Obsah

Úvod

Jako budoucí učitelka matematiky a bývalá studentka gymnázia jsem si vědoma důležitosti výuky stereometrie. Nejen že rozvíjí prostorovou představivost, ale také napomáhá žákům ke zlepšení zručnosti a přesnosti rýsováním. Stereometrie patří mezi obtížnější témata a žáci často a mylně předpokládají, že učivo nezvládnou pochopit, protože nemají dostatečně rozvinutou prostorovou představivost. Právě studiem stereometrie se ji můžou naučit a dále zdokonalovat. Ze strany učitelů je toto téma někdy opomíjené nebo se omezuje pouze na výpočet povrchu a objemu těles.

Příprava na hodinu stereometrie může být pro učitele časově náročná, a proto bylo mým cílem vytvořit pracovní listy, které by jim nejenom pomohly usnadnit přípravu, ale i zkvalitnit výuku. Protože právě zde je nejdůležitější názornost.

K přípravě pracovních listů jsem využila program tzv. dynamické geometrie – GeoGebra. Jedná se volně dostupný software, který obsahuje mnoho užitečných funkcí, ale především se velmi snadno ovládá. Program lze spouštět přímo z webového prohlížeče (na stránkách https://www.geogebra.org/) nebo jej lze zdarma stáhnout. Pracovní listy lze najít na stránce https://www.geogebra.org/u/petralunackova. Veškeré obrázky zařazené do této práce byly rovněž vytvořeny v programu GeoGebra.

Bakalářská práce se skládá ze dvou kapitol. V první kapitole se zaměřuji na popis základních vztahů a polohových vlastností geometrických útvarů a definici rovnoběžného promítání. Druhá kapitola obsahuje popis pracovních listů, jednotlivé konstrukční úlohy a jejich řešení.

1 Stereometrie

V první kapitole této bakalářské práce jsou uvedeny základní vztahy geometrických útvarů v prostoru, věty o vzájemné poloze těchto útvarů, vlastnosti volného rovnoběžného promítání, a nakonec některé věty, které využijeme při řešení konstrukčních úloh v druhé kapitole této bakalářské práce. Text v následujících podkapitolách je převzatý ze zdrojů [1], [2] a [3].

1.1 Polohové vlastnosti

Základními geometrickými útvary jsou ve stereometrii bod, přímka a rovina. Uvažujeme-li dvojice bod a přímka/rovina, přímka a rovina, pak bod leží, resp. neleží na přímce/v rovině, přímka leží, resp. neleží v rovině. Pro vyjádření těchto základních vztahů používáme společný termín tzv. incidence. Pro body, přímky a roviny platí v prostoru následující věty.

Věta 1 Dvěma různými body *A, B* je určena právě jedna přímka *p*.

Věta 2 Přímkou *p* a bodem *A*, který na ní neleží, je určena právě jedna rovina ρ.

Věta 3 Třemi body, které neleží na téže přímce, je určena právě jedna rovina.

Věta 4 Leží-li dva různé body přímky *p* v rovině ρ, pak každý bod přímky *p* leží v rovině ρ.

Věta 5 Dvě přímky *a, b* buď splývají, nebo jsou různé. Jsou-li různé, pak mají společný právě jeden bod, nebo nemají společný žádný bod a leží v téže rovině, nebo nemají žádný společný bod a neleží v žádné rovině.

Přímky *a, b* nazveme:

- rovnoběžné (různé), jestliže nemají žádný společný bod a leží v téže rovině;
- totožné, jestliže mají všechny body společné;
- různoběžné, jestliže mají společný právě jeden bod *R* (bod *R* je průsečík přímek *a, b*) a leží v jedné rovině;
- mimoběžné, jestliže nemají společný bod a neleží v žádné rovině.

Věta 6 Bodem A lze vést právě jednu přímku q rovnoběžnou s přímkou p.

Věta 7 Dvěma různoběžkami a, b je určena právě jedna rovina.

Věta 8 Dvěma různými rovnoběžkami a, b je určena právě jedna rovina.

Věta 9 (Tranzitivnost rovnoběžnosti). Je-li přímka a rovnoběžná s přímkou b a přímka b rovnoběžná s přímkou c, je přímka a rovnoběžná s přímkou c.

Věta 10 Přímka p a rovina ρ, která danou přímkou p neprochází, mají buď společný právě jeden bod, nebo nemají žádný společný bod.

Přímka p a rovina ρ jsou:

- různoběžné, jestliže mají společný právě jeden bod R (bod R se nazývá průsečík přímky p s rovinou ρ);
- rovnoběžné, jestliže nemají žádný společný bod.

Poznámka Také případ, kdy přímka leží v rovině, považujeme za zvláštní případ rovnoběžnosti.

Věta 11 Je-li přímka p rovnoběžná s rovinou ρ, pak každá rovina, obsahující přímku p a různoběžná s rovinou ρ, protíná ρ v přímce rovnoběžné s přímkou p.

Věta 12 (Kritérium rovnoběžnosti přímky a roviny). Je-li přímka p rovnoběžná s některou přímkou q roviny ρ, je rovnoběžná s rovinou ρ.

Věta 13 Je-li přímka a rovnoběžná s přímkou b a přímka b rovnoběžná s rovinou ρ, je přímka a rovnoběžná s rovinou ρ.

Věta 14 Dvě roviny ρ, σ jsou buď různé, nebo splývají. Jsou-li různé, pak buď nemají žádný společný bod, nebo mají společnou právě jednu přímku p.

Věta 15 Mají-li dvě různé roviny ρ, σ společný bod A, pak mají společnou přímku p, která prochází bodem A.

Roviny ρ, σ nazveme:

- různoběžné, jestliže mají společnou přímku p (přímka p je průsečnice rovin ρ, σ);
- rovnoběžné, jestliže nemají žádný společný bod.

Poznámka Také dvě splývající roviny považujeme za rovnoběžné.

Věta 16 Je-li přímka a rovnoběžná s rovinou ρ a rovina ρ rovnoběžná s rovinou σ, je přímka a rovnoběžná s rovinou σ.

Věta 17 Je-li přímka a rovnoběžná s rovinou ρ i s rovinou σ a jsou-li ρ a σ různoběžné, je přímka a rovnoběžná s jejich průsečnicí.

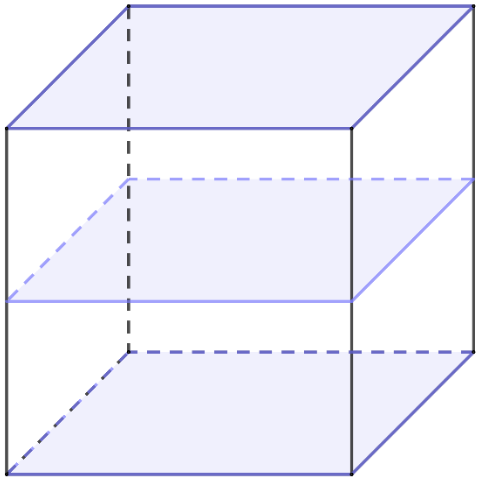
Věta 18 (Kritérium rovnoběžnosti dvou rovin). Obsahuje-li rovina ρ dvě různoběžky, z nichž každá je rovnoběžná s rovinou σ, pak rovina ρ je rovnoběžná s rovinou σ.

Věta 19 Všechny přímky, které procházejí bodem A a jsou rovnoběžné s rovinou ρ, leží v rovině σ rovnoběžné s rovinou ρ.

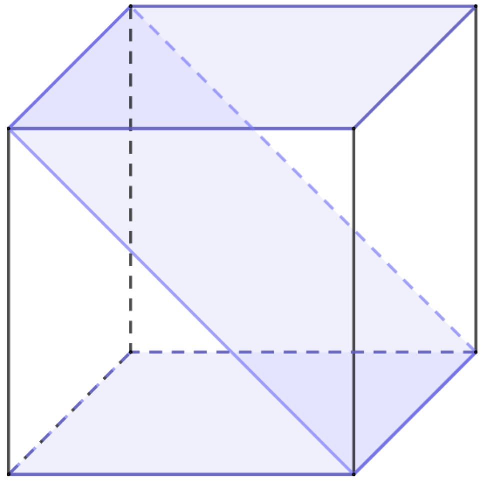
Věta 20 Daným bodem lze k dané rovině vést jedinou rovinu s ní rovnoběžnou.

Pro vzájemnou polohu tří rovin (z nichž žádné dvě nesplývají) nastává právě jedna z těchto možností:

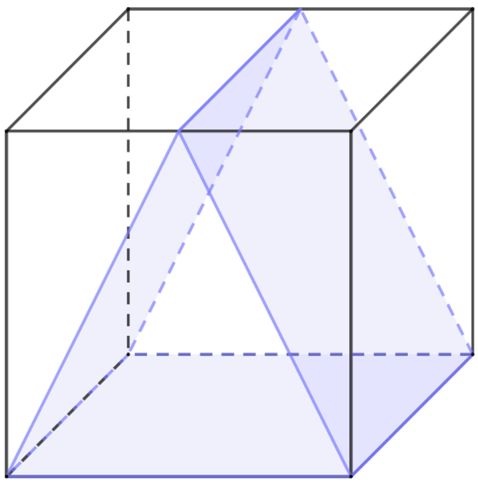
- každé dvě roviny jsou rovnoběžné (obrázek 1);
- dvě roviny jsou rovnoběžné a třetí je s oběma různoběžná; pak průsečnice těchto rovin jsou vzájemně rovnoběžné (obrázek 2);
- každé dvě roviny jsou různoběžné, ale všechny tři průsečnice jsou vzájemně rovnoběžné a různé (obrázek 3);
- každé dvě roviny jsou různoběžné tak, že všechny tři průsečnice splynou (všechny tři roviny mají společnou právě jednu přímku) (obrázek 4);
- všechny tři roviny mají společný právě jeden bod; pak každé dvě roviny jsou různoběžné a jejich průsečnice jsou tři různé přímky, procházející společným bodem všech tří rovin (obrázek 5).



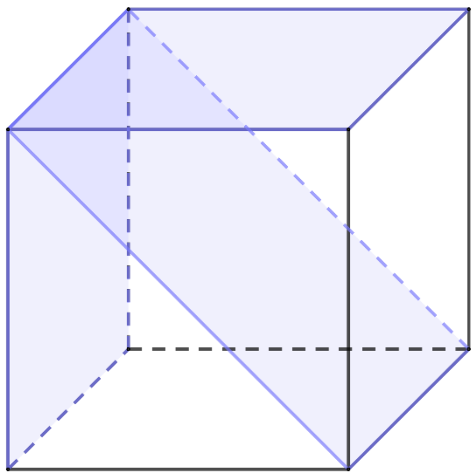
Obrázek 1



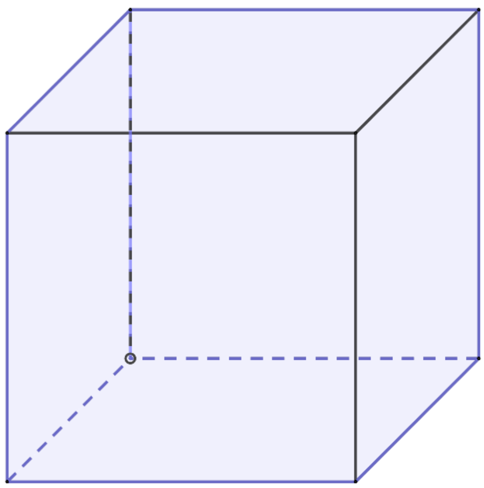
Obrázek 2



Obrázek 3



Obrázek 4



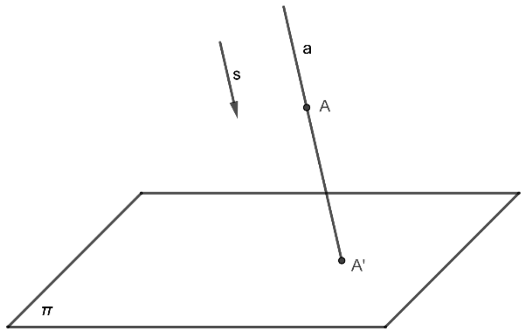
Obrázek 5

Věta 21 (Tranzitivnost rovnoběžnosti rovin). Je-li rovina ρ rovnoběžná s rovinou σ a je-li rovina σ rovnoběžná s rovinou τ, pak je ρ rovnoběžná s τ.

