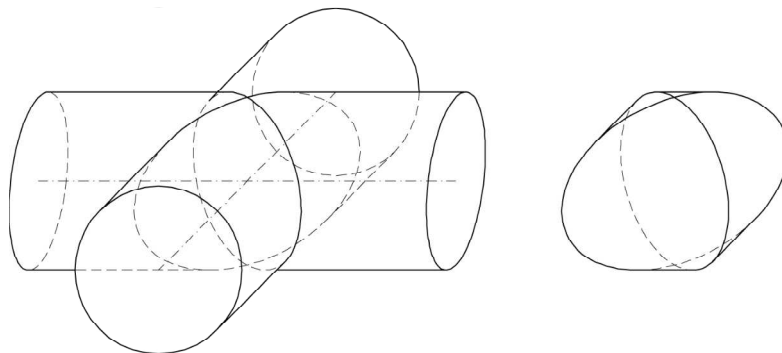


1 Teoretická část

V této části, jež ozřejmuje čtenáři základní pojmy a postupy řešení průniku oblých těles, jsme čerpali zejména z knih, jež jsme uvedli v seznamu literatury v závěru práce. Tyto knihy jsou všeobecné a nezabývají se pouze teorií průniku těles, nýbrž i jinými tématy. Jako doplňující literaturu jsem zvolila bakalářskou práci Jana Kozáka [6].

1.1 Základní pojmy

Průnik těles je množina všech bodů společných oběma tělesům. V závislosti na vzájemné poloze těchto těles může nastat několik případů, od průniku prázdného až případ, kdy je průnikem jedno z těles. V této práci se budeme zabývat pouze případem, kdy je průnikem trojrozměrný útvar, tedy těleso. *Průnikem povrchů* pak rozumíme pouze ty body průniku, které leží na povrchu obou daných těles zároveň. Obecně tedy půjde o křivku, nikoliv o těleso. Rozdíl mezi průnikem těles a průnikem povrchů je znázorněn na Obr. 1.



Obr. 1: Průnik povrchů, průnik těles.

Budeme-li tedy mluvit o *průniku* dvou *oblých ploch*, budeme jím rozumět průnik jejich povrchů. Touto množinou je křivka čtvrtého stupně, jež se může rozpadat na křivky nižších stupňů, přičemž součet těchto stupňů je vždy roven čtyřem ($3+1$, $2+2$, $1+1+1+1 \dots$). Body průnikové křivky konstruujeme tak, že obě plochy protneme pomocnými rovinami, nebo plochami; tyto roviny (plochy) protnou dané plochy v křivkách, jejichž průsečíky jsou hledanými body průniku. Pomocné roviny volíme tak, aby průsečné křivky s plochami byly co nejjednodušší a z praktického hlediska snadno i přesně zkonstruovatelné. Při konstrukci bodů průnikové křivky volíme konečný počet pomocných rovin či ploch, na něž daný postup aplikujeme. Typ pomocných rovin (ploch) volíme v závislosti na typu těles, jejich vzájemné poloze a na poloze vzhledem k průmětnám.

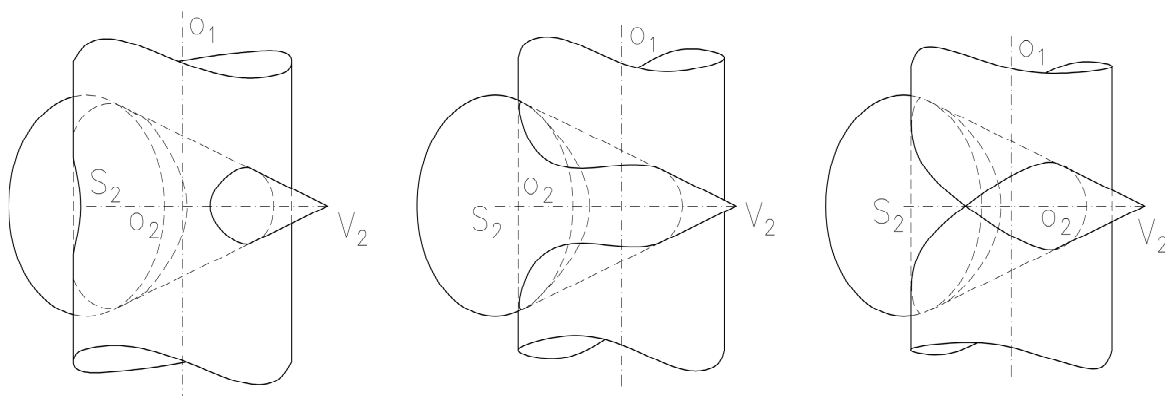
Pro přesnější vyrýsování můžeme sestavit v libovolném bodě průnikové křivky *tečnu*,

