Množiny a číselné posloupnosti

Základní číselné množiny

Uvedeme nejprve přehled základních číselných množin a jejich označení.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ je množina všech *přirozených* čísel. Přirozená čísla používáme např. jako pořadová čísla, třeba při zápisu členů posloupnosti:
$(a_n) = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, ...\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ je množina *celých nezáporných čísel.* Těmito čísly je vyjádřen počet prvků konečných množin. Později uvidíme výhody použití čísel z $\mathbb{N}_0$ jako indexů členů nekonečných mocninných řad: $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ je množina všech *celých* čísel. Celá čísla používáme např. pro zápisy vztahující se k periodičnosti funkcí; např. funkce $y = \operatorname{cotg} x$ není definována pro $x = k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$ je libovolné (celé) číslo.

$\mathbb{Q}$ – množina všech čísel *racionálních.* Racionální číslo je definováno jako číslo, které lze vyjádřit ve tvaru $\frac{k}{n}$, kde $k \in \mathbb{Z}$ a $n \in \mathbb{N}$. Podle potřeby lze takový zlomek uvést na *základní tvar*, kde čitatel a jmenovatel jsou čísla nesoudělná.

$\mathbb{R}$ – množina všech čísel *reálných*, je pro základní kurs matematické analýzy základní číselnou množinou (pokud není řečeno jinak, budeme rozumět pod pojmem číslo vždy číslo reálné).

Při rozšiřování pojmu *číslo* z $\mathbb{Q}$ na $\mathbb{R}$ vznikají dvě otázky:
— zda existuje potřeba iracionálních čísel (a jak je zavést),
— zda zobrazení množiny $\mathbb{R}$ na číselnou osu je bijekce, tj. zda také naopak i každý bod číselné osy je obrazem nějakého reálného čísla.

Věta 1

Neexistuje racionální číslo, jehož druhá mocnina by byla rovna 2.

Množinu všech iracionálních čísel označíme $\mathbb{Q}'$; je $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset$ a $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$.

$\mathbb{C}$ – množina všech čísel *komplexních*; komplexní čísla zobrazujeme v Gaussově rovině. Platí: $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Základní vlastnosti číselných množin

Definice 1

Množina M se nazývá *shora omezená*, právě když

$$\exists L \in \mathbb{R} : \forall x \in M : x \leqq L.$$

Toto číslo L se nazývá *horní odhad* (resp. horní závora).

Množina M se nazývá *zdola omezená*, právě když

$$\exists K \in \mathbb{R} : \forall x \in M : x \geqq K.$$

Toto číslo K se nazývá *dolní odhad* (resp. dolní závora).

Množina M se nazývá *omezená*, právě když je omezená shora i zdola.

Pokud některý horní odhad množiny M patří do množiny M, pak jej nazýváme *největší prvek* množiny M a označujeme jej $\max M$. Podobně *nejmenší prvek* množiny M (definujte) označujeme $\min M$.

K nejdůležitějším číselným množinám patří *intervaly*.

Definice 2

Pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, definujeme
uzavřený interval $\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; a \leqq x \leqq b\}$,
otevřený interval $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$,
a podobně $\langle a, b)$, $(a, b\rangle$.

Definice 3

Množinu $\langle a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x \geqq a\}$ nazýváme *neomezený interval*. Podobně $(a, +\infty)$, $(-\infty, b\rangle$, $(-\infty, b)$. Množinu $\mathbb{R}$ zapisujeme též jako $(-\infty, +\infty)$.

Někdy uvažujeme též *degenerované intervaly*: $\langle a, a\rangle = \{a\}$, $(a, a) = \emptyset$ (prázdná množina). Pojmem interval budeme však dále vždy rozumět nedegenerovaný interval. Jestliže J je interval s koncovými body a, b (např. $J = (a, b\rangle$), pak $|J| = |b - a|$ značí délku tohoto intervalu.