Věta 22 Je-li rovina ρ rovnoběžná s rovinou σ a je-li rovina τ různoběžná s rovinou ρ, pak je různoběžná i s rovinou σ; přitom průsečnice $\rho \cap \tau$, $\sigma \cap \tau$ jsou rovnoběžné.

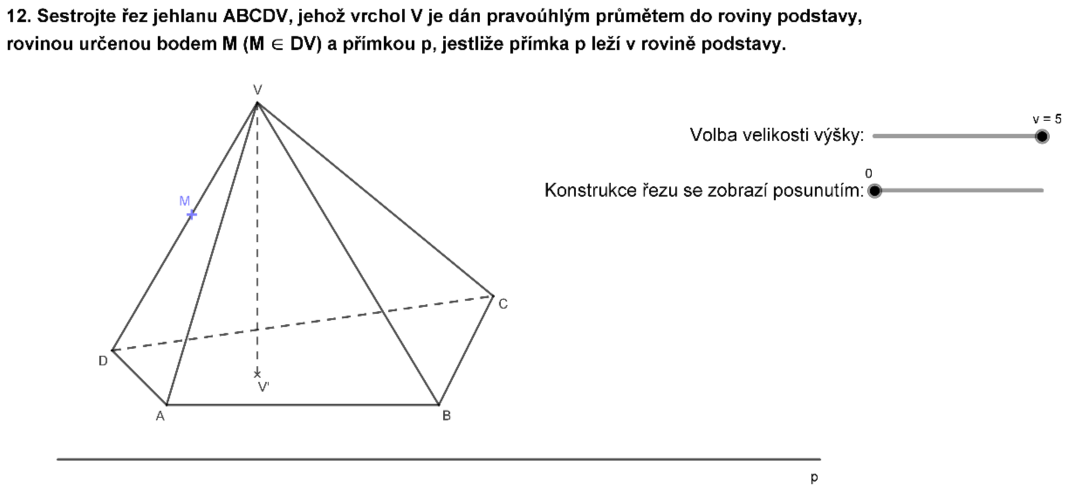
1.2 Volné rovnoběžné promítání

K zobrazení prostorových útvarů do roviny nejčastěji používáme volné rovnoběžné promítání. Rovnoběžné promítání je určeno rovinou π, kterou nazýváme průmětna, a směrem promítání s, jehož přímky nejsou rovnoběžné s rovinou π. Obrazem libovolného bodu A prostoru je průsečík A' přímky a, jdoucí bodem A a patřící směru s, s průmětnou π. Přímka $a \in s$ se nazývá promítací přímka bodu A, bod A' je (rovnoběžný) průmět bodu A. Přímky rovnoběžné s průmětnou budeme nazývat průčelné a přímky kolmé k průmětně hloubkové (podobně pro roviny).



Obrázek 6: Rovnoběžné promítání

Jsou-li přímky směru promítání *s* kolmé k průmětně *π*, pak příslušné rovnoběžné promítání nazýváme pravoúhlé. Tohoto promítání využijeme v pracovním listu č. 12, kde vrchol *V* jehlanu *ABCDV* je dán pravoúhlým průmětem do roviny podstavy (obrázek 7).

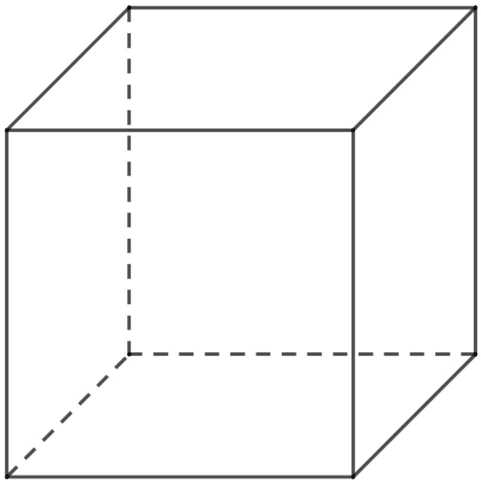


Obrázek 7: Náhled pracovního listu č. 12

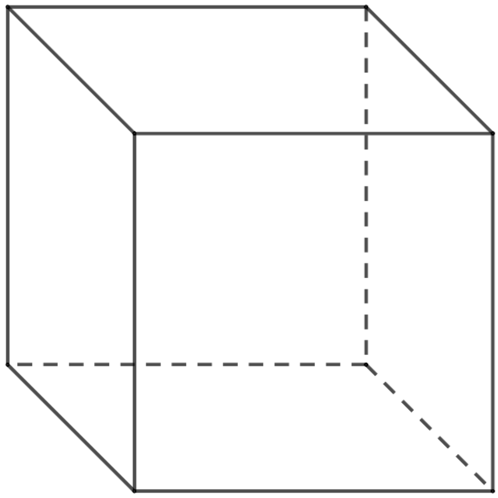
Při zobrazování geometrických útvarů ve volném rovnoběžném promítání dodržujeme následující pravidla.

1. Body zobrazujeme jako body.
2. Přímky zobrazujeme jako přímky nebo jako body.
3. Zachovává se incidence bodů a přímek.
4. Rovnoběžné přímky zobrazujeme jako rovnoběžky nebo jako body.
5. Zachovává se poměr velikostí rovnoběžných úseček.
6. Obrazce ležící v rovinách rovnoběžných s průmětnou (průčelních) se zobrazují ve skutečné velikosti.
7. Obrazy přímek kolmých k průmětně (hloubkových) kreslíme tak, aby svíraly s vodorovnou přímkou průmětny úhel o velikosti 45˚.
8. Obrazy úseček na hloubkových přímkách zkracujeme na polovinu jejich skutečné velikosti.

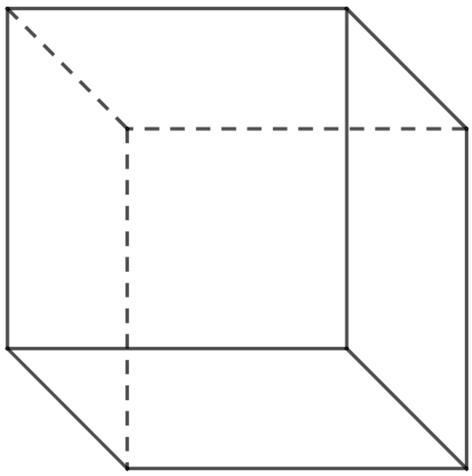
Tělesa můžeme ve volném rovnoběžném promítání zobrazovat v nadhledu (obrázky 8 a 9) nebo podhledu (obrázky 10 a 11).



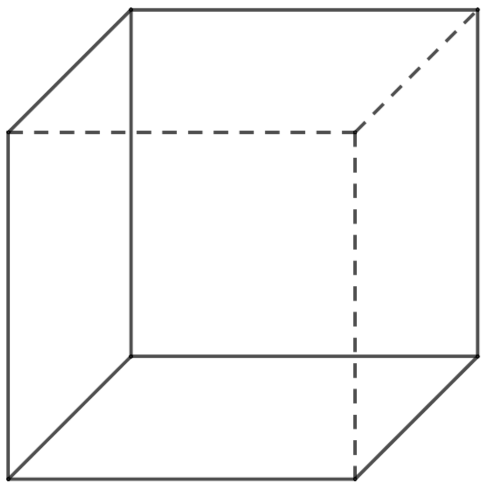
Obrázek 8: Krychle v nadhledu zprava



Obrázek 9: Krychle v nadhledu zleva

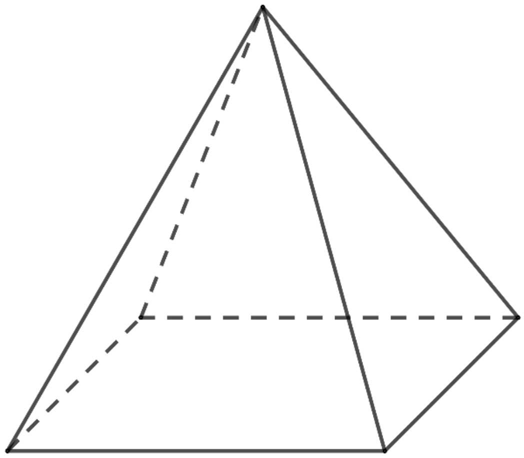


Obrázek 10: Krychle v podhledu zprava

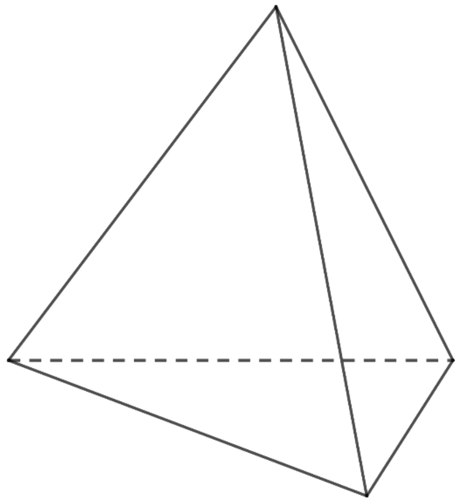


Obrázek 11: Krychle v podhledu zleva

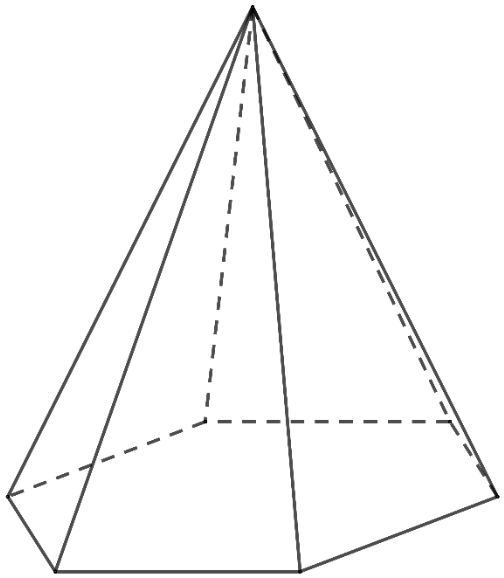
Obrazy dalších těles ve volném rovnoběžném promítání použitých v této bakalářské práci:



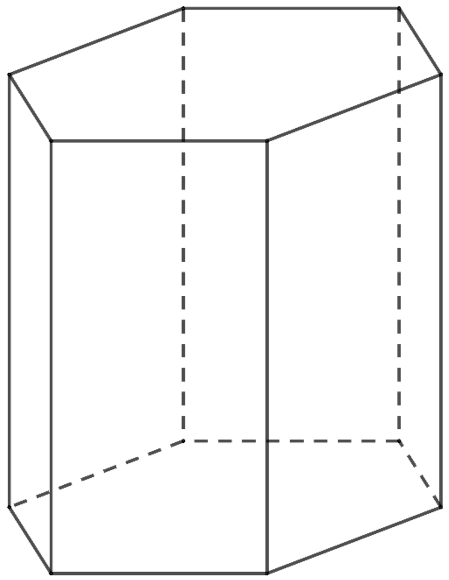
Obrázek 12: Pravidelný čtyřboký jehlan



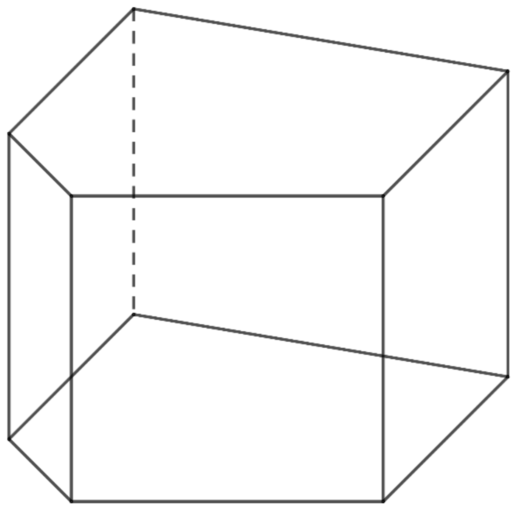
Obrázek 13: Pravidelný čtyřstěn



Obrázek 14: Pravidelný šestiboký jehlan



Obrázek 15: Pravidelný šestiboký hranol



Obrázek 16: Kolmý pětiboký hranol

1.3 Řešení konstrukčních úloh

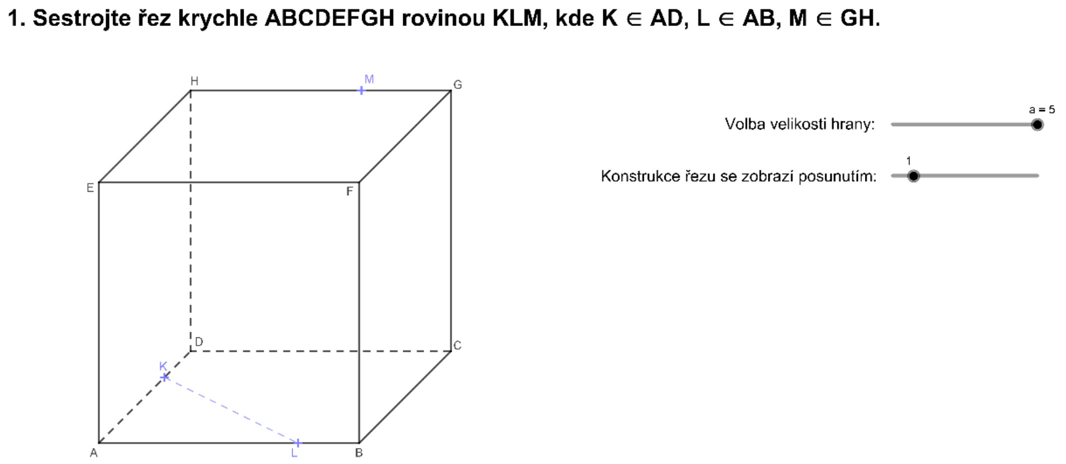
Řez tělesa rovinou je průnik tělesa a roviny. Je to rovinný útvar, jehož hranice je průnik hranice tělesa a roviny řezu. Hranice řezu hranolu, popř. jehlanu se skládá z průniku roviny řezu se stěnami hranolu, popř. jehlanu. Sestrojit řez rovinou tedy znamená sestrojit průsečnice dané roviny s rovinami jednotlivých stěn.

Pro konstrukci řezu jsou důležité zejména následující věty, které jsme již uváděli v podkapitole Polohové vlastnosti. K názorným ukázkám důsledků těchto vět použijeme pracovní list č. 1.

Věta 23 Leží-li dva různé body přímky v rovině, pak každý bod přímky leží v této rovině.

Důsledek věty 23 Leží-li dva různé body roviny řezu v rovině některé stěny, leží v rovině této stěny i jejich spojnice. Průnik spojnice a stěny je jednou stranou řezu.

V pracovním listu č. 1, jehož náhled vidíme na obrázku 17, body *K, L* leží v rovině stěny *ABCD*. V této stěně tedy bude ležet i jejich spojnice. Dle důsledku věty 23 je úsečka *KL* stranou řezu. Zobrazíme ji nastavením posuvníku „Konstrukce řezu se zobrazí posunutím“ na hodnotu 1.

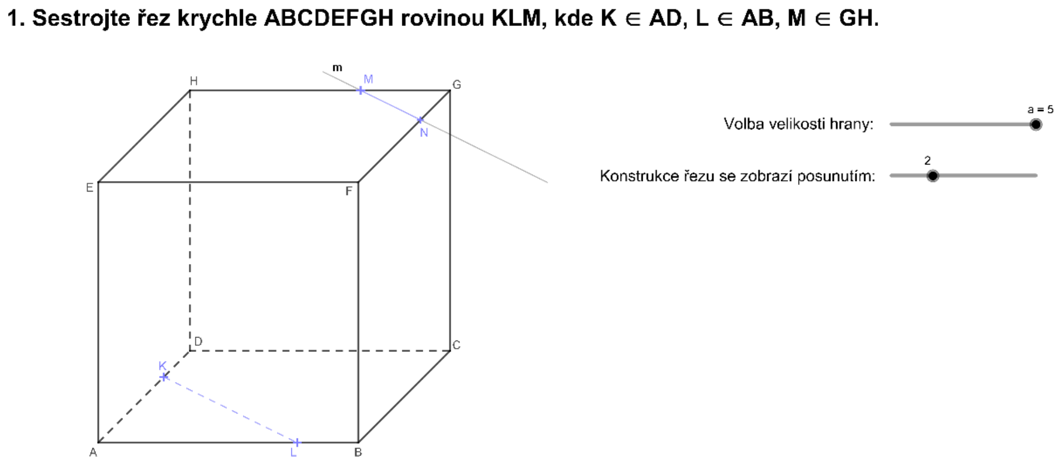


Obrázek 17: Náhled pracovního listu č. 1, krok 1

Věta 24 Dvě roviny jsou rovnoběžné (různé) a třetí je s oběma různoběžná; pak průsečnice těchto rovin jsou vzájemně rovnoběžné.

Důsledek věty 24 Jsou-li roviny dvou stěn rovnoběžné, a přitom různoběžné s rovinou řezu, jsou průsečnice roviny řezu s rovinami těchto stěn rovnoběžné.

Roviny *ABC* a *EFG* jsou rovnoběžné, rovina řezu je s oběma rovinami různoběžná. Úsečka *KL* je průsečnicí roviny řezu s rovinou stěny *ABCD*, a tedy dle důsledku věty 24 je rovnoběžná s průsečnicí roviny řezu s rovinou stěny *EFGH*. Jelikož bod *M* náleží rovině řezu, vedeme tímto bodem rovnoběžku *m* s *KL*. Zobrazíme ji nastavením posuvníku „Konstrukce řezu se zobrazí posunutím“ na hodnotu 2 (obrázek 18).

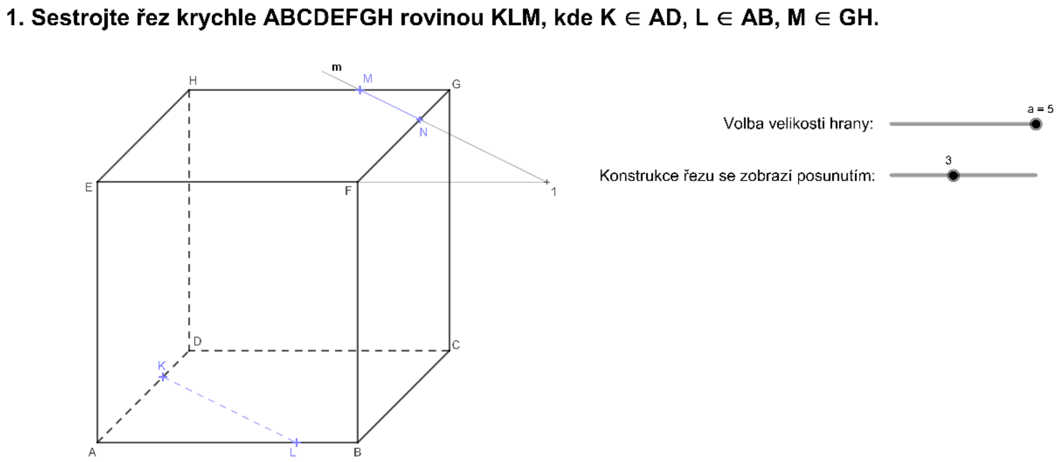


Obrázek 18: Náhled pracovního listu č. 1, krok 2

Věta 25 Všechny tři roviny mají společný právě jeden bod; pak každé dvě roviny jsou různoběžné a jejich průsečnice jsou tři různé přímky, procházející společným bodem všech tří rovin.

Důsledek věty 25 Průsečnice rovin dvou sousedních stěn (tj. stěn se společnou hranou) s rovinou řezu a přímka, v níž leží společná hrana, se protínají v jednom bodě.

Každé dvě roviny *ABF*, *EFG* a *KLM* jsou různoběžné. Průsečnicí rovin *EFG* a *KLM* je přímka *m*, průsečnicí rovin *ABF* a *EFG* je přímka procházející body *E, F*. Dle důsledku věty 25 se obě tyto průsečnice protínají s průsečnicí rovin *ABF* a *KLM* v jednom bodě označeném jako *1.* Tento bod zobrazíme nastavením posuvníku „Konstrukce řezu se zobrazí posunutím“ na hodnotu 3 (obrázek 19).



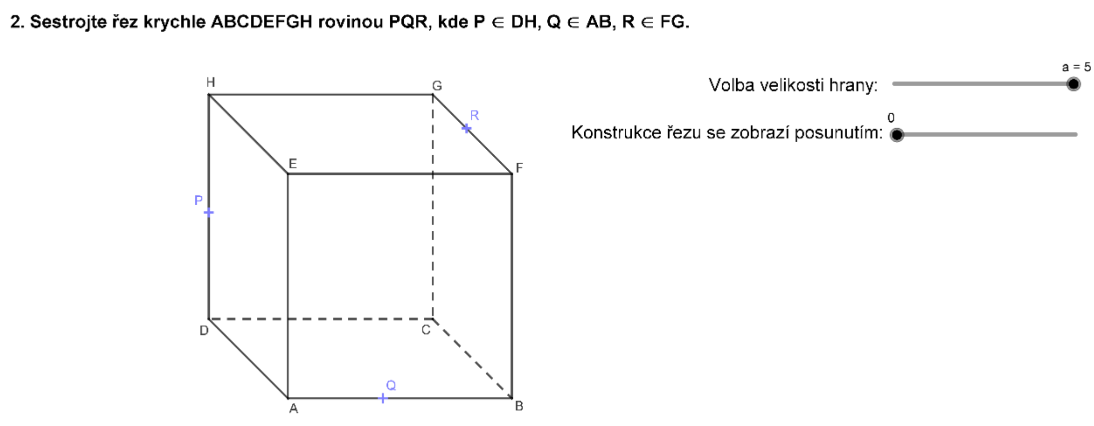
Obrázek 19: Náhled pracovního listu č. 1, krok 3

2 Konstrukční úlohy

Tato kapitola se zabývá řešením vybraných polohových konstrukčních úloh. V těchto úlohách jde pouze o vzájemnou polohu bodů, přímek a rovin. K řešení budeme používat věty a důsledky těchto vět, které byly uvedeny v podkapitole Řešení konstrukčních úloh. Úlohy jsou řešeny ve volném rovnoběžném promítání. Text této bakalářské práce obsahuje zadání konstrukční úlohy a její řešení, pracovní listy jsou popsány v následující podkapitole.

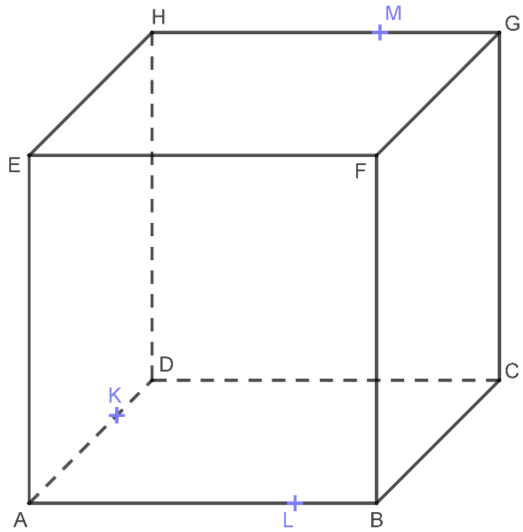
2.1 Pracovní listy

Pracovní listy se skládají ze zadání konstrukční úlohy, příslušného tělesa zobrazeného ve volném rovnoběžném promítání a několika posuvníků. Tyto posuvníky slouží buď k volbě velikosti hrany, nebo výšky tělesa, nebo k zobrazení postupu konstrukce daného řezu. Průnik hrany tělesa s rovinou řezu je vždy označen fialovým křížkem, stejně tak i úsečky, které tvoří strany řezu, jsou fialové. Jsou-li body zadány tak, že pouze leží na úsečce (jak je tomu např. v pracovním listu č. 2 – obrázek 20), lze měnit jejich polohu. Zároveň však zadané body nemohou splynout s krajními body úsečky, na které leží.