resp. její průmět. Jelikož tento bod leží na obou plochách, tečna křivky v tomto bodě musí být zároveň tečnou obou ploch. Sestrojíme-li v tomto bodě tečné roviny k oběma plochám, jejich průsečnice je hledanou tečnou. Tečnu v bodě můžeme sestavit i jako kolmici k normálové rovině určené normálami vedenými tímto bodem k oběma plochám.

1.2 Průniková křivka

Průnikem dvou ploch stupně druhého je prostorová křivka stupně čtvrtého, tj. křivka, kterou libovolně zvolená rovina protíná v nejvýše čtyřech bodech. V některých případech se tato křivka rozpadá na křivky nižších stupňů, přičemž součet těchto stupňů je vždy roven čtyřem. Skládá-li se průniková křivka z jedné části, jedná se o *průnik částečný*, je-li ze dvou částí, mluvíme o *průniku úplném*. Přejídným typem mezi těmito průniky je takový, kdy se plochy navzájem dotýkají v jednom, nebo ve dvou bodech, tyto body nazýváme *dvojnými body*. Typy průniků viz Obr. 2.

Věta 1.1. *Průniková křivka má v bodě A , v němž se obě plochy dotýkají, dvojný bod, jímž prochází dva oblouky průnikové křivky.*

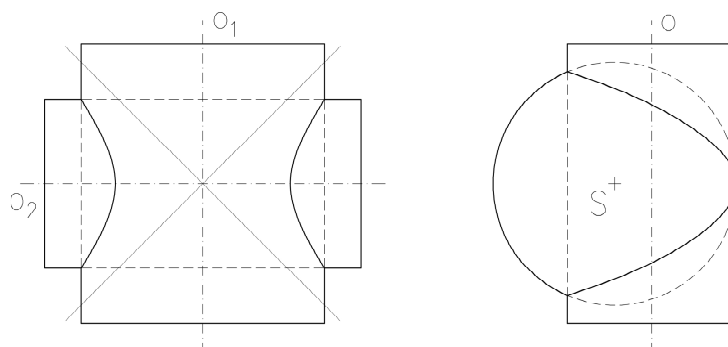


Obr. 2: Průnik úplný, průnik částečný, dvojný bod.

Věta 1.2. *Protínají-li se dvě plochy stupně druhého v rovinné křivce (kuželosečce), pak se protínají ještě ve druhé rovinné křivce.*

Věta 1.3. *Mají-li dvě plochy stupně druhého dotyk ve dvou bodech, rozpadá se jejich průniková křivka na dvě kuželosečky, jejichž roviny procházejí přímkou spojující oba body dotyku.*

