ZÁKLADY MATEMATIKY 2

1. SÉRIE: URČITÝ INTEGRÁL, APLIKACE

I. Přípravní úlohy. V této sérii potřebujete znalost výpočtů následujících úloh - otestujte si ji:

01. Vypočítejte neurčité integrály:

a) $\int (x^2 - x + 1)^2 \, dx$ b) $\int (x^2 + 2)\sqrt{1 - x} \, dx$ c) $\int \frac{x + 3}{(2x + 1)(1 - x)} \, dx$

d) $\int \frac{8}{x(x^2 - 4)} \, dx$ e) $\int \left(\frac{x + 1}{2 - x}\right)^2 dx$ f) $\int \frac{x^2 + 2}{x^2 + 4x + 3} \, dx$

g) $\int \frac{x + 3}{x^2 + 3} \, dx$ h) $\int \frac{1}{3x^2 + 8} \, dx$ i) $\int \frac{3x + 2}{x^2 + x + 1} \, dx$

j) $\int (e^x + e^{-x})^2 \, dx$ k) $\int (1 - 3x)e^{-x} \, dx$ l) $\int (x - 3)^2 e^{-5x} \, dx$

m) $\int (\ln x + \ln^2 x) \, dx$ n) $\int \cos^2 x \, dx$ o) $\int \sin^3 x \, dx$

p) $\int x^2 \ln(x + 1) \, dx$ r) $\int e^x \cos x \, dx$ s) $\int e^{-2x} \sin 3x \, dx$

02. Ve stejném souřadnicovém systému znázorněte grafy funkcí, resp. křivek; vyšetřete, zda tyto grafy určují omezenou část roviny (znázorněte):

a) $y = 2x$, $y = 6 - x$, $y = 0$; b) $y = 2x$, $y = 6 - x$, $x = 0$;
c) $y = x$, $y = 3x$, $x = 10$; d) $y = x$, $y = 3x$, $y = 10$;
e) $x + y = 4$, $xy = 1$; f) $y = 4 - x^2$, $y = x^2$;
g) $y^2 = x$, $x = 5$; h) $y = x^2$, $y^2 = x$;
i) $y = x^2$, $y = x^3$; j) $y = \sqrt{2x}$, $y = 0$, $x = 8$;
k) $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $y = 2$; l) $y = e^{2x}$, $y = e^{-2x}$, $x = 4$;
m) $y = e^x$, $y = e^{2x}$, $x = 6$; n) $y = 2^{-x}$, $y = 5$, $x = 0$;
o) $y = e^x$, $x = 5$, $y = 0$, $x = 0$; p) $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$;
r) $x^2 + y^2 = 2$, $x^2 + y^2 = 4$, $y = 0$; s) $y = x$, $y = 2x$, $x^2 + y^2 = 4$;
t) $x^2 + 2y^2 = 1$, $y = 0$, $x = 0$; u) $x^2 + y^2 = 2$, $y^2 = x$.

II. Výpočet určitého integrálu dané funkce na daném intervalu

Předpokládejme, že funkce $f(x)$ je pro $x \in \langle a, b\rangle$ *mírou změny* nějaké funkce $F(x)$, tudíž platí $f(x) = \frac{dF}{dx}$, a navíc funkce $f(x)$ je v tomto intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitá. Pak *celkovou změnu* veličiny $F(x)$ pro hodnoty x mezi $x = a$, $x = b$, tedy v intervalu $\langle a, b\rangle$, najdeme pomocí primitivní funkce $f(x)$ k dané funkci $f(x)$ (integrováním funkce $f(x)$) a následným výpočtem rozdílu hodnot $F(b) - F(a)$. Uvedený postup se nazývá výpočet *určitého integrálu* dané funkce v daném intervalu a značí se jako

$$\int_a^b f(x) \, dx \qquad \text{(čteme: určitý integrál funkce } f(x) \text{ v mezích od } a \text{ po } b\text{);}$$

tudíž hodnota určitého integrálu je *reálné číslo*, které počítáme jako

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

přičemž $F(x)$ je (nějaká) primitivní funkce k funkci $F(x)$ na uvedeném intervalu. Používáme také zápis

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a);$$

tato formule se nazývá *Newtonova – Leibnizova formule na výpočet určitého integrálu.*

Proto lze vytvořit následující tabulku jako analogii k tabulce neurčitých integrálů:

$$\int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

$$\int_a^b k\;\,dx = k\;\cdot [x]_a^b = k \cdot (b-a)$$

$$\int_a^b e^x\,dx = [e^x]_a^b = e^b - e^a$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = 1$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2} \cdot [x + \sin x \cos x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2} \cdot [x - \sin x \cos x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} \;\bullet$$

Substituční metoda na výpočet určitého integrálu:

$$\int_a^b g(u(x))\,u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(t)\,dt;$$

použijeme substituci do neurčitého integrálu $u(x) = t$, $u'(x)\,dx = dt$ a pak při této substituci transformujeme také meze: pro $x = a$ máme novou dolní mez $t = u(a)$, pro $x = b$ je nová horní mez $t = u(b)$.