Obrázek 20: Náhled pracovního listu č. 2

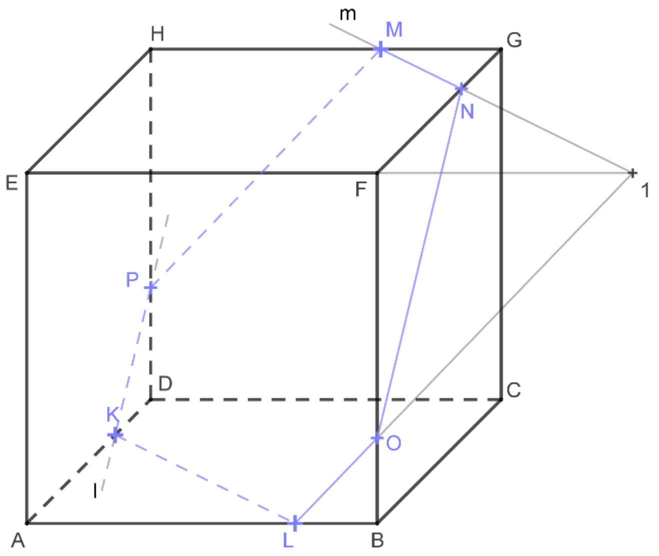
1. Sestrojte řez krychle *ABCDEFGH* rovinou *KLM*, kde *K* ∈ *AD*, *L* ∈ *AB*, *M* ∈ *GH*.



Obrázek 21: Krychle ABCDEFGH v nadhledu zprava, body K, L, M umístěny dle zadání

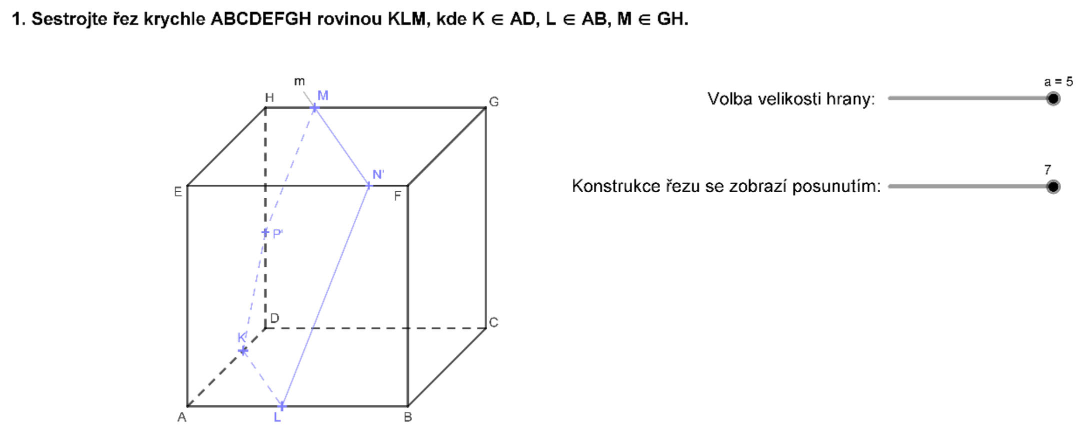
Řešení:

1. Body *K*, *L* leží v rovině stěny *ABCD*, jejich spojnice tvoří stranu řezu (důsledek 1).
2. Roviny *ABC* a *EFG* jsou rovnoběžné, bodem *M* tedy vedeme rovnoběžku *m* s *KL* (důsledek 2). Průnik přímky *m* a hrany *FG* je bod *N*.
3. Roviny *KLM*, *ABF*, *EFG* se protínají v jednom bodě, kterým procházejí všechny průsečnice těchto rovin. Průsečnice roviny *KLM* a *EFG* je přímka *m*, průsečnice rovin *ABF* a *EFG* je přímka *EF*. Jejich společným bodem *1* musí procházet i průsečnice roviny *KLM* a *ABF*, přímka určená body *1*, *L* (důsledek 3).
4. Přímka *1L* protne hranu *BF* v bodě *O*.
5. Spojíme body *O*, *N*.
6. Bodem *K* vedeme rovnoběžku *l* s *NO*. Průnik přímky *l* a hrany *DH* je bod *P*.
7. Úsečka *PM* je zbývající stranou řezu.
8. Řezem je šestiúhelník *LONMPK*.



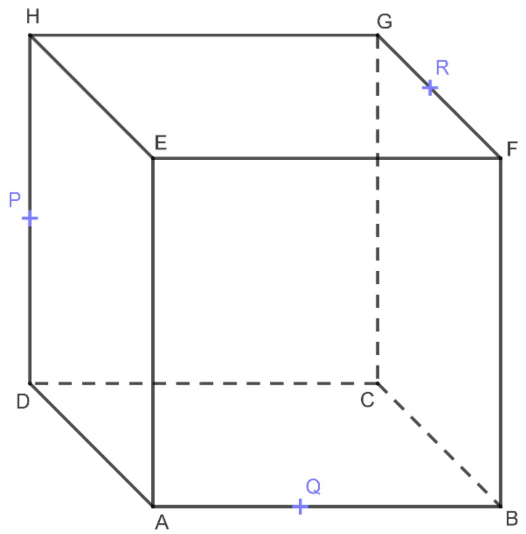
Obrázek 22: Řez krychle ABCDEFGH rovinou KLM

Poznámka Úloha je vyřešena pro pevné zadání, avšak v pracovním listu lze změnit polohu bodů K, L, M tak, že řezem je pětiúhelník (obrázek 23).



Obrázek 23: Náhled pracovního listu č. 1

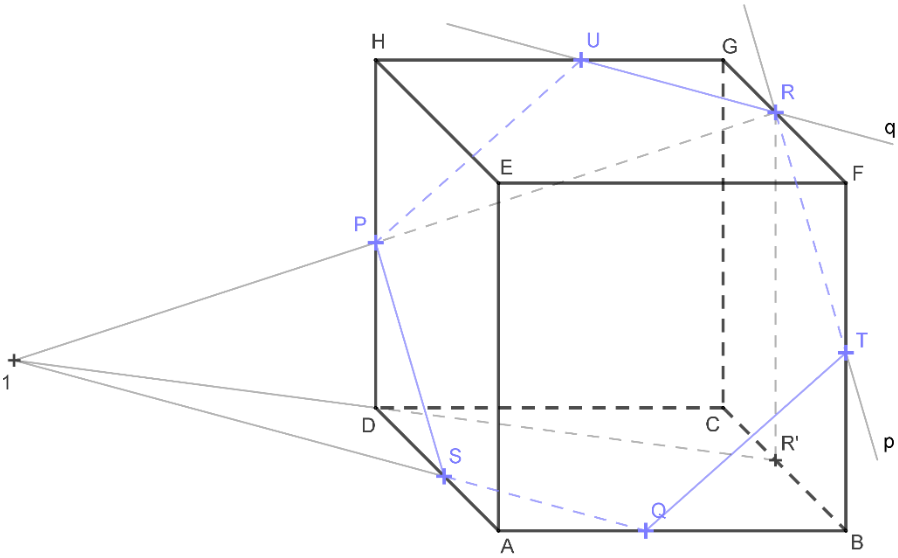
2. Sestrojte řez krychle *ABCDEFGH* rovinou *PQR*, kde *P* ∈ *DH*, *Q* ∈ *AB*, *R* ∈ *FG*.



Obrázek 24: Krychle ABCDEFGH v nadhledu zleva, body P, Q, R umístěny dle zadání

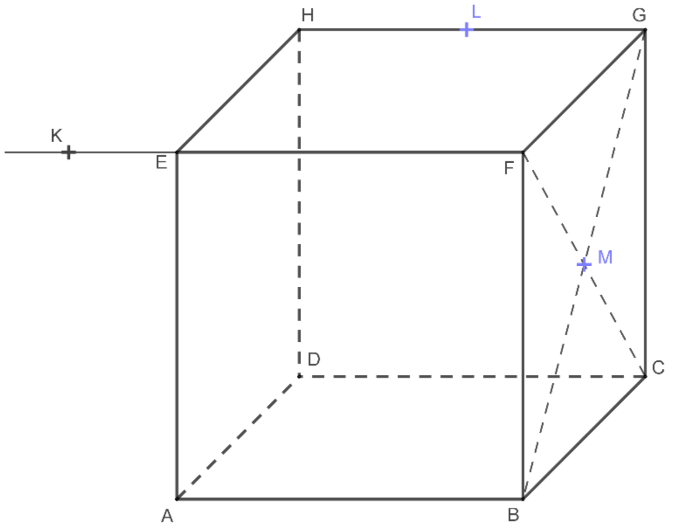
Řešení:

1. Roviny *PQR*, *ABC*, *DHR* se protínají v jednom bodě, kterým procházejí všechny průsečnice těchto rovin. Průsečnice roviny *PQR* a *DHR* je přímka *PR*, průsečnice rovin *ABC* a *DHR* je přímka *DR´* (*R´* je pravoúhlý průmět bodu *R* do roviny podstavy). Jejich společným bodem *1* musí procházet i průsečnice roviny *PQR* a *ABC*, přímka určená body *1, Q* (důsledek 3).
2. Přímka *1Q* protne hranu *AD* v bodě *S*.
3. Spojíme body *S*, *P*.
4. Bodem *R* vedeme rovnoběžku *p* s *PS*. Průnik přímky *p* a hrany *BF* je bod *T*.
5. Spojíme body *Q*, *T*.
6. Bodem *R* vedeme rovnoběžku *q* s *QS*. Průnik přímky *q* a hrany *GH* je bod *U*.
7. Spojíme body *P*, *U*.
8. Řezem je šestiúhelník *PSQTRU*.



Obrázek 25: Řez krychle ABCDEFGH rovinou PQR

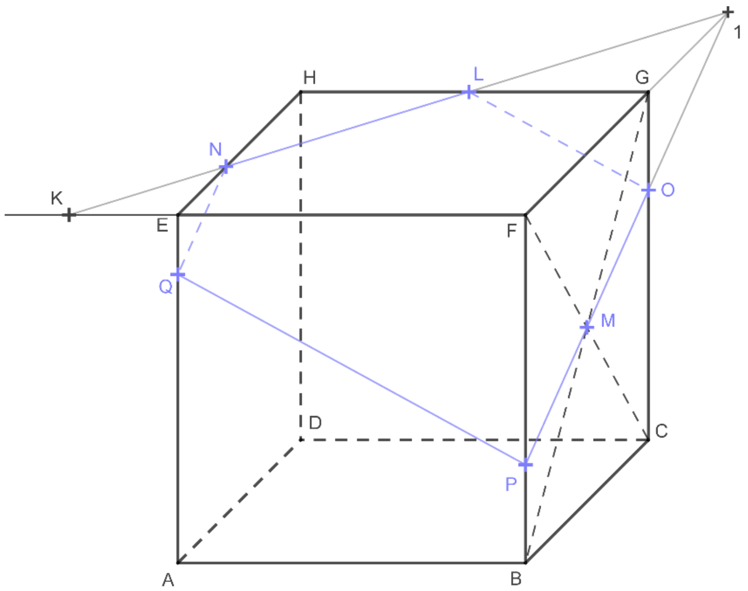
3. Sestrojte řez krychle ABCDEFGH rovinou KLM, kde K leží na prodloužení hrany EF za bodem E, L ∈ GH, M je střed stěny BCGF.