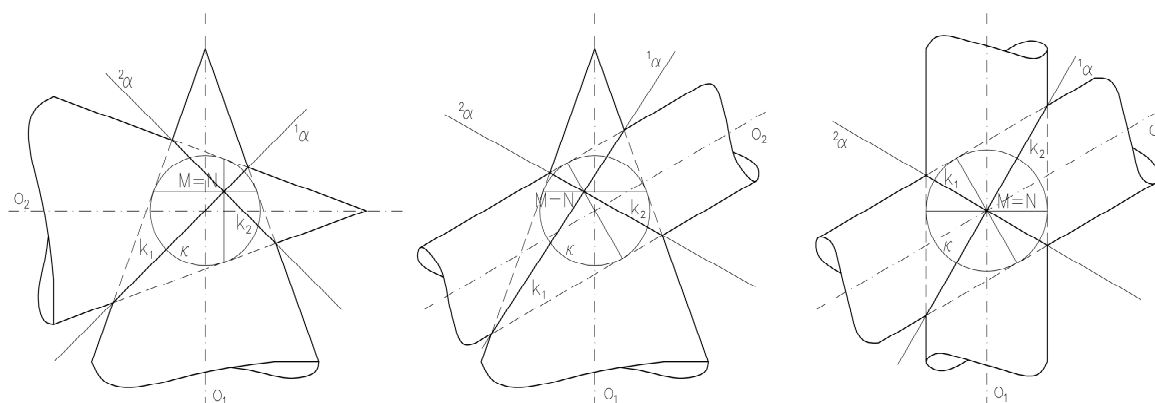
Věta 1.4. *Pravoúhlý průmět průnikové křivky dvou kvadrik na rovinu rovnoběžnou se společnou rovinou souměrnosti obou kvadrik je kuželosečka (nebo její část). Viz Obr. 3.*



Obr. 3: Pravoúhlý průmět křivky do roviny rovnoběžné s rovinou souměrnosti.

Věta 1.5. *Průnik dvou rotačních singulárních jednoduchých kvadrik se rozpadá na dvě kuželosečky právě tehdy, když existuje kulová plocha současně vepsaná oběma kvadrikám.*

Příklady rozpadu průnikové křivky na dvě kuželosečky viz Obr. 4.



Obr. 4: Rozpad průnikové křivky.

Dotýkají-li se dvě kvadriky podél povrchové přímky, jejich průnik se rozpadá na jednoduchou kuželosečku a na singulární kuželosečku složenou z dvojnásob počítané dotykové přímky, viz Příklad 2.15.

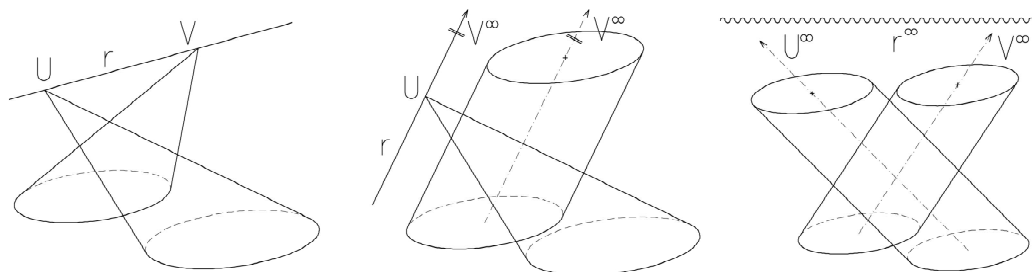
1.3 Průnik ploch kuželových a válcových

Průnik ploch kuželových a válcových konstruujeme pomocí soustav pomocných rovin. Tyto pomocné roviny tvoří svazek o průsečnici r , jenž je spojnicí vrcholů U a V . Průsečnice¹ je dána jednou z následujících možností (viz Obr. 5):

1. dvěma vlastními vrcholy U , V , jedná-li se o dvě plochy kuželové,

¹Tuto průsečnici můžeme uvažovat pouze tehdy, považujeme-li plochu válcovou za speciální typ plochy kuželové, jejímž vrcholem je nevlastní bod.

2. jedním vlastním vrcholem U a jedním nevlastním vrcholem V^∞ , jde-li o průnik plochy kuželové s plochou válcovou,
3. dvěma nevlastními vrcholy U^∞, V^∞ , pronikají-li se dvě plochy válcové.

