1 Výroková logika

Obsah

Obsah

Definice 1.1
Výrokem rozumíme každé sdělení, o kterém má smysl uvažovat, zda je, či není pravdivé, a přitom může nastat pouze jedna z těchto možností.

Definice 1.2
Výrok, který neobsahuje žádnou vlastní část, která by sama o sobě byla výrokem, se nazývá *atomární*. Ostatní výroky nazýváme *složené*.

Pravdivostní hodnoty

- pravdivý výrok $\longmapsto$ 1
- nepravdivý výrok $\longmapsto$ 0
- *ph* složeného výroku závisí na *ph* jeho atomárních výroků a logických spojkách, které obsahuje

Logické spojky

- slouží k tvorbě složených výroků z atomárních
- podle počtu výroků, ke kterým se spojka váže je dělíme na: *unární* (např. $\neg$), *binární* (např. $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$), ... , *n-ární*

Výrokový počet

- teorie, která se zabývá závislostí *ph* složených výroků na *ph* výroků skládaných
- konstanty: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, (,), \ldots$
- výrokové proměnné: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$

Formule výrokové logiky

Definice 1.3
Formulí výrokové logiky chápeme:

a) každou výrokovou proměnnou;

b) slova $\neg\mathcal{A}, \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}, \mathcal{A} \vee \mathcal{B}, \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}, \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$, pokud slova $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ jsou FVL;

c) každé slovo, které získáme jako v a) nebo b) konečným počtem kroků.

Příklad 1.1

- $\neg(\mathcal{A} \Rightarrow \neg\mathcal{B}) \Leftrightarrow \mathcal{C}$ je FVL
- $\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B}\neg \Rightarrow \mathcal{C})$ není FVL

Ohodnocování FVL

- používá se tzv. *tabulková metoda*
- FVL s n výrokovými proměnnými $\longmapsto$ tabulka s 2^n řádky

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\neg\mathcal{A}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow B$	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

log. spojka	*ph* vzniklého výroku
Negace	$ph(\neg A) = 1 - ph(A)$
Konjunkce	$ph(A \wedge B) = ph(A)ph(B)$
Disjunkce	$ph(A \vee B) = ph(A) + ph(B) - ph(A)ph(B)$
Implikace	$ph(A \Rightarrow B) = 1$, pokud $ph(A) \leq ph(B)$
Ekvivalence	$ph(A \Leftrightarrow B) = 1$, pokud $ph(A) = ph(B)$

Tautologie

Definice 1.4
FVL, která při libovolném ohodnocení svých výrokových proměnných nabývá *ph* 1, se nazývá *tautologie*.

Příklady tautologií

- $\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}$ (zákon vyloučeného třetího)
- $\neg(\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A})$ (zákon sporu)
- $\neg(\neg\mathcal{A}) \Leftrightarrow \mathcal{A}$ (zákon dvojí negace)

- $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\mathcal{B} \wedge \mathcal{A})$ (zákon komutativity konjunkce)
- $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\mathcal{B} \vee \mathcal{A})$ (zákon komutativity disjunkce)
- $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$ (zákon kontrapozice)
- $\mathcal{A} \Leftrightarrow [\mathcal{A} \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})]$ (zákon absorpce)
- $[(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})] \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C})$ (zákon tranzitivity implikace)

2 Predikátová logika

Obsah

Obsah

Výrokové formy

Definice 1.5
Výrokovou formou rozumíme každé sdělení obsahující proměnné, které se stane výrokem po dosazení konstant z oborů proměnnosti za všechny proměnné.

Příklad 1.2

- $U(x,y): \ (x^2 < y+1;\ x,y \in \mathbf{N})$
- $V(x,y,z): \ (x \text{ je násobkem } y+z;\ x,z \in \mathbf{Z}\ y \in \mathbf{N})$
- $W(x,y,z): \ ((x^2 < y+1) \vee (x \text{ je násobkem } y+z);\ x \in \mathbf{Z},\ y,z \in \mathbf{N})$

- Další možnost, jak z výrokové formy vytvořit výrok, je vázat proměnné VF tzv. *kvantifikátory.*

Obecná kvantifikace

Definice 1.6
Obecný výrok příslušný k dané VF $V(x)$ s jednou proměnnou je výrok $\forall x V(x)$, který je pravdivý právě když po dosazení libovolné konstanty z oboru proměnnosti do VF dostaneme pravdivý výrok.