Obrázek 26: Krychle ABCDEFGH v nadhledu zprava, body K, L, M umístěny dle zadání

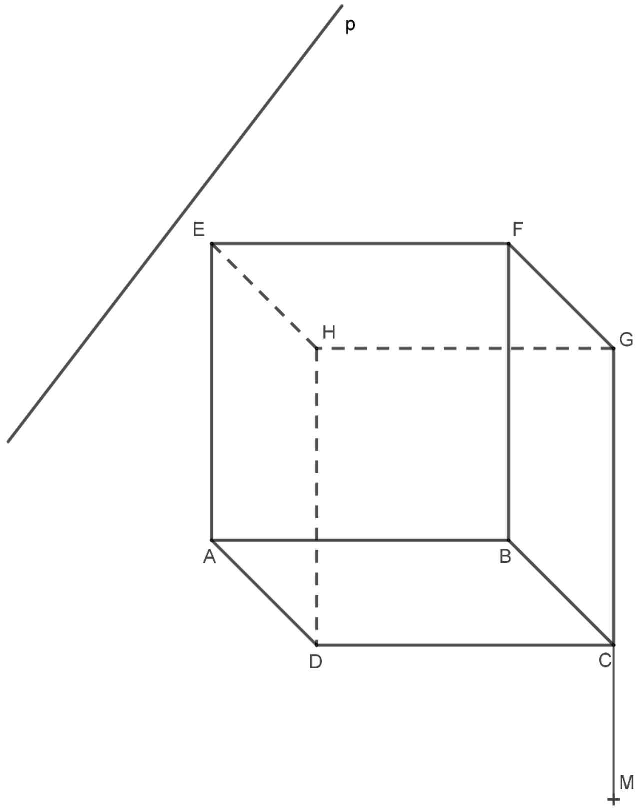
Řešení:

1. Přímka *KL* leží v rovině stěny *EFGH*. Průsečík přímky *KL* s hranou *EH* je bod *N*. Úsečka *LN* tvoří stranu řezu (důsledek 1).
2. Roviny *KLM*, *EFG*, *BCG* se protínají v jednom bodě, kterým procházejí všechny průsečnice těchto rovin. Průsečnice roviny *KLM* a *EFG* je přímka *KL*, průsečnice rovin *EFG* a *BCG* je přímka *FG*. Jejich společným bodem *1* musí procházet i průsečnice roviny *KLM* a *BCG*, přímka určená body *1, M* (důsledek 3).
3. Přímka *1M* protne hranu *CG* v bodě *O* a hranu *BF* v bodě *P*. Úsečka *OP* tvoří stranu řezu.
4. Spojíme body *L, O*.
5. Přímka *KP* leží v rovině stěny *ABFE*. Průsečík přímky *KP* s hranou *AE* je bod *Q*. Úsečka *PQ* tvoří stranu řezu.
6. Spojíme body *Q, N*.
7. Řezem je pětiúhelník *QPOLN*.



Obrázek 27: Řez krychle ABCDEFGH rovinou KLM

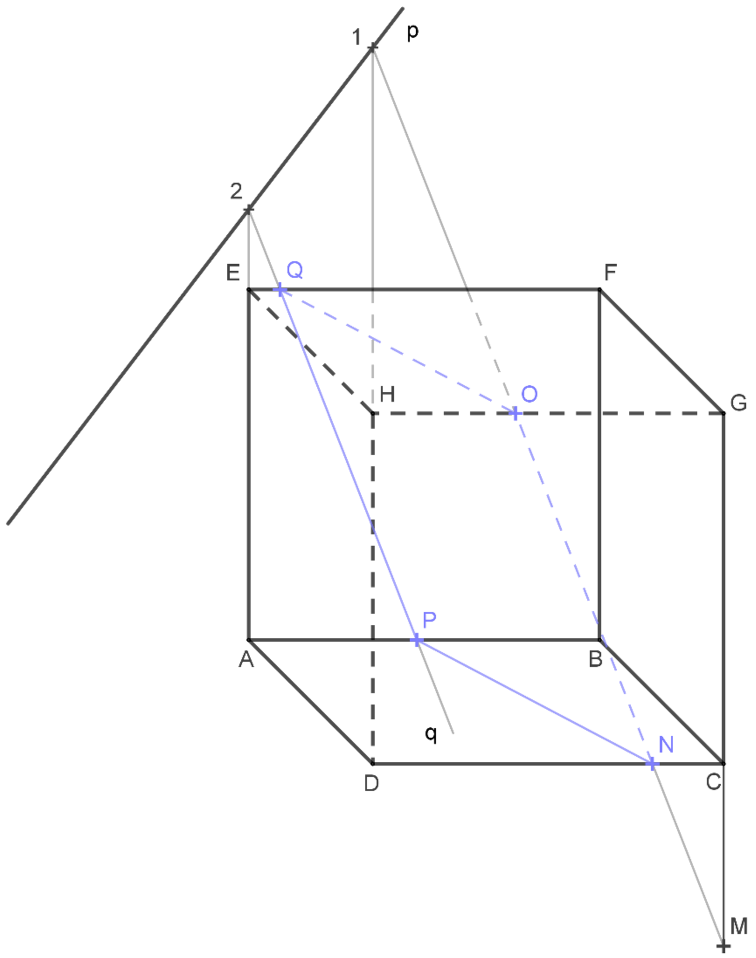
4. Sestrojte řez krychle *ABCDEFGH* rovinou určenou bodem *M* (*M* leží na prodloužení hrany *CG* za bodem *C*) a přímkou *p*, jestliže přímka *p* leží v rovině *ADH*.



Obrázek 28: Krychle ABCDEFGH v podhledu zprava, přímka p a bod M umístěny dle zadání

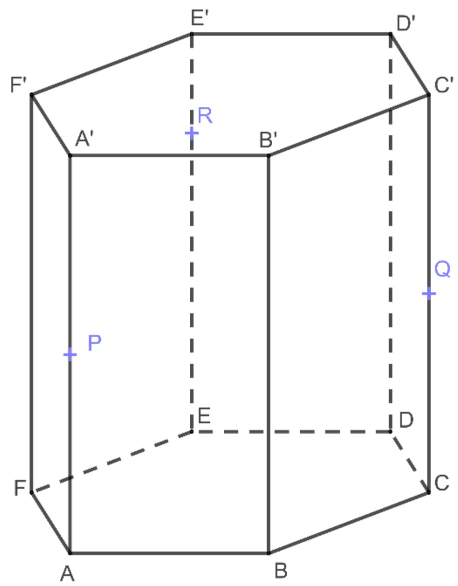
Řešení:

1. Přímka *p* je průsečnice roviny řezu a roviny *ADH*. Průnik roviny řezu s rovinou *DCG* i s rovinou *ABF* sestrojíme pomocí důsledku 3.
2. Bodem *1*, který je společným bodem přímek *p* a *DH*, musí procházet i průsečnice roviny řezu a roviny *DCG*, přímka určená body *1, M*.
3. Přímka *1M* protne hranu *CD* v bodě *N* a hranu *GH* v bodě *O*. Úsečka *NO* tvoří stranu řezu.
4. Bodem *2*, který je společným bodem přímek *p* a *AE*, musí procházet i průsečnice *q* roviny řezu a roviny *ABF*. Současně jsou roviny *ABF* a *DCG* rovnoběžné, a proto je průsečnice *q* rovnoběžná s přímkou *1M*.
5. Přímka q protne hranu *AB* v bodě *P* a hranu *EF* v bodě *Q*.
6. Úsečky *NP* a *OQ* tvoří zbývající strany řezu.
7. Řezem je čtyřúhelník *QPNO*.



Obrázek 29: Řez krychle ABCDEFGH rovinou pM

5. Sestrojte řez pravidelného šestibokého hranolu *ABCDEFA´B´C´D´E´F´* rovinou *PQR*, kde *P* je střed *AA´*, *Q* je střed *CC´*, *R* ∈ *EE´*, |*ER*| = 3|*E´R*|.

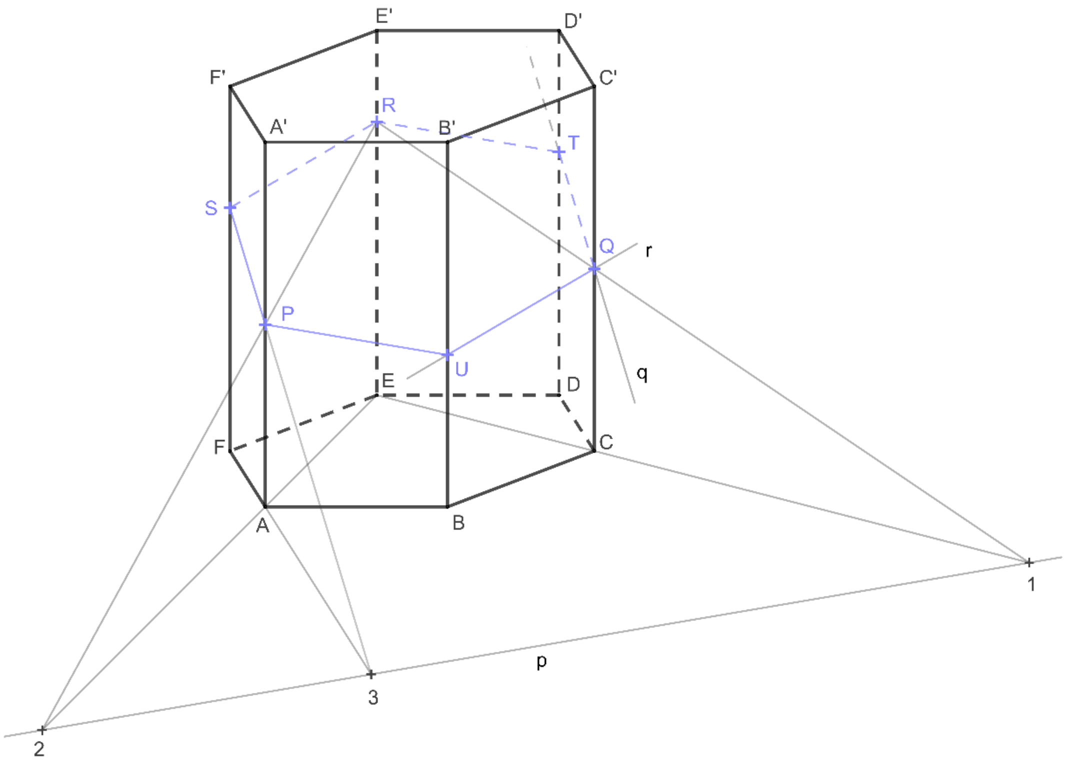


Obrázek 30: Pravidelný šestiboký hranol ABCDEFA´B´C´D´E´F´ v nadhledu zprava, body P, Q, R umístěny dle zadání

Řešení:

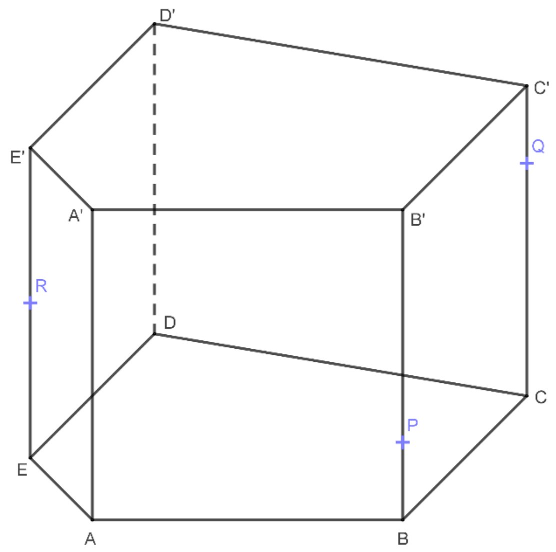
1. Sestrojíme průsečnici *p* roviny řezu a roviny podstavy (pomocí důsledku 3):
   i. Roviny *PQR*, *ABC*, *ECC´* se protínají v jednom bodě, kterým procházejí všechny průsečnice těchto rovin. Průsečnice roviny *PQR* a *ECC´* je přímka *QR*, průsečnice rovin *ABC* a *ECC´* je přímka *CE*. Průnik přímky *QR* a přímky *CE* je bod *1*.
   ii. Roviny *PQR, ABC, AEE´* se protínají v jednom bodě, kterým procházejí všechny průsečnice těchto rovin. Průsečnice roviny *PQR* a *AEE´* je přímka *PR*, průsečnice rovin *ABC* a *AEE´* je přímka *AE*. Průnik přímky *PR* a přímky *AE* je bod *2*.
   iii. Body *1*, *2* určují přímku *p*.
2. Bodem *3*, který je společným bodem přímek *p* a *AF*, musí procházet průsečnice roviny *PQR* a roviny AFF´, přímka určená body *3*, *P*.
3. Přímka *3P* protne hranu *FF´* v bodě *S*.
4. Bodem *Q* vedeme rovnoběžku *q* s *PS*. Průnik přímky *q* a hrany *DD´* je bod *T*.
5. Spojíme body S, R.

