**Čtyřúhelníky**

Čtyřúhelník je sjednocením dvou trojúhelníků bez společných vnitřních bodů, ale se společnou celou jednou stranou. (Krajní body společné strany nejsou přitom vnitřními body úsečky s krajními body, kterými jsou zbývající dva vrcholy každého z trojúhelníků.)

Rozdělení čtyřúhelníků podle tvaru:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| čtyřúhelníky | * nekonvexní
 |  |
| * konvexní
 | * obecné
 |  |
|  | * rovnoběžníky
 | pravoúhelníky | obdélníky |
| čtverce |
| kosodélníky | kosodélníky |
| kosočtverce |
| * lichoběžníky
 | obecné |
| rovnoramenné |
| pravoúhlé |
| * deltoidy
 | * jejich úhlopříčky jsou navzájem kolmé a právě jedna z nich půlí druhou
 |

**Konvexní** **čtyřúhelníky**

|  |  |
| --- | --- |
| $$a, b, c, d $$ | strany čtyřúhelníku |
| $$e, f$$ | úhlopříčky čtyřúhelníku |
| $$α, β, γ, δ $$ | vnitřní úhly čtyřúhelníku |

* Nutná a postačující podmínka k existenci konvexního čtyřúhelníku:

$(a+b+c>d$)$˄(b+c+d>a)˄(c+d+a>b)˄(a+b+d>c)$

Mezi nejdůležitější konvexní čtyřúhelníky patří:

1. **tětivové** – lze jim opsat kružnici,
2. **tečnové** – lze jim vepsat kružnici, která se zvnitřku dotýká všech jeho stran ve vnitřních bodech,
3. **dvojstředové** – tětivové a tečnové současně; netýká se jen čtverců!

**Věta 1** (kritérium = nutná a postačující podmínka pro tětivový čtyřúhelník)
Konvexní čtyřúhelník ABCD je **tětivový**, právě když platí: $α+γ=β+δ=180°.$

*Důkaz:*

Pozn: Rozumí se při obvyklém označení velikostí jeho vnitřních úhlů.

**Věta 2** (kritérium = nutná a postačující podmínka pro tečnový čtyřúhelník)
Konvexní čtyřúhelník ABCD je **tečnový**, právě když platí: $a+c=b+d.$

*Důkaz:*

Pozn: Rozumí se při obvyklém označení velikostí (délek) jeho stran.

|  |
| --- |
| Vzorce pro obsah |
| 1. Pro obsah tětivového čtyřúhelníku ABCD platí tzv. Brahmaguptův vzorec:

$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$,kde $2s=a+b+c+d$, ($(s-a, s-b,s-c,s-d>0$). Pozn: Jeho důkaz se vede podobně jako u Heronova vzocre, proto se mu někdy říká Heronův vzorec pro tětivový čtyřúhelník. |
| 1. Pro obsah tečnového čtyřúhelníku ABCD platí:

$S=ρs$**,**kde $2s=a+b+c+d$ a $ρ$ je poloměr kružnice čtyřúhelníku vepsané. |
| 1. Pro obsah dvojstředového čtyřúhelníku ABCD platí:

$$S=\sqrt{abcd}$$ |

Pozn: Nutná a postačující podmínka z Věty 1 se často nahrazuje následující ekvivalentní podmínkou:

**Věta 1⃰**
Konvexní čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový, právě když je některý z jeho vnitřních úhlů shodný s vedlejším úhlem u protějšího vrcholu.

Další dvě zajímavá, málo známá a elegantní tvrzení:

**Věta 3** Úhlopříčky $AC$ a $BD$ v konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ jsou navzájem kolmé, právě když platí $a^{2}+c^{2}=b^{2}+d^{2}$.

*Důkaz:*

**Věta 4** Úhlopříčky$ AC$ a $BD$ v tečnovém čtyřúhelníku $ABC$D jsou navzájem kolmé, právě když platí $ac=bd$.

*Důkaz:*

*Cvičení 1.* Odvoďte vzorec $S=\sqrt{abcd}$ z Brahmaguptova vzorce užitím vztahu $a+c=b+d$.