1 Množiny

Obsah

Obsah

1 Množiny **1**

2 Binární relace, základní pojmy **2**

3 Ekvivalence na množině **4**

4 Uspořádání na množině **6**

5 Zobrazení množin **8**

Základní množinové pojmy

$\emptyset$ prázdná množina

$x \in A$ x je prvkem množiny A

$A \subseteq B$ A je podmnožina množiny B

$$(A \subseteq B) \iff ((x \in A) \Rightarrow (x \in B))$$

$A = B$ množina A je rovna množině B

$$(A = B) \iff ((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A))$$

Potenční množina

Definice
Dána množina $A \neq \emptyset$. Pak množina

$$\P(A) = \{B\ ;\ B \subseteq A\}$$

se nazývá *potenční množina množiny* A.

- Pokud $|A| = n$, pak $|\P(A)| = 2^n$.
- $P(A)$ se také někdy značí 2^A.

Základní množinové operace

$A \cup B$ sjednocení množin A a B

$$(x \in A \cup B) \Longleftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B))$$

$A \cap B$ průnik množin A a B

$$(x \in A \cup B) \Longleftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B))$$

$A \setminus B$ rozdíl množin A a B

$$(x \in A \setminus B) \Longleftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \notin B))$$

Základní množinové identity

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
- $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

2 Binární relace, základní pojmy

Obsah

Obsah

Binární relace

Definice 2.1

- *Kartézským součinem* neprázdných množin A, B rozumíme množinu

$$A \times B = \{(x, y) : \ x \in A, y \in B\}.$$

- Každou podmnožinu R kartézského součinu $A \times B$ nazveme *binární relace mezi A a B.*

- Pokud $A = B$, pak $R \subseteq A \times A$ se nazývá *binární relace na množině* A.
- To, že dva prvky a, b jsou spolu v relaci $R \subseteq A \times B$, zapisujeme

$$(a, b) \in R \text{ nebo } \langle a, b \rangle \in R \text{ nebo } aRb\ .$$

- V matematice běžně pracujeme s některými relačními symboly

$$\perp\ ,\ \leq\ ,\ =\ ,\ |\ ,\ \ldots$$

Binární relace

Příklad 2.1

- M ... množina všech mužů na Zemi
- Z ... množina všech žen na Zemi
- R ... množina všech manželských párů na Zemi, tj.
  $R = \{(x, y) \in M \times Z :\ x, y \text{ jsou manželé } \}$
- R je binární relace mezi množinami M a Z.

Binární relace

- Mezi množinami A a B, kde $|A| = a$, $|B| = b$, existuje právě $2^{a \cdot b}$ binárních relací.
- Na A existuje právě 2^{a^2} binárních relací.
- Nejvíce prvků má přitom tzv. *plná relace*
  $$\omega_{A,B} = A \times B, \text{ resp. } \omega_A = A^2.$$
- Nejméně prvků má naopak tzv. *prázdná relace* $\emptyset$.
- Speciální roli mezi relacemi na množině A má tzv. *identita*
  $$id_A = \{(x, x) :\ x \in A\}.$$

Vlastnosti binárních relací na množině

Definice 2.2
Relace R na množině A se nazývá:

- *reflexivní*, jestliže $\forall x \in A$ platí, že $(x, x) \in R$;
- *tranzitivní*, jestliže z $(x, y) \in R, (y, z) \in R$ plyne, že i $(x, z) \in R$;
- *symetrická*, jestliže z $(x, y) \in R$ plyne, že i $(y, x) \in R$;
- *antisymetrická*, jestliže z $(x, y) \in R, (y, x) \in R$ plyne, že $x = y$.

Vlastnosti binárních relací na množině

Příklad 2.2 *Reflexivní relace nemusí být identitou na A!*

- $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$

Příklad 2.3 *Nesymetrická relace nemusí být obecně antisymetrická!*

- $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- $S = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 2)\}$

Operace s relacemi

Definice 2.3
Dány relace R mezi A, B a S mezi B, C.