Věta 2 (o vložených intervalech)

Nechť (J_n) je posloupnost omezených uzavřených intervalů $J_n = \langle a_n, b_n\rangle$ takových, že $J_1 \supset J_2 \supset J_3 \supset \ldots$ Pak existuje bod x_0, který leží ve všech intervalech J_n pro $n \in \mathbb{N}$. Jestliže navíc $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}$ tak, že $|J_n| < \varepsilon$, je takový bod x_0 jediný.

Supremum a infimum

Definice 4

Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. Číslo $\beta \in \mathbb{R}$ nazýváme *supremum* množiny M a píšeme $\beta = \sup M$, právě když má tyto dvě vlastnosti:

1. Pro všechna $x \in M$ platí $x \leqq \beta$,
2. Pro každé $\beta' < \beta$ existuje $x' \in M$ tak, že platí $x' > \beta'$.

Definice 5

Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ nazýváme *infimum* množiny M a píšeme $\alpha = \inf M$, právě když má tyto dvě vlastnosti:

1. Pro všechna $x \in M$ platí $x \geqq \alpha$,
2. Pro každé $\alpha' > \alpha$ existuje $x' \in M$ tak, že platí $x' < \alpha'$.

Příklad 1

Určete $\sup M$ a $\inf M$ pro množinu $M = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\right\}$.

Tedy: supremum a infimum množiny mohou, ale nemusí být prvky této množiny. Pokud $\sup M$ je prvkem množiny M, je jejím největším prvkem; podobně pro $\inf M$. Také naopak, pokud má M největší prvek, je to současně $\sup M$; podobně pro nejmenší prvek.

Věta 3 (o existenci suprema a infima)

Každá neprázdná shora omezená množina reálných čísel má supremum.
Každá neprázdná zdola omezená množina reálných čísel má infimum.

Klasifikace bodů vzhledem k množině

Definice 6

Okolím bodu a nazveme každý otevřený interval (c, d) konečné délky, který obsahuje bod a (tj. kde $a \in (c, d)$); označení okolí bodu a: $U(a)$.

Tato je definice je formulována ve smyslu topologickém.
Pro důkazy některých vět je vhodnější definovat okolí bodu a ve smyslu metrickém.

Definice 7

ε-okolím bodu a, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, nazýváme interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$; označení: $U(a, \varepsilon)$ nebo též $U(a)$.

Definice 8

Prstencovým (redukovaným) okolím bodu a nazýváme množinu $P(a) = U(a) - \{a\}$.

Vnitřní bod množiny M: Bod množiny M, který do M patří i s některým svým okolím.

Vnitřek množiny M: Množina všech vnitřních bodů množiny M.

Hraniční bod množiny M: V každém jeho okolí existuje bod množiny M a též bod, který do M nepatří. (Hraniční bod může, ale nemusí patřit do M.)

Hranice množiny M: Množina všech hraničních bodů množiny M.

Vnější bod množiny (vzhledem k množině) M: Bod číselné osy, který není vnitřním ani hraničním bodem množiny M.

Vnějšek množiny M: Množina všech vnějších bodů množiny M.

Množina M je *otevřená*: Každý její bod je jejím vnitřním bodem.

Množina M je *uzavřená*: Obsahuje svou hranici.

Uzávěr $\overline{M}$ *množiny* M: Sjednocení množiny M a její hranice.

Hromadný bod a množiny M: V každém jeho prstencovém okolí leží alespoň jeden bod množiny M.

Izolovaný bod množiny M: Bod množiny M, který není jejím hromadným bodem.

Diskrétní množina: Všechny její body jsou izolované.

Derivace M' *množiny* M: Množina všech hromadných bodů množiny M.

Rozšířená reálná osa

Je to model číselné osy, kterou rozšíříme o dva nové prvky: *nevlastní číslo* $+\infty$ a nevlastní číslo $-\infty$. Označení rozšířené reálné osy: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Zavedení nevlastních čísel nám umožňuje hlouběji, lépe a jednodušeji formulovat mnohé poznatky matematické analýzy.

