Kapitola 1

Úvod do zobrazovací metody pravoúhlé axonometrie

V úvodní části se seznámíme s pojmem pravoúhlá axonometrie, principem, jakým tato metoda funguje a také jakým způsobem v ní můžeme zobrazovat jednotlivé prvky. Pravoúhlé axonometrie užíváme především k názornému zobrazování těles.

1.1 Základní pojmy

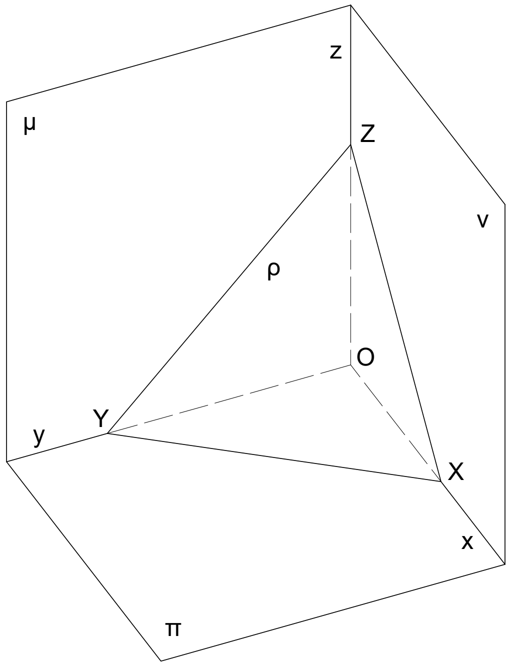
Pravoúhlá axonometrie je pravoúhlé promítání na dvě navzájem kosé průmětny. Jedna z nich je axonometrická průmětna a značíme ji ρ. Druhá průmětna je pomocná, značíme ji zpravidla π. Bod prostoru A zobrazíme tak, že jej pravoúhle promítneme do axonometrické průmětny do bodu A^a. Dále sestrojíme provoúhlý průmět bodu A do pomocné průmětny π, označíme jej A_1. Tento průmět pravoúhle promítneme do axonometrické průmětny do bodu A_1^a. Tím získáme tzv. axonometrický půdorys bodu A. Dvojice (A^a, A_1^a) leží na ordinále (kolmici k průsečnici obou průměten). Nákresnu ztotožníme s axonometrickou průmětnou.

Pravoúhlá axonometrie je tedy vzájemně jednoznačné zobrazení bodů trojrozměrného prostoru na uspořádané dvojice průmětů v rovině, které leží na ordinálách.

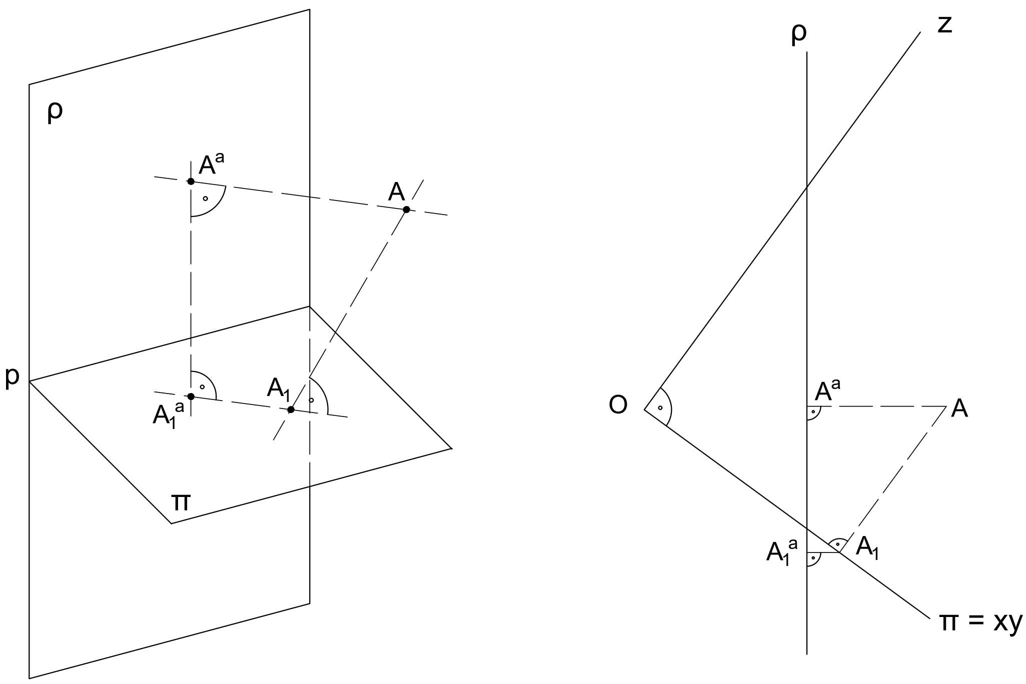
V běžně užívané pravoúhlé axonometrii vycházíme z levotočivé kartézské soustavy souřadnic $\{O, x, y, z\}$. Souřadnicové roviny volíme za pomocné průmětny π, ν, μ. Axonometrickou průmětnu volíme tak, aby byla kosá ke všem průmětnám a aby neprocházela počátkem O. Pomocné průmětny π, ν a μ protínají s axonometrickou průmětnu v přímkách – axonometrických stopách těchto pomocných průměten. Ty určují trojúhelník, jehož vrcholy X, Y, Z jsou průsečíky axonometrické průmětny se souřadnicovými osami x, y, z. Trojúhelník XYZ se nazývá *axonometrický trojúhelník.*

Osy x, y, z se po řadě promítají do přímek x^a, y^a, z^a procházejících průmětem počátku O^a a vrcholy axonometrického trojúhelníku X, Y, Z. Axonometrické průměty x^a, y^a, z^a souřadnicových os x, y, z tvoří tzv. *axonometrický osový kříž.*

