

# ZÁKLADY MATEMATIKY 1

## 6. SÉRIE: NEURČITÝ INTEGRÁL

1. *Neurčitý integrál.* Vypočítejte a zkontrolujte nalezenou primitivní funkci pomocí derivování:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int (3x^2 + 2x - 4) dx & \text{b) } \int \left( \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{5x} \right) dx \\ \text{c) } \int \left( \sqrt{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx & \text{d) } \int x^2(x^2 - 2x + 2) dx \\ \text{e) } \int (x^2 - 3x + 1)^2 dx & \text{f) } \int x(x-2)(x-3) dx \\ \text{g) } \int \frac{x^3 - 1}{x - 1} dx & \text{h) } \int \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^2 dx \\ \text{i) } \int \frac{(2^x - 3^x)^2}{6^x} dx & \text{j) } \int e^x a^x dx \\ \text{k) } \int (2 \sin 2x - 3 \cos 5x) dx & \text{l) } \int (tg^2 x + cotg^2 x) dx \end{array}$$

2. *Neurčitý integrál.* Vypočítejte a zkontrolujte nalezenou primitivní funkci pomocí derivování:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int (2 - x)(2x - 1)^2 dx & \text{b) } \int (3\sqrt{x} - 7x^{4/3} + 10x\sqrt{x}) dx \\ \text{c) } \int (x^2 + 2x)x^{1/4} dx & \text{d) } \int (\sqrt{x} - x^{-1/3})^3 dx \\ \text{e) } \int \frac{(x-1)(x^2+3)}{2x^2} dx & \text{f) } \int \frac{(2x+1)^2}{x^4} dx \\ \text{g) } \int \frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx & \text{h) } \int (x - \sqrt[3]{x})^2 dx \\ \text{i) } \int \frac{3x}{4x^2 + 9} dx & \text{j) } \int \frac{5x}{4x^2 - 9} dx \\ \text{k) } \int (e^{1-2x} - 2e^{3-x} + e^{x/5} - 2^{-x}) dx & \text{l) } \int \frac{1}{x(2 + \ln x)} dx \end{array}$$

3. *Neurčitý integrál.* Vypočítejte pomocí vhodných substitucí:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int (x - 14)^5 dx & \text{b) } \int \sqrt{x-4} dx & \text{c) } \int 2x\sqrt{x+5} dx \\ \text{d) } \int 2x\sqrt{2x^2+6} dx & \text{e) } \int \left( \frac{2}{x-3} + \frac{3}{4-x} \right) dx & \text{f) } \int \frac{4}{(x-6)^2} dx \\ \text{g) } \int \frac{4}{\sqrt{x+2}} dx & \text{h) } \int \frac{x}{\sqrt{6x+7}} dx & \text{i) } \int \frac{5x}{3x^2+5} dx \\ \text{j) } \int \frac{2x+5}{x^2+5x-6} dx & \text{k) } \int \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}} dx & \text{l) } \int 4xe^{x^2} dx \end{array}$$

4. *Neurčitý integrál.* Vypočítejte pomocí vhodných substitucí:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \int x(4x+3)^{13} dx & \text{b) } \int \sqrt{(3-4x)^3} dx & \text{c) } \int (x-3)\sqrt{3-x} dx \\
 \text{d) } \int (x-2)\sqrt{4x-x^2} dx & \text{e) } \int \frac{1}{3-5x} dx & \text{f) } \int \frac{1}{(4x-1)^5} dx \\
 \text{g) } \int \frac{2x-1}{(x+3)^{1/3}} dx & \text{h) } \int \frac{3x^2}{1-3x^3} dx & \text{i) } \int \frac{2x^4}{x^5+1} dx \\
 \text{j) } \int \frac{1}{x \ln^3 x} dx & \text{k) } \int (2xe^{-x^2} + 6x^2e^{x^3}) dx & \text{l) } \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx
 \end{array}$$

