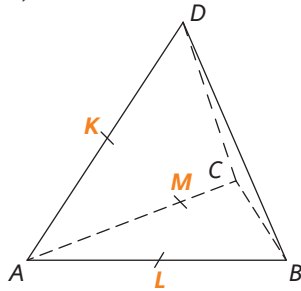
d)



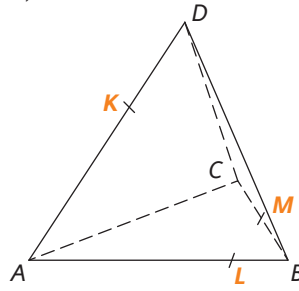
21.

Sestrojte řez pravidelného čtyřstěnu $ABCD$ rovinou KLM :

a)

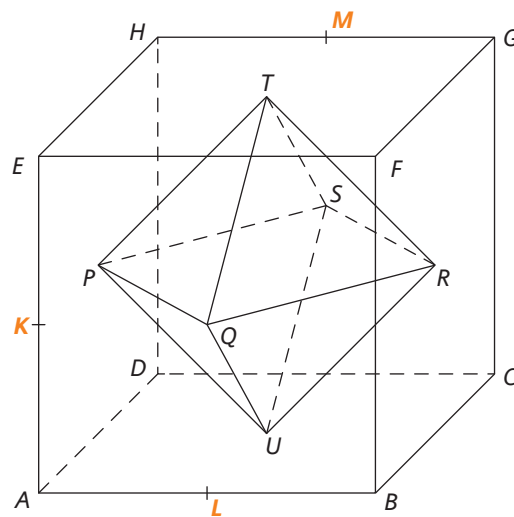


b)



22.

Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ a současně řez pravidelného osmistěnu $PQRSTU$ rovinou KLM .

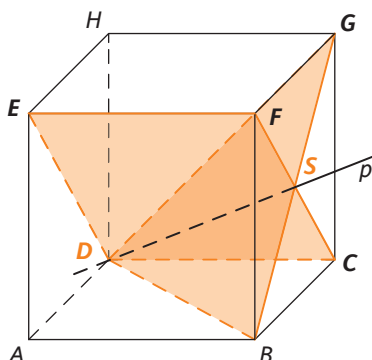


B.4 Vzájemná poloha dvou rovin

23.

Rozhodněte o vzájemné poloze dvou rovin CEF a BDG , je-li dána krychle $ABCDEFGH$, v případě různoběžných rovin sestrojte jejich průsečnici.

Řešení:

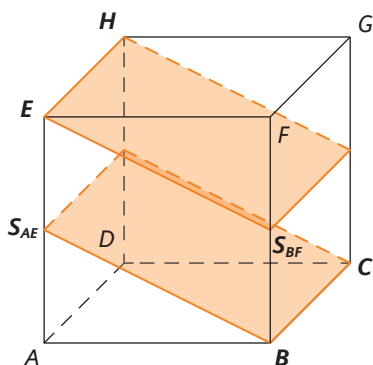


Roviny CEF a BDG jsou různé a mají společný bod D , tedy průsečnice těchto rovin musí procházet bodem D . Dále platí pro různoběžné přímky BG a CF , které leží v rovině stěny krychle BCF , že BG leží v rovině BDG a CF leží v rovině CEF , proto bod $S = BG \cap CF$ náleží současně oběma rovinám a je dalším bodem průsečnice p . Protože je $D \neq S$, je přímka $p = DS$ hledanou průsečnicí rovin CEF a BDG .

24.

Rozhodněte o vzájemné poloze dvou rovin BCS_{AE} a EHS_{BF} , je-li dána krychle $ABCDEFGH$, v případě různoběžných rovin určete jejich průsečnici.

Řešení:



Ukážeme, že rovina EHS_{BF} je rovnoběžná s rovinou BCS_{AE} . V rovině EHS_{BF} si vybere např. přímky EH a ES_{BF} a ukážeme, že tyto přímky jsou rovnoběžné s rovinou BCS_{AE} . Přímka EH je rovnoběžná s přímkou $S_{AE}S_{DH}$ a přímka ES_{BF} je rovnoběžná s přímkou $S_{AE}B$, tedy v rovině EHS_{BF} existují dvě různoběžné přímky rovnoběžné s rovinou BCS_{AE} , a proto jsou roviny BCS_{AE} a EHS_{BF} rovnoběžné.

25.

Rozhodněte o vzájemné poloze dvou rovin, je-li dána krychle $ABCDEFGH$, v případě různoběžných rovin určete jejich průsečnici:

- a) BFS_{AC}, HFS_{EH}
- b) AFH, BDG
- c) EFG, BCS_{AE}
- d) $ABS_{DH}, S_{AB}S_{CG}S_{CH}$
- e) ACE, AFH
- f) EGS_{BC}, BHF
- g) ABG, HFS_{AD}
- h) ABC, FHS_{AE}
- i) ABC, AFH
- j) ACF, CGS_{AB}
- k) $ACH, S_{AB}S_{BC}S_{EF}$
- l) $AS_{EF}S_{EH}, CDS_{FG}$
- m) $BEG, S_{AB}S_{BC}S_{CG}$
- n) $AS_{EF}S_{EH}, CS_{FG}S_{HG}$
- o) $BCS_{AE}, BS_{EF}S_{FG}$
- p) ACS_{DH}, BCS_{EF}

26.

Rozhodněte o vzájemné poloze dvou rovin, je-li dán jehlan $ABCDV$, v případě různoběžných rovin určete jejich průsečnici:

- a) $BVS_{AD}, DS_{BC}S_{CV}$
- b) ACV, BDS_{CV}
- c) BCV, ADV
- d) $ACS_{CV}, VS_{AD}S_{BC}$
- e) $BDV, S_{BC}S_{CV}K, K \in AD \wedge |DK| = 3|AK|$
- f) $ABC, S_{CV}S_{AV}K, K \in BV \wedge |VK| = 3|BK|$
- g) $BCV, S_{AV}CK, K \in AB \wedge |AK| = 3|BK|$

27.

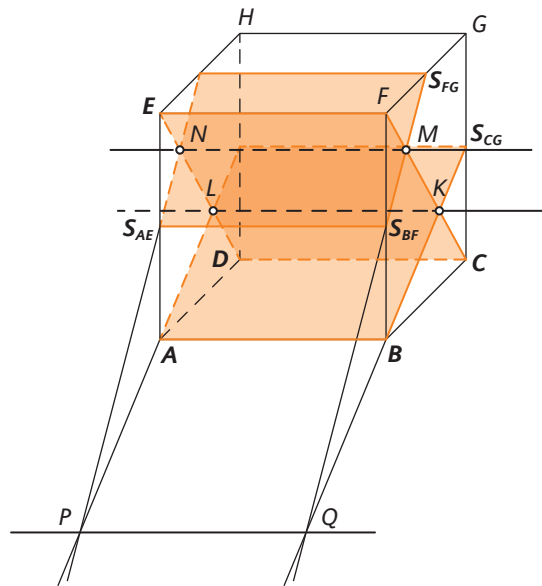
Rozhodněte o vzájemné poloze dvou rovin BDS_{AF} a $S_{AE}S_{BE}S_{CE}$, je-li dán pravidelný osmistěn $ABCDEFGH$.

B.5 Vzájemná poloha tří rovin

28.

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Rozhodněte o vzájemné poloze tří rovin CDE , $S_{AE}S_{BF}S_{FG}$, ABS_{CG} .

Řešení:



Roviny jsou navzájem různoběžné, ale protínají se v navzájem rovnoběžných přímkách. Průsečnicí rovin CDE a ABS_{CG} je přímka KL , kde $K = BS_{CG} \cap CF$, $L = AS_{DH} \cap DE$. Průsečnicí rovin CDE a $S_{AE}S_{BF}S_{FG}$ je přímka MN , kde $M = S_{BF}S_{FG} \cap CF$, $N = S_{AE}S_{EH} \cap DE$. Průsečnicí rovin $S_{AE}S_{BF}S_{FG}$ a ABS_{CG} je přímka PQ , kde $P = AS_{DH} \cap S_{AE}S_{EH}$, $Q = BS_{CG} \cap S_{BF}S_{FG}$. Přímky KL , MN , PQ jsou navzájem rovnoběžné.

29.

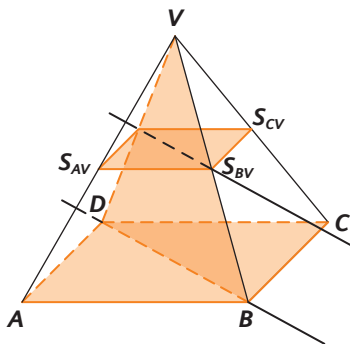
Je dána krychle $ABCDEFGH$. Rozhodněte o vzájemné poloze tří rovin:

- ECC , BDF , ABH
- BCE , ADF , $S_{AE}S_{CG}S_{AF}$
- ADE , BCS_{EF} , $S_{AF}S_{CG}S_{BF}$
- BDG , BDE , $S_{EF}S_{FG}S_{EH}$
- BDH , $S_{AB}S_{AD}S_{AE}$, $S_{FG}S_{GH}S_{CG}$
- AGH , $S_{BF}S_{CG}S_{GH}$, $S_{AE}S_{AB}S_{CD}$

30.

Je dána pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Rozhodněte o vzájemné poloze tří rovin ABC , BDV , $S_{AV}S_{BV}S_{CV}$.