6. Bodem *Q* vedeme rovnoběžku *r* s R*S*. Průnik přímky *r* a hrany *BB´* je bod *U*.
7. Úsečky *PU* a *RT* tvoří zbývající strany řezu.
8. Řezem je šestiúhelník *PUQTRS*.



Obrázek 31: Řez pravidelného šestibokého hranolu ABCDEFA´B´C´D´E´F´ rovinou PQR

6. Sestrojte řez kolmého pětibokého hranolu *ABCDEA´B´C´D´E´* rovinou *PQR*, kde *P* ∈ *BB´*, |*BB´*| = 4|*BP*|, *Q* ∈ *CC´*, |*CC´*| = 4|*C´Q*|, *R* je střed *EE´*.

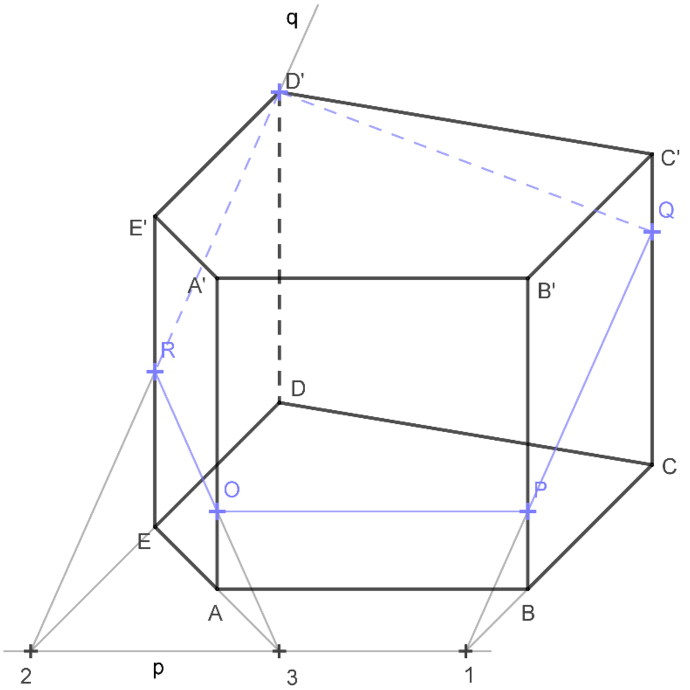


Obrázek 32: Kolmý pětiboký hranol ABCDEA´B´C´D´E´ v nadhledu zprava, body P, Q, R umístěny dle zadání

Řešení:

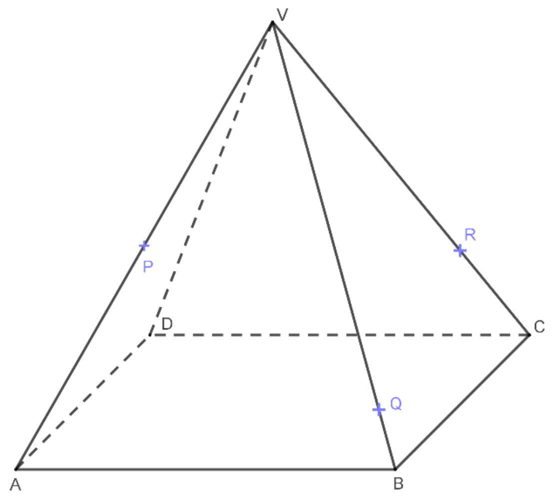
1. Body *P*, *Q* leží v rovině stěny *BCC´B´*, jejich spojnice tvoří stranu řezu.
2. Bodem *R* vedeme rovnoběžku *q* s *PQ*. Průnik přímky *q* a hrany *DD´* je bod *D´*. Úsečka *RD´* je stranou řezu.
3. Spojíme body *D*, *Q*.
4. Sestrojíme průsečnici *p* roviny řezu a roviny podstavy (pomocí důsledku 3):
   i. Roviny *PQR*, *ABC*, *BCC´* se protínají v jednom bodě, kterým procházejí všechny průsečnice těchto rovin. Průsečnice roviny *PQR* a *BCC´* je přímka *PQ*, průsečnice rovin *ABC* a *BCC´* je přímka *BC*. Průnik přímky *PQ* a přímky *BC* je bod *1*.
   ii. Roviny *PQR*, *ABC*, *EDD´* se protínají v jednom bodě, kterým procházejí všechny průsečnice těchto rovin. Průsečnice roviny *PQR* a *EDD´* je přímka *RD´*, průsečnice rovin *ABC* a *EDD´* je přímka *DE*. Průnik přímky *RD´* a přímky *DE* je bod *2*.
   iii. Body *1*, *2* určují přímku *p*.
5. Bodem *3*, který je společným bodem přímek *p* a *AE*, musí procházet průsečnice roviny *PQR* a roviny EAA´, přímka určená body *3*, *R*.

6. Přímka $3R$ protne hranu AA' v bodě O. Úsečka OR je stranou řezu.
7. Úsečka OP je zbývající stranou řezu.
8. Řezem je pětiúhelník $OPQD'R$.



Obrázek 33: Řez kolmého pětibokého hranolu ABCDEA′B′C′D′E′ rovinou PQR

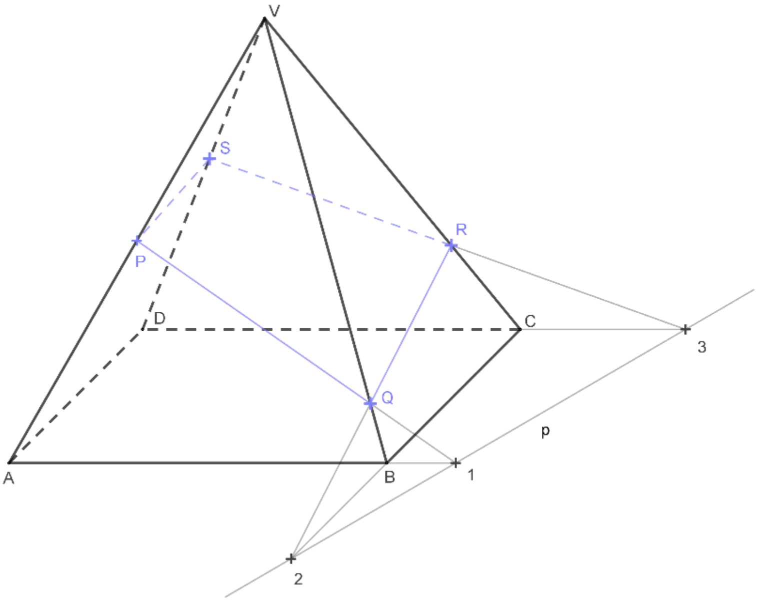
7. Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu *ABCDV* rovinou *PQR, P* je střed *AV, Q* ∈ *BV*, 5|*BQ*| = |*QV*|, *R* ∈ *CV*, 3|*CR*| = |*RV*|.



Obrázek 34: Pravidelný čtyřboký jehlan ABCDV v nadhledu zprava, body P, Q, R umístěny dle zadání

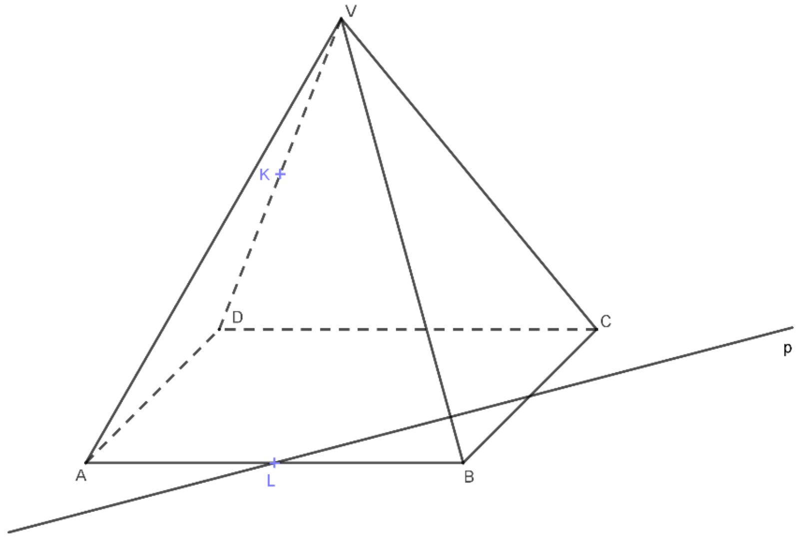
Řešení:

1. Body *P*, *Q* leží v rovině stěny *ABV*, jejich spojnice tvoří stranu řezu.
2. Body *Q*, *R* leží v rovině stěny *BCV*, jejich spojnice tvoří stranu řezu.
3. Sestrojíme průsečnici *p* roviny řezu a roviny podstavy (pomocí důsledku 3):
   i. Roviny *PQR*, *ABC*, *ABV* se protínají v jednom bodě, kterým procházejí všechny průsečnice těchto rovin. Průsečnice roviny *PQR* a *ABV* je přímka *PQ*, průsečnice rovin *ABC* a *ABV* je přímka *AB*. Průnik přímky *PQ* a přímky *AB* je bod *1*.
   ii. Roviny *PQR*, *ABC*, *BCV* se protínají v jednom bodě, kterým procházejí všechny průsečnice těchto rovin. Průsečnice roviny *PQR* a *BCV* je přímka *QR*, průsečnice rovin *ABC* a *BCV* je přímka *BC*. Průnik *QR* a přímky *BC* je bod *2*.
   iii. Body *1*, *2* určují přímku *p*.
4. Bodem *3*, který je společným bodem přímek *p* a *CD*, musí procházet průsečnice roviny *PQR* a roviny *CDV*, přímka určená body *3*, *R*.
5. Přímka *3R* protne hranu *DV* v bodě *S*. Úsečka *RS* je stranou řezu.
6. Úsečka *PS* je zbývající stranou řezu.
7. Řezem je čtyřúhelník *PQRS*.



Obrázek 35: Řez pravidelného čtyřbokého jehlanu ABCDV rovinou PQR

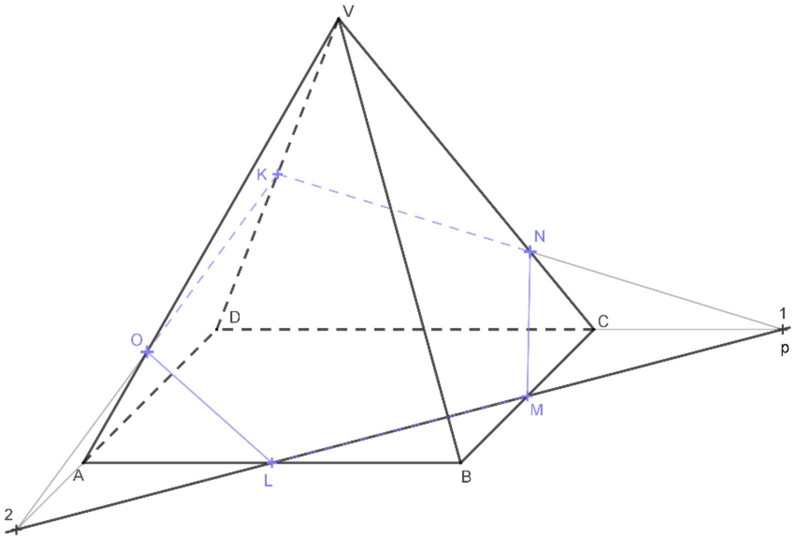
8. Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu *ABCDV* rovinou, která obsahuje přímku *p* a bod *K*, kde *K* je střed hrany *DV* a přímka *p* je rovnoběžná s hranou *AC* a prochází bodem *L*, který je střed hrany *AB*.