5. *Neurčitý integrál.* Vypočítejte pomocí vhodných substitucí:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx & \text{b) } \int \operatorname{tg} x dx & \text{c) } \int \operatorname{cotg} x dx \\
 \text{d) } \int e^{-2x+3} dx & \text{e) } \int \frac{e^x}{4+e^x} dx & \text{f) } \int \frac{1}{3^x+1} dx \\
 \text{g) } \int \cos \frac{x}{4} dx & \text{h) } \int \cos(1-2x) dx & \text{i) } \int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx \\
 \text{j) } \int \frac{\sin x}{a+b \cos x} dx & \text{k) } \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx & \text{l) } \int \frac{1}{\cos x} dx \\
 \text{m) } \int \frac{1}{\sin x} dx & \text{n) } \int \sin^3 x \cos x dx & \text{o) } \int \operatorname{tg} \frac{x}{2} dx
 \end{array}$$

**Integrovaní metodou per partes:**

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

nebo symbolicky, pro  $u, v$  jako funkce proměnné  $x$ :

$$\int u' \cdot v dx = u \cdot v - \int u \cdot v' dx.$$

6. *Neurčitý integrál.* Vypočítejte metodou per partes:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \int (3x-4)e^x dx & \text{b) } \int (x^2+1)e^{-x} dx & \text{c) } \int x \cos x dx \\
 \text{d) } \int \ln x dx & \text{e) } \int \ln^2 x dx & \text{f) } \int \ln^n x dx \\
 \text{g) } \int x^n e^x dx & \text{h) } \int \ln(x^2-1) dx & \text{i) } \int x \ln x dx \\
 \text{j) } \int \cos^2 x dx & \text{k) } \int \ln(x+\sqrt{1+x^2}) dx & \text{l) } \int x^2 \sin x dx \\
 \text{m) } \int x \sin^2 x dx & \text{n) } \int x^2 \ln(x+1) dx & \text{o) } \int x \cdot 2^{-x} dx \\
 \text{p) } \int e^{\sqrt{x}} dx & &
 \end{array}$$

7. *Neurčitý integrál.* Vypočítejte metodou per partes:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \int (3x+1) \cos x dx & \text{b) } \int (2x^2-3) \sin x dx & \text{c) } \int \sin^2 x dx \\
 \text{d) } \int e^{2x} \cos 3x dx & \text{e) } \int \cos^n x dx & \text{f) } \int \sin^n x dx \\
 \text{g) } \int e^{ax} \cos bx dx & \text{h) } \int e^{ax} \sin bx dx &
 \end{array}$$

8. *Neurčitý integrál.* Určete integrály racionálních funkcí:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \int \frac{5}{(x+3)^4} dx & \text{b) } \int \frac{4}{(x+3)(x-1)} dx \\
 \text{c) } \int \frac{3}{x^2-5x+6} dx & \text{d) } \int \frac{x-2}{x^2-7x+12} dx \\
 \text{e) } \int \frac{x-1}{x^2+x-6} dx & \text{f) } \int \frac{2x}{9x^2-1} dx \\
 \text{g) } \int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6} dx & \text{h) } \int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx \\
 \text{i) } \int \frac{x^2-4}{x^3-x^2} dx & \text{j) } \int \frac{x^3-4}{(x-1)^2(x+2)} dx \\
 \text{k) } \int \frac{x^3}{(3x-1)(2x-2)^2} dx & \text{l) } \int \frac{3x-4}{(x-2)(x-1)^3} dx \\
 \text{m) } \int \frac{8x}{x^4+6x^2+5} dx & \text{n) } \int \frac{x^3+5x^2-13x+9}{x^4-10x^2+9} dx \\
 \text{o) } \int \frac{4}{x^4+4x^2} dx & \text{p) } \int \frac{x+1}{x^2+x+1} dx
 \end{array}$$

