IMAT1 – příklady k procvičení

1 Logika

1.1. Rozhodněte, zda formule:

(a) $(\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \ \wedge C) \Leftrightarrow \neg A \wedge (\neg B \vee C)$,

(b) $((\neg A \Rightarrow \neg C) \wedge (\neg C \Rightarrow \neg B)) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

je tautologií výrokového počtu dvouhodnotové logiky.

1.2. Matematickou indukcí dokažte:

(a) $\forall n \in \mathbb{N}\colon 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n}{2} \cdot (n+1)$,

(b) $\forall n \in \mathbb{N}\colon \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

2 Relace

2.1. Nechť M je množina všech trojciferných čísel. Na M zaveďme relaci R předpisem:

$$(a, b) \in R \Leftrightarrow \text{čísla } a,\, b \text{ z } M \text{ mají alespoň dvě společné číslice.}$$

Rozhodněte, zda se jedná o ekvivalenci na M a pokud Ano, určete indukovaný rozklad.

2.2. Relaci R na $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ doplňte nejmenším možným počtem prvků tak, aby se jednalo o ekvivalenci na A a poté určete indukovaný rozklad A:

$$R = \{(2, 2), (2, 7), (4, 1), (8, 4)\}$$

3 Zobrazení

3.1.

(a) Ukažte, že zobrazení $f\colon x \mapsto \frac{x}{|x|+1}$ je bijekce množiny reálných čísel $\mathbb{R}$ na otevřený interval $(-1, 1)$.

(b) Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dokažte, že zobrazení $g\colon x \mapsto 2\frac{x-a}{b-a} - 1$ je bijekce (a, b) na $(-1, 1)$.

(c) S využitím (a), (b) dokažte, že existuje bijekce $\mathbb{R}$ na libovolný otevřený interval $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ (pro $a < b$).

3.2. Rozhodněte, zda zobrazení

$$f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3,\ \ f(x, y) = (x + 1, y + 1, z - 1)$$

je injektivní a surjektivní.

3.3. Rozhodněte, zda pro zobrazení

$$g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2,\ g(x,y) = (y-1, x+1)$$

existuje inverzní zobrazení, případně jej určete.

3.4. Určete vlastnosti následujících zobrazení:

(1) $f_1 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $f_1(x+yi) = x$;

(2) $f_2 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$, $f_2(x+yi) = (x,y)$;

(3) $f_3 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f_3((x,y)) = (x+1, y, x)$;

(4) $f_4 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f_4((x,y,z)) = (x-y, x-2y, x-3z)$;

(5) $f_5 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_5((x_1,\dots,x_n)) = x_1 + \cdots + x_n$;

(6) $f_6 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f_6((x_1,x_2,\dots,x_n)) = (x_1, x_1+x_2, \dots, x_1+x_2+\cdots+x_n)$.

3.5. Nechť $f \colon A \to B$ a $g \colon B \to C$ jsou zobrazení. Dokažte, že

(1) je-li složené zobrazení $f \circ g \colon A \to C$ injekce, pak f je injekce,

(2) je-li $f \circ g \colon A \to C$ surjekce, pak g je surjekce,

(3) je-li $f \circ g$ bijekce, potom f je injekce a g surjekce.

3.6. Nechť f, g, h jsou zobrazení neprázdné množiny A do sebe. Dokažte, že

(1) je-li h injekce, pak z $f \circ h = g \circ h$ plyne $f = g$,

(2) je-li h surjekce, pak z $h \circ f = h \circ g$ plyne $f = g$.

4 Algebraické struktury

4.1. Na množině $\mathbb{R}$ definujme binární operaci $\wedge$ takto:

$$x \wedge y = \min\{x, y\}.$$

Určete vlastnosti grupodu $(\mathbb{R}, \wedge)$.

4.2. Vyšetřete vlastnosti grupoidu $(\mathbb{R}; \star)$, kde $x \star y = x + y - 6$ (asociativita, komutativita, neutrální prvky, inverzní prvky).

4.3. Na intervalu $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \colon 0 \le x \le 1\}$ definujme operaci $\oplus$:

$$x \oplus y = \min\{x + y, 1\}.$$

Vyšetřete vlastnosti grupoidu $([0,1], \oplus)$.

4.4. Nechť $(G, \cdot)$ je grupa, $a \in G$ pevně zvolený prvek. Definujme na G novou operaci $\odot$ takto:

$$x \odot y = x \cdot a^{-1} \cdot y.$$

Dokažte, že $(G, \odot)$ je grupa.

4.5. Na kartézském součinu $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definujme operaci $*$:

$$(a, b) * (c, d) = (ac, ad + b).$$

Vyšetřete $(\mathbb{R}^2, *)$ a $(A, *)$, kde $A = \{(a, b)\colon a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$.