Obrázek 36: Pravidelný čtyřboký jehlan ABCDV v nadhledu zprava, body K, L a přímka p umístěny dle zadání

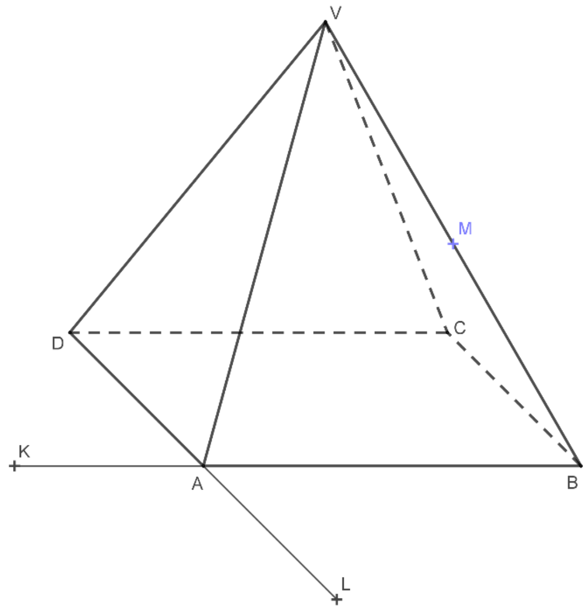
Řešení:

1. Přímka *p* protíná hranu *BC* v bodě *M*. Úsečka *LM* tvoří stranu řezu.
2. Přímka *p* je průsečnice roviny řezu a roviny podstavy. Průnik roviny řezu s rovinou *CDV* i s rovinou *ADV* sestrojíme pomocí důsledku 3.
3. Bodem *1*, který je společným bodem přímek *p* a *CD*, musí procházet průsečnice roviny řezu a roviny *CDV*, přímka určená body *1, K*.
4. Přímka *1K* protne hranu *CV* v bodě *N*. Úsečka *KN* tvoří stranu řezu.
5. Bodem *2*, který je společným bodem přímek *p* a *AD*, musí procházet průsečnice roviny řezu a roviny *ADV*, přímka určená body *2*, *K*.
6. Přímka *2K* protne hranu *AV* v bodě *O*. Úsečka *KO* tvoří stranu řezu.
7. Úsečky *MN* a *LO* tvoří zbývající strany řezu.
8. Řezem je pětiúhelník *LMNKO*.



Obrázek 37: Řez pravidelného čtyřbokého jehlanu ABCDV rovinou pK

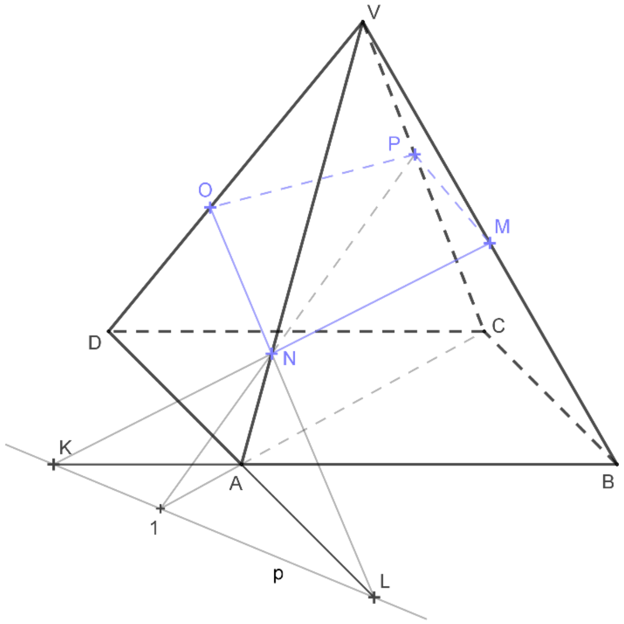
9. Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu *ABCDV* rovinou *KLM*; body *K, L, M* leží po řadě na polopřímkách *BA, DA, VB*, $|BK| = {}^{3}/_{2}\,|AB|$, $|DL| = 2|AD|$, $|VM| = {}^{1}/_{2}\,|VB|$.



Obrázek 38: Pravidelný čtyřboký jehlan ABCDV v nadhledu zleva, body K, L, M umístěny dle zadání

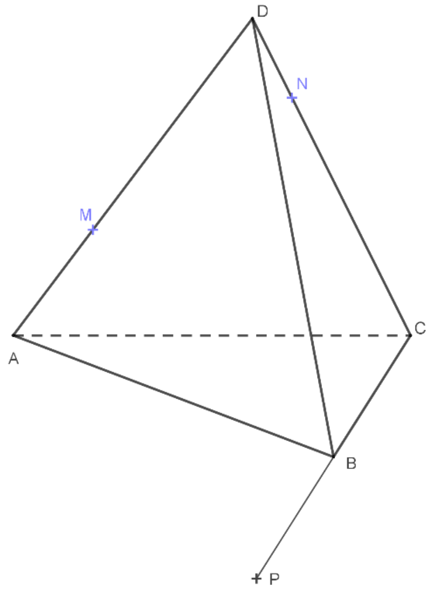
Řešení:

1. Přímka *KM* leží v rovině stěny *ABV*. Průsečík přímky *KM* s hranou *AV* je bod *N*. Úsečka *MN* tvoří stranu řezu.
2. Přímka *LN* leží v rovině stěny *ADV*. Průsečík přímky *LN* s hranou *DV* je bod *O*. Úsečka *NO* tvoří stranu řezu.
3. Bod *K* je společným bodem rovin *KLM*, *ABV*, *ABC* a bod *L* je společným bodem rovin *KLM, ADV*, *ABC*. Body *K, L* tedy určují průsečnici *p* rovin *KLM, ABC*.
4. Bodem *1*, který je společným bodem přímek *p* a *AC*, musí procházet i průsečnice roviny *KLM* a roviny *ACV*, přímka určená body *1*, *N*.
5. Přímka *1N* protne hranu *CV* v bodě *P*.
6. Úsečky *OP* a *MP* tvoří zbývající strany řezu.
7. Řezem je čtyřúhelník *ONMP*.



Obrázek 39: Řez pravidelného čtyřbokého jehlanu ABCDV rovinou KLM

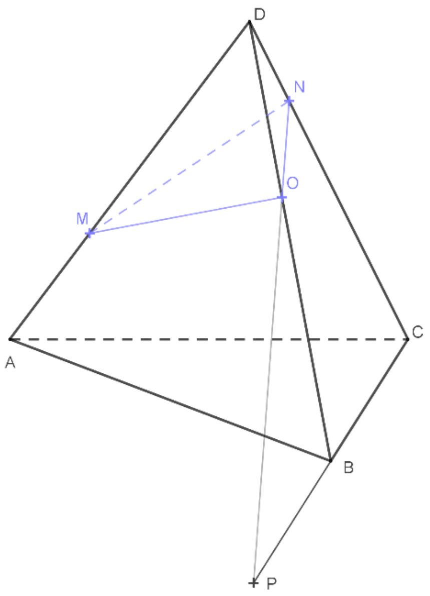
10. Sestrojte řez pravidelného čtyřstěnu *ABCD* rovinou *MNP*, kde *M* ∈ *AD*, *3*|*AM*| = |*AD*|, *N* ∈ *CD*, *4*|*DN*| = |*CD*| a *P* ∈ *CB*, tak, že |*CP*| = *2*|*BC*|.



Obrázek 40: Pravidelný čtyřstěn ABCD, body M, N, P umístěny dle zadání

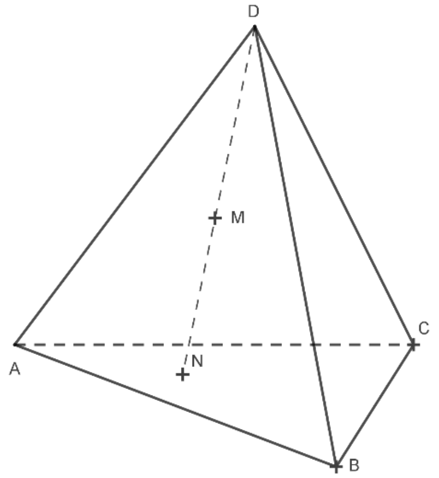
Řešení:

1. Přímka *PN* leží v rovině stěny *BCD*. Průsečík přímky *PN* s hranou *BD* je bod *O*. Úsečka *NO* tvoří stranu řezu.
2. Body *M*, *O* leží v rovině stěny *ABD*, jejich spojnice tvoří stranu řezu.
3. Úsečka *MN* je zbývající stranou řezu.
4. Řezem je trojúhelník *MON*.



Obrázek 41: Řez pravidelného čtyřstěnu ABCD rovinou MNP

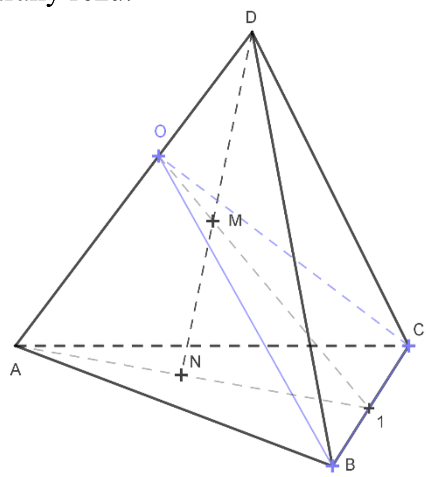
11. Je dán čtyřstěn *ABCD*. Bod *N* je vnitřním bodem stěny *ABC* a bod *M* je vnitřním bodem úsečky *DN*. Sestrojte řez čtyřstěnu rovinami ρ a σ, ρ = *BCM*, σ prochází bodem *M* a je rovnoběžná s rovinou *BCD*.



Obrázek 42: Pravidelný čtyřstěn ABCD, body M, N umístěny dle zadání

Řešení pro řez rovinou ρ:

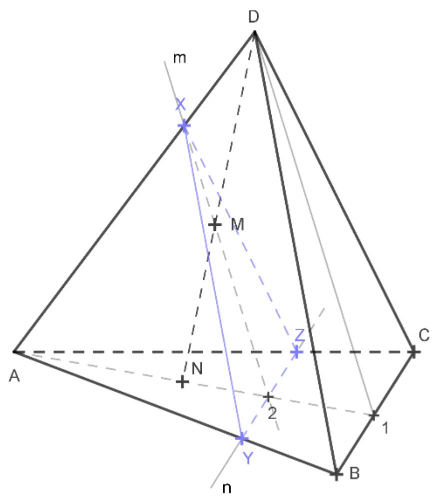
1. Úsečka *BC* je stranou řezu.
2. Roviny ρ, *ABC*, *AND* se protínají v jednom bodě, kterým procházejí všechny průsečnice těchto rovin. Průsečnice roviny *ABC* a *AND* je přímka *AN*, průsečnice rovin ρ a *ABC* je přímka *BC*. Jejich společným bodem *1* musí procházet i průsečnice roviny ρ a *AND*, přímka určená body *1, M.*
3. Přímka *1M* protne hranu *AD* v bodě *O*.
4. Úsečky *BO* a *CO* jsou zbývající strany řezu.
5. Řezem je trojúhelník *BCO*.