- *Inverzní relací* k relaci R rozumíme relaci R^{-1} mezi B, A takovou, že $$R^{-1} = \{(x, y) \in B \times A : \ (y, x) \in R\}.$$
- *Složením relací* R a S nazýváme relaci $R \circ S$ mezi A a C takovou, že $$R \circ S = \{(x, z) \in A \times C : \ (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S \text{ pro nějaké } y \in B\}.$$

Věta 2.1
Dány relace $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ a $T \subseteq C \times D$. Pak platí:

1. $(R^{-1})^{-1} = R$;
2. $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$;
3. $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$.

Operace s relacemi

Příklad 2.4 *Skládání relací není komutativní!*

- $A = \{a, b, c, d\}$
- $R = \{(a, c), (b, c), (d, b)\}$
- $S = \{(b, a), (c, d)\}$
- $R \circ S = \{(a, d), (b, d), (d, a)\} \neq \{(b, c), (c, b)\} = S \circ R$

Charakterizace vlastností relací na množině

Věta 2.2
Nechť R je relace na množině A. Pak platí:

1. R je reflexivní právě když $id_A \subseteq R$;
2. R je symetrická právě když $R = R^{-1}$;
3. R je tranzitivní právě když $R \circ R \subseteq R$.

3 Ekvivalence na množině

Obsah

Obsah

Relace ekvivalence na množině

Definice 2.4
Relaci $R \subseteq A^2$ nazýváme *ekvivalence na* A, pokud R je současně reflexivní, symetrická a tranzitivní.

- Pro danou množinu A jsou např. relace ω_A nebo id_A ekvivalence na A.
- Relace $\|$ ("být rovnoběžný") je ekvivalence na množině přímek v rovině.
- Relace $=$ ("být roven") je ekvivalence na množině všech komplexních čísel.

Věta 2.3
Nechť R je ekvivalence na A. Pak R^{-1} je opět ekvivalence na A.

Rozklad množiny

Nechť I je libovolná množina taková, že A_i je množina pro každé $i \in I$. Pak množinu $\{A_i : i \in I\}$ nazveme *indexovaný systém množin.*

Příklad 2.5
$I = \{1, 2, \ldots, n\} \Rightarrow \{A_i : i \in I\} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$

Definice 2.5
Nechť $A \neq \emptyset$. Indexovaný systém neprázdných množin $\pi = \{A_i : i \in I\}$ nazveme rozklad množiny A, jestliže:

1. Množiny z π jsou po dvou disjunktní, tj.
$$A_i \cap A_j = \emptyset \qquad \forall i, j \in I \ (i \neq j);$$
2. Systém π tvoří pokrytí množiny A, tj.
$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Rozklad množiny indukovaný ekvivalencí

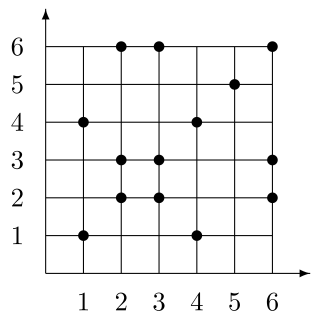
Definice 2.6
Nechť E je ekvivalence na množině $A \neq \emptyset$. Pak pro každé $a \in A$ nazveme množinu $[a]_E = \{x \in A : (a,x) \in E\}$ *třídou ekvivalence E obsahující prvek a.*

Věta 2.4
Nechť E je ekvivalence na A a nechť $a, b \in A$. Pak buď $[a]_E = [b]_E$, nebo $[a]_E \cap [b]_E = \emptyset$.

Věta 2.5
Nechť E je ekvivalence na A. Ze systému $\{[x]_E : x \in A\}$ vybereme systém π_E po dvou různých množin. Pak π_E je rozklad množiny A, který nazýváme *rozklad indukovaný ekvivalencí E*. Třídy rozkladu π_E jsou přitom třídy ekvivalence E.