Řešení:



Roviny ABC a $S_{AV}S_{BV}S_{CV}$ jsou navzájem rovnoběžné, protože $AB \parallel S_{AV}S_{BV}$ a $BC \parallel S_{BV}S_{CV}$, tedy třetí rovina BDV protíná tyto dvě rovnoběžné roviny v navzájem rovnoběžných přímkách.

31.

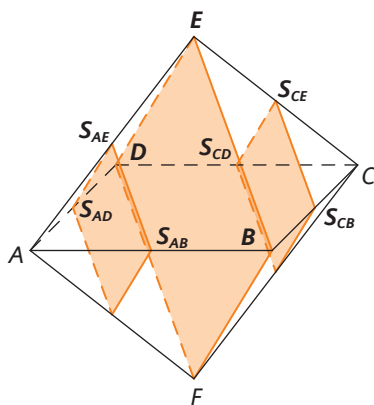
Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Rozhodněte o vzájemné poloze tří rovin:

- a) ACV , BDV , $S_{AV}S_{BV}S_{CV}$
- b) ACV , $S_{AB}S_{BC}S_{BV}$, $S_{AD}S_{CD}S_{DV}$
- c) DBV , $S_{AB}S_{AD}V$, $S_{BC}S_{CD}V$

32.

Je dán pravidelný osmistěn $ABCDEF$. Rozhodněte o vzájemné poloze tří rovin BDE , $S_{AB}S_{AD}S_{AE}$, $S_{CB}S_{CD}S_{CE}$.

Řešení:



Roviny jsou navzájem rovnoběžné, protože $S_{AD}S_{AE} \parallel DE \parallel S_{CD}S_{CE}$ a $S_{AE}S_{AB} \parallel BE \parallel S_{CB}S_{CE}$.

33.

Je dán pravidelný osmistěn $ABCDEFGH$. Rozhodněte o vzájemné poloze tří rovin:

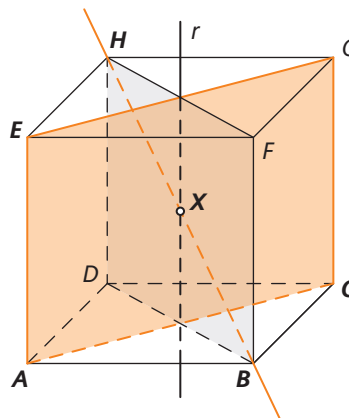
- ABC, BEF, ACE
- $ABS_{CE}, CDS_{AB}, S_{AB}S_{CD}E$

B.6 Vzájemná poloha přímky a roviny

34.

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete průsečík přímky BH s rovinou ACE .

Řešení:



Přímkou BH proložíme vhodnou rovinu, v tomto případě to bude rovina BDH . Sestrojíme průsečnici r těchto rovin. Hledaný průsečík přímky BH a roviny ACE je bod X , který je průsečíkem přímek BH a r .

35.

Je dána krychle $ABCDEFGH$, rozhodněte o vzájemné poloze roviny a přímky, v případě různoběžnosti určete průsečík:

- EC, ABH
- BF, EGC
- FH, BDH
- AG, BHS_{AB}

36.

V krychli $ABCDEFGH$ jsou body P, Q, R, S po řadě středy stěn $ADEH, ABEF, BCFG, CDGH$.

Určete vzájemnou polohu:

- a) přímky PQ a roviny EFG
- b) přímky RS a roviny ABC
- c) přímky QR a roviny DHC
- d) přímky PR a roviny ABF

37.

Je dána krychle $ABCDEFGH$, rozhodněte o vzájemné poloze přímky a roviny, v případě různoběžnosti určete průsečík:

- a) přímky PR a roviny $S_{AB}S_{DC}S_{EF}$, body P, R jsou po řadě středy stěn $ADEH, BCFG$
- b) přímky KL a roviny BDF , bod K leží na AE a platí $|EK| = 2|AK|$, bod L leží na CG a platí $|GL| = 2|CL|$
- c) přímky $S_{BF}S_{DH}$ a roviny $BS_{EF}S_{FG}$
- d) přímky FS_{DH} a roviny $S_{AB}S_{BC}S_{AE}$

38.

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Zjistěte, zda leží:

- a) přímka KD v rovině ABC , bod K leží na BC a platí $|BK| = 2|CK|$
- b) přímka BH v rovině ACG
- c) přímka AD v rovině AFH
- d) přímka PR v rovině ABG , body P, R jsou po řadě středy stěn $ADEH, BCFG$

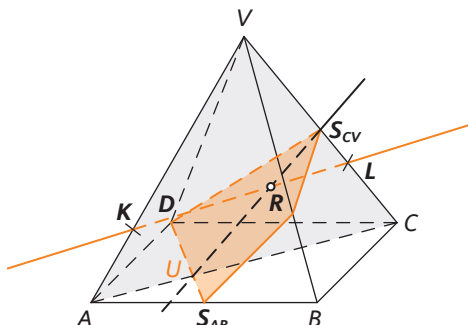
39.

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Zjistěte, zda body E, B a přímka DH leží v jedné rovině.

40.

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Sestrojte průsečík přímky KL s rovinou $S_{AB}DS_{CV}$. Bod K leží na AV a platí $|AK| = 3|VK|$, L leží na CV a platí $|CL| = 3|VL|$.

Řešení:



1. Přímkou KL proložíme vhodnou rovinu, v tomto případě to bude rovina A_{CV} .
2. Sestrojíme průsečnici proložené roviny ACV s danou rovinou $S_{AB}DS_{CV}$. Průsečnicí těchto rovin je přímka US_{CV} , protože přímky AC a $S_{AB}D$ leží v rovině podstavy a mají společný právě jeden bod U . A dalším bodem průsečnice je bod S_{CV} , protože leží na hraně CV .
3. Průsečíkem přímky KL s rovinou $S_{AB}DS_{CV}$ je bod R , což je průsečík přímky KL s průsečnicí US_{CV} .

41.

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Sestrojte průsečík přímky s rovinou:

- a) přímky CS_{AV} s rovinou KLV , K leží na AB a platí $|BK| = 3|AK|$, L leží na CD a platí $|DL| = 3|CL|$
- b) přímky VS_{AC} s rovinou $S_{AB}S_{CV}D$
- c) přímky VS_{AC} s rovinou $AS_{BC}S_{CV}$
- d) přímky CS_{AV} s rovinou KLM , K leží na AB a platí $|AK| = 3|BK|$, L leží na CV a platí $|CL| = 2|VL|$, M leží na DV a platí $|MV| = 3|DM|$
- e) přímky BV s rovinou JKL , J leží na AB a platí $|BJ| = 3|AJ|$, K leží na CV a platí $|VK| = 3|CK|$, L leží na DV a platí $|DL| = 3|LV|$
- f) přímky VS_{BC} s rovinou $S_{AB}S_{AV}S_{CD}$

B.7 Průnik přímky s hranicí tělesa

Průsečík přímky a roviny získáme takto:

1. Přímkou proložíme vhodnou rovinu, která je s danou rovinou různoběžná.
2. Určíme průsečnici těchto rovin.
3. Průsečík dané přímky s průsečnicí je hledaný průsečík přímky s rovinou.

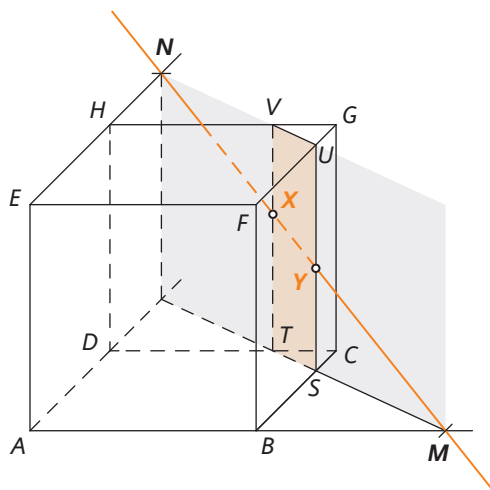
Průnik přímky s hranicí tělesa řešíme podobně jako průsečík přímky s rovinou:

1. Přímku proložíme libovolnou vhodnou rovinou, která protne těleso a je s danou rovinou různoběžná. U hranolů prokládáme zpravidla rovinu, která je rovnoběžná s bočními hranami hranolu, tzv. **směrovou rovinu**. U jehlanů prokládáme danou přímkou zase zpravidla rovinu, která obsahuje vrchol tělesa, tzv. **vrcholovou rovinu**.
2. Sestrojíme řez tělesa touto rovinou.
3. Průsečík dané přímky s řezem je hledaný průsečík přímky s hranicí tělesa.

42.

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete průsečíky přímky MN s hranicí krychle. Bod M leží na AB , bod N leží na EH

Řešení:



Přímkou MN proložíme rovinu rovnoběžnou se svislými hranami krychle (tzv. směrovou rovinu) a určíme její řez $STUV$ s krychlí. Přímka MN protíná hranici tohoto řezu (tj. hranici krychle) v bodech XY .

43.

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete průsečíky přímky PQ s hranicí krychle. Pro body P, Q platí:

- a) $B = S_{AP}, H = S_{QG}$
- b) P leží na $\rightarrow DH$ a platí $|DP| = 1,5|DH|, B = S_{QP}$
- c) P leží na $\rightarrow CB$ a platí $|CP| = 1,5|BC|, Q$ leží na $\rightarrow EH$ a platí $|EQ| = 1,5|EH|$
- d) P leží na $\rightarrow FB$ a platí $|FP| = 1,25|BF|, Q$ leží na $\rightarrow DH$ a platí $|DQ| = 1,25|DH|$

44.