Ilustrační příklad: Počítejme $\int_0^1 8x(x^2+1)^3\,dx$.

Řešení. Klademe substituci $u = x^2 + 1$, $du = 2x\,dx$ a transformujeme meze: dolní mez $x = 0$ se transformuje na novou dolní mez $u = 1$, podobně horní mez $x = 1$ na $u = 2$, proto

$$\int_0^1 8x(x^2+1)^3\,dx = \int_1^2 4u^3\,du = [u^4]_1^2 = 16 - 1 = 15. \;\bullet$$

Metoda per partes na výpočet určitého integrálu:

$$\int_a^b u'\,v\;\,dx = [u\;\,v]_a^b - \int_a^b u\;\,v'\,dx.$$

Ilustrační příklady:

$\int_0^1 x \cdot e^{-x}\,dx = [-x \cdot e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 e^{-x}\,dx = -\frac{1}{e} - [e^{-x}]_0^1 = -\frac{2}{e} + 1$ (každý člen součtu je v mezích);

$$\int_1^e \ln x\,dx = [x \cdot \ln x]_1^e - \int_1^e 1\,dx = e - (e-1) = 1. \;\bullet$$

Určitý integrál jako plošný obsah rovinné oblasti

Jestliže $y = f(x)$ je nezáporná funkce, která je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a,\, b\rangle$ a jestliže jako O označíme rovinnou oblast určenou grafem funkce pro $x \in \langle a,\, b\rangle$, osou o_x a svislými přímkami $x = a$, $x = b$, pak plošný obsah $A(O)$ (A jako plošný obsah - "area") oblasti O je určen hodnotou určitého integrálu

$A(O) = \int_a^b f(x)\, dx$ (jednotek plošného obsahu).

Kvůli přehledu ve výpočtu je vhodné zapsat oblast O pomocí systému nerovností: pro souřadnice x, y bodu $P[x,\, y] \in O$ máme
$a \leq x \leq b$,
$0 \leq y \leq f(x)$.

Obecně: jestliže $y = f(x)$, $y = g(x)$ jsou dvě nezáporné funkce, obě spojité na uzavřeném intervalu $\langle a,\, b\rangle$ a takové, že pro všechna $x \in \langle a,\, b\rangle$ platí $g(x) \leq f(x)$, pak plošný obsah $A(O)$ rovinné oblasti O určené systémem nerovností
$a \leq x \leq b$,
$g(x) \leq y \leq f(x)$
je určen hodnotou určitého integrálu

$A(O) = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$ (jednotek plošného obsahu).

Oblast O určují nyní grafy funkcí $g(x)$, $f(x)$ pro $x \in \langle a,\, b\rangle$, osa o_x a svislé přímky $x = a$, $x = b$; její plošný obsah vypočítáme jako rozdíl plošných obsahů dvou oblastí, které určují funkce $f(x)$, resp. $g(x)$.

Číslo - hodnotu určitého integrálu můžeme interpretovat jako plošný obsah určité rovinné oblasti také v jiných souvislostech.

Ilustrační příklad. Vypočítejme plošný obsah rovinné oblasti určené obloukem paraboly $y = -x^2 + 4x - 3$ a osou o_x.
Řešení. Máme $y = (3 - x)(x - 1)$, proto integrační meze jsou $x = 1$, $x = 3$; oblast O zapíšeme pomocí nerovností jako
$1 \leq x \leq 3$,
$0 \leq y \leq (3 - x)(x - 1)$:

$A(O) = \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x\right]_1^3 = \frac{4}{3}$ (jednotek plošného obsahu). •

Úlohy

1. *Dráha a rychlost.* Určitý objekt se pohybuje tak, že jeho rychlost po t minutách odteď je $v(t) = 5 + 2t + 3t^2$ metrů za minutu. Jaká je velikost dráhy objektu v průběhu 2. minuty? V průběhu 4. minuty?

2. *Dráha objektu - jako plošný obsah rovinné oblasti.* Rychlost určitého objektu $v(x)$ v metrech za minutu se v průběhu prvních 20 minut jeho pohybu měnila: od začátku pohybu ($x = 0$) do 4. minuty byla $v(x) = 0,5x$ m/min, od 4. do 10. minuty byla konstantní $v(x) = 2$ m/min a od 10. do 20. minuty byla $v(x) = 0,8x - 6$ m/min. Vypočítejte, jak velkou dráhu v metrech ujel objekt a) za první 4 minuty; b) za 20 minut? Znázorněte graficky.

3. *Růst počtu obyvatel.* Výzkumy ukazují, že x měsíců odteď populace určité oblasti roste mírou $30 + 5x^{2/3}$ lidí za měsíc. O kolik vzroste populace této oblasti v průběhu následujících 8 měsíců? Jestliže se uvedený trend dále nezmění, o kolik vzroste populace v průběhu 27 měsíců odteď?

