**Stereometrie**

**Polohové vlastnosti**

Nejprve uvedeme základní vztahy mezi jednotlivými objekty v geometrii. Dále budeme formulovat několik jednoduchých vět, tzv. axiomů, o které se opírají všechny další stereometrické věty, které rozdělíme do tří skupin. První skupinou budou základní věty stereometrie, v nich se mluví o vzájemné poloze bodů, přímek a rovin. Do další skupiny zahrneme věty o rovnoběžnosti a na jejich základě se budeme zabývat polohovými vlastnostmi daných geometrických objektů. Třetí skupinu tvoří věty o vzájemné kolmosti přímek a rovin, do nichž připojíme také věty o vzdálenosti, souhrnně tuto skupinu nazýváme metrické vlastnosti.

**Základní vztahy mezi body, přímkami, rovinami**

Základní prvky ve stereometrii jsou **bod**, **přímka** a **rovina**. Uvažujeme-li dvojici bod-přímka (bod-rovina), pak bod leží na přímce (v rovině), resp. neleží. Říkáme také, že přímka (rovina) prochází, resp. neprochází bodem. Obdobně uvažujme dvojici přímka-rovina, pak přímka leží, resp. neleží v rovině, tedy rovina prochází bodem, resp. neprochází.

Pro vyjádření těchto vztahů používáme společný termín tzv. **incidence** (bod je incidentní s přímkou, přímka není incidentní s rovinou…)

 Pro symbolický zápis používáme následující značky:

… je prvkem

… není prvkem

… je podmnožinou

… není podmnožinou

Body značíme velkými tiskacími písmeny přímky malými písmeny a roviny malými řeckými písmeny



**Axiómy**

* **A1** Dvěma různými body prochází právě jedna přímka .
* **A2** Přímkou a bodem , který na přímce neleží, prochází právě jedna rovina .
* **A3** Jestliže bod leží na přímce a přímka leží v rovině *ρ* pak i bod leží v rovině *ρ.*
* **A4** Mají-li dvě různé roviny a společný bod , pak mají společnou právě jednu přímku.
* **A5** Ke každé přímce lze bodem , který na ní neleží, vést právě jednu rovnoběžku s přímou .

*Pozn:* Nejsou vyčerpány všechny axiomy stereometrie.

Z těchto axiomů plynou elementární důsledky:

* Dvěma body prochází alespoň jedna přímka.
* Mají-li dvě přímky společné dva různé body, pak jsou tyto přímky totožné.
* Dvě různé přímky mohou mít nejvýše jeden bod společný.
* Mají-li dvě roviny společnou přímku a bod, který na ní neleží nebo společné dvě různé přímky, jsou tyto roviny totožné.

**Základní věty stereometrie**

**V 1:** Leží-li v rovině dva různé body , pak v rovině leží také přímky .

**V 2:** Tři body neležící v přímce určují právě jednu rovinu.

**V 3:** Rovina je určena třemi body neležícími v přímce; nebo bodem a přímkou (nejsou incidentní); nebo dvěma různoběžkami; nebo dvěma různými rovnoběžkami.

**V 4:** Dvě různé přímky mající společný bod určují právě jednu rovinu.

**V 5:** Dvě různé roviny mají buď právě společnou přímku, nebo nemají společný žádný bod.

**V 6:** Přímka a rovina, která danou přímkou neprochází, mají společný buď právě jeden bod, nebo nemají společný žádný bod.

**V 7:** Tři různé roviny mají buď společnou přímku, nebo jeden společný bod nebo nemají společný žádný bod.

**Vzájemná poloha tří rovin**

Pro tři různé roviny v prostoru nastane právě jedna z pěti možností:

* Každé dvě roviny jsou rovnoběžné
* Dvě roviny jsou rovnoběžné, třetí s nimi různoběžná, protínající je ve dvou rovnoběžných přímkách.
* Každé dvě roviny jsou různoběžné, přičemž průsečnice každých dvou rovin jsou rovnoběžné různé.
* Každé dvě roviny jsou různoběžné, všechny tři průsečnice splynou v jednu přímku
* Každé dvě roviny jsou různoběžné, kdy všechny tři průsečnice procházejí jedním bodem (jediný společný bod všech tří rovin).

**Vzájemná poloha dvou přímek v prostoru**

* rovnoběžné (různé) – tyto nemají žádný společný bod a leží v jedné rovině, značíme ,
* totožné – mají všechny body společné, značíme ,
* různoběžné – mají jeden společný bod (průsečík) a leží v jedné rovině, značíme nebo nebo ,
* mimoběžné – nemají žádný společný bod a neleží v jedné rovině.

**Vzájemná poloha dvou rovin v prostoru**

* roviny jsou různoběžné, právě když mají společnou přímku, zapisujeme ρ = p, přímka *p* se nazývá průsečnice rovin,
* roviny jsou rovnoběžné různé, právě když nemají žádný společný bod, píšeme *𝜌*,
* roviny jsou rovnoběžné totožné, mají-li všechny body společné, píšeme *ρ = σ.*

**V 8:** Daným bodem prochází právě jedna rovnoběžka s danou přímou.

**V 9:** Daným bodem prochází právě jedna rovina rovnoběžná s danou rovinou.

 **Směr** je množina všech navzájem rovnoběžných přímek.

Svazek přímek je množina všech přímek roviny procházejících daným pevným bodem – střed svazku.

Osnova přímek je množina všech navzájem rovnoběžných přímek roviny.