Je dán pravidelný šestiboký hranol $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$. Určete průsečíky přímky MN s hranicí hranolu. Pro body M, N platí:

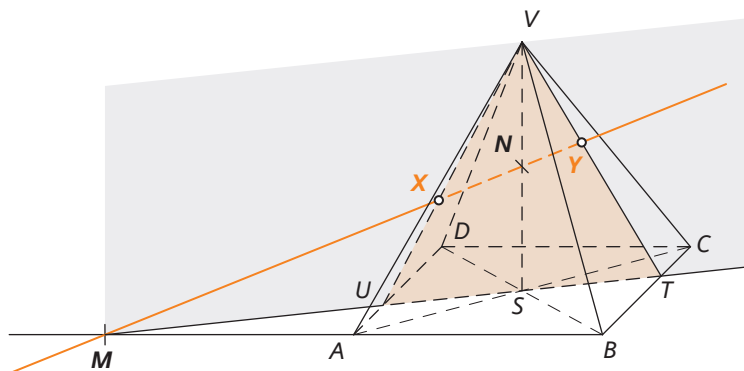
a) $F = S_{ME}$, N leží na $\rightarrow B'C'$ a platí $|B'N| = 1,25|B'C'|$

b) $B = S_{AM}$, N leží na $\rightarrow EE'$ a platí $|EN| = 1,25|EE'|$

45.

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Určete průsečíky přímky MN s hranicí jehlanu. Pro body M, N platí: $A = S_{MB}$, $N = S_{SV}$, bod S je střed podstavy $ABCD$.

Řešení:



Přímku MN proložíme rovinu, která prochází vrcholem jehlanu (tzv. vrcholovou rovinu) a určíme její řez UTV s jehlanem. Přímka MN protíná hranici tohoto řezu (tj. hranici jehlanu) v bodech XY .

46.

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Určete průsečíky přímky PQ s hranicí jehlanu. Pro body P, Q platí:

a) $P = S_{DV}$, $B = S_{AQ}$

b) P leží na $\rightarrow VB$ a platí $|VP| = 1,5|VB|$, $Q = S_{DV}$

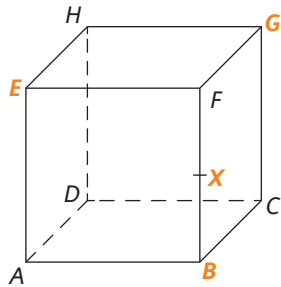
c) $P = S_{AV}$, Q leží na $\rightarrow DC$ a platí $|DQ| = 1,5|DC|$

47.

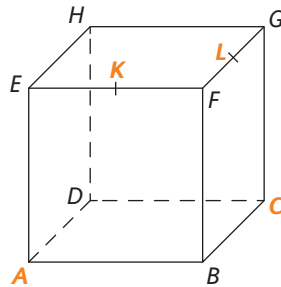
Je dán pravidelný osmistěn $ABCDEF$. Určete průsečíky přímky MN s hranicí osmistěnu. Pro body M, N platí: M leží na $\rightarrow AB$ a platí $|AM| = 1,5|AB|$, N leží na $\rightarrow FD$ a platí $|FN| = 1,25|FD|$.

VÝSLEDKY ÚLOH

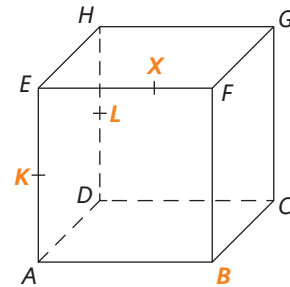
2. a) neleží



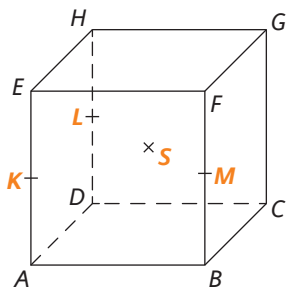
b) leží



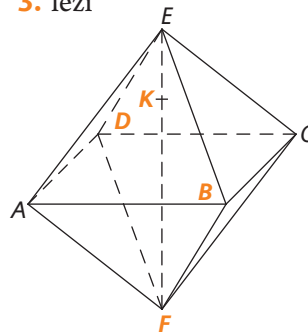
c) neleží



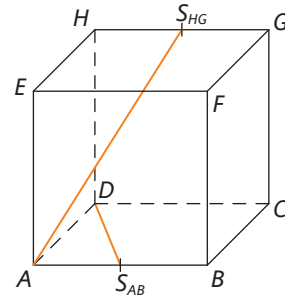
d) leží



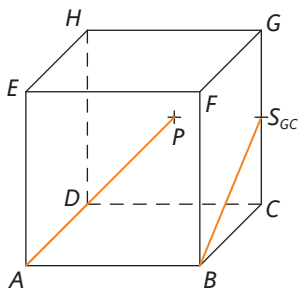
3. leží



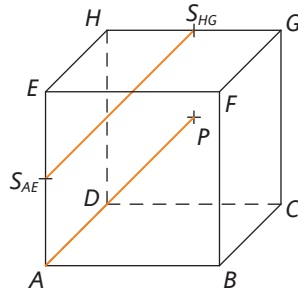
5. a) mimoběžky



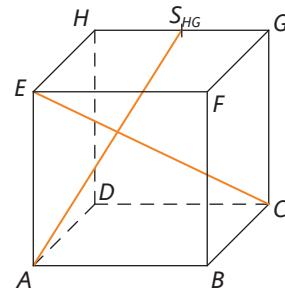
b) různoběžky



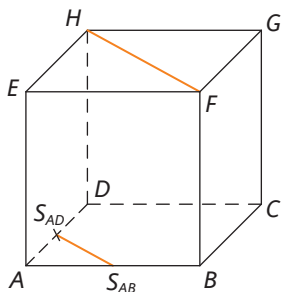
c) rovnoběžky



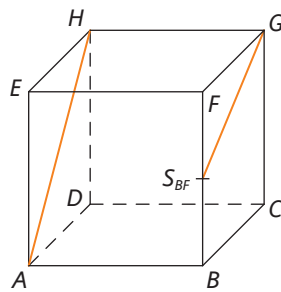
d) mimoběžky



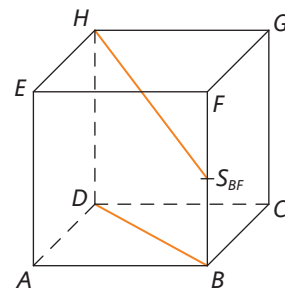
e) rovnoběžky



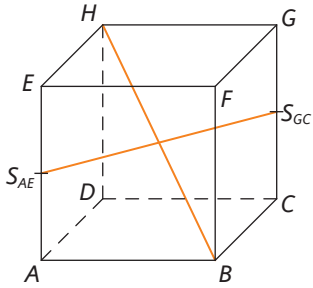
f) mimoběžky



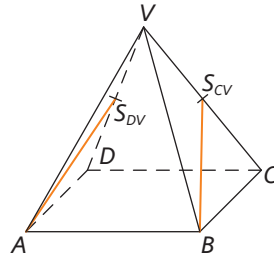
g) různoběžky



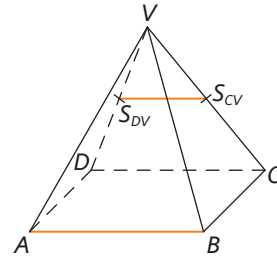
h) různoběžky



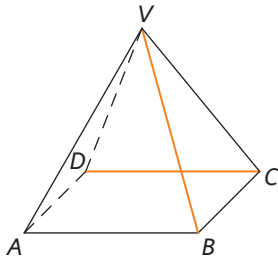
7. a) různoběžky



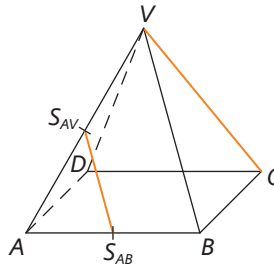
b) rovnoběžky



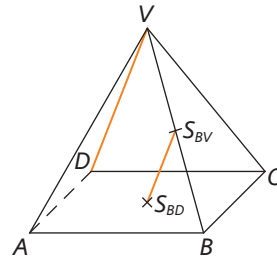
c) mimoběžky



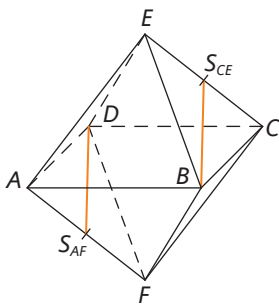
d) mimoběžky



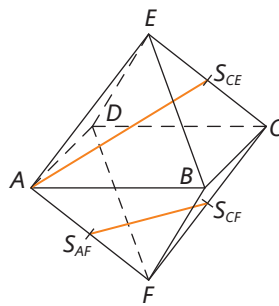
e) rovnoběžky



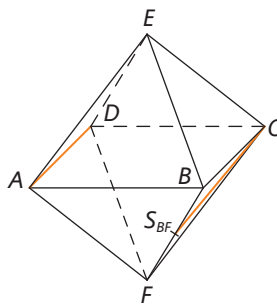
9. a) rovnoběžky



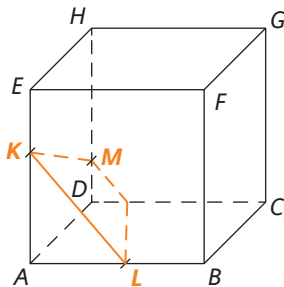
b) různoběžky



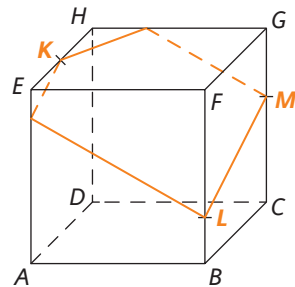
c) mimoběžky



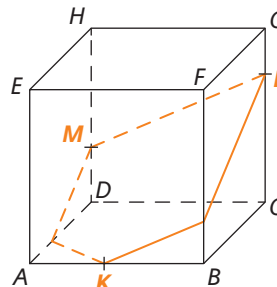
13. a)