Skutečné velikosti úseček ležících na osách x, y, z nebo na přímkách s nimi rovnoběžných se pravoúhlým promítáním zkracují. Jsou-li α, β, γ velikosti úhlů, které svírají po řadě osy x, y, z s axonometrickou průmětnou, pak zvolená jednotka délky na osách x, y, z se promítne do úsečky velikosti (zkrátí se) $j_x = j \cdot \cos\alpha$, $j_y = j \cdot \cos\beta$, $j_z = j \cdot \cos\gamma$. Úsečky j_x, j_y, j_z se nazývají axonometrické jednotky na osách x, y, z. Chceme-li na osy x, y, z nanášet úsečky ve skutečné velikosti, musíme příslušnou průmětnu otočit kolem její axonometrické stopy do axonometrické průmětny,



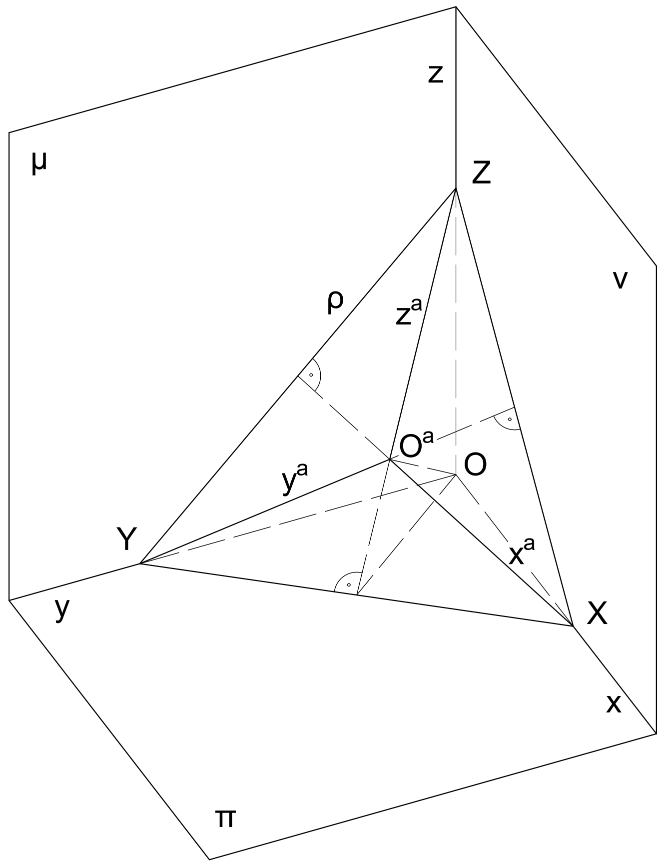
Obrázek 1.1: *Průmětny a axonometrický trojúhelník.*



Obrázek 1.2: *Promítání pravoúhlé axonometrie.*

viz obrázek 1.4. Zde je znázorněno otáčení půdorysny π (resp. nárysny ν) kolem axonometrické stopy XY (resp. XZ) do axonometrické průmětny.

Pravoúhlá axonometrie, pro kterou všechny tři axonometrické jednotky jsou vzájemně různé délky, se nazývá pravoúhlá trimetrie (tento název se příliš nepoužívá, říkáme pouze pravoúhlá axonometrie). Axonometrie, ve které mají právě dvě jednotky stejnou délku, se nazývá *dimetrie*, (axonometrický trojúhelník je rovnoramenný), jestliže



Obrázek 1.3: *Průměty souřadných os.*

všechny jednotky mají stejnou délku jedná se o *izometrii*, (axonometrický trojúhelník je rovnostranný).