4.6. Nechť $\mathcal{A}$ je množina všech *aditivních* reálných funkcí jedné proměnné, tj. zobrazení $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takových, že $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Na $\mathcal{A}$ definujme sčítání „po bodech“:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x). \tag{4.1}$$

Dokažte, že $(\mathcal{A}, +)$ je komutativní grupa.

4.7. Na množině $\mathbb{Z}$ všech celých čísel definujme binární operace $\vee$ a $\wedge$ takto:

$$x \vee y = \max\{x, y\}, \qquad x \wedge y = \min\{x, y\}.$$

Jaké vlastnosti mají grupoidy $(\mathbb{Z}, \vee)$, $(\mathbb{Z}, \wedge)$, $(\mathbb{N}, \vee)$ a $(\mathbb{N}, \wedge)$?

4.8. Na množině všech racionálních čísel $\mathbb{Q}$ definujme operaci $*$ takto:

$$x * y = \frac{x + y}{2}.$$

Vyšetřete vlastnosti grupoidu $(\mathbb{Q}, *)$.

4.9. Sestavte tabulky operace $\otimes$ z příkladu **??** na množině $\{0, a, b, c, 1\} \subseteq [0, 1]$ pro případy 1) $a < b < c$, 2) $a < c < b$ a 3) $c < a < b$.

4.10. Nechť $(G, \cdot)$ je konečná pologrupa s jednotkou e. Dokažte, že $(G, \cdot)$ je grupa, právě když její tabulka má následující vlastnost:

($*$) V každém řádku i každém sloupci je každý prvek právě jedenkrát.

4.11. Napište všechny tabulky operace $\cdot$ na množině G tak, aby $(G, \cdot)$ byla grupa s jednotkou e pro:

(1) $G = \{e, a\}$,

(2) $G = \{e, a, b\}$,

(3) $G = \{e, a, b, c\}$.

4.12. Nechť $A = \{(a, b)\colon a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$. Definujme binární operaci $\circ$ na A takto:

$$(a, b) \circ (c, d) = (ac, bc + d).$$

Vyšetřete vlastnosti $(A, \circ)$.

4.13. Vyšetřete vlastnosti grupoidů $(\mathbb{R}, \oplus)$ a $(\mathbb{R}, \odot)$, kde

$$x \oplus y = x + y + 1, \quad x \odot y = x + y + xy.$$

4.14. Nechť $(G, \cdot)$ je grupoid. Řekneme, že prvek $a \in G$ je *idempotentní*, jestliže $a \cdot a = a$. Dokažte, že když $(G, \cdot)$ je grupa, pak jediným idempotentním prvkem je jednotka e.

4.15. Nechť $(G, \cdot)$ je grupa. Dokažte, že pokud $a \cdot a = e$ pro každé $a \in G$, pak grupa $(G, \cdot)$ je komutativní.

4.16. Komplexní číslo $z \in \mathbb{C}$ se nazývá *n-tá odmocnina* z 1 ($n \in \mathbb{N}$), pokud $z^n = 1$. Dokažte, že množina všech n-tých odmocnin z 1 tvoří vzhledem k obvyklému násobení komplexních čísel komutativní grupu.

4.17. Zjistěte, zde množina všech komplexních jednotek (tj. čísel $z \in \mathbb{C}$ takových, že $|z| = 1$) tvoří vzhledem k násobení komplexních čísel grupu.

4.18. Sestrojte grupu symetrií (= zákrytových pohybů)

(1) obdélníka (který není čtverec),

(2) rovnostranného trojúhelníka,

(3) čtverce.

4.19. Označme M množinu všech matic ve tvaru

$$\text{a)} \quad \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \qquad\qquad \text{b)} \quad \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}$$

kde $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Vyšetřete strukturu $(M, \cdot)$, kde operace $\cdot$ je násobení matic.

4.20. Na kartézském součinu $\mathbb{Z}^3 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definujme sčítání následujícím způsobem:

$$(k_1, \ell_1, m_1) + (k_2, \ell_2, m_2) = \begin{cases} (k_1 + k_2, \ell_1 + \ell_2, m_1 + m_2) & \text{pro } m_1 \text{ sudé}, \\ (k_1 + \ell_2, \ell_1 + k_2, m_1 + m_2) & \text{pro } m_1 \text{ liché}. \end{cases}$$

Dokažte, že $(\mathbb{Z}^3, +)$ je nekomutativní grupa.

4.21. Na kartézském součinu $\mathbb{R}^2$ definujme operaci $*$ následujícím způsobem:

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 e^{x_2} + y_2).$$

Dokažte, že $(\mathbb{R}^2, *)$ je nekomutativní grupa.