4. *Příjem z výrobního zařízení.* Určité výrobní zařízení přináší t let od instalace příjem mírou $f(t) = 1000e^{0,04t}$ (v dolarech za rok). Vypočítejte příjem, který přinese zařízení a) za prvních 5 let, b) za prvních 10 let jeho užívání. Znázorněte příjem graficky jako plošný obsah určité rovinné oblasti.

5. *Výkonnost.* Po t hodinách práce je pracovník určité továrny schopen vyprodukovat $100te^{-0,5t}$ výrobků za hodinu. Jestliže pracovník začíná pracovat v 8,00 hod., kolik výrobků vyrobí

a) mezi 9,00 a 10,00 hod., b) mezi 10,00 a 12,00 hod.?

6. *Výkonnost.* Po t hodinách práce první pracovník určité dílny vyrábí rychlostí $Q_1(t) = 60 - 2(t-1)^2$ výrobků za hodinu, zatímco druhý pracovník vyrábí rychlostí $Q_2(t) = 50 - 5t$ výrobků za hodinu.

(a) Jestliže oba pracovníci přišli do práce v 8,00 hod., o kolik výrobků více vyrobí první pracovník ve 12,00 hod. ve srovnání s druhým pracovníkem?

(b) Znázorněte řešení úlohy (a) jako plošný obsah určité rovinné oblasti.

7. *Biologie - růst.* Určitá kultura kvasinek roste rychlostí $0,3e^{0,1t}$ gramů za hodinu. Vypočítejte, jaké celkové množství kvasinek se vytvoří při uvedeném růstu

a) za první 2 hodiny, b) za prvních 5 hodin.

Znázorněte tato množství graficky jako plošný obsah rovinných oblastí.

8. *Těžba ropy.* Podle údajů získaných za první tři roky těžby ropy v oblasti manažment ropné spoločnosti odhaduje, že t roků od začetí vrtů bude ropa z ložiska čerpána mírou $R(t) = \dfrac{100}{t+10} + 10$ tisíc barelů za rok, kde $0 \le t \le 15$. Vypočítejte, kolik tisíc barelů ropy vytěží společnost

a) za prvních 5 let těžby; b) od 5. do 10. roku těžby. Znázorněte graficky.

9. *Těžba ropy.* Řešte předchozí úlohu, jestliže $R(t) = \dfrac{100t}{t^2+25} + 4$, přičemž teď $0 \le t \le 25$, pro a) prvních 10 let těžby, b) od 5. do 15. roku těžby. Znázorněte.

10. *Celková spotřeba.* V určitém státě dopyt po benzínu roste exponenciálně mírou 5 procent za rok. Jestliže spotřeba v současnosti jsou 4 miliony litrů benzínu za rok, kolik benzínu se spotřebuje ve státě během následujících 3 let?

11. *Spotřeba energie.* Předpokládejme, že v určité oblasti poptávka po ropě roste exponenciálně mírou 10 procent za rok. Jestliže spotřeba v současnosti je 30 milionů litrů ropy za rok, kolik ropy se spotřebuje v této oblasti v průběhu následujících 10 let?

12. *Zhromažďování prostředků fondu.* Odhaduje se, že t měsíců odteď rostou v důsledku kampaně médií finanční příspěvky do určitého fondu mírou $R(t) = 5000e^{-0,2t}$ dolarů za měsíc, zatímco výdaje na takovou kampaň zůstávají podle předpokladů na konstantní míře 676 dolarů za měsíc.

(a) Kolik měsíců bude kampaň médií pro fond zisková?

(b) Jaký čistý příjem přinese kampaň za období v (a)?

(c) Interpretujte a graficky znázorněte čistý příjem jako plošný obsah určité rovinné oblasti.

13. *Zhromažďování příspěvků na charitu.* Odhaduje se, že t týdnů odteď vzrostou finanční příspěvky na charitu mírou $R(t) = 6537e^{-0{,}3t}$ dolarů za týden, zatímco na výdaje charity se musí vynakládat konstantní částka 593 dolarů za týden.

(a) Kolik týdnů bude zhromažďování příspěvků pro charitu ziskové?

(b) Jak vysoký čistý výnos přinese zhromažďování příspěvků za období v (a)?

(c) Interpretujte a graficky znázorněte uvedený čistý výnos jako plošný obsah určité rovinné oblasti.

