Quételet – Dandelinova věta pro rovinné řezy rotační válcové plochy

Rotační válcová plocha je proťata rovinou, která je kosá k její ose, v elipse. Střed elipsy je na ose válcové plochy, její ohniska jsou dotykové body kulových ploch, které jsou vepsány válcové ploše a dotýkají se roviny řezu. Délka vedlejší poloosy je rovna poloměru válcové plochy.

Důkaz:

Je dána rotační válcová plocha o ose o a poloměru r a rovina řezu σ, která s osou plochy svírá ostrý úhel ω. Zobrazíme je druhý průmět. Druhou průmětnu (nárysnu) zvolíme tak, aby byla kolmá k rovině řezu σ. Rovina σ je tedy promítací a zobrazí se jako přímka. Průmět válcové plochy je ohraničen průměty přímek a_2, b_2. Průmětem řezu e je úsečka $e_2 = A_2B_2$. Válcové ploše vepíšeme dvě kolové plochy $\varkappa', \varkappa''$ tak, aby se dotýkaly roviny řezu (body F', F'' jsou body dotyku. Dotykové kružnice k', k'' válcové plochy a kulových ploch $\varkappa', \varkappa''$ leží v promítacích rovinách λ', λ'', které jsou kolmé k ose plochy. Dotykové body ploch s rovinou řezu označíme F', F''.

Zvolíme libovolnou povrchovou přímku p plochy a stanovíme její průsečík P s rovinou řezu, $P = p \cap \sigma$ Přímka p se dotýká kulových ploch $\varkappa', \varkappa''$ v bodech P', P'', které leží na kružnicích k', k''. Ale také přímky PF', PF'' jsou tečnami kulových ploch $\varkappa', \varkappa''$. Protože délky tečen vedených z bodu ke kulové ploše jsou stejně veliké, platí :

$$|PF'| = |PP'| \quad a \quad |PF''| = |PP''|$$

sečteme: $|PF'| + |PF''| = |PP'| + |PP''| = |P'P''|$

upravíme: $|PF'| + |PF''| = |AB|$

Protože: $\underbrace{|P'P''|}_{\text{strana válce}} = |S'S''|$, z [illegible] $\triangle\ OAS', OBS'' \Rightarrow |S'S''| = |AB|$

$$|AF'| + |AF''| = AB$$

$$|BF'| + |BF''| = AB$$

$$|F'F''| < |AB|$$

Nalezená podmínka říká, že bod P je bodem elipsy e s ohnisky F', F'' a hlavní osou AB. Vedlejší vrcholy C, D dostaneme jako průsečíky válcové plochy s kolmicí vedenou v rovině σ bodem O k přímce AB.

Obráceně: Musíme dokázat, že každý bod elipsy e je bodem řezu. Je-li bod P bodem elipsy e, pak rovina μ protíná válcovou plochu ve dvou povrchových přímkách p, q a jejich průsečíky P, Q jsou dle výše uvedené části důkazu body elipsy e. Oba body tedy leží na průsečnici m, tj. na průměru OP elipsy, protože průměr elipsy ji protíná ve dvou různých bodech, musí uvažovaný bod splynout s jedním z nich. Každý bod elipsy je tedy bodem řezu.

$\mu = oP$ $\qquad\qquad$ $m = \mu \cap \sigma$