- $\forall$ ... *obecný kvantifikátor*

Příklad 1.3

$$ph\ (\forall x(x^2 > 0;\ x \in \mathbf{R})) = 0$$

Existenční kvantifikace

Definice 1.7
Existenční výrok příslušný k dané VF $W(x)$ s jednou proměnnou je výrok $\exists x W(x)$, který je pravdivý právě když existuje alespoň jedna konstanta $\overline{x}$ z oboru proměnnosti taková, že $W(\overline{x})$ je pravdivý výrok.

- $\exists$ ... *existenční kvantifikátor*

Příklad 1.4

$$ph\ (\exists x((x \mid 6) \wedge (x^3 + 8 = 0);\ x \in \mathbf{Z})) = 1$$

Kvantifikace VF s více proměnnými

- $V(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \mapsto \quad$ VF s proměnnými $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- současným vázáním každé z proměnných jedním z kvantifikátorů $\forall, \exists$ získáme z $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ výrok
- celkem tedy takto můžeme z $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ získat $2^n \cdot n!$ výroků
- pořadí při kvantifikaci jednotlivých proměnných VF má vliv na pravdivostní hodnotu získaného výroku

Příklad 1.5

- $\forall x \forall y (V(x, y)) \Leftrightarrow \forall y \forall x (V(x, y))$
- $\exists x \exists y (V(x, y)) \Leftrightarrow \exists y \exists x (V(x, y))$
- jsou tautologie predikátového počtu (klasické dvouhodnotové logiky)

Kvantifikace VF s více proměnnými

- $V(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \mapsto \quad$ VF s proměnnými $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- současným vázáním každé z proměnných jedním z kvantifikátorů $\forall, \exists$ získáme z $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ výrok
- celkem tedy takto můžeme z $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ získat $2^n \cdot n!$ výroků
- pořadí při kvantifikaci jednotlivých proměnných VF má obecně vliv na pravdivostní hodnotu získaného výroku

Příklad 1.6

- $V(x, y):\ (\log(x - 1) = y;\ x \in (1, +\infty),\ y \in \mathbf{R})$
- $ph\ (\forall x \exists y\ V(x, y)) = 1$
- $ph\ (\exists y \forall x\ V(x, y)) = 0$

3 Důkazy matematických vět

Obsah

Obsah

Většina matematických tvrzení je ve tvaru implikace (jestliže ... , pak ...) nebo ekvivalence (... právě když ...)

Příklad 1.7

- Je-li n sudé číslo, pak je dělitelné dvěma.
- Trojúhelník ABC, v němž $|AB| = c, |BC| = a, |CA| = b$, je pravoúhlý s přeponou AB právě když $a^2 + b^2 = c^2$.

- $(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow [(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})]$ je tautologie.
- Jinými slovy: Tvrzení ve tvaru ekvivalence je pravdivé právě když jsou současně pravdivé obě jeho dílčí implikace.
- $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ je tzv. *věta obrácená* k větě $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, kde $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ jsou libovolné formule výrok. nebo pred. počtu
- $\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$ je tzv. *věta obměněná* k větě $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, kde $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ jsou libovolné formule výrok. nebo pred. počtu

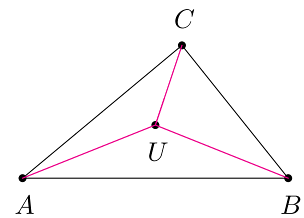
Přímý důkaz

- Ověřujeme pravdivost tvrzení $A \Rightarrow B$
- Využíváme přitom zákona tranzitivity implikace ve zobecněném tvaru
- $[(A_1 \Rightarrow A_2) \wedge (A_2 \Rightarrow A_3) \wedge \cdots \wedge (A_{n-1} \Rightarrow A_n)] \Rightarrow (A_1 \Rightarrow A_n)$, $n \geq 2$

Přímý důkaz

Příklad 1.8
Tvrzení: Je-li U vnitřním bodem trojúhelníka ABC, pak platí $|AU| + |BU| + |CU| > s$, kde s je polovina obvodu ΔABC.