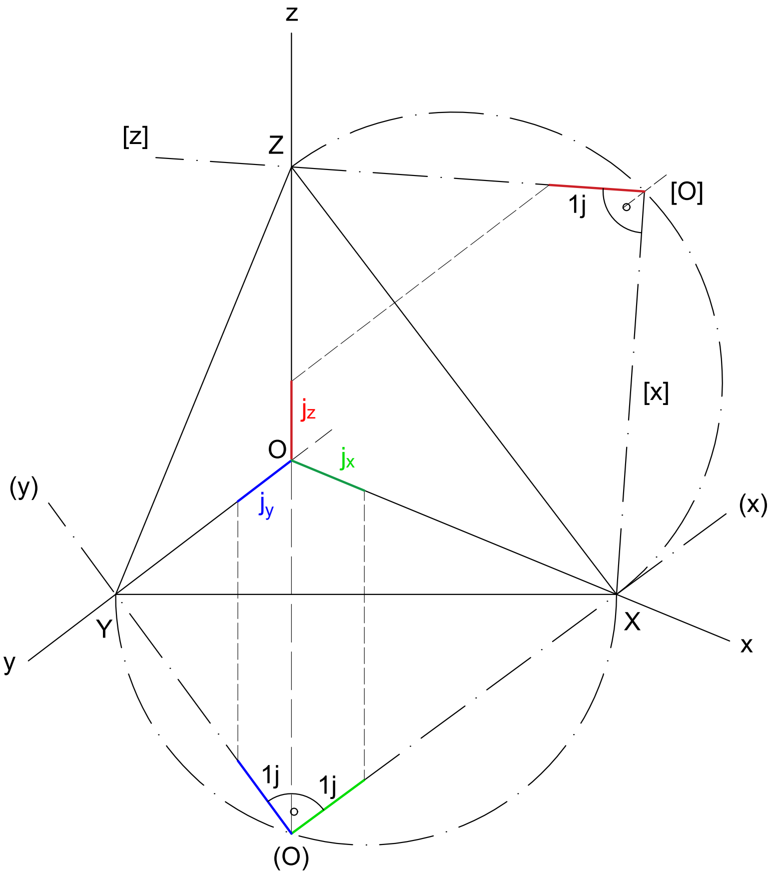
1.2 Zobrazení bodu, přímky a roviny

1.2.1 Zobrazení bodu

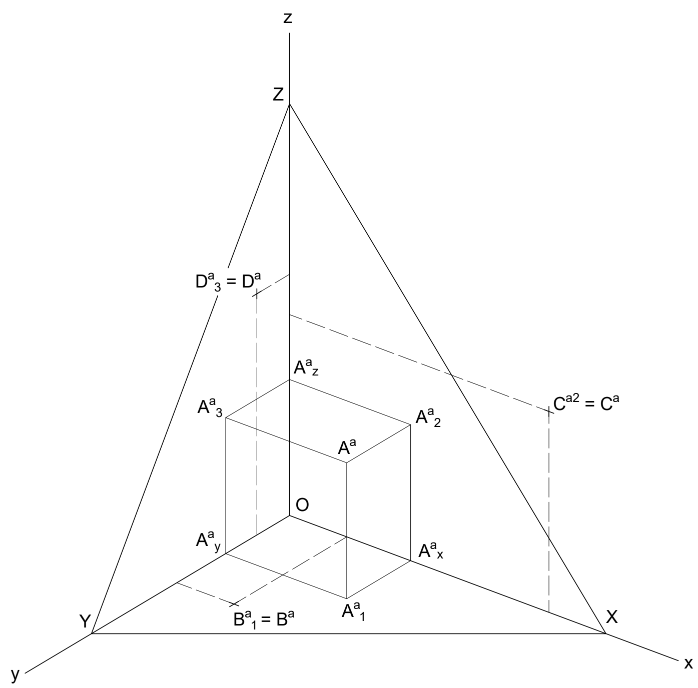
Bod prostoru se zobrazí na uspořádanou dvojici (A_1^a, A^a), kde A_1^a je axonometrický půdorys bodu A a A^a jeho axonometrický průmět. Oba průměty leží na ordinále rovnoběžné s průmětem osy z. Zbývající průměty bodu A získáme užitím souřadnicového kvádru bodu A. Průměty (A_2^a, A^a) leží na druhé ordinále rovnoběžné s průmětem osy y, průměty (A_3^a, A^a) leží na třetí ordinále rovnoběžné s průmětem osy x, viz obr. 5. Leží-li bod přímo v pomocné průmětně (po řadě v půdorysně, nárysně a bokorysně), splývá jeho axonometrický průmět po řadě s axonometrickým půdorysem, s axonometrickým nárysem a s axonometrickým bokorysem.

1.2.2 Zobrazení přímky

Průmět přímky je určen průměty dvou jejích různých bodů. K jejímu určení stačí dva její libovolné průměty, z nichž lze získat ty zbylé. Většinou se však přímka zobrazuje pomocí jejího axonometrického průmětu a axonometrického půdorysu. Průsečíky přímky s průmětnami π, ν, μ, nazýváme stopníky. Půdorysný stopník značíme P, platí

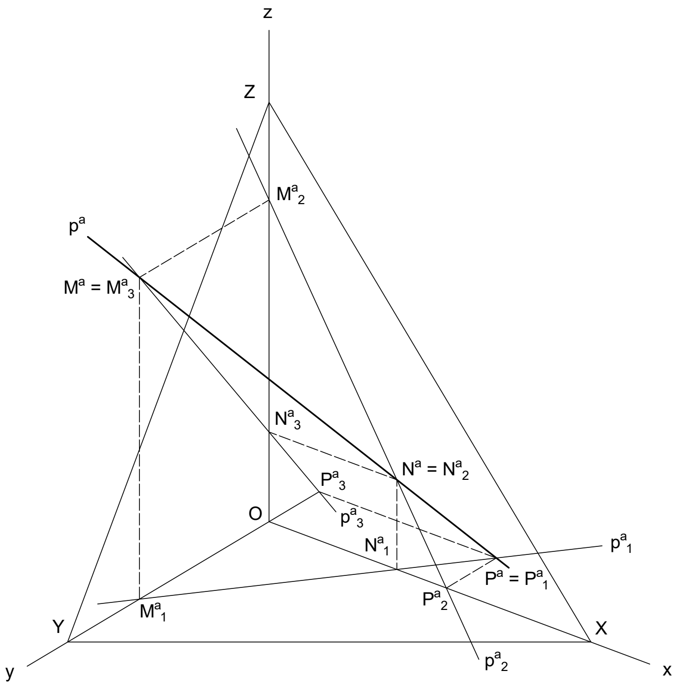


Obrázek 1.4: *Nanášení jednotek.*



Obrázek 1.5: *Průměty bodu A v obecné poloze a bodů B, C, D.*

$P^a = P_1^a$, je tedy průsečíkem axonometrického průmětu přímky a jejího axonometrického půdorysu, nárysný stopník značíme N, platí $N^a = N_2^a$ a je průsečíkem axonometrického průmětu přímky a jejího axonometrického nárysu a bokorysný stopník značíme M, platí $M^a = M_3^a$ a je průsečíkem axonometrického průmětu přímky a jejího axonometrického bokorysu. Viz 1.6.