4.22. Nechť $\mathcal{M}$ je množina všech reálných funkcí $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takových, že $f(0) = 0$. Na $\mathcal{M}$ definujeme součet a součin funkcí obvyklým způsobem, tj.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{a} \quad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

pro $x \in \mathbb{R}$. Ukažte, že $(\mathcal{M}, +, \cdot)$ je komutativní unitární okruh, který není obor integrity.

4.23. Nechť M je množina všech matic tvaru

$$\text{a)} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}, \ \text{kde } a, b \in \mathbb{R}, \qquad \text{b)} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}, \ \text{kde } a, b \in \mathbb{Q}.$$

Zjistěte, jakou strukturu tvoří M vzhledem ke sčítání a násobení matic.

4.24. Zjistěte, jaké struktury tvoří následující množiny vzhledem k obvyklému sčítání a násobení komplexních čísel:

(1) $\mathbb{Z}(i) = \{a + bi \colon a, b \in \mathbb{Z}\}$,

(2) $\mathbb{Z}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \colon a, b \in \mathbb{Z}\}$,

(3) $\mathbb{Z}(\sqrt[3]{2}) = \{a + b\sqrt[3]{2} \colon a, b \in \mathbb{Z}\}$.

4.25. Na $\mathbb{R}$ definujme operace $\oplus$ a $\odot$ takto:

$$x \oplus y = x + y + 1, \qquad x \odot y = x + y + xy.$$

Dokažte, že $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ je komutativní těleso.

4.26. Nechť $\mathcal{M}$ je množina všech reálných funkcí $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které splňují podmínku $f(0) = 0$. Vyšetřete strukturu $(\mathcal{M}, +, \circ)$, kde součet $+$ je definován předpisem

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

pro $x, y \in \mathbb{R}$ a operace $\circ$ je skládání zobrazení.

4.27. Rozhodněte, zda trojice $(\{-1, 0, 1\}; +; \cdot)$ je tělesem?

4.28. Doplňte tabulku násobení tak, aby struktura $(\{0, 1, a, b\}, +, \cdot)$ byla těleso:

$+$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

$\cdot$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	.	.
b	0	b	.	.

4.29. Určete vlastnosti následujících dvou okruhů:

(a)

$+$	0	1	a	b	c	x	y	z
0	0	1	a	b	c	x	y	z
1	1	0	x	z	y	a	c	b
a	a	x	0	c	b	1	z	y
b	b	z	c	0	a	y	x	1
c	c	y	b	a	0	z	1	x
x	x	a	1	y	z	0	b	c
y	y	c	z	x	1	b	0	a
z	z	b	y	1	x	c	a	0

$\cdot$	0	1	a	b	c	x	y	z
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	a	b	c	x	y	z
a	0	a	a	b	c	0	b	c
b	0	b	b	c	a	0	c	a
c	0	c	c	a	b	0	a	b
x	0	x	0	0	0	x	x	x
y	0	y	b	c	a	x	z	1
z	0	z	c	a	b	x	1	y

(b)

$+$	0	1	a	b	c	x	y	z
0	0	1	a	b	c	x	y	z
1	1	0	x	z	y	a	c	b
a	a	x	0	c	b	1	z	y
b	b	z	c	0	a	y	x	1
c	c	y	b	a	0	z	1	x
x	x	a	1	y	z	0	b	c
y	y	c	z	x	1	b	0	a
z	z	b	y	1	x	c	a	0

$\cdot$	0	1	a	b	c	x	y	z
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	a	b	c	x	y	z
a	0	a	b	z	1	c	x	y
b	0	b	z	y	a	1	c	x
c	0	c	1	a	x	y	z	b
x	0	x	c	1	y	z	b	a
y	0	y	x	c	z	b	a	1
z	0	z	y	x	b	a	1	c

4.30. Nechť M je množina všech matic tvaru

$$\text{a)} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \qquad \text{c)} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$. Zjistěte, jakou strukturu tvoří M vzhledem ke sčítání a násobení matic.

4.31. Dokažte, že okruh zbytkových tříd $(\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$, $n \geq 2$, je těleso, právě když n je prvočíslo.

5 Operace s maticemi

5.1. Nad tělesem $\mathbb{R}$ jsou dány matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte, zda jsou definovány matice $A+B$, $C+D$, AB, CD, $2A+3CD$, C^2, C^2D^2, A^T+B^T, $(A+B)^T$. V kladném případě je určete.

5.2. Najděte všechny matice A nad $\mathbb{R}$, které jsou zaměnitelné s maticí

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.3. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Vypočtěte

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n$$

pro $n \in \mathbb{N}$.

5.4. Vypočtěte následující součiny, pokud jsou definovány:

$$\text{a)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 5 & -1 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\text{b)} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 & 2 & 7 \\ 5 & 2 & -1 & 3 & 2 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{c)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{d)} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3, \quad \text{e)} \quad \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^5,$$

$$\text{f)} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n, \quad \text{g)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n, \quad \text{h)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{324}, \quad \text{i)} \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}^{725}.$$

6 Permutace

6.1. Určete znaménko permutace
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$
na množině $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ a rozložte ji na transpozice.