Obrázek 43: Řez pravidelného čtyřstěnu ABCD rovinou ρ

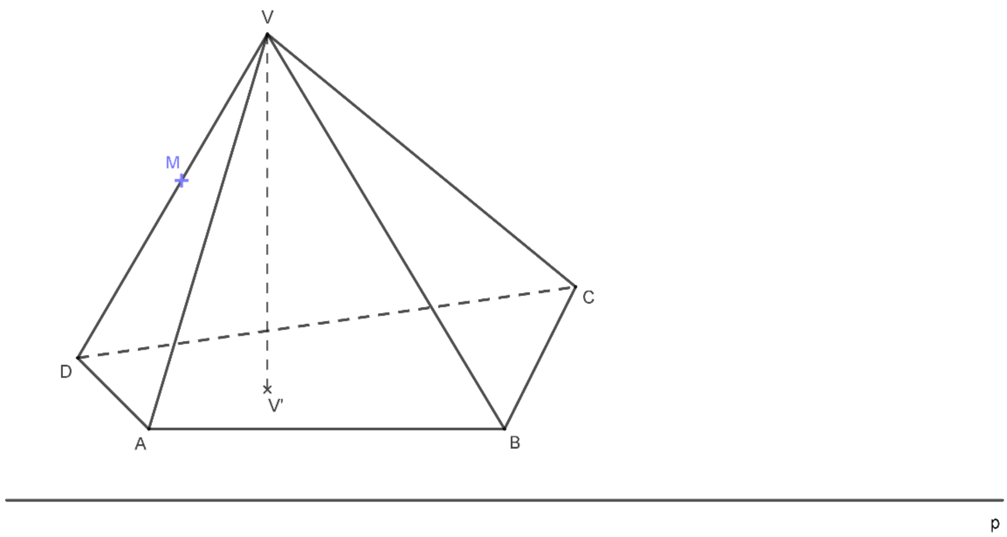
Řešení pro řez rovinou σ:

1. Roviny *ABC*, *BCD*, *AND* se protínají v jednom bodě, kterým procházejí všechny průsečnice těchto rovin. Průsečnice roviny *ABC* a *AND* je přímka *AN*, průsečnice rovin *BCD* a *ABC* je přímka *BC*. Jejich společným bodem *1* musí procházet i průsečnice roviny *BCD* a *AND*, přímka určená body *1*, *D*.
2. Roviny σ a *BCD* jsou rovnoběžné, bodem *M* tedy vedeme rovnoběžku *m* s *1D*. Průnik přímky *m* a přímky *AN* je bod *2*. Průnik přímky *m* a hrany *AD* je bod *X*.
3. Dále bodem *2* vedeme rovnoběžku *n* s *BC*. Přímka *n* protne hranu *AB* v bodě *Y* a hranu *AC* v bodě *Z*.
4. Úsečky *XY* a *XZ* tvoří zbývající strany řezu.
5. Řezem je trojúhelník *XYZ*.



Obrázek 44: Řez pravidelného čtyřstěnu ABCD rovinou σ

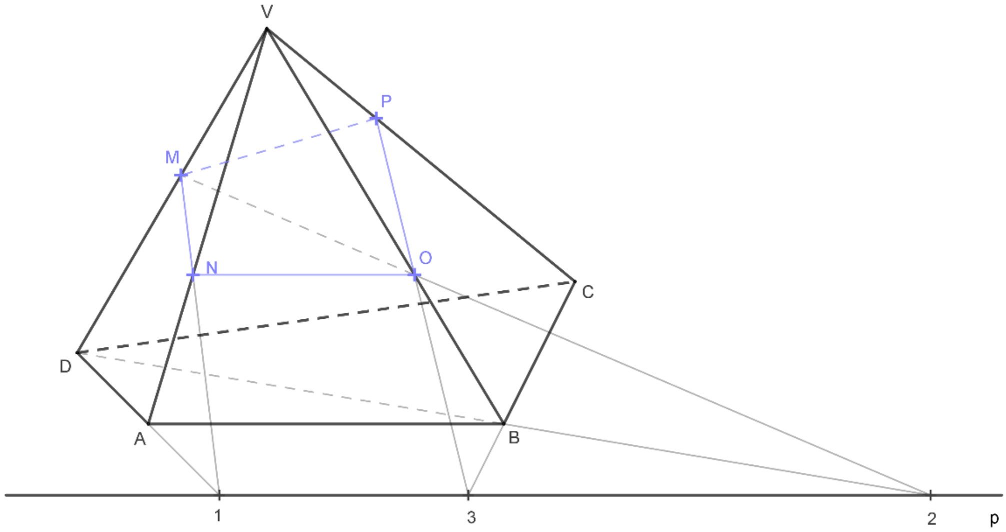
12. Sestrojte řez jehlanu *ABCDV*, jehož vrchol *V* je dán pravoúhlým průmětem do roviny podstavy, rovinou určenou bodem *M* (*M* ∈ *DV*) a přímkou *p*, jestliže přímka *p* leží v rovině podstavy.



Obrázek 45: Jehlan ABCDV, pravoúhlý průmět V′ vrcholu V do roviny podstavy, bod M a přímka p umístěny dle zadání

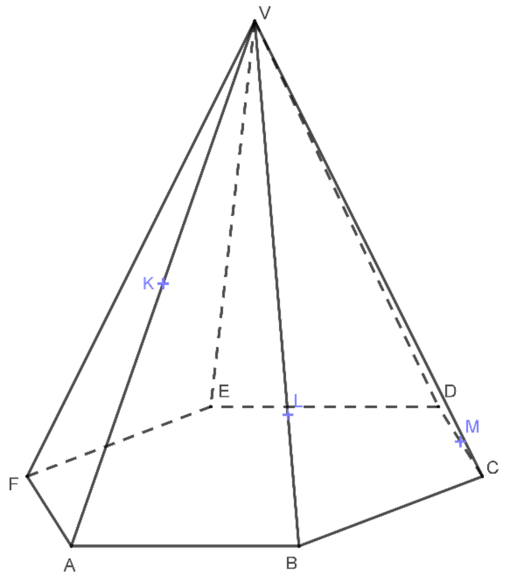
Řešení:

1. Přímka *p* je průsečnice roviny řezu a roviny podstavy. Průnik roviny řezu s rovinami *ADV*, *ABV*, *BCV* sestrojíme pomocí důsledku 3.
2. Bodem *1*, který je společným bodem přímek *p* a *AD*, musí procházet průsečnice roviny řezu a roviny *ADV*, přímka určená body *1, M*.
3. Přímka *1M* protne hranu *AV* v bodě *N*. Úsečka *MN* tvoří stranu řezu.
4. Bodem *2*, který je společným bodem přímek *p* a *BD*, musí procházet průsečnice roviny řezu a roviny *ABV*, přímka určená body *2, M*.
5. Přímka *2M* protne hranu *BV* v bodě *O*.
6. Spojíme body *N*, *O*.
7. Bodem *3*, který je společným bodem přímek *p* a *BC*, musí procházet průsečnice roviny řezu a roviny *BCV*, přímka určená body *3, O*.
8. Přímka *3O* protne hranu *CV* v bodě *P*. Úsečka *OP* tvoří stranu řezu.
9. Úsečka *MP* je zbývající stranou řezu.
10. Řezem je čtyřúhelník *MNOP*.



Obrázek 46: Řez jehlanu ABCDV rovinou pM

13. Sestrojte řez pravidelného šestibokého jehlanu *ABCDEFV* rovinou *KLM*, kde *K* je střed hrany *AV*, *L* ∈ *BV*, 4|*BL*| = |*BV*|, *M* je střed hrany *CD*.

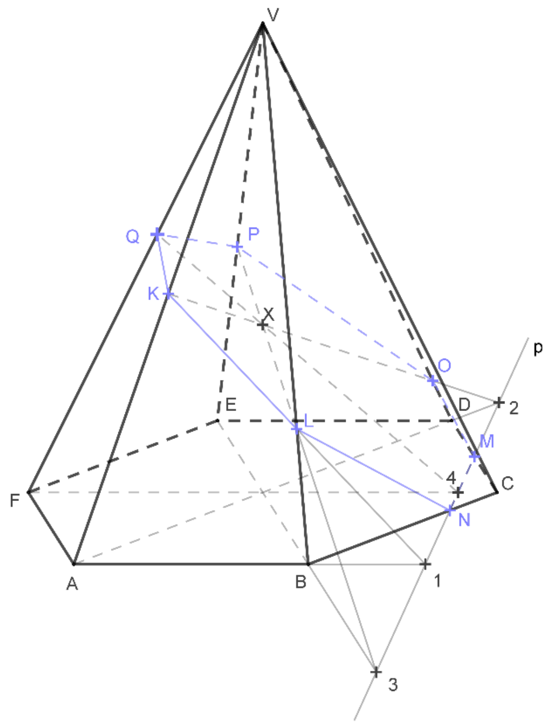


Obrázek 47: Pravidelný šestiboký jehlan ABCDEFV, body K, L, M umístěny dle zadání

Řešení:

1. Body *K*, *L* leží v rovině stěny *ABV*, jejich spojnice tvoří stranu řezu.
2. Sestrojíme průsečnici *p* roviny řezu a roviny podstavy (pomocí důsledku 3):
   i. Roviny *KLM*, *ABC*, *ABV* se protínají v jednom bodě, kterým procházejí všechny průsečnice těchto rovin. Průsečnice roviny *KLM* a *ABV* je přímka *KL*, průsečnice rovin *ABC* a *ABV* je přímka *AB*. Průnik přímky *KL* a přímky *AB* je bod *1*.
   ii. Bod *M* je společným bodem rovin *KLM* a *ABC*, musí tedy ležet na průsečnici *p*.
   iii. Body *1*, *M* určují přímku *p*.
3. Přímka *p* protíná hranu *BC* v bodě *N*. Úsečky *LN*, *MN* tvoří strany řezu.
4. Bodem *2*, který je společným bodem přímek *p* a *AD*, musí procházet průsečnice roviny řezu a roviny *ADV*, přímka určená body *2*, *K*.
5. Přímka *2K* protne hranu *DV* v bodě *O*. Úsečka *MO* tvoří stranu řezu.
6. Bodem *3*, který je společným bodem přímek *p* a *BE*, musí procházet průsečnice roviny řezu a roviny *BEV*, přímka určená body *3*, *L*.
7. Přímka *3L* protne hranu *EV* v bodě *P*. Úsečka *OP* tvoří stranu řezu.

8. Bodem *4*, který je společným bodem přímek *p* a *CF*, musí procházet průsečnice roviny řezu a roviny *CFV*, přímka určená body *4*, *X*, kde bod *X* je průsečíkem přímek *2K* a *3L*.
9. Přímka *4X* protne hranu *FV* v bodě *Q*. Úsečky *KQ* a *PQ* jsou zbývající strany řezu.
10. Řezem je šestiúhelník *KLNMPOQ*.



Obrázek 48: Řez pravidelného šestibokého jehlanu ABCDEFV rovinou KLM

Literatura

[1] MACHALA F.; SEDLÁŘOVÁ M.; SROVNAL J. *Konstrukční geometrie*, 1. vydání, Univerzita Palackého v Olomouci, 2002. ISBN 80-244-0399-4.

[2] CHODOROVÁ, M. *Studijní materiály k předmětu Konstrukční geometrie*.

[3] POMYKALOVÁ E. *Matematika pro gymnázia – Stereometrie*, 4. vydání, Praha: Prometheus, 2010. Učebnice pro střední školy. ISBN 978-80-7196-389-9.

[4] HRUBÝ D. *Matematická cvičení pro střední školy*, 1. vydání, Praha: Prometheus, 2008. Učebnice pro střední školy. ISBN 978-80-7196-374-5.

Seznam použitých symbolů

A, B, …	bod A, B, …
1, 2, …	bod 1, 2, …
p, q, …	přímka p, q, …
přímka AB	přímka určená body A, B
polopřímka AB	polopřímka s počátkem A a vnitřním bodem B
úsečka AB	úsečka s krajními body A, B
ρ, σ, …	rovina ρ, σ, …
rovina ABC	rovina určená body A, B, C
rovina Ap	rovina určená bodem A a přímkou p
$X \in AB$	bod X náleží úsečce AB
$\|AB\|$	vzdálenost bodů A, B; délka úsečky AB