Obrázek 1.6: *Zobrazení přímky.*

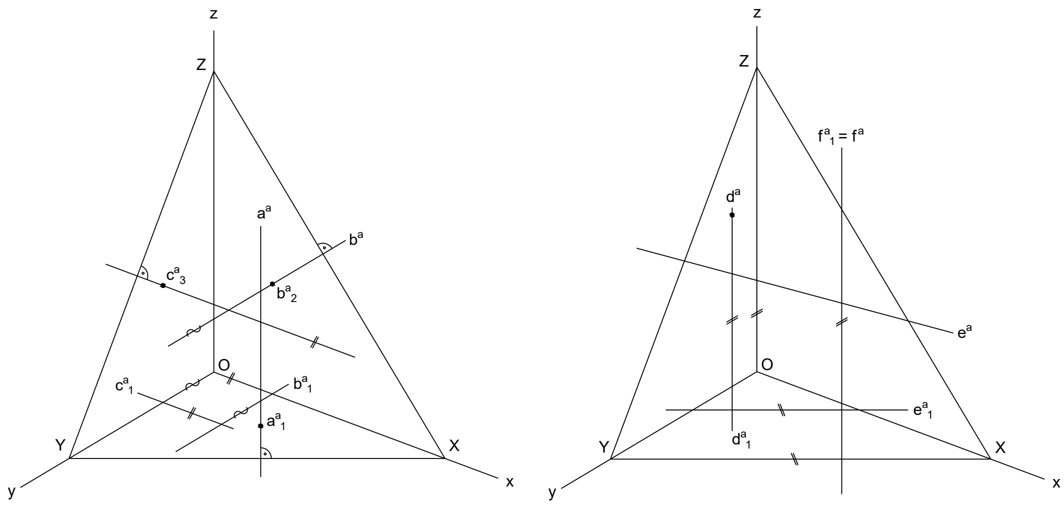
Zobrazíme některé průměty přímek ve zvláštních polohách vůči průmětnám přímky. Na obrázku 1.7(a) jsou průměty přímek kolmých k průmětnám, $a \perp \pi$, $b \perp \nu$, $c \perp \mu$. Další zvláštní polohy přímek jsou znázorněny na obrázku 1.7(b). Přímka d je kolmá k axonometrické průmětně, přímka e je s axonometrickou průmětnou rovnoběžná a přímka f, pro jejíž průměty platí $f^a = f_1^a$, $f^a \perp XY$, není určena jednoznačně. K tomu, aby průmět přímky f byl jednoznačný, je protřeba zobrazit dva její body.

1.2.3 Zobrazení roviny

Roviny kolmé k axonometrické průmětně se zobrazí jako přímky. Průmětem jakékoliv jiné roviny, která není kolmá k axonometrické průmětně, je celá axonometrická průmětna. Abychom mohli řešit úlohy v rovině, stačí znát průměty dvou jejích různých přímek. Užívá se především stop dané roviny. Rovina má až čtyři stopy (rovina α, 1.8): půdorysná stopa p^α – průsečnice roviny s první pomocnou průmětnou, nárysná stopa n^α – průsečnice roviny s druhou pomocnou průmětnou a bokorysná stopa m^α – průsečnice roviny s třetí pomocnou průmětnou. Axonometrická stopa r^α je průsečnice roviny α s axonometrickou průmětnou.

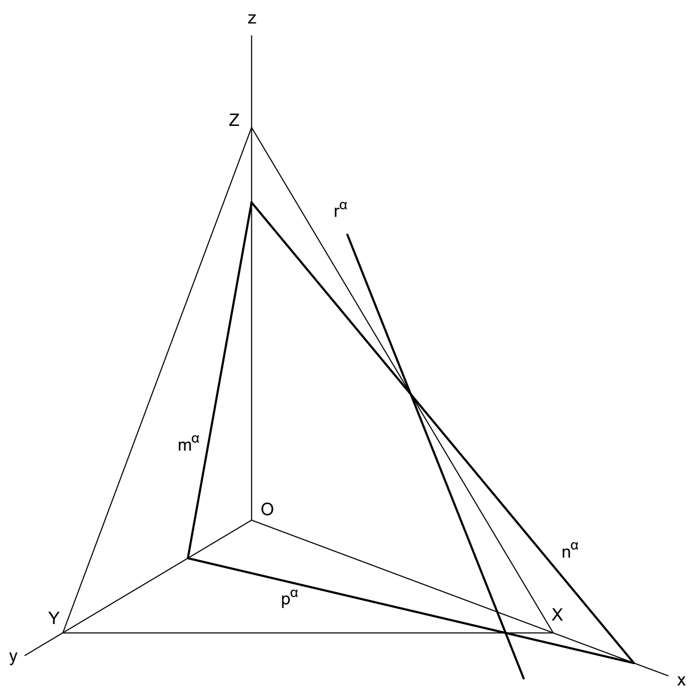
Tedy v axonometrii rovinu zpravidla zobrazujeme pomocí stopního trojúhelníku, jehož strany tvoří právě průsečnice s pomocnými průmětnami π, ν, μ, viz obrázek 1.8.

Uvedeme několik příkladů rovin ve zvláštní poloze. Například rovinu β, která je rovnoběžná s nárysnou ν, rovinu γ, která je rovnoběžná s osou y, rovinu δ procházející osou z a rovinu ε, která je kolmá k axonometrické průmětně (jejím obrazem je přímka). Viz obr. 1.9.