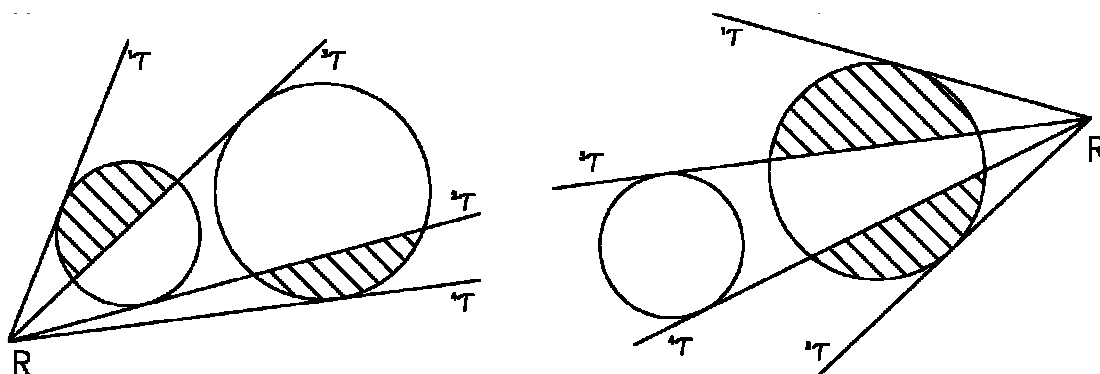


Obr. 5: Typy průsečnice r svazku pomocných rovin.

Roviny procházející průsečnicí r nazýváme v případě 1. vrcholové, v případě 2. vrcholové – směrové a v případě 3. směrové.

Roviny ρ proložené přímkou $r = UV$ mohou mít s danými plochami společný buď právě jeden bod = vrchol, nebo právě jednu povrchovou přímku, nebo právě dvě povrchové přímky. Pro naše potřeby se zaměříme pouze na případy, kdy mají tyto roviny s každým tělesem společnou alespoň jednu přímku. Metoda, kterou budeme používat pro konstrukci průniku pomocí těchto rovin se nazývá *číslovací metoda*. Postup:

1. Sestrojíme průsečnici svazku pomocných rovin $r = UV$.
2. Touto přímkou proložíme tečné roviny k oběma plochám.
3. Najdeme průsečíky přímky r s rovinami podstav těchto ploch² a těmi vedeme stopy tečných rovin (viz Obr. 6).

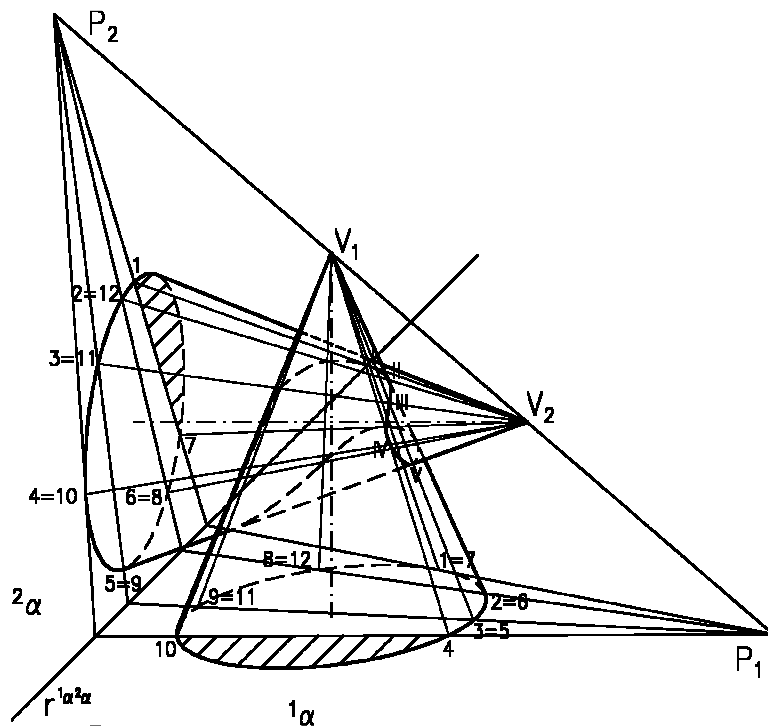


Obr. 6: Konstrukce stop tečných rovin, vyznačení lichých částí.