9. *Neurčitý integrál.* Určete integrály racionálních funkcí:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \int \frac{4}{(2-5x)^3} dx & \text{b) } \int \frac{1}{2x^2-x} dx & \text{c) } \int \frac{1}{x^3-x} dx \\
 \text{d) } \int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx & \text{e) } \int \frac{1}{x} \left( \frac{x+2}{x-1} \right)^2 dx & \text{f) } \int \frac{x^3+1}{x^3-x^2} dx \\
 \text{g) } \int \frac{x^2+3x+2}{x^2+x+2} dx & \text{h) } \int \frac{x^3+x-1}{x(x^2+1)} dx & \text{i) } \int \frac{1}{a^4-x^4} dx, a > 0 \\
 \text{j) } \int \frac{4x^2+5}{(x-2)^2(x+1)^2} dx & \text{k) } \int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4} dx & \text{l) } \int \frac{4}{(x+1)(x^2+1)} dx
 \end{array}$$

10. *Neurčitý integrál.* Vypočítejte vhodnou substitucí:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx & \text{b) } \int \frac{\sqrt{1-x}}{x} dx & \text{c) } \int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx \\
 \text{d) } \int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx & \text{e) } \int \frac{1}{1+e^x} dx & \text{f) } \int \frac{4}{3-2e^{-x}} dx \\
 \text{g) } \int \frac{2e^x}{e^x-9} dx & \text{h) } \int \frac{1}{(1+e^x)^2} dx & \text{i) } \int \frac{6}{e^{2x}+e^x-2} dx \\
 \text{j) } \int \frac{5}{x\sqrt{x^2+5}} dx & \text{k) } \int \frac{6x^3}{\sqrt{x^2+2}} dx & \text{l) } \int \frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} dx
 \end{array}$$

**Řešení úloh:**

$$\begin{array}{l}
 \text{1. a) } x^3+x^2-4x+c; \text{ b) } -\frac{1}{3x}-\frac{1}{5}\ln|x|+c; \text{ c) } \frac{2x^2\sqrt{x}}{5}-2\sqrt{x}+c; \text{ d) } \frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}x^4+\frac{2}{3}x^3+c; \\
 \text{e) } \frac{1}{5}x^5-\frac{3}{2}x^4+\frac{11}{3}x^3-3x^2+x+c; \text{ f) } \frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+3x^2+c; \text{ g) } \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+c; \text{ h) }
 \end{array}$$