(a) **(b)**

Obrázek 1.7: *Přímky v různých polohách.*

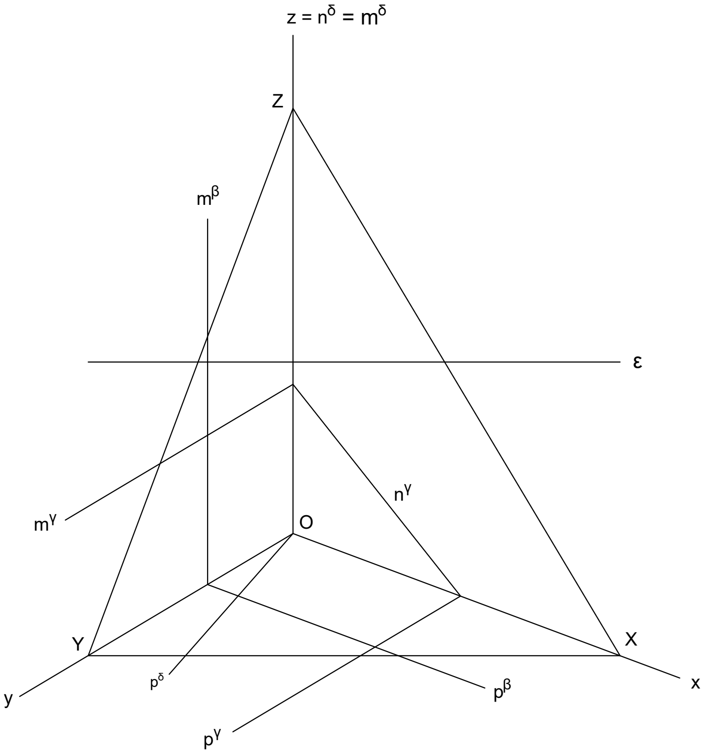


Obrázek 1.8: *Zobrazení roviny.*

Pokud přímka náleží rovině, musí její stopníky ležet na příslušných stopách roviny.

1.3 Otočení roviny do axonometrické průmětny

Pokud chceme provádět planimetrické konstrukce geometrických útvarů ležících v některé z pomocných průměten π, ν, μ, musíme příslušnou pomocnou průmětnu otočit do axonometrické průmětny. Průmětnu otáčíme kolem axonometrické stopy, tj. kolem



Obrázek 1.9: *Specialní polohy rovin.*

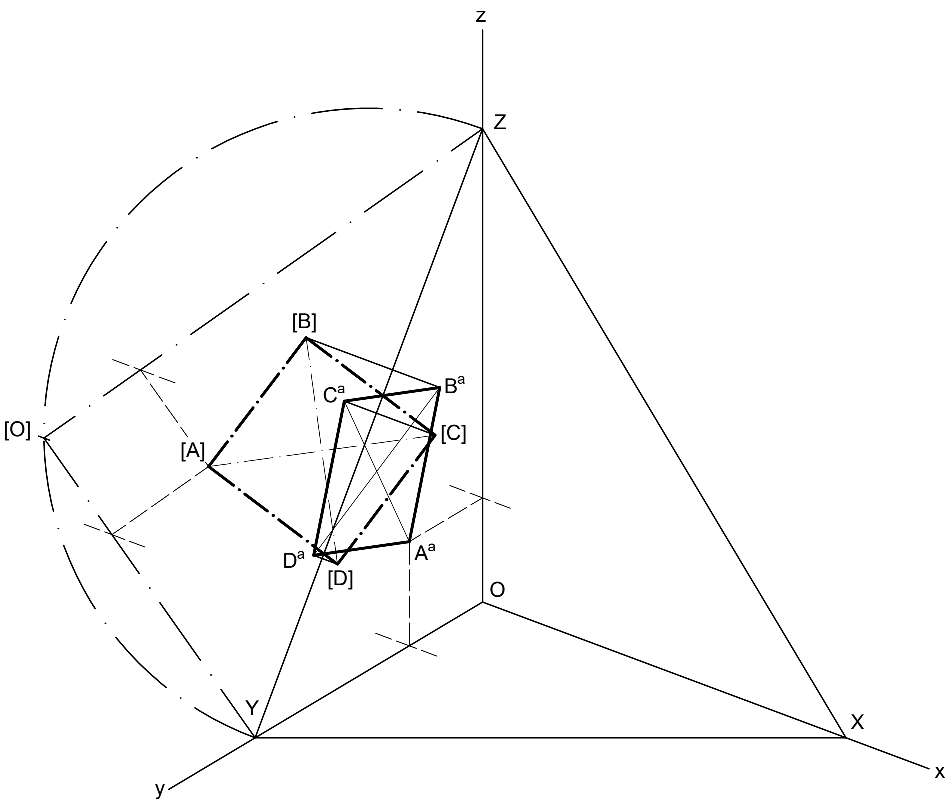
příslušné strany axonometrického trojúhelníku. Např. leží-li daný objekt v bokorysně μ a chceme-li znát jeho skutečnou velikost, otočíme průmětnu μ kolem stopy YZ do axonometrické průmětny. Mezi axonometrickým průmětem útvaru a otočeným útverem existuje afinní vztah: $\mathcal{A} = (o = YZ, A \to [A])$. Viz obrázek 1.10.

Analogicky jestliže potřebujeme vyřešit planimetrickou konstrukci útvaru ležícího v obecné rovině α, viz 1.11, musíme danou rovinu otočit kolem axonometrické stopy r^α do axonometrické průmětny. Opět mezi axonometrickým průmětem útvaru a otočeným útverem existuje afinní vztah. Osou afinity je axonometrické stopa a dvojici odpovídajích si bodů v afinitě určíme následovně. Vybereme jeden z vrcholů stopního trojúhelníku dané roviny, např. Z' [1]. Zjistíme jeho vzdálenost od axonometrické průmětny. Jelikož bod Z' leží na ose z, sklopíme axonometricky promítací rovinu osy z do axonometrické průmětny. Vzdálenost bodu Z' od axonometrické průmětny je vzdálenost axonometrického průmětu bodu Z' od sklopeného bodu (Z'). Dále sestrojíme rovinu, ve které leží kružnice otáčení zvoleného bodu, (tj. rovinu kolmou k axonometrické stopě roviny α procházející bodem Z'). Tuto rovinu sklopíme do axonometrické průmětny a ve sklopení určíme velikost poloměru kružnice, po které se bod otočí do axonometrické průmětny. Nyní je již afinita určena: $\mathcal{A} = (o = r^\alpha, Z' \to Z'_0)$. V rovině α leží tojúhelník ABC, jeho skutečnou velikostotečení tak vidíme v otočení.