Svazek rovin je množina všech rovin procházejících danou pevnou přímkou – osa svazku rovin.

Trs přímek (rovin) je množina všech přímek (rovin) procházejících daným pevným bodem – střed trsu.

**Věty o rovnoběžnosti přímek a rovin**

**V 10: (Kritérium)** Přímka je rovnoběžná s rovinou tehdy a jen tehdy, je-li rovnoběžná alespoň s jednou její přímkou.

**V 11:** Přímka je rovnoběžná se dvěma různoběžnými rovinami tehdy a jen tehdy, jestliže je rovnoběžná s jejich průsečnicí.

**V 12: (Kritérium)** Dvě roviny jsou rovnoběžné tehdy a jen tehdy, jestliže jedna z nich obsahuje dvě různoběžky rovnoběžné s druhou rovinou.

**V 13:** Jsou-li dány dvě rovnoběžné roviny, pak každá přímka jedné roviny je rovnoběžná s druhou rovinou.

**V 14:** Je-li přímka rovnoběžná s přímkou a přímka rovnoběžná s přímkou pak přímka je rovnoběžná s přímkou .

**V 15**: Je-li přímka rovnoběžná s přímkou a přímka rovnoběžná s rovinou , pak přímka je rovnoběžná s rovinou

**V 16:** Je-li přímka rovnoběžná s rovinou a rovina rovnoběžná s rovinou , pak přímka je rovnoběžná s rovinou .

**V 17:** Je-li rovina rovnoběžná s rovinou a rovina rovnoběžná s rovinou , pak rovina je rovnoběžná s rovinou .

**Příčka mimoběžek** je přímka protínající obě mimoběžky.

**Osa mimoběžek** je příčka, která je k oběma mimoběžkám kolmá.

**Metrické vlastnosti**

**Kolmost přímek a rovin**

**V 18:** Velikost úhlu přímek vedených libovolným bodem prostoru rovnoběžně se dvěma pevnými přímkami nezávisí na volbě uvedeného bodu.

*Pozn:* Tato věta umožňuje definovat i úhel mimoběžek v prostoru.

**Def:** Jestliže úhel dvou přímek v prostoru je pravý, říkáme, že přímky jsou k sobě kolmé. Značíme .

**Def:** Přímka je kolmá k rovině, je-li kolmá ke všem přímkám roviny. Značíme .

**V 19:** **(Kritérium)** Přímka je kolmá k rovině právě tehdy, když je kolmá ke dvěma různoběžkám roviny.

**Def:** Rovina je kolmá k rovině , jestliže . Značíme .

**V 20:** **(Kritérium)** Obsahuje-li rovina přímku kolmou k rovině , pak jsou k sobě kolmé.

**V 21:** Rovina je kolmá ke dvěma různoběžným rovinám právě tehdy, když je kolmá k jejich průsečnici.

**V 22:** Přímkou, která je kolmá k rovině prochází nekonečně mnoho rovin kolmých k dané rovině; tvoří svazek rovin, jehož osou je daná přímka.

**V 23:** Daným bodem prostoru lze vést k dané rovině právě jednu kolmici. Průsečík této přímky s rovinou nazýváme pravoúhlý průmět bodu do roviny.

**V 24**: Daným bodem prostoru lze vést k dané přímce právě jednu kolmou rovinu.

**V 25:** Danou přímkou, která není k rovině kolmá, prochází právě jedna rovina, která je k rovině kolmá. Průsečnici rovin  a  nazýváme pravoúhlý průmět přímky *p* do roviny .

**V 26:** Přímkou lze proložit rovinu kolmou k druhé přímce právě tehdy, když jsou obě přímky k sobě kolmé.

Pro libovolné přímky ,  a libovolné roviny ,  platí:

1. jestliže  a , pak ,
2. jestliže  a , pak ,
3. jestliže  a , pak ,
4. jestliže  a , pak .

**Odchylka přímek a rovin**

**Def:** Odchylka dvou přímek je velikost ostrého nebo pravého úhlu, který tyto přímky svírají.

**Def:** Odchylka přímky  a roviny je rovna odchylce přímky od jejího pravoúhlého průmětu do této roviny. Je-li přímka kolmá k rovině je odchylka rovna .

Pro libovolné přímky ,  a libovolné roviny ,  platí:

1. jestliže , pak ,
2. jestliže , pak ,
3. jestliže  a , pak .

**Def:** Odchylka dvou rovin je odchylka jejich průsečnic s rovinou, která je k oběma rovinám kolmá.

**Vzdálenost**

**Def:** Vzdálenost bodu  od přímky   je rovna vzdálenosti bodu  od přímky  v rovině . Leží-li bod na přímce je vzdálenost rovna . Vzdálenost značíme .

**Def:** Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek, je vzdálenost libovolného bodu jedné přímky od druhé. Značí se .

**Def**: Vzdálenost bodu  od roviny **** je vzdálenost dobu  a jeho pravoúhlého průmětu  do roviny . Značíme .

**Def:** Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin je vzdálenost libovolného bodu jedné roviny od druhé roviny. Značíme .

**Def:** Vzdálenost přímky od roviny s ní rovnoběžné je vzdálenost libovolného bodu přímky od této roviny. Značíme .

**Def:** Vzdálenost dvou mimoběžných přímek je velikost úsečky, kterou mimoběžky vytínají na příčce kolmé k oběma mimoběžkám (ose mimoběžek).

**V 27:** Vzdálenost bodu od roviny je nejkratší ze všech úseček, které spojují daný bod s body roviny.