6.2. Určete počet inverzí v pořadí $(1 \quad 3 \quad 5 \quad \dots \quad 2n-1 \quad 2 \quad 4 \quad 6 \quad \dots \quad 2n)$.

6.3. Určete znaménko permutace $P = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 5 & 1 & 6 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ a rozložte ji na transpozice.

6.4. Určete znaménko permutace $P = \{(1, 4), (2, 3), (3, 5), (4, 1), (5, 2), (6, 7), (7, 6)\}$ a rozložte ji na součin transpozic.

6.5. Najděte permutaci P na množině $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ takovou, aby
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \circ P \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

6.6. Řešte rovnice pro neznámou permutaci X:

a) $A \cdot B \cdot X \cdot C = B$,

b) $C \cdot X \cdot B \cdot A = B$,

c) $A \cdot B^{-1} \cdot X \cdot A^{-1} \cdot B = C^{-1}$

pro permutace
$$A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 1), (5, 2), (6, 3)\}$$
,
$$B = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 6), (5, 4), (6, 5)\}$$
,
$$A = \{(1, 3), (2, 4), (3, 2), (4, 6), (5, 5), (6, 1)\}$$
.

6.7. Rozhodněte, zda následující součin je členem determinantu příslušného stupně:
$$\text{a)} \quad a_{13}a_{22}a_{34}a_{24}a_{41}a_{56}, \qquad \text{b)} \quad a_{32}a_{51}a_{31}a_{45}a_{24}, \qquad \text{c)} \quad a_{11}a_{24}a_{35}a_{42}a_{53}.$$

7 Determinanty

7.1. Vypočtěte determinant
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

7.2. Vypočtěte determinanty:

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} \qquad \text{b)}\ \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix} \qquad \text{c)}\ \begin{vmatrix} 5 & 9 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\text{d)}\ \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{-5}{2} & 4 \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -2 \\ \frac{2}{3} & \frac{-5}{3} & \frac{-7}{3} & \frac{5}{3} \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix} \qquad \text{e)}\ \begin{vmatrix} 35 & 59 & 71 & 52 \\ 42 & 70 & 77 & 54 \\ 43 & 68 & 72 & 52 \\ 29 & 49 & 65 & 50 \end{vmatrix} \qquad \text{f)}\ \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$$

$$\text{g)}\ \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ a & b & c & d \\ 1 & -2 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} \qquad \text{h)}\ \begin{vmatrix} x & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & x & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & x & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} \qquad \text{i)}\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 7 & 3 \\ 2 & 7 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{j)}\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{k)}\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 7 & 0 & 9 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{l)}\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{m)}\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

7.3. Vypočtěte determinant n-tého stupně ($n \geq 2$):

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix}$$

7.4. Vypočtete determinanty n-tého stupně ($n \geq 2$):

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix} \qquad \text{b)}\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{c)}\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{d)}\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix} \qquad \text{e)}\ \begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix} \qquad \text{f)}\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{g)}\ \begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n \end{vmatrix} \qquad \text{h)}\ \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$$

7.5. Vypočtěte následující determinant stupně n:

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

7.6. Nechť

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & x \\ 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ x & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

je determinant je stupně $n \geq 2$. Ukažte, že platí

$$D_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} x^n.$$

7.7. Vypočtěte determinanty stupně $n \geq 2$:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \dots & -n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -n & \dots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 & 3 \\ 2 & 2 & \dots & 3 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 3 & \dots & 2 & 2 \\ 3 & 2 & \dots & 2 & 2 \end{vmatrix}$

7.8. Vypočtěte následující determinant stupně $2n$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a & \dots & b & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b & \dots & a & 0 \\ b & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}$$

8 Hodnost matice

8.1. Určete hodnost matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 56 & 11 \\ 6 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

8.2. Určete hodnosti matic (nad $\mathbb{C}$):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 & 0 & 4 \\ 3 & -6 & 1 & 4 & -3 \\ -4 & 2 & 5 & -1 & 7 \\ 5 & -4 & -12 & 5 & -14 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \\ 5 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1+2i & 1-i & 2+3i & 2 \\ 3+i & -2i & 5+i & 2-2i \\ 5i & 3-i & 1+8i & 4+2i \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & -2 \\ 7 & 0 & 7 & 5 & 10 \\ -4 & 5 & 1 & 10 & 10 \\ 5 & -1 & 4 & 1 & 4 \\ 8 & -3 & 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 & -3 & 1 \\ -3 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