²Leží-li podstavy ve stejné rovině, průsečík bude jen jeden.

4. Na podstavách vyznačíme vyšrafovaním tzv. *liché části* (části, jež se neúčastní průniku, tedy části, nad nimiž nejsou žádné body průnikové křivky). V případě, že se liché části nachází na obou tělesech mluvíme o *průniku částečném*, jsou-li obě liché části na témže tělese, jedná se o *průnik úplný*. Existuje-li pouze jedna resp. žádná lichá část (tento případ nastane, budou-li mít tělesa společnou jednu resp. dvě tečné roviny), potom se plochy dotýkají v *dvojných bodech*.
5. Nakonec proložíme průsečnicí r roviny procházející obrysovými přímkami, které se průniku účastní. Dle prostorového postupu sestrojujeme jednotlivé řezy ploch a následně průsečíky těchto řezů; body průniku.

Číslování rovin nám pomáhá při konečném spojování jednotlivých bodů průniku. Postup: číslovat začneme na jedné z podstav od liché části, směr číslování je k druhé liché části. Vybereme jeden z odpovídajících bodů na podstavě druhé a zvolíme směr číslování na této podstavě. S číslováním na první podstavě pokračujeme, číslováme každou následující rovinu, a najdeme odpovídající bod na podstavě druhé (musí být sousedící bodu předchozímu). Směr číslování se mění, narazíme-li na lichou část. Pro kontrolu, každý bod podstavě by měl být očíslován dvakrát (vyjma bodů sousedících s lichou částí). Výslednou křivku vykreslíme jako spojnici bodů $I, II \dots, n$, kde bod I je průsečík povrchových přímek těles vedoucích bodem 1 na první podstavě a bodem 1 na druhé podstavě. Část znázorněna na Obr. 7



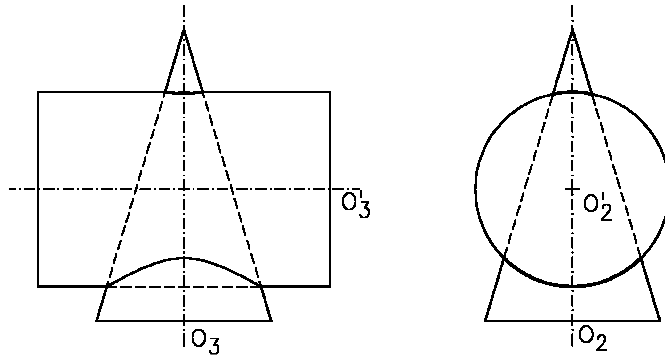
Obr. 7: Číslovací metoda.

Viditelnost bodů určíme následujícím způsobem: bod průnikové křivky je viditelný právě tehdy, leží-li na viditelných povrchových přímkách obou těles. Ve všech ostatních případech bod není viditelný.

1.4 Průniky ploch rotačních

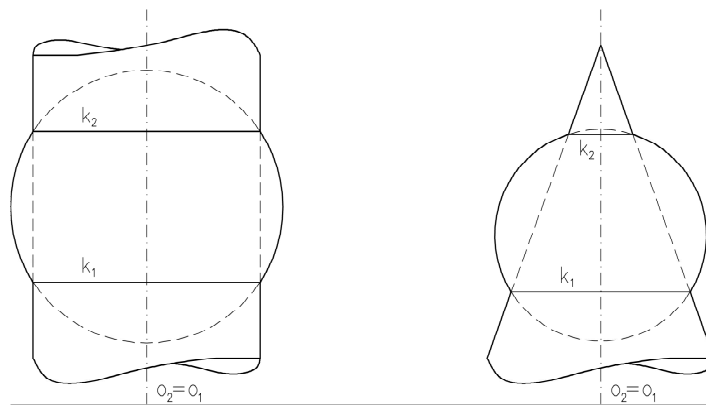
Konstruujeme-li průnik dvou rotačních ploch, volíme pomocné plochy na základě vzájemné polohy os těchto těles. Za tyto plochy volíme zpravidla roviny nebo kulové plochy.