$x - 2 \ln |x| - 1/x + c$ ; i)  $\frac{(2^x 3^{-x} - 3^x 2^{-x})}{\ln 2 - \ln 3} - 2x + c$ ; j)  $\frac{e^x a^x}{1 + \ln a} + c$ ; k)  $-\cos 2x - \frac{3}{5} \sin 5x + c$ ;  
 l)  $tg x - cotg x - 2x + c$  • **2.** a)  $-x^4 + 4x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 2x + c$ ; b)  $2x^{3/2} - 3x^{7/3} + 4x^{5/2} + c$ ;  
 c)  $\frac{4}{13}x^{13/4} + \frac{8}{9}x^{9/4} + c$ ; d)  $\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{9}{5}x^{5/3} + \frac{18}{5}x^{5/6} - \ln |x| + c$ ; e)  $\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2} \ln |x| - \frac{x}{2} + \frac{3}{2x} + c$ ;  
 f)  $-\frac{4}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{3x^3} + c$ ; g)  $3/2x^{2/3} + 6/7x^{7/6} + c$ ; h)  $1/3x^3 - 6/7x^{7/3} + 3/5x^{5/3} + c$ ; i)  
 $3/8 \ln(4x^2 + 9) + c$ ; j)  $5/8 \ln(4x^2 - 9) + c$ ; k)  $-1/2e^{1-2x} + 2e^{3-x} + 5e^{x/5} + \frac{2^{-x}}{\ln 2} + c$ ; l)  
 $\ln |2 + \ln |x|| + c$  • **3.** a)  $\frac{1}{6}(x-14)^6 + c$ ; b)  $\frac{2}{3}\sqrt{(x-4)^3} + c$ ; c)  $\frac{4}{5}(x+5)^{5/2} - \frac{20}{3}(x+5)^{3/2} + c$ ;  
 d)  $\frac{1}{3}(2x^2 + 6)^{3/2} + c$ ; e)  $2 \ln |x-3| - 3 \ln |4-x| + c$ ; f)  $\frac{4}{6-x} + c$ ; g)  $8\sqrt{x+2} + c$ ; h)  
 $\frac{1}{54}\sqrt{(6x+7)^3} - \frac{7}{18}\sqrt{6x+7} + c$ ; i)  $\frac{5}{6} \ln(3x^2+5) + c$ ; j)  $\ln |x^2+5x-6| + c$ ; k)  $4\sqrt{x^2+1} + c$ ; l)  
 $2e^{x^2} + c$  • **4.** a)  $\frac{1}{240}(4x+3)^{15} - \frac{3}{224}(4x+3)^{14} + c$ ; b)  $-\frac{1}{10}(3-4x)^{5/2} + c$ ; c)  $\frac{2}{5}(3-x)^{5/2} + c$ ; d)  
 $-\frac{1}{3}(4x-x^2)^{3/2} + c$ ; e)  $-\frac{1}{5} \ln |3-5x| + c$ ; f)  $-\frac{1}{16(4x-1)^4} + c$ ; g)  $\frac{6}{5}(x+3)^{5/3} - 9(x+3)^{2/3} + c$ ;  
 h)  $-\frac{1}{3} \ln |1-3x^3| + c$ ; i)  $\frac{2}{5} \ln |x^5+1| + c$ ; j)  $-\frac{1}{2 \ln^2 |x|} + c$ ; k)  $2xe^{-x^2} + 2e^{x^3} + c$ ; l)  
 $2e^{\sqrt{x}} + c$  • **5.** a)  $-\sqrt{1-x^2} + c$ ; b)  $\ln |\cos x| + c$ ; c)  $-\ln |\sin x| + c$ ; d)  $-\frac{1}{2}e^{-2x+3} + c$ ; e)  
 $\ln(4+e^x) + c$ ; f)  $x - \frac{\ln(1+3^x)}{\ln 3} + c$ ; g)  $4 \sin(x/4) + c$ ; h)  $-1/2 \sin(1-2x) + c$ ; i)  $\frac{1}{2}tg^2 x + c$ ; j)  
 $-\frac{1}{b} \ln |a+b \cos x| + c$ ; k)  $-\frac{1}{\sin x} + c$ ; l)  $\ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + c$ ; m)  $\ln \left| \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right| + c$ ; n)  $\frac{1}{4} \sin^4 x + c$ ;  
 o)  $2 \ln |\cos x/2| + c$  • **6.** a)  $(3x-7)e^x + c$ ; b)  $(-x^2-2x-3)e^{-x} + c$ ; c)  $x \sin x + \cos x + c$ ;  
 d)  $x \ln x - x + c$ ; e)  $x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + c$  (doplňte  $u' = 1$ ); f)  $x \ln^n x - n \int \ln^{n-1} x dx$   
 (rekurentní vztah); g)  $x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx$  (rekurentní vztah); h)  $x \ln |x^2-1| - 2x -$   
 $\ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + c$ ; i)  $\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c$ ; j)  $\frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + c$ ; k)  $x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + c$   
 (doplňte  $u' = 1$ ); l)  $-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c$ ; m)  $\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} \sin 2x - \frac{\cos 2x}{8} + c$ ; n)  
 $\frac{1}{3}(x^3+1) \ln(x+1) - \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{6} - \frac{x}{3} + c$ ; o)  $-x \cdot 2^{-x} \cdot \ln 2x - \frac{1}{\ln^2 2} \cdot 2^{-x} + c$ ; p)  $2e^{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x}-1) + c$ ;  
 • **7.** a)  $(3x+1) \sin x + 3 \cos x + c$ ; b)  $(7-2x^2) \cos x + 4x \sin x + c$ ; c)  $\frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + c$ ;  
 d)  $\frac{1}{13}e^{2x}(3 \sin 3x + 2 \cos 3x)$ ; e)  $\frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$  (rekurentní vztah);