14. Vypočítejte určité integrály, interpretujte pomocí plošného obsahu vhodné rovinné oblasti:

a) $\int_0^1 xe^x\,dx$; b) $\int_0^\pi x\sin x\,dx$; c) $\int_0^\pi x^2\sin x\,dx$; d) $\int_1^e \ln x\,dx$;

e) $\int_1^e x\ln x\,dx$; f) $\int_0^2 \frac{x}{x^2-9}\,dx$; g) $\int_3^4 \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx$; h) $\int_{-1}^1 \frac{x^2+1}{4-x^2}\,dx$;

i) $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{1+2x}}\,dx$; j) $\int_1^e \frac{1}{x(1+\ln x)}\,dx$; k) $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$; l) $\int_1^3 \frac{1}{x+x^2}\,dx$;

m) $\int_0^1 \frac{x+3}{9+x^2}\,dx$; n) $\int_0^1 \frac{1}{2x^2+3}\,dx\cdot$

15. *Plošný obsah trojúhelníku.* Pomocí určitého integrálu vypočítejte plošný obsah trojúhelníku, který určují přímky (znázorněte graficky):

a) $y = 4x$, $y = 0$, $x = 5$; b) $y = 1 + 2x$, $y = 1 - x$, $x = 2$;
c) $y = 2x$, $y = 6 - x$, $y = 0$; d) $y = 2x$, $y = 6 - x$, $x = 0$;
e) $y = 4 - x$, $y = 4 - 2x$, $2y = 4 - x$.

16. *Plošný obsah trojúhelníku.* Pomocí určitého integrálu vypočítejte plošný obsah trojúhelníku ΔABC, jestliže:

a) $A[0, 0]$, $B[-1, 3]$, $C[1, -25]$; b) $A[-1, 1]$, $B[3, 2]$, $C[3, 5]$. Znázorněte.

17. *Plošný obsah rovinné oblasti.* Určitým integrálem vypočítejte plošný obsah rovinné oblasti určené pomocí grafů křivek (oblast znázorněte graficky):

a) $y = 6x - x^2$, $y = 0$; b) $y = -x$, $y = x + 2$ pro $1 \le x \le 3$;
c) $y = 0$, $y = \sin x$ pro $0 \le x \le \pi$; d) $y = \ln x$, $y = 0$ pro $1 \le x \le e$;
e) $y = x^2 - 2x$, $y = x$; f) $y = x^2$, $y = x^2/4$, $y = 1$.
(Pomůcka pro f): využijte symetrii oblasti.)

18. *Plošný obsah rovinné oblasti.* Určitým integrálem vypočítejte plošný obsah rovinné oblasti určené grafy křivek (oblast znázorněte graficky):

a) $y = x^2$, $y^2 = x$; b) $y = x^2 - x - 6$, $y = -x^2 + 5x + 14$;
c) $y = x^3$, $y = 4x$; d) $y = 2x^3$, $y^2 = 4x$;
e) $xy = 4$, $x + y = 5$; f) $y = x^2$, $y = x^3$;
g) $y = x^n$, $y = 0$, $x = 1$; h) $y = x^2 - 3x + 2$ a osa o_x pro $x \in \langle 0, 3\rangle$.

19. Dokažte, že pro integrovatelnou

a) sudou funkci $f(x)$ platí $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\cdot\int_0^a f(x)\,dx$;

b) lichou funkci $f(x)$ platí $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$;

c) spojitou periodickou funkci $f(x)$ platí (T je perioda funkce)

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx.$$

20. *Plošný obsah rovinné oblasti.* Určitým integrálem vypočítejte plošný obsah rovinné oblasti, kterou určují grafy křivek (oblast znázorněte graficky):
a) $y = \cos x$ pro $0 \leq x \leq \pi/2$;
b) $y = \sin x$, $y = \cos x$ a osou o_x pro $0 \leq x \leq \pi/2$;
c) $y = \sin x$, $y = \cos x$ a osou o_y v 1. kvadrantu.

21. *Plošný obsah rovinné oblasti.* Určitým integrálem vypočítejte plošný obsah rovinné oblasti omezené grafy křivek (oblast znázorněte graficky):

a) $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = \ln 2$; b) $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$;
c) $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$; d) kružnicí $x^2 + y^2 = 8$ a parabolou $y^2 = 2x$;
e) $y = x^2$, $y = \dfrac{2}{1+x^2}$.

22. *Střední hodnota funkce.* Vypočítejte střední hodnotu funkce v daném intervalu $\langle a,\, b\rangle$ a znázorněte graficky:

a) $f(x) = 1 + x$, $\langle 0,\, 1\rangle$, resp. $\langle -1,\, 1\rangle$; b) $f(x) = 1 - x^2$, $\langle -1,\, 1\rangle$, resp. $\langle 0,\, 1\rangle$;
c) $f(x) = x(2 - x)$, $\langle 0,\, 2\rangle$; d) $f(x) = e^x$, $\langle 0,\, 1\rangle$;
e) $f(x) = \sin x$, $\langle 0,\, \pi\rangle$; f) $f(x) = \cos x$, $\langle 0,\, \frac{\pi}{2}\rangle$;
g) $f(x) = x^3 + x^2$, $\langle -1,\, 1\rangle$; h) $f(x) = \ln x$, $\langle 1,\, e\rangle$.