Rozklad množiny indukovaný ekvivalencí

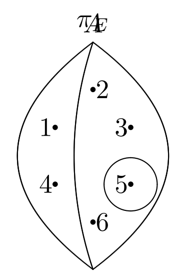
Příklad 2.6
Dána množina $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ a na ní relace E určená kartézským grafem



$\Rightarrow$

$$[1]_E = \{1,4\}$$
$$[2]_E = \{2,3,6\}$$
$$[3]_E = \{2,3,6\}$$
$$[4]_E = \{1,4\}$$
$$[5]_E = \{5\}$$
$$[6]_E = \{2,3,6\}$$

$\Rightarrow$



Obr. 1

Ekvivalence na množině indukovaná jejím rozkladem

Věta 2.6
Nechť $\pi = \{A_i : i \in I\}$ je rozklad množiny $A \neq \emptyset$. Definujme relaci E_π předpisem:
$$(a,b) \in E_\pi \iff (\exists i \in I : a, b \in A_i).$$
Pak E_π je ekvivalence na A nazvaná *indukovaná rozkladem* π. Její třídy jsou přitom třídami rozkladu π.

Ekvivalence na množině $\Leftrightarrow$ rozklad množiny

Věta 2.7
Dána $A \neq \emptyset$, ekvivalence E na A a rozklad π množiny A.

- Je-li π_E rozklad indukovaný ekvivalencí E a E_{π_E} ekvivalence indukovaná rozkladem π_E, pak
$$E_{\pi_E} = E.$$

- Je-li E_π ekvivalence indukovaná rozkladem π a π_{E_π} rozklad indukovaný ekvivalencí E_π, pak
$$\pi_{E_\pi} = \pi.$$

4 Uspořádání na množině

Obsah

Obsah

Relace uspořádání

Definice 2.7
Relace $R \subseteq A^2$ se nazývá *uspořádání na množině* A, jestliže je reflexivní, tranzitivní a antisymetrická.

Příklad 2.7

- Relace " $\leq$ " je uspořádáním na $\mathbf{N}$.
- Dána $A \neq \emptyset$. Pak " $\subseteq$ " je uspořádáním na 2^A.
- Relace " $|$ " je uspořádáním na $\mathbf{N}$.
- Stejná relace není uspořádáním na $\mathbf{Z}$.

Dvojici $(A;\ R)$, kde $R \subseteq A^2$ je uspořádání na A, nazýváme *uspořádaná množina*.

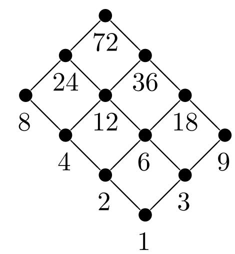
Hasseho diagramy

- Pro názornost je používáme k zakreslování uspořádaných množin.
- Dána uspořádaná množina $(A;\ R)$.
- Každý prvek množiny A zakreslíme např. jako plné kolečko s příslušným označením.
- Pokud $(a, b) \in R$, pak prvky a, b spojíme úsečkou, přitom prvek a je vertikálně níže než prvek b.

Hasseho diagramy

Příklad 2.8
Uvažujme uspořádanou množinu $(D_{72};\ |\ )$, kde D_{72} je množina všech přirozených dělitelů čísla 72. Tedy $D_{72} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$ a Hasseho diagram $(D_{72};\ |\ )$ vypadá následovně:

$$\begin{array}{rlrl}
2: & 1|2 & 12: & 4|12 \wedge 6|12 \\
3: & 1|3 & 18: & 6|18 \wedge 9|18 \\
4: & 2|4 & 24: & 8|24 \wedge 12|24 \\
6: & 2|6 \wedge 3|6 & 36: & 12|36 \wedge 18|36 \\
8: & 4|8 & 72: & 24|72 \wedge 36|72 \\
9: & 3|9 & &
\end{array}$$



Obr. 1

5 Zobrazení množin

Obsah

Obsah

Relace zobrazení

Definice 2.7
Nechť A, B jsou množiny a f je binární relace mezi A, B. Relace f se nazývá *zobrazení* A *do* B, jestliže:

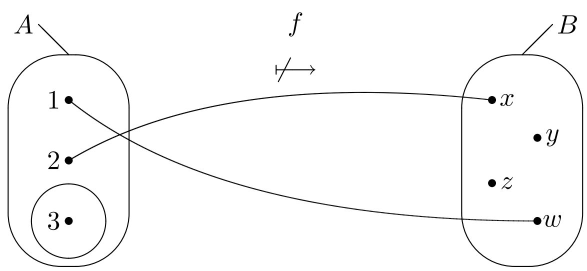
1. Pro každé $a \in A$ existuje $b \in B$ tak, že $(a, b) \in f$;
2. Jestliže $(a, b_1) \in f \wedge (a, b_2) \in f$, pak $b_1 = b_2$.