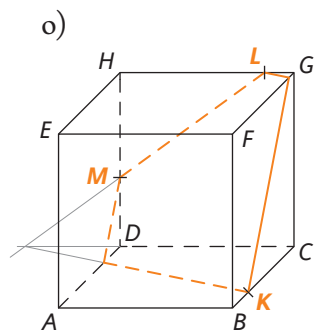
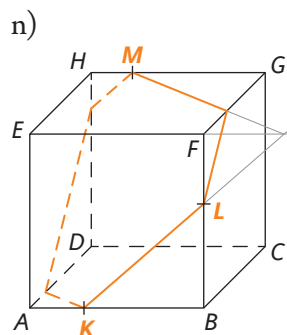
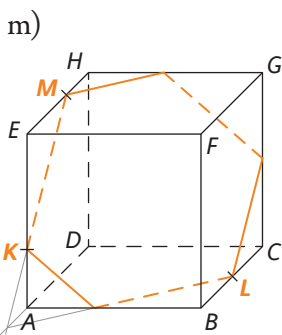
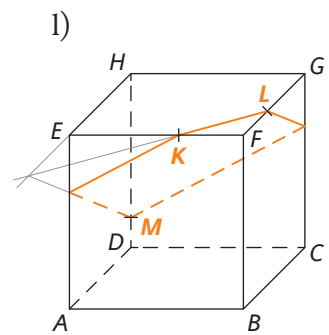
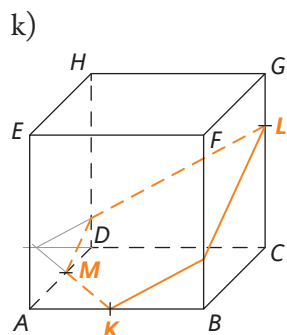
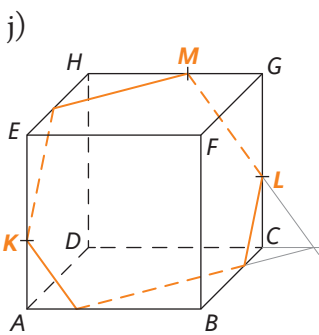
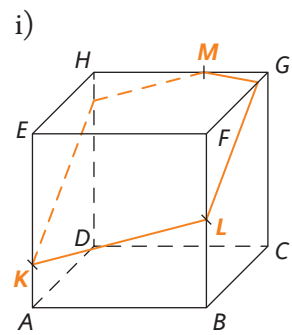
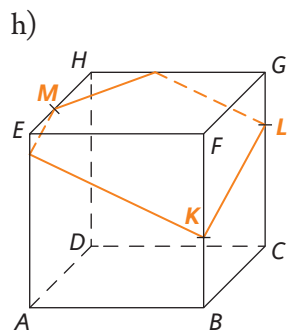
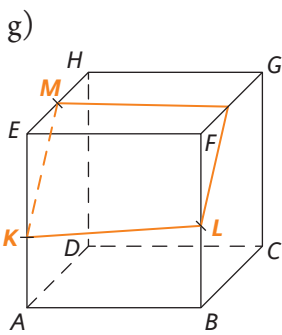
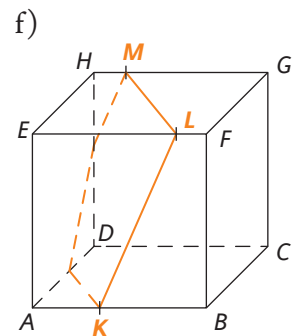
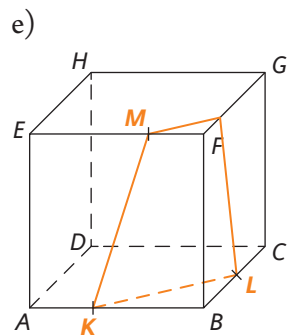
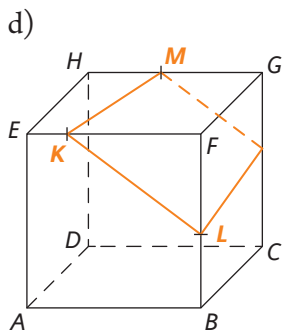


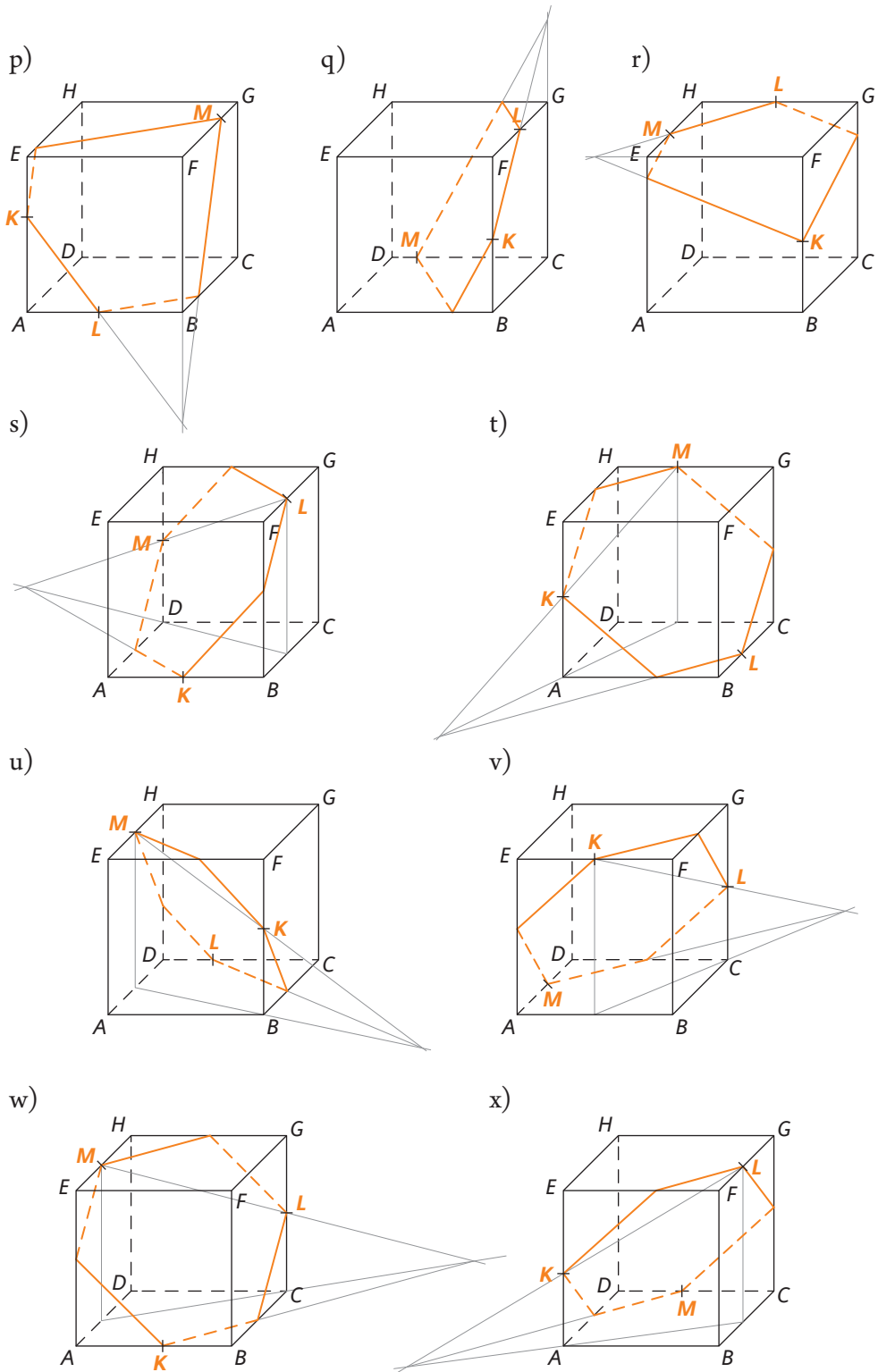
b)