1.4 Vzájemná poloha přímek a rovin

Dvě přímky v prostoru mohou mít následující vzájemné polohy: rovnoběžné, různoběžné a mimoběžné. Všechny tři možnosti jsou znázorněny viz obrázek 1.12. Přímky a a l

[1] v obrázku 1.11 není u bodu Z' uvedeny horní index a



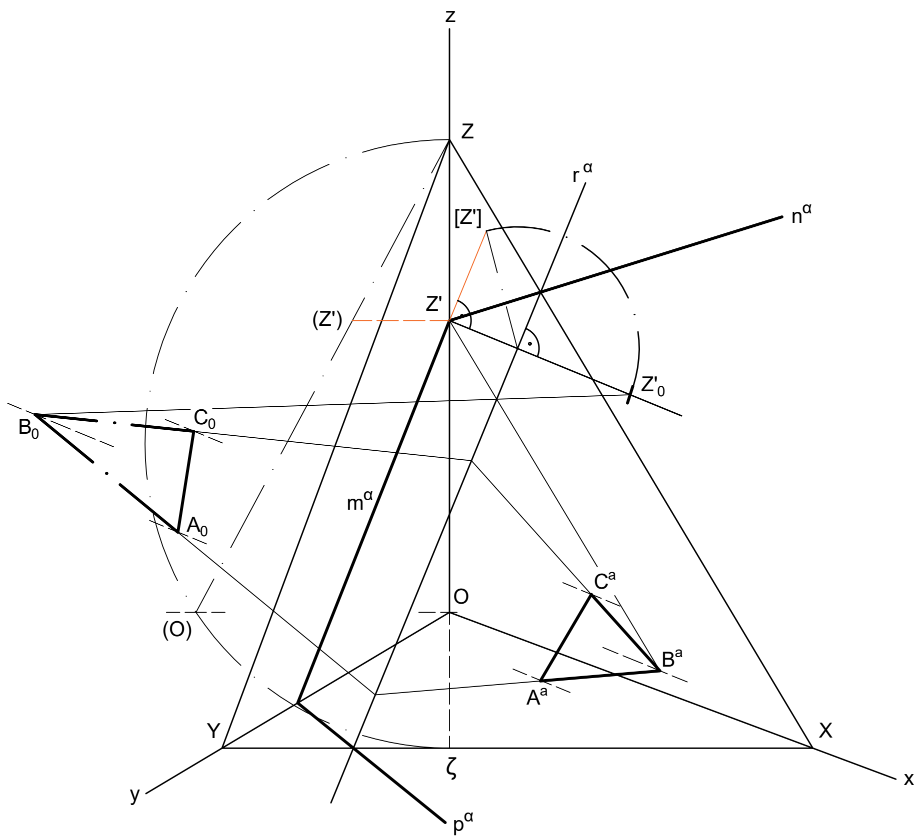
Obrázek 1.10: *Sklopení útvaru v μ.*

jsou navzájem rovnoběžné různé, přímky a a o jsou různoběžné (jejich průsečík je bod R) a přímky a a q jsou mimoběžné.

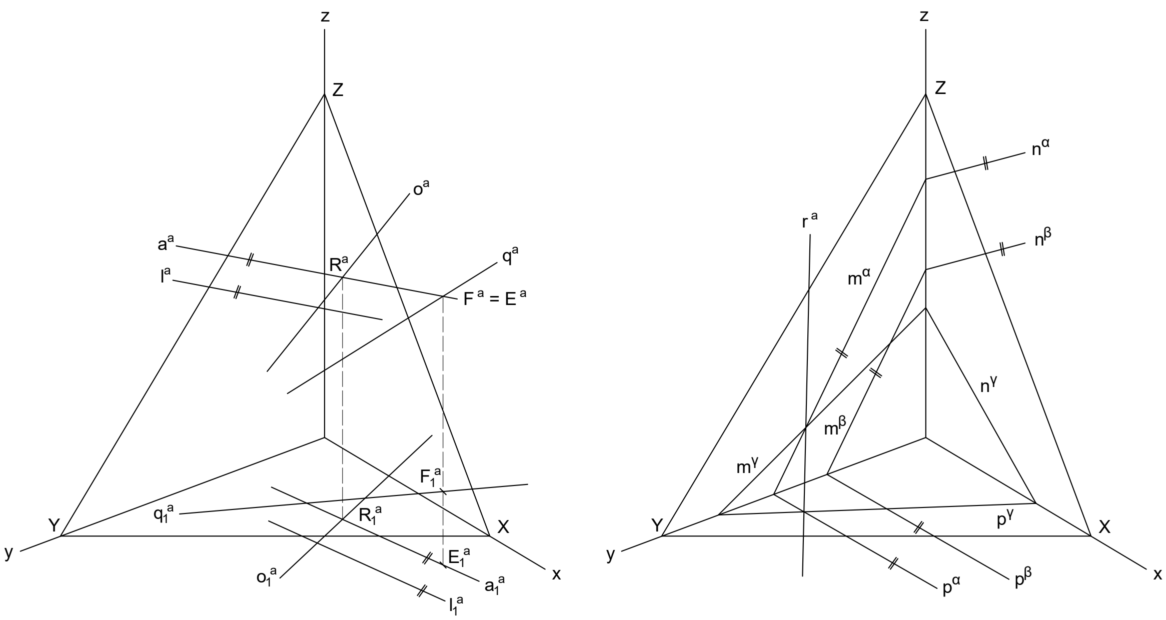
Dvě roviny v prostoru jsou spolu navzájem rovnoběžné, nebo různoběžné. Obě možnosti jsou znázorněny viz obrázek 1.12. Roviny α a β jsou navzájem rovnoběžné různé, roviny α a γ jsou navzájem různoběžné, jejich průsečnice je přímka r.