Důkaz:
A_1: U je vnitřním bodem trojúhelníka ABC.
$\Rightarrow$
A_2: U neleží na žádné ze stran AB, BC, CA.
$\Rightarrow$



Obr. 1

A_3: Pro body A, B, C, U platí nerovnosti
$|AU| + |UB| > |AB|$,
$|BU| + |UC| > |BC|$,
$|CU| + |UA| > |CA|$.
$\Rightarrow$
A_4: Pro body A, B, C, U platí $|AU| + |BU| + |CU| > s$.

Důkaz matematickou indukcí

- Speciální typ přímého důkazu

Princip matematické indukce
Nechť

- $V(x)$ je VF s oborem proměnnosti $\mathbf{N}$,
- $V(1)$ je pravdivý výrok,
- pravdivost $V(k)$ implikuje pravdivost $V(k+1)$ pro každé $k \geq 1$.

Pak $V(n)$ je pravdivý výrok pro každé $n \in \mathbf{N}$.

Důkaz matematickou indukcí

Příklad 1.9
Tvrzení: Platí, že $6|n^3 - n$ pro každé $n \in \mathbf{N}$.
Důkaz:

- Označme $V(x) : (6|x^3 - x;\ x \in \mathbf{N})$.
- $V(1)$ je pravdivý výrok.
- Nechť $V(k)$ je pravda pro nějaké přirozené $k \geq 1$.
- Pak ale
  $(k+1)^3 - (k+1) = k^3 - k + 3k(k+1)$
  a protože $6 \mid 3k(k+1)$ a podle předchozího předpokladu i $6|k^3 - k$, je i $V(k+1)$ pravdivý výrok.

Důkaz sporem

- Ověřujeme pravdivost tvrzení $A \Rightarrow B$.
- $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow \neg(\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B})$ je tautologie.

- Idea: Dokážeme-li, že $ph((A \wedge \neg B) \Rightarrow C) = 1$ v situaci, kdy $ph(C) = 0$, musí platit, že $ph(A \wedge \neg B) = 0$.

  $\Rightarrow$

  Odtud $ph(\neg(A \wedge \neg B)) = 1$.

  $\Rightarrow$

  Tzn. $ph(A \Rightarrow B)) = 1$.

- Jinými slovy: Dojdeme-li z předpokladu $A \wedge \neg B$ k nějakému nepravdivému důsledku, pak tento předpoklad nemůže být pravdivý, tedy jeho negace, která je logicky ekvivalentní s $A \Rightarrow B$, musí být pravdivý výrok.

Důkaz sporem

Příklad 1.10
Tvrzení: Existuje nekonečně mnoho prvočísel. (Jestliže prvočíslo je přirozené číslo mající pouze dva dělitele, sebe sama a jedničku, pak takových čísel je nekonečně mnoho.)

Důkaz (Aristoteles):

- A: Prvočíslo je přirozené číslo mající pouze dva dělitele, sebe sama a jedničku.
- B: Prvočísel je nekonečně mnoho.
- Předpokládejme, že by existovalo pouze konečně mnoho prvočísel.
- Uvažujme jejich součin a přičteme k němu jedničku. Toto číslo nebude dělitelné žádným z existujících prvočísel (zbytek 1), tedy bude mít pouze dva dělitele, sama sebe a jedničku.
- Nutně se potom ale musí jednat o prvočíslo.
- Což je spor s naším předpokladem.

4 Doporučená literatura

Obsah

Obsah

Reference

[1] Bican, L. Lineární algebra *SNTL Praha*, 1972.

[2] Bican, L. Lineární algebra v úlohách *SPN Praha*, 1979.

[3] Birkhoff, G., Mac Lane, S. Algebra *The Macmillan Company New York*, 1968.

[4] Hort, D., Rachůnek, J. Algebra I *VUP Olomouc*, 2003.

Reference

[1] Halaš, R., Chajda, I. Cvičení z algebry *VUP Olomouc*, 1999.

[2] Katriňák, T. Algebra a teoretická aritmetika (1) *Alfa Bratislava*, 1985.

[3] Krutský, F. Algebra I *UP Olomouc*, 1995.