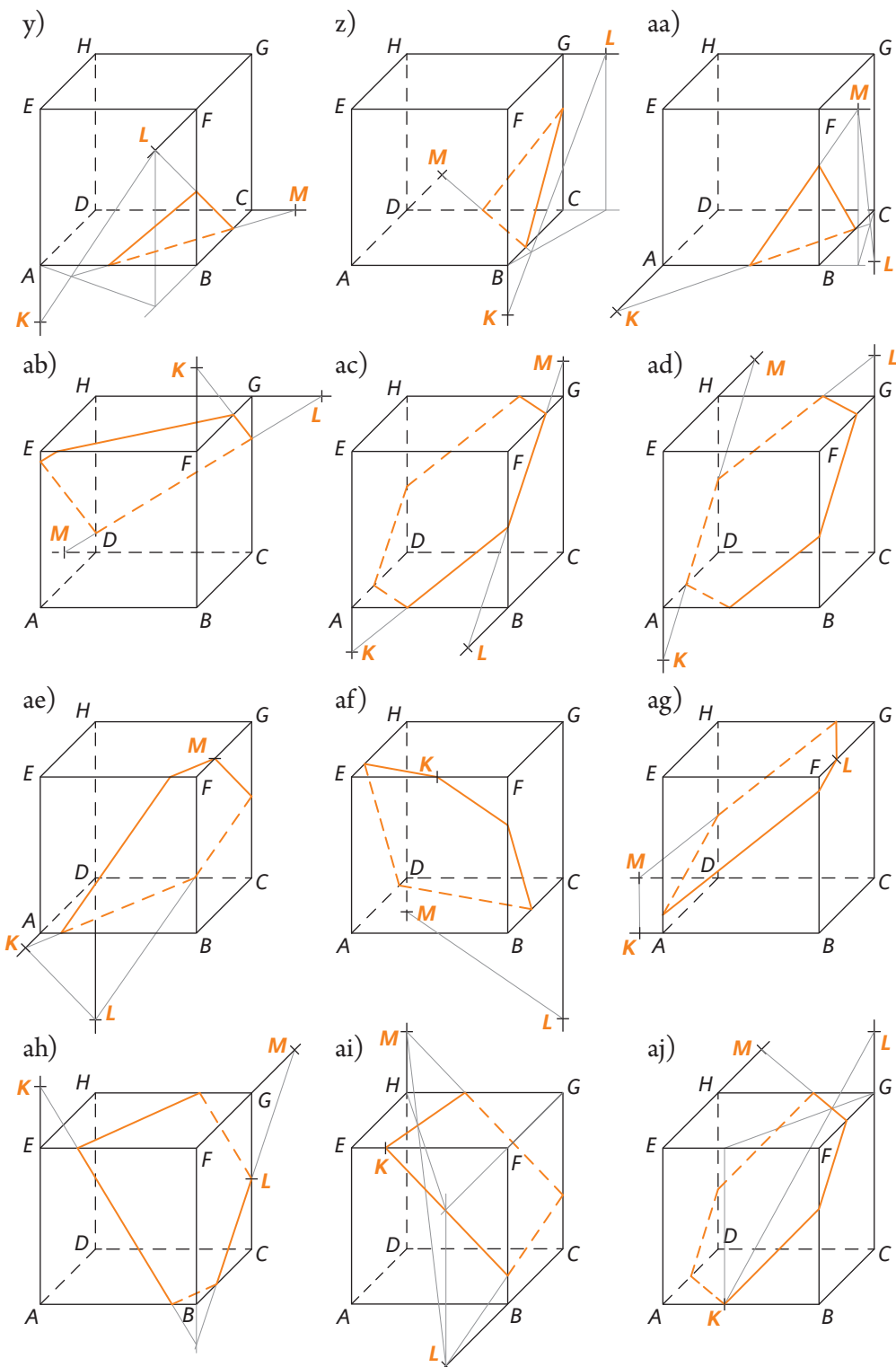


c)

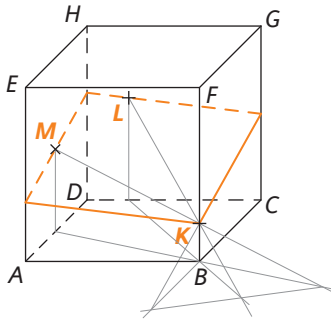




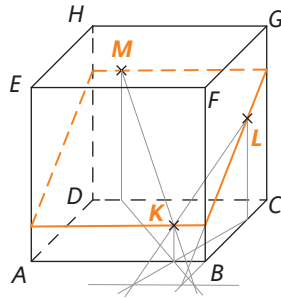




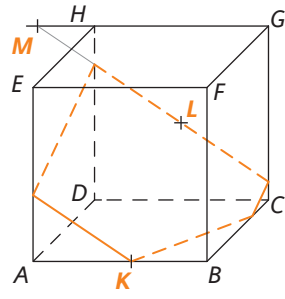
ak)



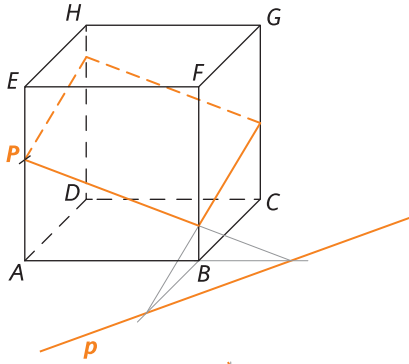
al)



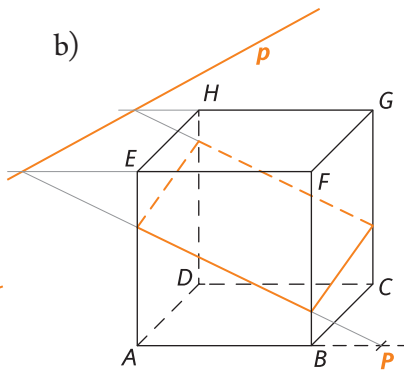
am)



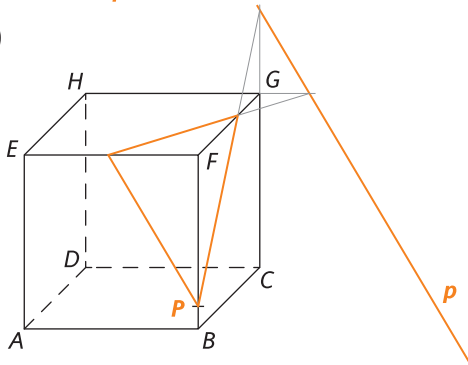
14. a)



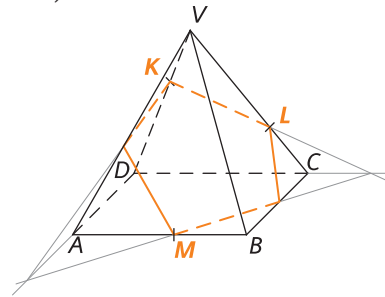
b)



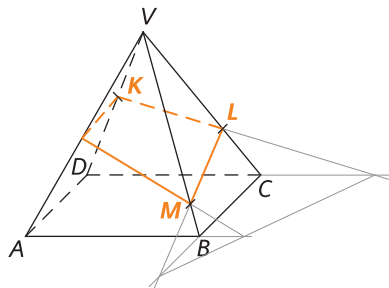
c)



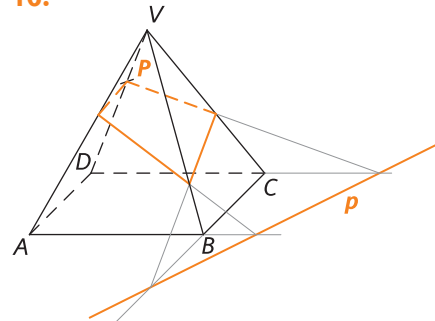
15. a)



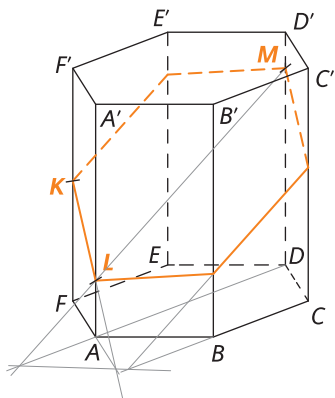
b)



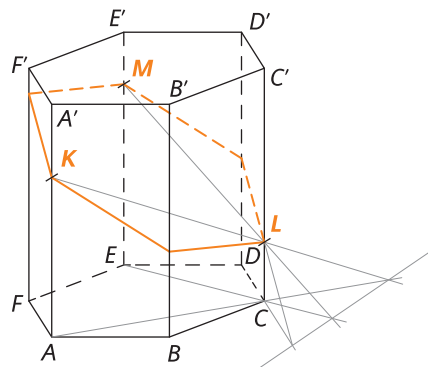
16.