Vlastnosti nevlastních čísel

Uspořádání: $\forall x \in \mathbb{R}$: $-\infty < x < +\infty$, zvláště $-\infty < +\infty$; $-(-\infty) = +\infty$, $-(+\infty) = -\infty$, $|+\infty| = |-\infty| = +\infty$.

Okolí: $U(+\infty)$ toto označení budeme používat pro každou množinu $\{x \in \mathbb{R}^*, x > c\}$, kde $c \in \mathbb{R}$, ale pokud budeme pracovat na $\mathbb{R}$, použijeme toto označení (pro zjednodušení vyjadřování) též pro intervaly $(c, +\infty) \subset \mathbb{R}$, což jsou vlastně prstencová okolí $P(+\infty)$ na $\mathbb{R}^*$. Podobně pro $U(-\infty)$ a $P(-\infty)$.

Supremum a *infimum*: Pro množinu M, která není shora omezená, je $\sup M = +\infty$, pro množinu M, která není zdola omezená, je $\inf M = -\infty$.

Hromadné body: Definice je formálně stejná, tedy $+\infty$ nazveme hromadným bodem množiny $M \subset \mathbb{R}^*$, právě když v každém jeho okolí $P(+\infty)$ leží alespoň jeden bod množiny M. Podobně pro $-\infty$.

Např. množina $\mathbb{Z}$ všech celých čísel má hromadné body $+\infty$ a $-\infty$, $\sup \mathbb{Z} = +\infty$, $\inf \mathbb{Z} = -\infty$, ale samozřejmě $+\infty \notin \mathbb{Z}$, $-\infty \notin \mathbb{Z}$.

Početní operace s nevlastními čísly

Operace s reálnými čísly můžeme rozšířit na nevlastní čísla následujícím způsobem:

Sčítání a odčítání: $\forall x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\pm x + (+\infty) = (+\infty) \pm x = \pm x - (-\infty) = (+\infty) + (+\infty) = (+\infty) - (-\infty) = +\infty,$$
$$\pm x + (-\infty) = (-\infty) \pm x = \pm x - (+\infty) = (-\infty) + (-\infty) = (-\infty) - (+\infty) = -\infty.$$

Nedefinujeme $(+\infty) - (+\infty)$, $(+\infty) + (-\infty)$, $(-\infty) + (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$.

Násobení: $\forall x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ definujeme

$$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = (+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty,$$
$$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = (+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty.$$

Podobně pro $x < 0$.

Nedefinujeme $0 \cdot (+\infty)$, $(+\infty) \cdot 0$, $0 \cdot (-\infty)$, $(-\infty) \cdot 0$.

Dělení: $\forall x \in \mathbb{R}$ definujeme $x/(+\infty) = x/(-\infty) = 0$.
Pro $x > 0$ je $+\infty/x = +\infty$, $-\infty/x = -\infty$,
pro $x < 0$ je $+\infty/x = -\infty$, $-\infty/x = +\infty$.

Nedefinujeme $+\infty/+\infty$, $+\infty/-\infty$, atd., $x/0$ pro žádné $x \in \mathbb{R}$, ani $0/0$ nebo $\pm\infty/0$.

Mocniny: $\forall n \in \mathbb{N}$ definujeme $(+\infty)^n = +\infty$, $(+\infty)^{-n} = 0$, $(-\infty)^n = (-1)^n \cdot (+\infty)$.

Nedefinujeme $(+\infty)^0$, $(-\infty)^0$, 0^0, $1^{+\infty}$, $1^{-\infty}$.

Číselné posloupnosti

Pojem posloupnosti

Definice 9

Každé zobrazení $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$ nazýváme *číselná posloupnost.* Zápis: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nebo jen (a_n); a_n se nazývá *n-tý člen* posloupnosti.