23. *Střední (průměrná) hodnota ceny.* Záznamy ukazují, že t měsíců po 1. lednu určitého roku cena drůbeže v lokální síti velkých prodejen byla $P(t) = 0,06t^2 - 0,2t + 1,2$ dolarů za 1 kg. Určete průměrnou cenu za 1 kg drůbeže (znázorněte graficky)
a) za první 3 měsíce roku, b) za prvních 6 měsíců roku.

24. *Střední hodnota funkce - finanční rezervy.* Finanční rezervy (v tisících dolarů) určité společnosti x měsíců po 1. lednu určitého roku jsou určeny přibližně funkcí
$C(x) = 1 + 12x - x^2$ $(0 \leq x \leq 12)$.
Vypočítejte střední hodnotu finančních rezerv (znázorněte graficky) v průběhu
a) 1. čtvrtletí, b) 2. čtvrtletí, c) 1. pololetí, d) celého roku.

25. *Průměrná rychlost.* Rychlost objektu $v(x)$ v metrech za minutu se v průběhu prvních 20 minut pohybu měnila následovně: od začátku pohybu ($x = 0$) do 4. minuty byla $v(x) = 0,5x$ m/min, od 4. do 10. minuty byla konstantní $v(x) = 2$ m/min a od 10. do 20. minuty byla $v(x) = 0,8x - 6$ m/min. Vypočítejte střední hodnotu rychlosti objektu, t.j. průměrnou rychlost (znázorněte graficky):

a) za první 4 minuty; b) za prvních 10 minut; c) za 20 minut;
d) mezi 4. a 20. min.; e) mezi 8. a 20. min.; f) mezi 10. a 20. minutou.

26. *Dráha a rychlost, průměrná rychlost.* Určitý objekt se pohybuje tak, že jeho rychlost po uplynutí t sekund odteď je $v(t) = \sqrt{1+t}$ metrů za sekundu. Jakou dráhu ujede objekt za prvních 15 sekund? Jaká je jeho průměrná rychlost za uvedených 15 sekund?

27. *Střední hodnota funkce.* a) Profil žlabu klesá do hloubky h metrů rovnoměrně z obou stran tak, že jeho šířka na povrchu je a metrů a v hloubce h metrů má žlab šířku

b metrů. Vypočítejte střední hloubku žlabu.

b) Profil (jiného) žlabu má tvar parabolického úseku šířky a a hloubky h metrů. Vypočítejte střední hloubku tohoto žlabu.

28. *Střední hodnota funkce - koncentrace látky.* Při lékařském vyšetření se do krevního oběhu pacienta podává injekčně určitá kontrastní látka rovnoměrně v průběhu 2 minut. Koncentrace kontrastní látky (v miligramech na 1 litr) po t minutách je určena přibližně jako $C(t) = 1 + 0,5t^2 + 0,25t^4$, kde $0 \le t \le 2$. Vypočítejte střední hodnotu koncentrace v průběhu

a) prvních 30 sekund aplikování injekce, b) první minuty, c) v průběhu celých 2 minut aplikování. Znázorněte graficky.

29. *Střední hodnota funkce - stav zásob.* Obchodník dostává dodávky po 12 000 kg určitého zboží. Zboží se prodává rovnoměrně mírou 300 kg za týden. Jestliže náklady na skladování zboží jsou 0,2 centu na 1 kg zboží za týden, jaké budou celkové náklady obchodníka na skladování zboží za dalších 40 týdnů? Znázorněte graficky.

30. *Střední hodnota funkce - stav zásob.* Ve skladu je uložena zásoba 60 000 kg určité suroviny, která odchází do výroby rovnoměrně a tímto způsobem se zásoba vyčerpá právě za 1 rok. Jaký je průměrný stav zásob ve skladu

a) za první polovinu roku, b) za celý rok? Znázorněte graficky.

31. *Střední hodnota funkce - stav zásob.* Výrobce plastových výrobků dostává 450 balení potřebné suroviny každých 30 dní; surovina se ve výrobě spotřebuje nerovnoměrně a x dní po každé takové dodávce je ve skladu $f(x) = 450 - \dfrac{x^2}{2}$ balení suroviny.

a) Vypočítejte střední hodnotu zásob ve skladu; znázorněte graficky.

b) Jestliže náklady na skladování 1 balení suroviny jsou 2 centy za den, určete průměrné denní náklady na skladování.

32. *Střední hodnota funkce - stav zásob.* Obchod dostává každých 60 dní v jedné dodávce 600 krabic atletické obuvi; obuv se prodává nerovnoměrně a x dnů po dodání je ve skladu $f(x) = 600 - 20\sqrt{15x}$ krabic. Vypočítejte střední hodnotu zásob ve skladu; znázorněte graficky.

33. *Střední hodnota funkce - stav zásob.* Vypočítejte v předchozí úloze průměrné denní náklady na skladování, jestliže náklady na skladování jedné krabice jsou 0,5 centu.