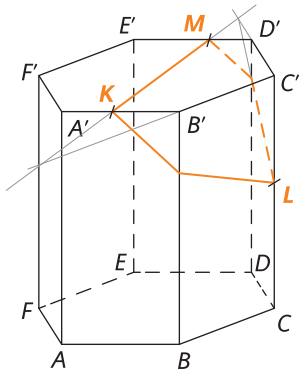
17. a)



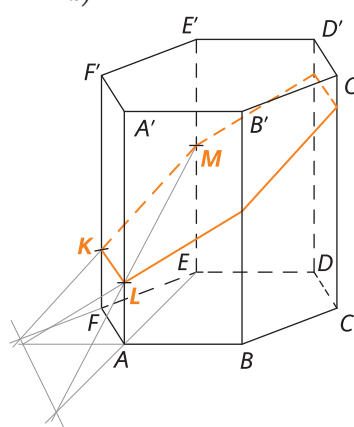
b)



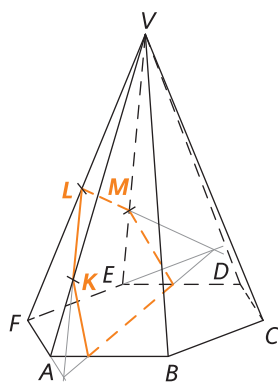
c)



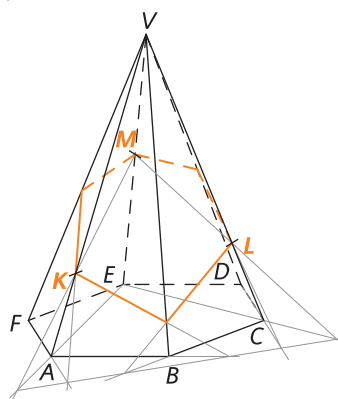
d)



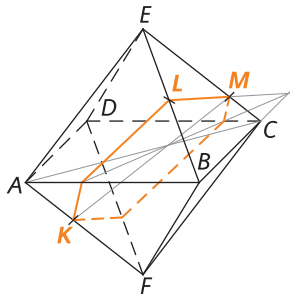
18. a)



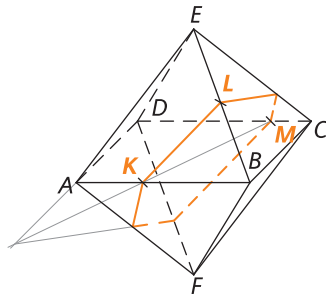
b)



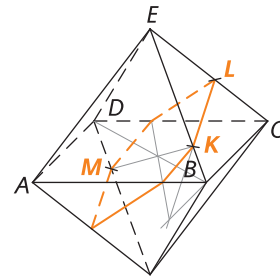
20. a)



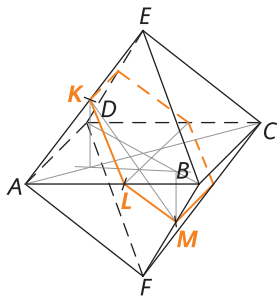
b)



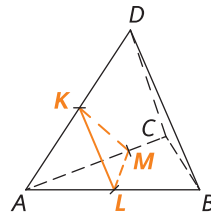
c)



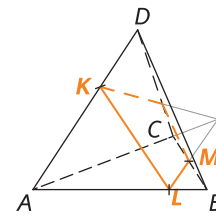
d)



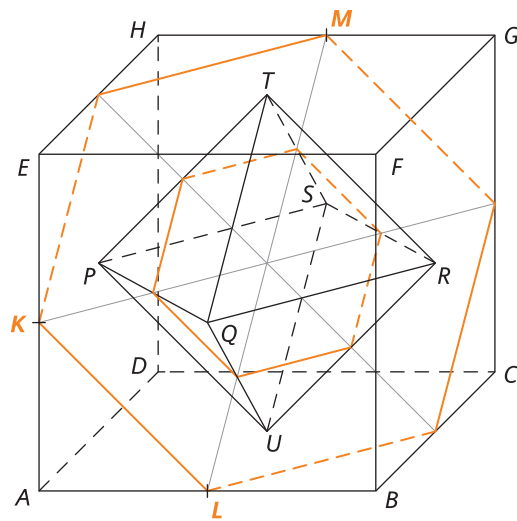
21. a)



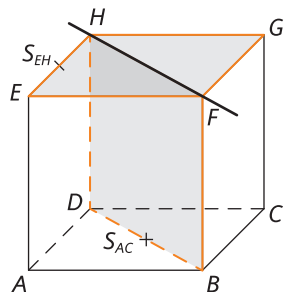
b)



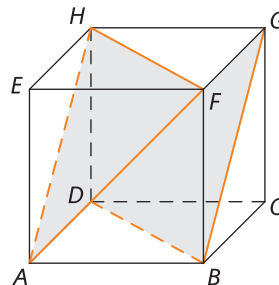
22.