Jsou-li osy rotačních ploch *mimoběžné*, využijeme postup z podkapitoly 1.3. Výrazné zjednodušení přichází, je-li jedno z těles rotační válcová plocha, jejíž osa je *kolmá* k některé průmětně. Průmět průnikové křivky do této průmětny splývá s průmětem řídicí kružnice (křivky) této plochy, viz Obr. 8.



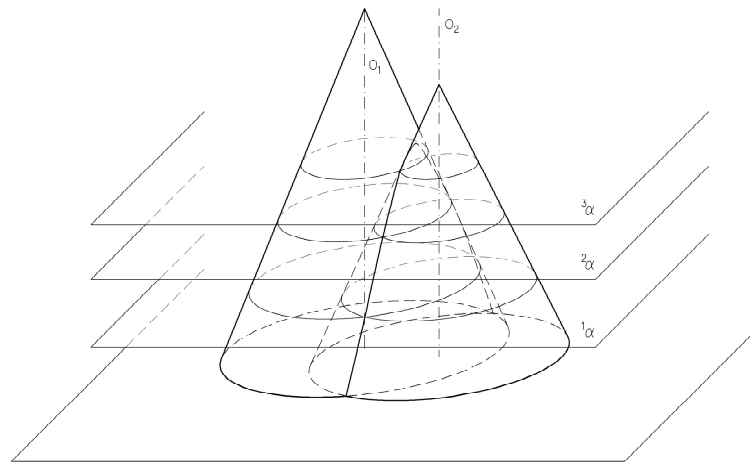
Obr. 8: Osa válcové plochy je kolmá k průmětně.

Nejjednodušším případem průniku je, mají-li obě tělesa *společnou osu rotace*. V takovém případě se tyto plochy protínají ve společných kružnicích, které se v rovnoběžném promítání na průmětnu rovnoběžnou s touto osou zobrazí jako úsečky, viz Obr. 9.



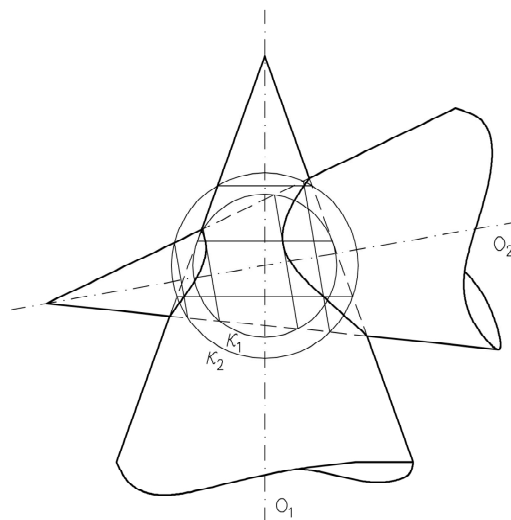
Obr. 9: Průnik ploch s totožnými osami.

Jsou-li osy těles *rovnoběžné různé*, za pomocné plochy volíme roviny kolmé ke směru těchto os, viz Obr. 10. Tyto roviny protínají obě plochy v kružnicích, přičemž jejich společné body patří průnikové křivce. Platí, že průniková křivka je souměrná podle roviny určené oběma osami. (Tento způsob můžeme použít i na průnik kulové plochy s nerotačním kruhovým válcem, či kuželem, přičemž pomocné roviny volíme rovnoběžně s podstavou válce, či kužele.)



Obr. 10: Průnik ploch s rovnoběžnými osami.

V případě, že osy daných ploch jsou *různoběžné*, jako pomocné plochy konstruujeme plochy kulové se středem v průsečíku těchto os, viz Obr. 11. Takto zvolené kulové plochy mají se zadanými rotačními plochami společnou osu rotace a protínají je tudíž opět v kružnicích. Průsečíky těchto kružnic jsou hledanými body průniku. Průniková křivka je opět souměrná podle roviny souměrnosti určené osami těchto ploch.



Obr. 11: Průnik ploch s různoběžnými osami.