34. *Střední hodnota funkce - stav zásob.* Velkoobchod dostává v jedné dodávce 1200 balení určitého druhu čokolády každých 30 dní; čokoláda se prodává maloobchodníkům rovnoměrně takovým způsobem, že x dní po příchodu dodávky je na skladě přesně $f(x) = 1200 - 40x$ balení.

a) Vypočítejte střední hodnotu zásob ve skladu.

b) Jestliže náklady na skladování 1 balení čokolády jsou 3 centy za den, určete průměrné denní náklady na skladování.

35. *Čistý výnos z výrobního zařízení.* Jestliže se určité výrobní zařízení používá x let, pak generuje příjem mírou $R = R(x)$ dolarů za rok a náklady na jeho používání rostou mírou $C = C(x)$ dolarů za rok.

(a) Vypočítejte, za jaké období je používání výrobního zařízení ziskové.

(b) Jaký je čistý výnos z používání výrobního zařízení za období určené v úloze (a)?

(c) Znázorněte čistý výnos graficky pomocí plošného obsahu určité rovinné oblasti.

Řešte tyto úlohy pro $R(x)$, $C(x)$:

1) $R(x) = 6025 - 10x^2$, $C(x) = 4000 + 15x^2$; 2) $R(x) = 6025 - 8x^2$, $C(x) = 4681 + 13x^2$; 3) $R(x) = 5575 - 5x^2$, $C(x) = 1975 + 20x^2$; 4) $R(x) = 5000 - 20x^2$, $C(x) = 2000 + 10x^2$.

36. *Zisk z investování.* Předpokládejme, že x let odteď bude první investiční plán vytvářet příjem mírou $R_1(x) = 50 + x^2$ dolarů za rok, zatímco druhý investiční plán mírou $R_2(x) = 200 + 5x$ dolarů za rok.

a) Vypočítejte, jak dlouho bude druhý investiční plán ziskovější než první plán a znázorněte $R_1(x)$, $R_2(x)$ graficky.

b) Vypočítejte rozdíl v zisku, jestliže se v období podle a) bude investovat podle druhého plánu, a znázorněte zisk jako plošný obsah určité rovinné oblasti.

37. *Investování.* Řešte předchozí úlohu pro funkce $R_1(x)$, $R_2(x)$ (čas x je ve významu roky):

a) $R_1(x) = 100 + x^2$, $R_2(x) = 220 + 2x$; b) $R_1(x) = 60e^{0,12x}$, $R_2(x) = 160e^{0,08x}$.

38. *Sklon zákazníka ke spotřebě.* Daná je funkce poptávky zákazníka $D(q)$ po určitém zboží (v dolarech za kus - jednotku zboží). Vypočítejte celkové množství peněz, které je zákazník ochoten utratit na nákup q_0 kusů (jednotek) zboží, znázorněte graficky funkce poptávky a sklonu zákazníka ke spotřebě jako plošný obsah určité rovinné oblasti:

a) $D(q) = 2(64 - q^2)$ dol./kus, $q_0 = 6$; b) $D(q) = \dfrac{300}{(0,1q+1)^2}$ dol./kus, $q_0 = 5$;

c) $D(q) = \dfrac{400}{0,5q+2}$ dol./kus, $q_0 = 12$.

39. *Sklon zákazníka ke spotřebě.* Řešte předchozí úlohu, jestliže:

a) $D(q) = \dfrac{300}{4q+3}$ dol./kus, $q_0 = 10$; b) $D(q) = 40e^{-0,05q}$ dol./kus, $q_0 = 10$;

c) $D(q) = 50e^{-0,04q}$ dol./kus, $q_0 = 15$.

40. *Spotřebitelský přebytek.* Daná je funkce poptávky $D(q)$ zákazníka po určitém zboží. Vypočítejte spotřebitelský přebytek, jestliže tržní cena za jednotku zboží je p_0, znázorněte graficky funkci poptávky a spotřebitelský přebytek jako plošný obsah určité rovinné oblasti:

a) $D(q) = 2(64 - q^2)$ dol./kus, $p_0 = 110$;

b) $D(q) = 150 - 2q - 3q^2$ dol./kus, $p_0 = 117$;

c) $D(q) = \dfrac{300}{(0,1q+1)^2}$ dol./kus, $p_0 = 12$.

41. *Spotřebitelský přebytek.* Řešte předchozí úlohu, jestliže:

a) $D(q) = \dfrac{400}{0,5q+2}$ dol./kus, $p_0 = 20$; b) $D(q) = 40e^{-0,05q}$ dol./kus, $p_0 = 11,46$;

(c) $D(q) = 30e^{-0,04q}$ dol./kus, $p_0 = 11$.