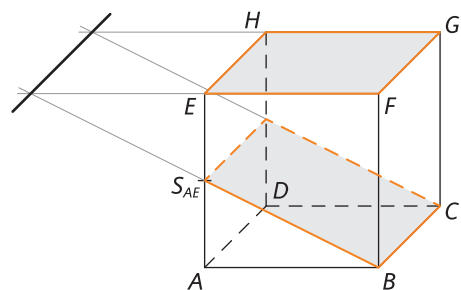
25. a) různoběžné: HF



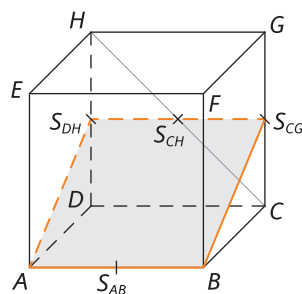
b) rovnoběžné



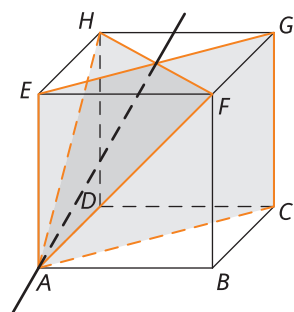
c) různoběžné



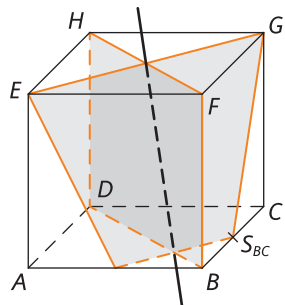
d) splývají



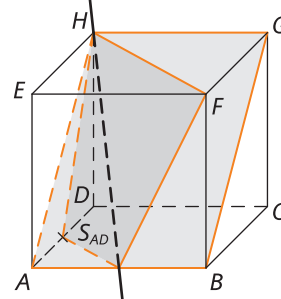
e) různoběžné



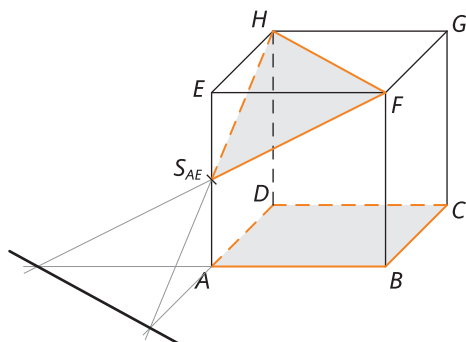
f) různoběžné



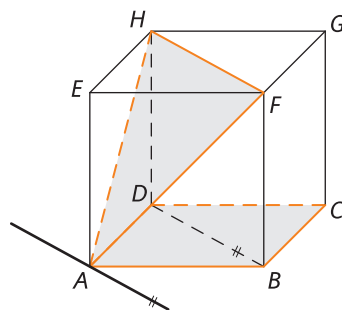
g) různoběžné



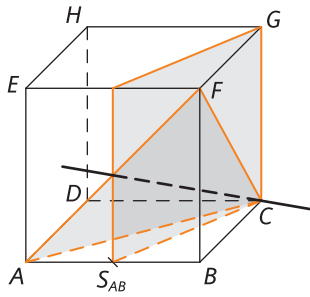
h) různoběžné



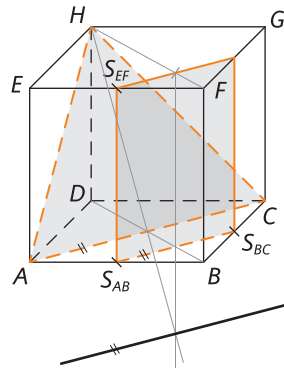
i) různoběžné



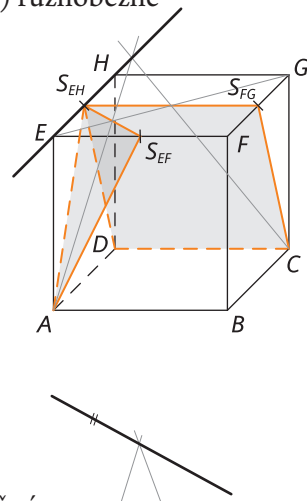
j) různoběžné



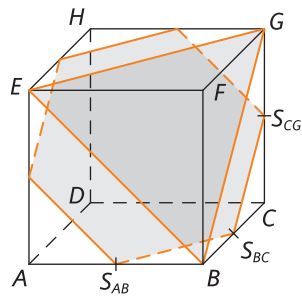
k) různoběžné



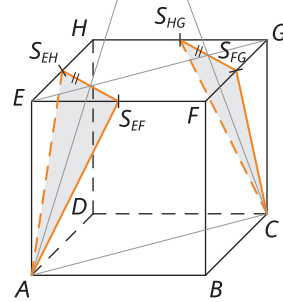
l) různoběžné



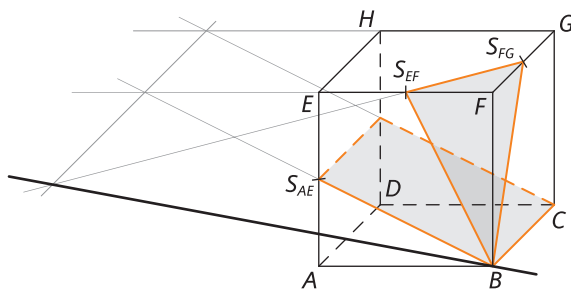
m) rovnoběžné



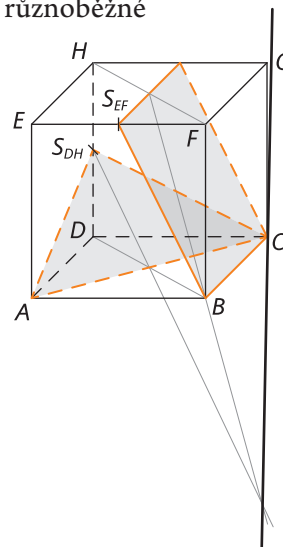
n) různoběžné



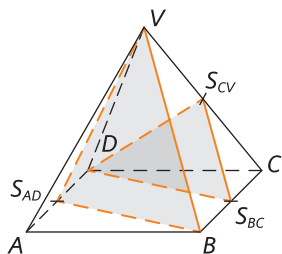
o) různoběžné



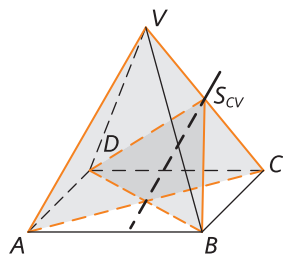
p) různoběžné



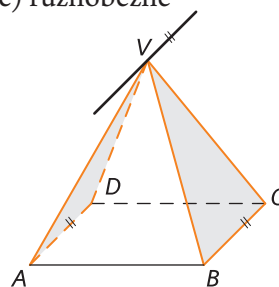
26. a) rovnoběžné



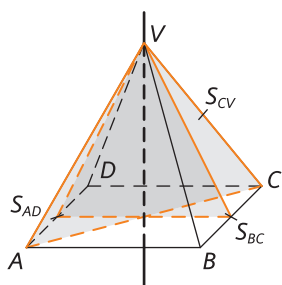
b) různoběžné



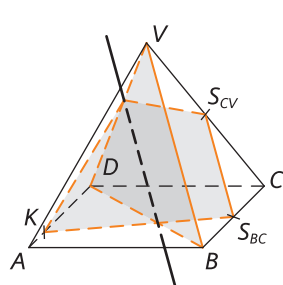
c) různoběžné



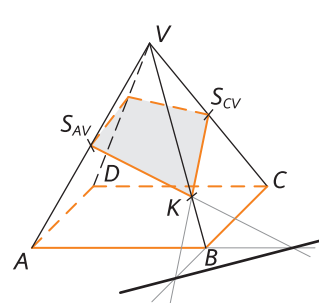
d) různoběžné



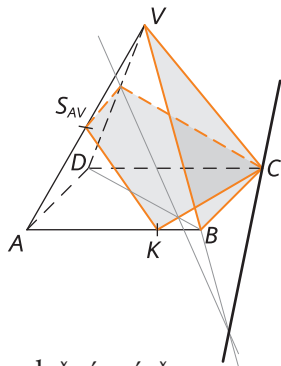
e) různoběžné



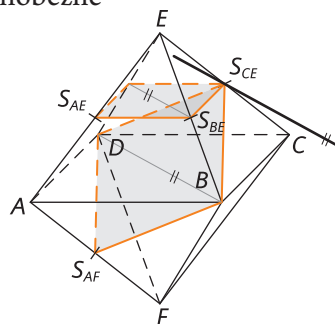
f) různoběžné



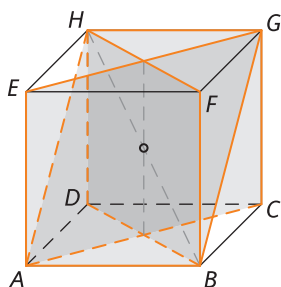
g) různoběžné



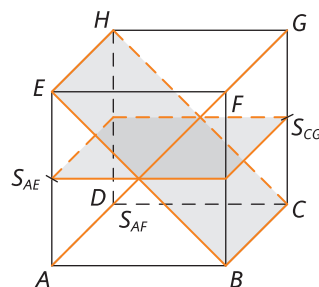
27. různoběžné



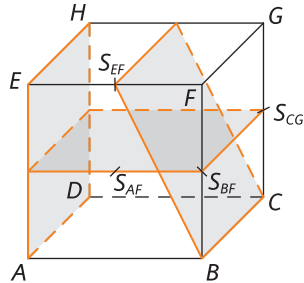
29. a) společný právě jeden bod



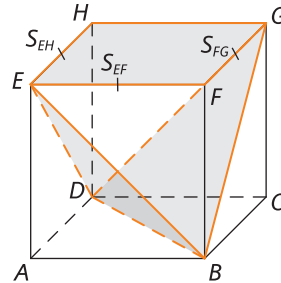
b) protínají se v jedné přímce



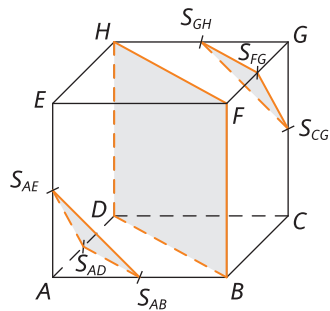
c) protínají se ve třech navzájem rovnoběžných přímkách



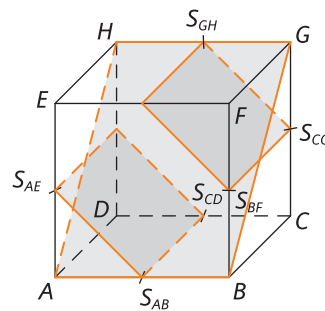
d) protínají se ve třech navzájem rovnoběžných přímkách



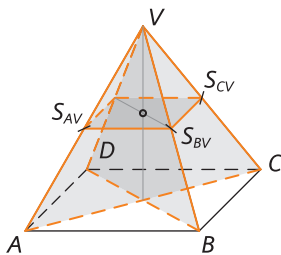
e) roviny $S_{AB}S_{AD}S_{AE}$ a $S_{FG}S_{GH}S_{CG}$ jsou navzájem rovnoběžné, tedy třetí rovina je protíná ve dvou navzájem rovnoběžných přímkách



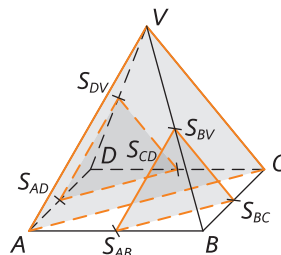
f) roviny $S_{BF}S_{CG}S_{GH}$ a $S_{AE}S_{AB}S_{CD}$ jsou navzájem rovnoběžné, tedy třetí rovina je protíná ve dvou navzájem rovnoběžných přímkách



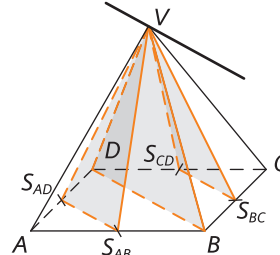
31. a) společný právek jeden bod



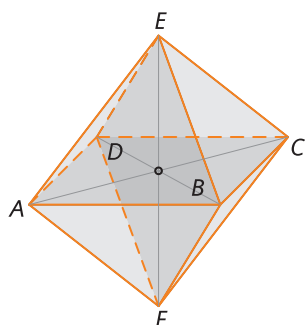
b) navzájem rovnoběžné



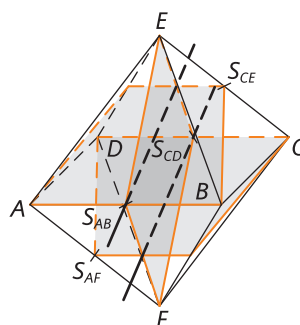
c) protínají se v jedné přímce



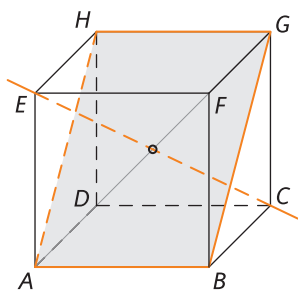
32. a) společný právě jeden bod,
a to střed



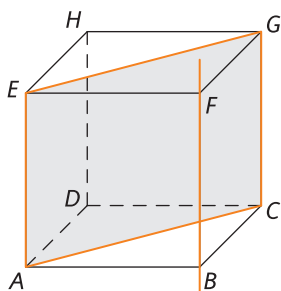
b) roviny ABS_{CE} a CDS_{AF}
jsou navzájem rovnoběžné, tedy
třetí rovina je protíná ve dvou
navzájem rovnoběžných přímkách