8.3. Určete hodnost matice v závislosti na parametrech $a, b \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & -3 & -1 \\ 1 & 1 & a & a & 1 \\ a & 3 & 4 & 9 & 8 \\ 1 & 1 & a & a & b \end{pmatrix}.$$

8.4. Určete hodnost matice A v závislosti na parametrech $a, b \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a & b \\ 1 & a & -1 & 1 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

8.5. Určete hodnosti následujících matic v závislosti na parametrech $a, b \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 7 & a+3 \\ 2 & a-2 & 6 & 2 \\ 4 & -2 & 9 & a+6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 2b & 1 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & 2a & -2 & b \\ 2 & 3b & 3 & 0 & 1 & a \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ a & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & b \end{pmatrix}.$$

8.6. K dané matici určete matici inverzní:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 1+i & 1-2i \\ 1+2i & 1-i \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad K = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

8.7. Určete inverzní matici k následující matici stupně $n \geq 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

8.8. Určete inverzní matice k následujícím čtvercovým maticím stupně n:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-2} & a^{n-1} \\ 0 & 1 & a & \dots & a^{n-3} & a^{n-2} \\ \multicolumn{6}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

8.9. Řešte následující maticové rovnice v $M_3(\mathbb{R})$, resp. v $M_2(\mathbb{C})$:

$$\text{a)} \quad X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{b)} \quad X \cdot \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ i & 1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

8.10. Rozhodněte, jsou-li následující soustavy lineárních rovnic řešitelné. V kladném případě určete množinu řešení:

(1)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & = & 1 \\ 4x_1 & - & 6x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & - & 11x_3 & - & 15x_4 & = & 1 \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 5x_2 & - & 8x_3 & = & 8 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & 9x_3 & = & 9 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & = & 7 \\ x_1 & + & 8x_2 & - & 7x_3 & = & 12 \end{array}$$

(3)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 4 \\ 8x_1 & + & 5x_2 & + & 9x_3 & & & = & -2 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & - & x_4 & = & -3 \end{array}$$

8.11. Řešte následující soustavy pomocí Gaussovy eliminační metody:

(1)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & -2 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & 4x_5 & = & 10 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & - & 5x_5 & = & 15 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & + & 2x_5 & = & -10 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & -5 \end{array}$$

(3)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ 5x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & + & 7x_4 & = & 8 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 4x_1 & + & 7x_2 & + & x_3 & & & = & 5 \end{array}$$

(4)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -1 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 7 \end{array}$$

(5)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & - & 4x_4 & = & -4 \\ x_1 & + & 8x_2 & + & 7x_3 & - & 7x_4 & = & -8 \end{array}$$

(6)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & & & + & x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & = & -6 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \end{array}$$

8.12. Řešte následující soustavy Cramerovým pravidlem, pomocí inverzní matice i Gaussovou eliminační metodou:

(1)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 7 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & -1 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \end{array}$$

(3)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & - & x_5 & = & -1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & = & 2 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 3 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & + & 2x_5 & = & -2 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & 3x_5 & = & -3 \end{array}$$

8.13. Pomocí Cramerova pravidla určete neznámou x_2 ze soustavy:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 20 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 11 \\ 2x_1 & + & 10x_2 & + & 9x_3 & + & 7x_4 & = & 40 \\ 3x_1 & + & 8x_2 & + & 9x_3 & + & 2x_4 & = & 37 \end{array}$$

8.14. Pokud je to možné, řešte následující soustavy pomocí Cramerova pravidla. V opačném případě je řešte Gaussovou eliminační metodou:

(1)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -4 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & -2 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & & & & & = & -1 \\ & & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & & & & & - & x_4 & = & -1 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \end{array}$$

(3)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 6x_2 & - & 9x_3 & = & 3 \\ 7x_1 & + & 14x_2 & - & 21x_3 & = & 7 \\ 5x_1 & + & 10x_2 & + & 15x_3 & = & 5 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 1 \end{array}$$

(4)

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0\\
x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0\\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0\\
x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= -2\\
x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 2
\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= -1\\
x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 &= 1\\
x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 3\\
x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 &= -1\\
x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 &= 3
\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 1\\
x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 2\\
2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 &= 7\\
3x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 12\\
5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 2x_4 &= 20
\end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0\\
x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0\\
x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0\\
x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0
\end{aligned}$$

8.15. Určete obecné řešení a fundamentální systém řešení homogenní soustavy

$$\begin{aligned}
6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 &= 0\\
9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 &= 0\\
6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 &= 0\\
3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 &= 0
\end{aligned}$$

8.16. Určete obecné řešení soustavy:

(1)

$$\begin{aligned}
2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 0\\
3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 0\\
4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 &= 0
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0\\
x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0\\
x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0\\
x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
2x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 4x_4 + 4x_5 &= 0\\
2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= 0\\
3x_1 + 8x_2 - 6x_3 - 6x_4 + 6x_5 &= 0\\
3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 &= 0
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 5x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 7x_4 & = & 0 \\ 4x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & + & 6x_4 & = & 0 \\ 5x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 6x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \end{array}$$