42. *Spotřebitelský přebytek.* Předpokládejme, že funkce poptávky po určitém zboží je $D(q) = 23 - q^2$ a funkce nabídky zboží je $S(q) = \dfrac{q^2}{3} + 2q + 5$ (tato nabídka tudíž určuje cenu, za kterou se množství q výrobků dodává na trh). Jestliže se uvedené množství prodá za rovnovážnou cenu (poptávka a nabídka jsou stejné), vypočítejte spotřebitelský přebytek. Znázorněte přebytek graficky jako plošný obsah určité rovinné oblasti.

43. *Spotřebitelský přebytek.* Řešte předchozí úlohu, jestliže funkce poptávky, resp. nabídky jsou $D(q) = \dfrac{16}{q+2} - 3$, $S(q) = \dfrac{q+1}{3}\cdot$

44. *Příjem z prodeje.* Výrobce kol předpokládá, že x měsíců odteď budou zákazníci kupovat 500 kol za měsíc za cenu $P(x) = 80 + 3\sqrt{x}$ dolarů za jedno kolo. Jaký je celkový příjem výrobce z prodeje kol v průběhu následujících

a) 4 měsíců, b) 16 měsíců?

45. *Příjem z prodeje.* Výrobce kol předpokládá, že x měsíců odteď budou zákazníci kupovat $f(x) = 500 + 6\sqrt{x}$ kol za měsíc za cenu $P(x) = 80 + 3\sqrt{x}$ dolarů za jedno kolo. Jaký je celkový příjem výrobce z prodeje kol v průběhu následujících

a) 4 měsíců, b) 9 měsíců?

46. *Pokles hodnoty.* Odprodejní hodnota určitého výrobního zařízení klesá v průběhu 10 let tak, že míra poklesu hodnoty se mění v čase; jestliže je zařízení x let staré, míra (rychlost), jakou se mění jeho hodnota, je $220(x-10)$ dolarů za rok. O kolik klesne hodnota zařízení v průběhu a) 2. roku, b) 4. roku používání? Znázorněte graficky.

47. *Příjem z prodeje.* Předpokládá sa, že poptávka po určitém výrobku roste exponenciálně mírou 2 procenta za rok. Jestliže je v současnosti poptávka 5000 výrobků za rok a cena tohoto výrobku zůstává nezměnena 40 dolarů za kus, jaký bude příjem výrobce z prodeje v průběhu

a) následujícího roku, b) následujících 2 let?

48. *Lorenzova křivka rozložení příjmů.* Vypočítejte koeficent nerovnosti pro Lorenzovu křivku a znázorněte graficky, jestliže $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{2}$ je předpis pro Lorenzovou křivku. Vypočítejte také, jaké procento z celkových příjmů v tomto případě dostává dolních 25 % domácností, resp. dolních 50 % domácností; znázorněte graficky.

49. *Lorenzova křivka rozložení příjmů.* Vypočítejte koeficent nerovnosti pro Lorenzovu křivku, jestliže Lorenzova křivka je určena předpisem (znázorněte graficky):

a) $\dfrac{3x^2}{5} + \dfrac{2x}{5}$; b) $\dfrac{9x^2}{10} + \dfrac{x}{10}$; c) $\dfrac{3x^2}{25} + \dfrac{22x}{25}$; d) $\dfrac{9x^2}{25} + \dfrac{16x}{25}$;

e) $\dfrac{5x^2}{6} + \dfrac{x}{6}$; f) $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{5x}{6}$; g) $\dfrac{1}{3}x(x^2+2)$.

Pro křivky a), b) vypočítejte, jaké procento z celkových příjmů dostává dolních 25 % domácností, resp. dolních 50 % domácností; znázorněte graficky.

Řešení úloh:

1. 15 m, resp. 49 m • **2.** a) 4 m; b) 76 m • **3.** 336 osob, resp. 1539 osob • **4.** a) 5535,07 dolarů; b) 12 295,62 dolarů • **5.** a) 69,61 výrobků; b) 131,90 výrobků • **6.** a) o 62 výrobků • **7.** a) 0,664 gramů; b) 1,946 gramů • **8.** a) 90,55 tisíc barelů; b) 78,77 tisíc barelů • **9.** a), b): $50\ln 5 + 40 \doteq 120,5$ • **10.** 12,947 milionů litrů • **11.** 515,48 milionů litrů • **12.** a) $5\ln\dfrac{5000}{676}$ (asi 10 měsíců); b) asi 14 852,62 dolarů • **13.** a) $\dfrac{10}{3}\ln\dfrac{6537}{593}$, tedy asi 8 týdnů; b) asi 15 069,26 dolarů • **14.** a) 1; b) π; c) $\pi^2 - 4$; d) 1; e) $1/4(e^2 + 1)$; f) $1/5(\ln 5 - \ln 9)$; g) $2 \ln 2 - \ln 3$; h) $5/2 \ln 3 - 2$; i) 0,7454; j) $\ln 2$; k) 1/3; l) 0,4052; m) 0,3744; n) 0,2400 • **15.** a) 50; b) 6; c) 12; d) 6; e) 8/3 • **16.** a) 11; b) 6 • **17.** a) 36; b) 12; c) 2; d) 1; e) 9/2; f) 4/3 • **18.** a) 1/3; b) 343/3; c) 8; d) 5/6; e) $15/2 - 8 \ln 2$; f) 1/12; g) $\dfrac{1}{n+1}$; h) 11/6 • **20.** a) 1 ; b) $2 - \sqrt{2}$; c) $\sqrt{2} - 1$ • **21.** a) 1/2; b) $e - 1$; c) 3 - e; d) $2\pi + 4/3$, $6\pi - 4/3$; e) $\pi - 2/3$ • **22.** a) 3/2; 1; b) 2/3, 2/3; c) 2/3; d) e - 1; e) $2/\pi$; f) $2/\pi$; g) 1/3; h) $1/e$ • **23.** a) 1,08 dolarů, b) 1,32 dolarů • **24.** a) 16; b) 34; c) 25; d) 25 • **25.** a) 1 m/min; b) 1,6 m/min; c) 3,8 m/min; d) 4,5 m/min; e) 5,3 m/min; f) 6 m/min • **26.** 42 m, 2,8 m/sek. • **27.** střední hloubka žlabu je: a) $h/2$ (v něm šířka žlabu $(a+b)/4$); b) 2h/3 • **28.** a) 1,0448; b) 365/300 (asi 1,2167); c) 37/15 (asi 2,467) • **29.** 12 dolarů • **30.** a) 45 000 kg; b) 30 000 kg • **31.** a) 300 balení; b) 6 dolarů • **32.** 200 krabic • **33.** 1 dolar • **34.** a) 600 balení; b) 18 dolarů • **35.** 1a) 9 let; 1b) 12 150 dolarů; 2a) 8 let; 2b) 7168 dolarů; 3a) 12 let; 3b) 28 800 dolarů; 4a) 10 let; 4b) 20 000 dolarů • **36.** a) 15 let; b) 1687,5 dolarů • **37.** a) 12 let, 1008 dolarů; b) $25 \ln(8/3)$ (asi 24,5 měsíců), přibližně 4740,75 dolarů • **38.** a) 624 dolarů; b) 1000 dolarů; c) $1600 \ln 2$ dolarů • **39.** a) $75 \ln(43/3)$ dolarů; b) $800(1 - e^{-0,5})$ dolarů; c) $1250(1 - e^{-0,6})$ dolarů • **40.** a) $(q_0 = 3)$ 36 dol.; b) $(q_0 = 3)$ 66 dol.; c) $(q_0 = 40)$ 1920 dol. • **41.** a) $(q_0 = 36)$ $800 \ln 10 - 720$; b) $(q_0 \doteq 25)$ $800(1 - e^{-1,25}) - 286,5 \doteq 284,30$ dol.; c) $(q_0 \doteq 25)$ $750\dfrac{e-1}{e} - 275$ • **42.** $q_0 = 3$, $p_0 = 14$ dolarů, proto 18 dolarů • **43.** $q_0 = 2$, $p_0 = 1$ dolar, proto $16 \ln 2 - 8$ dolarů • **44.** a) 168 000 dolarů; b) 704 000 dolarů • **45.** a) 170 704 dolarů; b) 396 369 dolarů • **46.** a) pokles o 1870 dolarů, b) pokles o 1430 dolarů • **47.** a) 202 013,4 dolarů, b) 408 107,74 dolarů • **48.** 1/6; 15,625 %, resp. 37,5 % • **49.** a) 1/5; b) 3/10; c) 1/25; d) 3/25; e) 5/18; f) 1/18; g) 1/6; pro křivku a) 13,75 %, 35 %; pro křivku b) 8,125 %, 27,5 % •

Pojmy, vztahy, označení

Míra změny a celková změna funkce na intervalu

Metody výpočtu určitého integrálu dané funkce na daném intervalu

Vlastnosti určitého integrálu

Určitý integrál jako plošný obsah rovinné oblasti (Newtonův integrál)

Plošné obsahy složitějších oblastí

Střední hodnota (average value) funkce na daném intervalu

Aplikace určitého integrálu v ekonomii:

- čistý přebytek zisku z investování (net excess profit)
- čistý výnos z výrobního zařízení (net earning from industrial equipment)
- Lorenzova křivka rozložení příjmů
- spotřebitelský a podnikatelský přebytek (consumer surplus, producer surplus)

- problém skladování (inventory problem)

4. února 2004

Opravy

Do textu úloh nebo do výsledků byly zaneseny tyto opravy:

5. a) opraven výsledek: má být 69,61 výrobků
26. v celém textu úlohy jednotky jsou m/sek.
41. b) opraven výsledek: má být $800(1 - e^{-1{,}25}) - 286{,}5 \doteq 284{,}30$ dol.