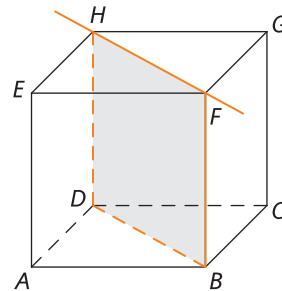
35. a) různoběžné



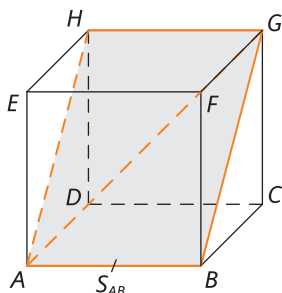
b) rovnoběžné



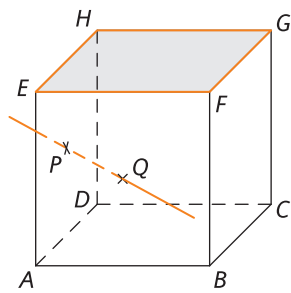
c) $FH \subset BDH$



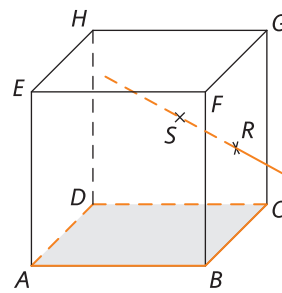
d) $AG \subset BHS_{AB}$



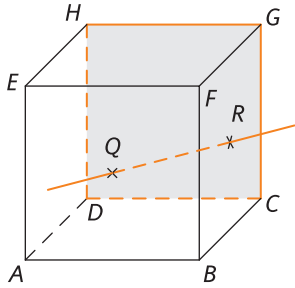
36. a) rovnoběžné



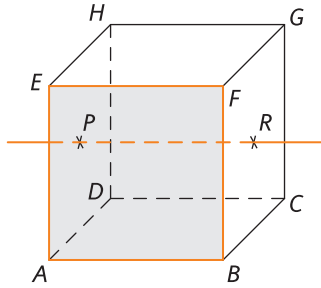
b) rovnoběžné



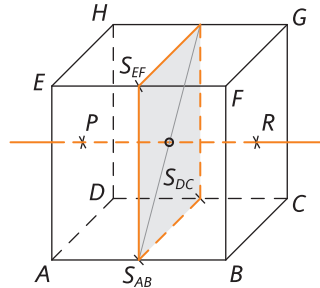
c) různoběžné



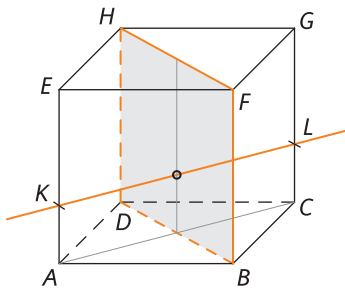
d) rovnoběžné



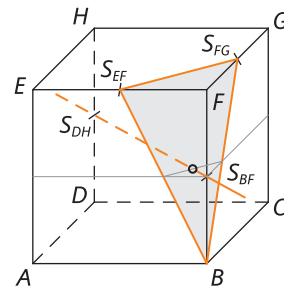
37. a) různoběžné



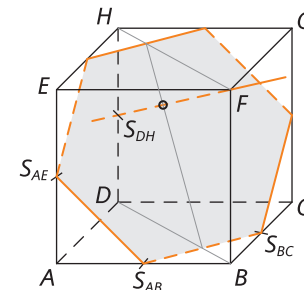
b) různoběžné



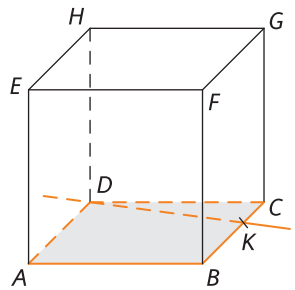
c) rovnoběžné



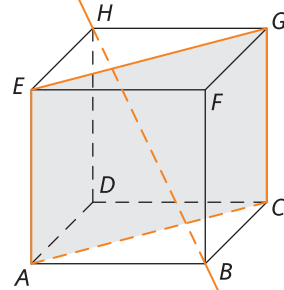
d) různoběžné



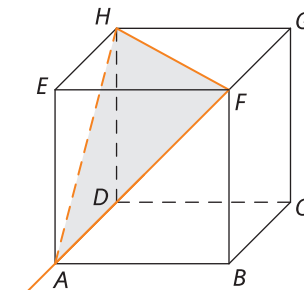
38. a) leží



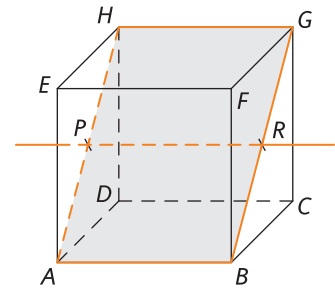
b) neleží



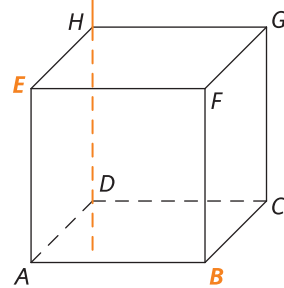
c) neleží



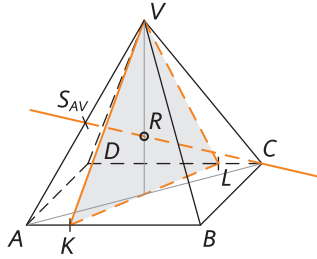
d) leží



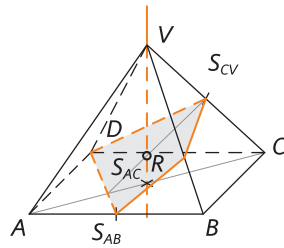
39. neleží



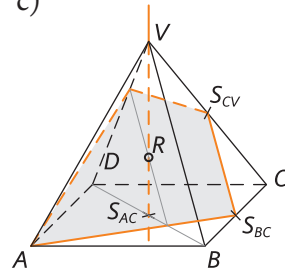
41. a)



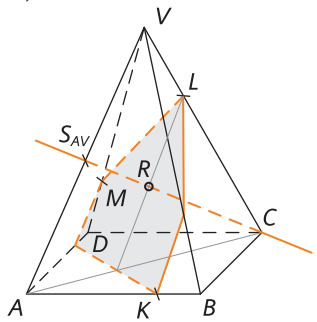
b)



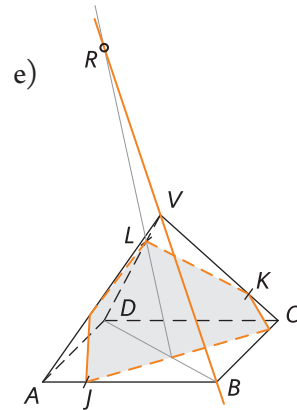
c)



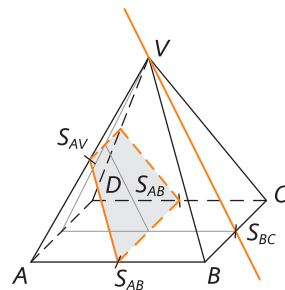
d)



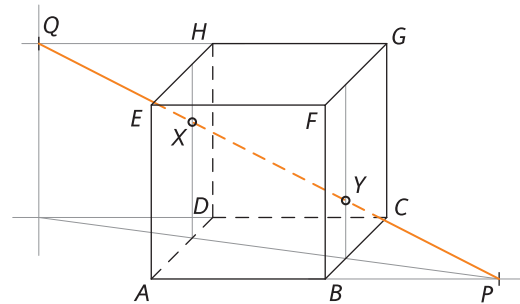
e)



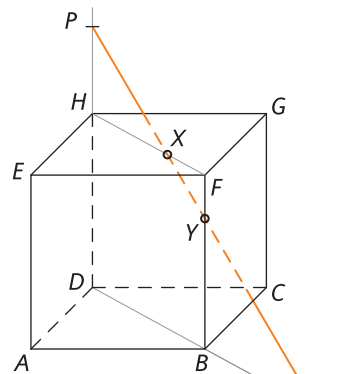
f) rovnoběžné



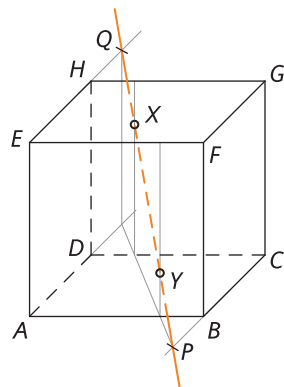
43. a)



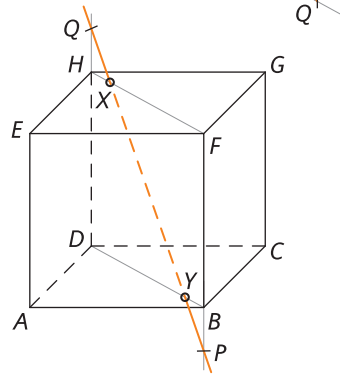
b)



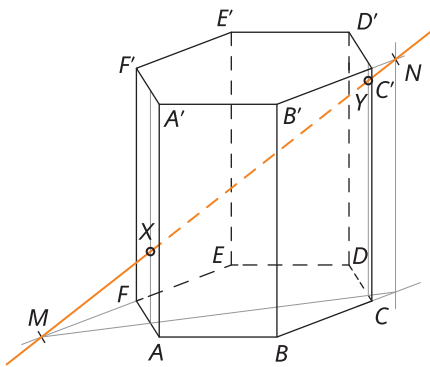
c)



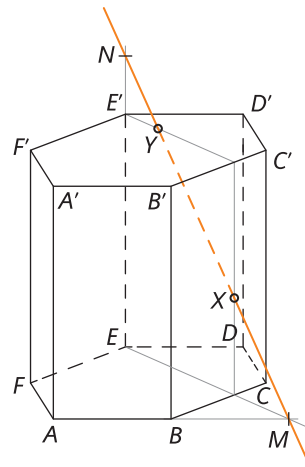
d)



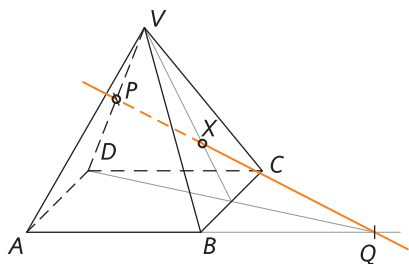
44. a)



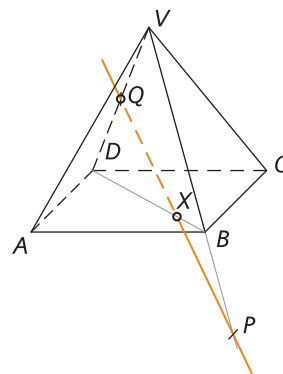
b)



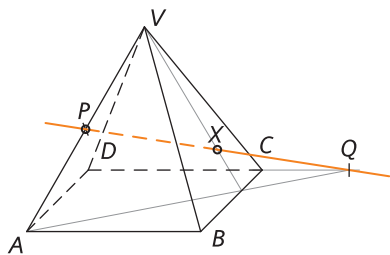
46. a)



b)



c)



47.