(5)

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & - & 4x_4 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 8x_2 & + & 24x_3 & - & 19x_4 & = & 0 \end{array}$$

(6)

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & 4x_2 & + & 6x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ 7x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ 9x_1 & - & 14x_2 & + & 28x_3 & + & 7x_4 & = & 0 \end{array}$$

8.17. Najděte fundamentální systém řešení SLR:

a)

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & - & 4x_4 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 8x_2 & + & 24x_3 & - & 19x_4 & = & 0 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & 4x_2 & + & 6x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ 7x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ 9x_1 & - & 14x_2 & + & 28x_3 & + & 7x_4 & = & 0 \end{array}$$

8.18. Zjistěte, zda vektory $\mathbf{u}_1 = (4, 2, 9, -20, -3)$, $\mathbf{u}_2 = (1, -11, 2, 13, 4)$ a $\mathbf{u}_3 = (9, -15, 8, 5, 2)$ tvoří fundamentální systém řešení soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & + & 6x_5 & = & 0 \\ 5x_1 & + & 9x_2 & + & 7x_3 & + & 4x_4 & + & 7x_5 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & + & 11x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 6x_2 & + & 8x_3 & + & 5x_4 & - & 4x_5 & = & 0 \end{array} \tag{S}$$

8.19. Řešte následující soustavu v závislosti na reálném parametru p:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & + & px_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & px_3 & = & -3 \\ x_1 & - & 5x_2 & - & 7x_3 & = & 0 \end{array}$$

8.20. Řešte následující soustavy v závislosti na parametru p:

(1)

$$\begin{array}{rcrcl} px_1 & + & x_2 & = & 1 \\ x_1 & + & px_2 & = & p \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{rcrcl} px_1 & + & x_2 & = & p \\ x_1 & + & px_2 & = & 0 \end{array}$$

(3)

$$\begin{array}{rcrcl} px_1 & + & x_2 & = & p \\ x_1 & + & px_2 & = & p \end{array}$$

(4)

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & px_3 & = & p \\ x_1 & + & px_2 & + & x_3 & = & p \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}$$

(5)

$$\begin{array}{rcrcrcl} px_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & px_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & px_3 & = & 1 \end{array}$$

(6)

$$\begin{array}{rcrcrcl} px_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & px_2 & + & x_3 & = & p \\ x_1 & + & x_2 & + & px_3 & = & p^2 \end{array}$$

9 Vektorové prostory a podprostory

9.1. Rozhodněte, zda následující čtveřice jsou vektorové prostory:

(1) $(\mathbb{C}, +, \mathbb{R}, \cdot)$;

(2) $(\mathbb{R}, +, \mathbb{Q}, \cdot)$;

(3) $(\mathbb{Z}, +, \mathbb{Z}, \cdot)$;

(4) $(\mathbb{Z}, +, \mathbb{Q}, \cdot)$ (ve všech čtyřech případech $+$ a $\cdot$ jsou obvyklé sčítání a násobení komplexních čísel);

(5) $(\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R}, \bullet)$, kde sčítání $+$ je definováno „po složkách", tj. $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, a levá vnější operace $\bullet$ je dána předpisem $a \bullet (x_1, x_2) = (ax_1, 0)$.

9.2. Buď $(T, +, \cdot)$ číselné těleso, $n \in \mathbb{N}$. Ověřte, že $(T^n, +, T, \cdot)$, kde

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$
$$a \cdot (x_1, \dots, x_n) = (ax_1, \dots, ax_n),$$

je vektorový prostor, tzv. *aritmetický prostor nad* T.

9.3. Nechť $M_{m \times n}(T)$ je množina všech matic typu $m \times n$ nad číselným tělesem T. Ukažte, že $(M_{m \times n}(T), +, T, \cdot)$ je vektorový prostor ($+$ je obvyklé sčítání matic, $\cdot$ skalární násobení matic zleva, tj. $\|a_{ij}\| + \|b_{ij}\| = \|a_{ij} + b_{ij}\|$ a $c \cdot \|a_{ij}\| = \|ca_{ij}\|$).

9.4. Nechť $C(a, b)$ je množina všech reálných funkcí spojitých na uzavřeném intervalu $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x \leq b\}$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Definujme součet funkcí a reálný násobek obvyklým způsobem:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \& \quad (c \cdot f)(x) = cf(x)$$

pro $f, g \in C(a, b)$, $c \in \mathbb{R}$. Dokažte, že $(C(a, b), +, \mathbb{R}, \cdot)$ je vektorový prostor.