Definici číselné posloupnosti lze založit i na pojmu (reálné) funkce; pak je to funkce definovaná na množině $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel.

Způsoby zadání posloupnosti

Číselná posloupnost bývá zadána *několika prvními členy* (tak, aby bylo patrné pravidlo, jak vytvářet další členy), n-tým členem nebo rekurentně.

Příklad 2

Je dána posloupnost

$$\frac{1}{1\cdot 4}, \frac{3}{4\cdot 7}, \frac{5}{7\cdot 10}, \frac{7}{10\cdot 13}, \dots$$

Určete její n-tý člen.

Při zadání *n-tým členem* zase naopak lze z příslušného vzorce počítat jednotlivé členy posloupnosti.

Příklad 3

Příklady číselných posloupností zadaných n-tým členem: $\left(\frac{n}{n+1}\right)$, $\left((-1)^n n\right)$, (aq^{n-1}), $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$, $(a+(n-1)d)$.
Vypočtěte jejich členy a_1, a_2, a_3, a_4.

Rekurentní zadání obsahuje zpravidla 1. člen (nebo několik prvních členů) a pravidlo, jak vytvořit další člen ze členů předcházejících. Např. aritmetická posloupnost, geometrická posloupnost, Fibonacciova poslopnost.

Definice 10

Posloupnost (b_n) se nazývá *vybraná z posloupnosti* (a_n) (nebo též *podposloupnost*), právě když existuje posloupnost přirozených čísel $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ tak, že $\forall n \in \mathbb{N}$ je $b_n = a_{k_n}$.

Např. posloupnost všech prvočísel je vybraná z posloupnosti (n) všech čísel přirozených, ale není vybraná z posloupnosti $(2n-1)$ všech čísel lichých.

Základní vlastnosti číselných posloupností

Definice 11

Posloupnost se nazývá (*shora, zdola*) *omezená*, právě když tuto vlastnost má množina všech jejích členů.

Definice 12

Posloupnost (a_n) se nazývá

rostoucí, právě když $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < a_{n+1}$,
klesající, právě když $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > a_{n+1}$,
nerostoucí, právě když $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geqq a_{n+1}$,
neklesající, právě když $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leqq a_{n+1}$.

Společný název pro všechny tyto druhy posloupností: *posloupnosti monotonní* a pro první dva druhy: *posloupnosti ryze monotonní*.

Definice 13

Operace s posloupnostmi jsou definovány takto:

násobení reálným číslem c: $c \cdot (a_n) = (c \cdot a_n)$;
aritmetické operace součet, rozdíl, součin, podíl:
$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$, $(a_n) - (b_n) = (a_n - b_n)$,
$(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n)$, $(a_n)/(b_n) = (a_n/b_n)$, (pro $b_n \neq 0$);
opačná posloupnost k (a_n) je $(-a_n)$;
reciproká posloupnost k (a_n) je $(1/a_n)$ (pro $a_n \neq 0$).

Limita posloupnosti

Definice 14

Říkáme, že posloupnost (a_n) má *limitu* a, právě když pro každé okolí $U(a)$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ taková, že $n \geqq n_0$, platí $a_n \in U(a)$, symbolicky zapsáno

$$\forall U(a)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\colon n \geqq n_0 \Rightarrow a_n \in U(a).$$

Je-li $a \in \mathbb{R}$, nazývá se a *vlastní limita* a posloupnost (a_n) se nazývá *konvergentní*, pokud $a = \pm\infty$, nazývá se a *nevlastní limita*. Neexistuje-li vlastní limita, nazývá se posloupnost (a_n) *divergentní*.

Zápisy: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$; $\lim a_n = a$; $a_n \to a$ pro $n \to +\infty$.

Např. posloupnost $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ je konvergentní, má limitu 1, stacionární posloupnost (c) je konvergentní a má limitu c, posloupnost $\left(\frac{n}{100}\right)$ je divergentní, má nevlastní limitu $+\infty$, posloupnost (q^n) je pro $q \leqq -1$ divergentní, nemá limitu (osciluje).