1.5 Průnik přímky a roviny

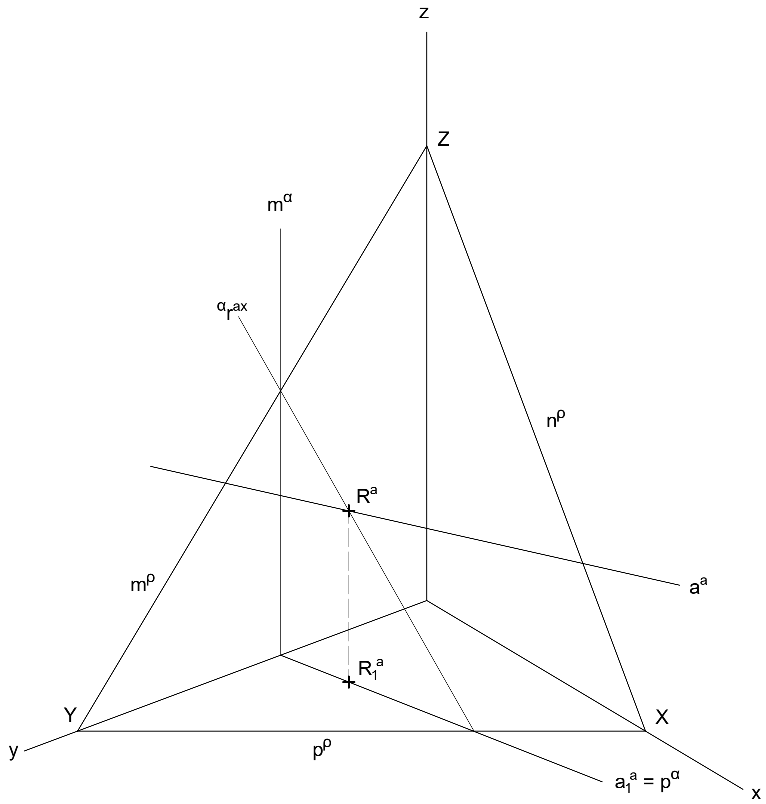
Prostorové řešení průniku přímky a roviny se skládá ze tří kroků. Přímkou proložíme vhodnou rovinu (tzn. promítací rovinu, nebo rovinu ve zvláštní poloze vzhledem k některé z pomocných průměten). Sestrojíme průsečnica dané a proložené roviny. A průsečík přímky s průsečnicí je hledyým bodem průniku. Pro jednoduchost si sestrojíme průsečík přímky $a = (a^a, a_1)$ s axonometrickou průmětnou, viz obrázek 1.13. Stejným způsobem bychom postupovali i v případě libovolné roviny. Přímkou a proložíme vhodnou rovinu, praktické bude zvolit rovinu kolmou k π ($a_1^a = p^\alpha$). Sestrojíme průsečnici r axonometrické průmětny s proloženou rovinou α, (průsečnice r je v tomto případě axonometrickou stopu roviny α), potom hledaný průsečík R je průsečíkem přímek r a a. Jelikož bod R je průsečíke přímky a s axonometrickou průmětnou, je jejím axonometrickým stopníkem.