9.5. Zjistěte, zda množina M tvoří podprostor (přesněji pole podprostoru) v aritmetickém prostoru $(\mathbb{R}^5, +, \mathbb{R}, \cdot)$:

(1) $M = \{(x_1, x_2, x_1 + x_2, 0, 0) \colon x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$;

(2) $M = \{(0, x_2, x_3, 2x_3, x_3 + 1) \colon x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$.

9.6. Rozhodněte, zda množina

a) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4); x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -x_1\}$,

b) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4); x_1 - x_2 = -x_3 - x_4\}$

c) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4); x_1 = x_2\}$

je podprostorem v aritmetickém vektorovém prostoru $(\mathbb{R}^4; +; \mathbb{R}; \cdot)$.

9.7. Tvoří následující množiny podprostory v aritmetickém prostoru $(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R}, \cdot)$?

(1) $M = \mathbb{Z}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \colon x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}\}$;

(2) $M = \{(x_1, \dots, x_n) \colon x_1 + \dots + x_n = 0\}$;

(3) $M = \{(x_1, \ldots, x_n) \colon x_1 + \cdots + x_n \neq 0\}$;

(4) $M = \{(x_1, \ldots, x_n) \colon x_1 + \cdots + x_n = a, 0 \neq a \in \mathbb{R}\}$.

9.8. V aritmetickém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou dány vektory $\mathbf{u}_1 = (3, 2, 5)$, $\mathbf{u}_2 = (2, 4, 7)$, $\mathbf{u}_3 = (5, 6, a)$ a $\mathbf{v} = (1, 3, 5)$. Určete $a \in \mathbb{R}$ tak, aby $\mathbf{v}$ byl lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$.

9.9. Najděte nutnou a postačující podmínku pro lineární nezávislost čísel 1 a $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ jako vektorů ve vektorovém prostoru $(\mathbb{R}, +, \mathbb{Q}, \cdot)$.

9.10. V aritmetickém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou dány vektory $\mathbf{u}_1 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{u}_2 = (3, 1, 4)$ a $\mathbf{u}_3 = (a, 4, 11)$. Najděte $a \in \mathbb{R}$ tak, aby $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ byly lineárně závislé.

9.11. Nechť $(V, +, T, \cdot)$ je vektorový prostor konečné dimenze nad tělesem T. Najděte některou posloupnost lineárně závislých vektorů z V. Existuje posloupnost lineárně nezávislých vektorů ve V?

9.12. Rozhodněte, zda množina $\{(1, 0, 2), (-2, 1, 1), (4, -1, 3)\}$ je báze aritmetického prostoru $\mathbb{R}^3$.

9.13. Určete bázi a dimenzi podprostoru, který je generován množinou:

a) $\{(-1, 2), (3, 1), (4, 2), (-3, 1), (2, 0)\}$,

b) $\{(2; 1; 3), (-1; 0; 1), (2; 0; -2), (1; 1; 4)\}$

c) $\{(1; -1; 1; 2), (1; 8; 7; -7), (1; 2; 3; -1), (1; 5; 5; -4)\}$

d) $\{(2; 1; 2; 1), (4; 2; 4; 2), (-2; -1; -2; -1), (1; 1; 1; 1)\}$

9.14. Rozhodněte, zda vektor $\overrightarrow{a}$ patří do podprostoru $W = [\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}] \subseteq\subseteq \mathbb{R}^4$, kde:

a) $\overrightarrow{a} = (-1, 2, 3, 1), \overrightarrow{u_1} = (2, 0, 2, 1), \overrightarrow{u_2} = (3, 1, 2, 5), \overrightarrow{u_3} = (-1, 0, 1, 0)$,

b) $\overrightarrow{a} = (2, 0, 1, 2), \overrightarrow{u_1} = (1, 1, 1, 1), \overrightarrow{u_2} = (-2, 1, 2, 0), \overrightarrow{u_3} = (0, 0, 0, 1)$,

c) $\overrightarrow{a} = (-1, 0, 0, 2), \overrightarrow{u_1} = (-1, 2, 1, 1), \overrightarrow{u_2} = (1, 0, -1, 3), \overrightarrow{u_3} = (0, 2, 0, 4)$.

9.15. Nechť $W = [\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}]$ je podprostor $\mathbb{R}^4$ generovaný vektory $\mathbf{u}_1 = (3, 2, 1, 5)$, $\mathbf{u}_2 = (-3, 4, 2, 1)$ a $\mathbf{u}_3 = (1, 0, 0, 1)$. Najděte bázi prostoru W, která obsahuje $\mathbf{v} = (1, 6, 3, 7)$.

9.16. Zjistěte, zda vektory $\mathbf{v} = (1, -3, 0, -5)$ a $\mathbf{w} = (0, 0, 1, 1)$ patří do podprostoru $W = [\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}]$ (v $\mathbb{R}^4$) generovaného vektory $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (2, -1, 0, 0)$ a $\mathbf{u}_4 = (1, 0, 0, -1)$.