Nechť A, B jsou množiny a f je zobrazení A do B.

- Zapisujeme $f : A \longrightarrow B$.
- Místo $(a, b) \in f$ běžně píšeme $f(a) = b$.
- Jestliže $f(a) = b$, pak prvek $a \in A$ se nazývá *vzor prvku* $b \in B$ a prvek b naopak *obraz prvku* a.
- Množinu všech prvků z B, které mají svůj vzor v A, nazýváme *úplný obraz množiny* A a značíme ji $f(A)$.

Relace zobrazení

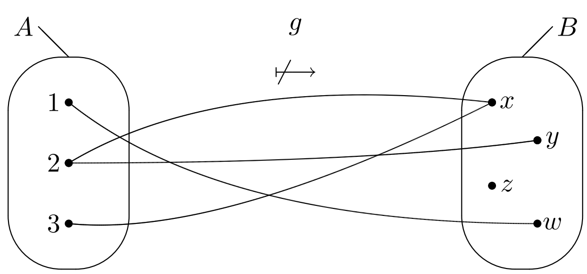
Příklad 2.9
Dány množiny $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y, z, w\}$ a relace $f = \{(1, w), (2, x)\} \subseteq A \times B$.



Obr. 2

Relace zobrazení

Příklad 2.10
Dány množiny $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y, z, w\}$ a relace $g = \{(1, w), (2, x), (2, y), (3, x)\} \subseteq A \times B$.



Obr. 3

Skládání zobrazení

Věta 2.8
Nechť A, B, C jsou množiny a $f : A \to B,\ g : B \to C$ zobrazení. Pak relace $f \circ g$ je opět zobrazení, a sice A do C.

Definice 2.8
Nechť A, B, C jsou množiny a $f : A \to B,\ g : B \to C$ zobrazení.

- Zobrazení $f \circ g$ se nazývá *složení zobrazení f a g*.
- $\forall x \in A : \quad (f \circ g)(x) = g(f(x))$

Typy zobrazení

Definice 2.9
Dáno zobrazení $f : A \to B$. f se nazývá

1. *surjekce*, je-li $f(A) = B$;
2. *injekce*, pokud pro každé $a_1, a_2 \in A,\ a_1 \neq a_2$ platí, že $f(a_1) \neq f(a_2)$;
3. *bijekce*, je-li současně surjekce a injekce.

Typy zobrazení

Příklad 2.11

- $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, kde $x \overset{f}{\longmapsto} x^2$ je zobrazení, které není surjektivní, ani injektivní;
- $g : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}^+$, kde $x \overset{g}{\longmapsto} x^2$ je surjekce, ale ne injekce;
- $h : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, kde $x \overset{h}{\longmapsto} x + 1$ je injekce, ale ne surjekce;
- $k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$, kde $x \overset{k}{\longmapsto} e^x$ je bijekce.

Typy zobrazení

Věta 2.9
Uvažujme zobrazení $f : A \to B,\ g : B \to C$.

1. Jsou-li f a g surjekce, je surjekcí i zobrazení $f \circ g$.
2. Jsou-li f a g injekce, je injekcí i zobrazení $f \circ g$.
3. Jsou-li f a g bijekce, je bijekcí i zobrazení $f \circ g$.

Inverzní zobrazení

Příklad 2.12

- $A = \{a, b, c\}$
- $B = \{1, 2\}$
- $f = \{(a, 2), (b, 2), (c, 1)\} \subseteq A \times B$ je zobrazení A do B.
- K ní inverzní relace $f^{-1} = \{(2, a), (2, b), (1, c)\} \subseteq B \times A$ zobrazení B do A není!

Inverzní zobrazení

Věta 2.10
Nechť je dáno zobrazení $f : A \rightarrow B$. Pak inverzní relace f^{-1} je zobrazením právě když f je bijekce.

Důsledek 2.11
Nechť $f : A \rightarrow B$ je bijekce. Pak f^{-1} je opět bijekce.