Definice 15

Je-li $V(n)$ nějaká výroková forma a platí-li, že výrok: „Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ z nerovnosti $n \geqq n_0$ plyne $V(n)$," je pravdivý výrok, pak říkáme, že $V(n)$ platí *pro skoro všechna* n.

Věty o limitách

Věta 4

Každá číselná posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Věta 5

Má-li posloupnost (a_n) limitu, pak každá posloupnost (b_n) vybraná z posloupnosti (a_n) má tutéž limitu.

Limita posloupnosti se tedy nezmění, vynecháme-li nebo pozměníme-li libovolný konečný počet členů posloupnosti.

Věta 6

Je-li posloupnost (a_n) konvergentní, pak je omezená.

Tato věta ovšem neplatí obráceně, neboť např. posloupnost $((-1)^n)$ je omezená, ale je divergentní. Větší hloubku pohledu do vztahu mezi omezeností a konvergencí dává následující věta.

Věta 7 (Bolzano-Weierstrassova)

Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Věta 8

Každá neklesající shora omezená posloupnost je konvergentní.

Věta 9 (o limitách součtu, rozdílu, součinu a podílu)

Nechť $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$. Pak platí, pokud výrazy na pravých stranách mají v $\mathbb{R}^*$ smysl:

a) $\lim(a_n + b_n) = a + b$, $\lim(a_n - b_n) = a - b$,

b) $\lim(a_n \cdot b_n) = ab$,

c) pro $b_n \neq 0$, $b \neq 0$ je $\lim(a_n/b_n) = a/b$,

d) $\lim |a_n| = |a|$.

Věta 10 (limita nerovnosti)

Nechť $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ a pro nekonečně mnoho n platí $a_n \leqq b_n$. Pak $a \leqq b$.

Věta 11 (věta o třech limitách)

Nechť $\lim a_n = a$, $\lim b_n = a$ a nechť pro skoro všechna n je $a_n \leqq c_n \leqq b_n$. Pak $\lim c_n = a$.

Aritmetická posloupnost a geometrická posloupnost

Aritmetická posloupnost je (definována jako) posloupnost, která je dána svým prvním členem a_1, konstantní diferencí d a rekurentním pravidlem $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} = a_n + d$. Pokud nebude řečeno jinak, budeme předpokládat, že a_1 a d jsou reálná čísla. Aritmetickou posloupnost lze však rovněž definovat jako posloupnost, u níž rozdíl libovolných dvou po sobě jdoucích členů je konstantní. Z rekurentního pravidla dostaneme vzorec pro n-tý člen: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$. (Dokazuje se jednoduše např. užitím principu matematické indukce). Vidíme, že aritmetická posloupnost má pro $d > 0$ limitu $+\infty$ a pro $d < 0$ limitu $-\infty$.

Praktický význam může mít i součet s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti. Vzorec pro s_n lze odvodit např. takto: Vyjádříme s_n dvěma způsoby:

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-1)d),$$
$$s_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + (a_n - (n-1)d)$$

a po sečtení máme $2s_n = n(a_1 + a_n)$, takže $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

Geometrická posloupnost je (definována jako) posloupnost, která je dána svým prvním členem a_1, konstantním kvocientem q a rekurentním pravidlem $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} = a_n \cdot q$. V této definici mohou být a_1 a q libovolná reálná čísla, v dalším textu však budeme předpokládat (pokud nebude řečeno jinak), že $a_1 \neq 0$ a $q \neq 0$. Za těchto předpokladů lze tedy geometrickou posloupnost rovněž definovat jako posloupnost, u níž podíl libovolných dvou po sobě jdoucích členů je konstantní. Z rekurentního pravidla dostaneme vzorec pro n-tý člen: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. (Dokazuje se jednoduše např. matematickou indukcí).