Obrázek 1.11: *Otočení útvaru v obecné rovině α.*



Obrázek 1.12: *Vzájemné polohy přímek a rovin.*



Obrázek 1.13: *Průnik přímky a roviny (axonometrické průmětny).*

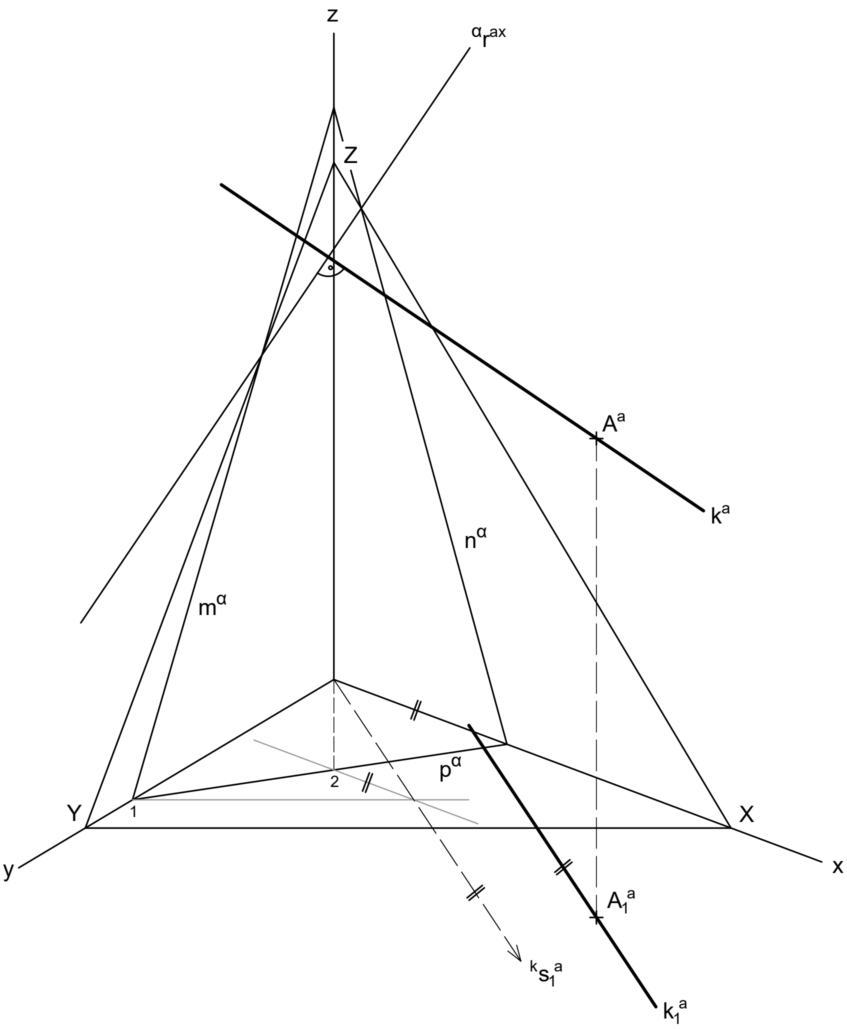
1.6 Kolmost přímek a rovin

1.6.1 Přímka kolmá k rovině

Bodem A ($A = (A^a, A_1^a)$) veďte kolmici k k dané rovině α. Axonometrický průmět k^a přímky k je kolmý k axonometrické stopě r^α roviny α – věty o pravoúhlém průmětu pravého úhlu. Axonometrický půdorys kolmice sestrojíme tak, že nejdříve nalezneme směr kolmý $^k s$ k půdorysné stopě roviny α. Tento směr je sestrojen pomocí výšek v trojúhelníku, jehož vrcholy jsou body 1, 2 a axonometrický průmět počátku O. Výška z vrcholu 1 na stranu $2O$ je rovnoběžná se stranou XY axonometrického trojúhelníku, výška z vrcholu 2 na stranu $2O$ je rovnoběžná s axonometrickým průmětem osy x a výška na stranu 12 je spojnice axonometrického průmětu počátku O s průsečíkem sestrojených výšek, což hledaný kolmý směr $^k s$ k půdorysné stopě roviny α. Axonometrický půdorys kolmice k_1^a patří tomuto směru $^k s_1^a$ a prochází axonometrickým půdorysem A_1^a bodum A. Viz obrázek 1.14.

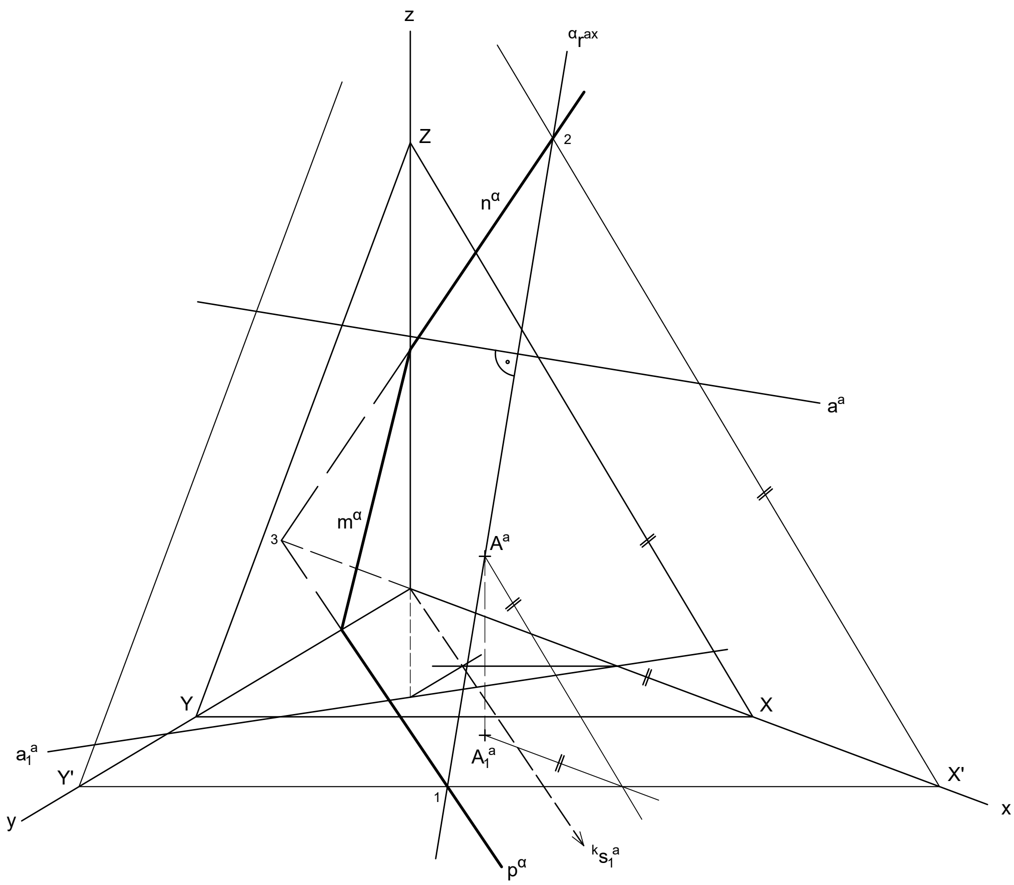
1.6.2 Rovina kolmá k přímce

Sestrojit rovinu kolmou k přímce je inverzní úloha k předchzí úloze. Je dána přímka $a = (a^a, a_1^a)$ a bod $A = (A^a, A_1^a)$. Bodem A veďte rovinu kolmou k přímce a. Bodem A nejprve proložíme novou axonometrickou průmětnu. Tím pádem můžeme vést bodem A přímku kolmou k přímce a a označíme ji $^\alpha r^{ax}$. Podle předchozí úlohy je přímka $^\alpha r^{ax}$ axonometrická stopa roviny α v nové axonometrické průmětně. Dále najdeme směr kolmý na půdorys přímky a (pomocí výšek v trojúhelníku). Označíme průsečíky axo-



Obrázek 1.14: *Přímka kolmá k rovině.*

nometrické stopy ${}^{\alpha}r^{ax}$ s novým axonometrickým trojúhelníkem jako body $1, 2$. Těmito body bude po řadě procházet půdorysná, resp. nárysná stopa. Půdorysná stopa p^{α} patří kolmému směru ${}^{k}s_{1}^{a}$ a prochází bodem 1. Určíme průsečík 3 půdorysné stopy p^{α} s osou x, kterým bude procházet nárysná stopa n^{α}, tedy $n^{\alpha} = 32$. Viz obrázek 1.15.



Obrázek 1.15: *Rovina kolmá k přímce.*