- f)  $-\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$  (rekurentní vztah); g)  $\frac{1}{a^2 + b^2} e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx) + c$ ; h)  $\frac{1}{a^2 + b^2} e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx) + c$  • 8. a)  $-\frac{5}{3(x+3)^3} + c$ ; b)  $\ln \left| \frac{x-1}{x+3} \right| + c$ ;  
c)  $3 \ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right| + c$ ; d)  $\ln \frac{(x-4)^2}{|x-3|} + c$ ; e)  $\frac{4}{5} \ln |x+3| + \frac{1}{5} \ln |x-2| + c$ ; f)  $\frac{1}{9} \ln |9x^2 - 1| + c$ ; g)  $x - 3 \ln |x-2| + 3 \ln |x-3| + c$ ; h)  $2 \ln |x+2| - 1/2 \ln |(x+1)(x+3)^3| + c$ ; i)  $-\frac{4}{x} + 4 \ln |x| - 3 \ln |x-1| + c$ ; j)  $x + \frac{1}{x-1} + \frac{4}{3} \ln |x-1| - \frac{4}{3} \ln |x+2| + c$ ; k)  $\frac{x}{12} + \frac{1}{144} \ln |3x-1| - \frac{1}{8(x-1)} + \frac{3}{16} \ln |x-1| + c$ ; l)  $\frac{4x-5}{2(x-1)^2} + 2 \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| + c$ ; m)  $\ln \frac{x^2+1}{x^2+5}$ ; n)  $\ln \left| \frac{(x-1)\sqrt{(x+1)(x-3)}}{x+3} \right| + c$ ; o)  $-\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + c$ ; p)  $\ln \sqrt{x^2+x+1} + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$  • 9. a)  $\frac{2}{5(2-5x)^2} + c$ ; b)  $\ln \left| \frac{2x-1}{x} \right| + c$ ; c)  $\frac{1}{2} \ln |x-1| + \frac{1}{2} \ln |x+1| - \ln |x| + c$ ; d)  $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln \left| \frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3} \right| + c$ ; e)  $4 \ln |x| - 3 \ln |x-1| - \frac{9}{x-1} + c$ ; f)  $x + \frac{1}{x} + \ln \frac{(x-1)^2}{|x|} + c$ ; g)  $x + \ln |x^2+x+2| - \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{7}} + c$ ; h)  $x + \ln \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|} + c$ ;  
i)  $\frac{1}{4a^3} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$ ; j)  $\frac{2}{9} \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| - \frac{7}{3} \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1} + c$ ; k)  $x + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{8}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + c$ ; l)  $\ln \frac{(x+1)^2}{x^2+1} - 2 \operatorname{arctg} x + c$  • 10. a)  $4\sqrt{x} - x - 4 \ln(\sqrt{x}+1) + c$ ; b)  $2\sqrt{1-x} + \ln \left| \frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}} \right| + c$ ; c)  $\ln \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| + c$ ; d)  $2\sqrt{x} - 2 \ln(1+\sqrt{x}) + c$ ; e)  $\ln \frac{e^x}{1+e^x} + c$ ; f)  $\frac{4}{3} \ln |3e^x - 2| + c$ ; g)  $2 \ln |e^x - 9| + c$ ; h)  $x + \frac{1}{1+e^x} - \ln(1+e^x) + c$ ; i)  $-3x + 2 \ln |e^x - 1| + \ln(e^x + 2) + c$ ; j)  $-\sqrt{5} \ln \left| \frac{\sqrt{5} + \sqrt{x^2+5}}{x} \right| + c$ ; k)  $(3x-8)\sqrt{x^2+2} + c$ ;  
l)  $4\sqrt{x} - 8\sqrt[4]{x} + 8 \ln(1 + \sqrt[4]{x}) + c$  •

## Klíčové pojmy

Primitivní funkce k dané funkci na množině, definice a vlastnosti

Neurčitý integrál elementárních funkcí, odvození

Integrovaní substitucí, per partes, pomocí rekurentního vztahu; princip, odvození

Neurčitý integrál racionální funkce: výpočet metodou rozkladu racionální funkce na součet parciálních zlomků; typy parciálních zlomků a jejich neurčité integrály

Neurčitý integrál některých iracionálních funkcí

Neurčitý integrál některých goniometrických funkcí

Říjen 2002