9.17. Určete dimenzi a najděte některou bázi podprostoru W aritmetického prostoru $\mathbb{R}^4$, který je generován vektory $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (2, -1, 3, 3)$, $\mathbf{u}_3 = (0, 1, -1, -1)$ a $\mathbf{u}_4 = (1, 0, 1, 1)$.

9.18. Najděte bázi B aritmetického prostoru $\mathbb{R}^4$ obsahující vektory $(1, 1, 0, 0)$ a $(0, 0, 1, 1)$.

9.19. Pro které $a \in \mathbb{R}$ tvoří vektory $\mathbf{u}_1 = (0, 1, a)$, $\mathbf{u}_2 = (a, 0, 1)$ a $\mathbf{u}_3 = (a, 1, a + 1)$ bázi aritmetického prostoru $\mathbb{R}^3$?

9.20. V aritmetickém prostoru $\mathbb{R}^4$ máme dány vektory $\mathbf{u}_1 = (1,2,1,0)$, $\mathbf{u}_2 = (-1,1,1,1)$, $\mathbf{v}_1 = (2,-1,0,1)$ a $\mathbf{v}_2 = (1,-1,3,7)$. Určete dimenze podprostorů $U = [\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}]$, $V = [\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}]$, $U \cap V$ a $U + V$.

9.21. Rozhodněte, zda vektory $\mathbf{u}_1 = (1,1,0,0)$ a $\mathbf{u}_2 = (1,0,1,1)$ generují stejný podprostor v $\mathbb{R}^4$ jako $\mathbf{v}_1 = (2,-1,3,3)$ a $\mathbf{v}_2 = (0,1,-1,-1)$.

9.22. V $\mathbb{R}^4$ jsou dány podprostory $W_1 = [\{(1,1,1,1),(1,-1,1,-1),(1,3,1,3)\}]$ a $W_2 = [\{(1,2,0,2),(1,2,1,2),(3,1,3,1)\}]$. Určete $\dim W_1$, $\dim W_2$, $\dim(W_1 \cap W_2)$ a $\dim(W_1 + W_2)$. Zdůvodněte, proč platí $W_1 + W_2 = W_2$ a $W_1 \cap W_2 = W_1$.

9.23. V $\mathbb{R}^4$ jsou dány podprostory $W_1 = [\{(1,2,1,-2),(2,3,1,0),(1,2,2,-3)\}]$ a $W_2 = [\{(1,1,1,1),(1,0,1,-1),(1,3,0,-4)\}]$. Určete $\dim W_1$, $\dim W_2$, $\dim(W_1 \cap W_2)$ a $\dim(W_1 + W_2)$. Najděte některou bázi $W_1 + W_2$.

9.24. Najděte ortonormální bázi podprostoru $W = [\{(5,1,-1),(0,1,-1)\}]$ a doplňte ji na ortonormální bázi prostoru $\mathbb{R}^3$.

9.25. Najděte ortonormální bázi prostoru $W = [\{(1,-2,2),(1,0,1),(5,-3,-7)\}]$.

9.26. Najděte ortonormální bázi prostoru $W = [\{(1,1,0,1),(1,-2,0,0),(0,1,1,-1)\}]$.

9.27. Najděte některou ortogonální bázi prostoru $\mathbb{R}^4$ obsahující vektory $(1,-2,2,-3)$ a $(2,-3,2,4)$.

9.28. Nechť $W_1 = [\{(1,4,3,2),(1,3,1,1)\}]$ a $W_2 = [\{(1,a+4,5,3),(-1,2a-4,1,0)\}]$. Jak závisí $\dim(W_1 \cap W_2)$ na $a \in \mathbb{R}$?

9.29. Nechť $(C(a,b),+,\mathbb{R},\cdot)$ je vektorový prostor reálných funkcí spojitých na intervalu $[a,b]$ (viz cvičení 9.4). Definujme zobrazení $\sigma\colon C(a,b) \times C(a,b) \to \mathbb{R}$ takto:

$$\sigma(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ukažte, že σ je skalární součin na $C(a,b)$.

9.30. Zjistěte, zda následující zobrazení jsou skalární součiny na aritmetickém prostoru $\mathbb{R}^2$ (v obou případech $\mathbf{u} = (u_1,u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1,v_2)$):

(1) $\sigma(\mathbf{u},\mathbf{v}) = u_1v_1$;

(2) $\tau(\mathbf{u},\mathbf{v}) = u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + 2u_2v_2$.

9.31. Najděte některou ortonormální bázi podprostoru $\mathbb{R}^4$ generovaného vektory $(1,1,-1,-2),(5,8,-2,-3),(3,9,3,8)$.