Matice

Definice 4.1
Nechť $(T;+,\cdot)$ je číselné těleso, $m,n \in \mathbf{N}$ a dále nechť $a_{ij} \in T$ pro všechny indexy $i = 1,2,\ldots,m$ a $j = 1,2,\ldots,n$. Potom schéma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m\times n}$$

se nazývá *matice typu* $m \times n$ *nad* T.

- Pro každý prvek a_{ij} je i jeho *řádkový index* a j jeho *sloupcový index.*
- Nechť $r = \min\{m,n\}$, pak prvky $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{rr}$ tvoří tzv. *hlavní diagonálu* matice A.

Typy matic

Definice 4.2

- Matice $A = (a_{ij})_{m\times n}$ se nazývá *nulová*, jestliže $a_{ij} = 0$ pro každé indexy i,j.
- Matice $A = (a_{ij})_{m\times n}$ se nazývá *čtvercová stupně* n, jestliže $m = n$.
- Čtvercová matice se nazývá *diagonální*, jestliže mimo hlavní diagonálu jsou všechny prvky nulové.
- Diagonální matice se nazývá *skalární*, jsou-li si všechny prvky hlavní diagonály rovny.
- Skalární matice se nazývá *jednotková*, pokud má na hlavní diagonále samé jedničky. Značíme ji E.

Rovnost matic

Označení
Množinu všech matic typu $m \times n$ nad tělesem T budeme označovat $\mathcal{M}_{m\times n}(T)$, množinu všech čtvercových matic stupně n nad T pak $\mathcal{M}_n(T)$.

Definice 4.3
Dvě matice $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(T)$ jsou si *rovny* (píšeme A = B), jestliže $a_{ij} = b_{ij}$ pro každé i,j .

Sčítání matic

Definice 4.4
Nechť $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(T)$. *Součtem matic* A a B rozumíme matici $A + B = (c_{ij})_{m\times n}$, kde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pro každé i, j .

Příklad 4.1
Součtem matic

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

je matice

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} .$$

Sčítání matic

Věta 4.1
Množina $\mathcal{M}_{m\times n}(T)$ spolu se zavedeným sčítáním je abelovská grupa.

Násobení matice skalárem

Definice 4.5
Nechť $(T; +, \cdot)$ je číselné těleso, $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(T), c \in T$. Zavedeme zobrazení „ $\cdot$ ” $: T \times \mathcal{M}_{m\times n}(T) \to \mathcal{M}_{m\times n}(T)$ předpisem

$$c \cdot A = (b_{ij})_{m\times n} ,$$

kde $b_{ij} = c \cdot a_{ij}$ pro každé i, j. Toto zobrazení nazýváme *násobení matice skalárem.* (Prvky z T nazýváme *skaláry.*)

Násobení matice skalárem

Příklad 4.2
Nechť $T := \mathbf{C}$, $c := -\mathrm{i} \in \mathbf{C}$ a $A := \begin{pmatrix} \mathrm{i} & -1 \\ 2+\mathrm{i} & -3+2\mathrm{i} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$.

Pak

$$c \cdot A = (-\mathrm{i}) \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{i} & -1 \\ 2+\mathrm{i} & -3+2\mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 1-2\mathrm{i} & 2+3\mathrm{i} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C}).$$

Věta 4.2
Pro libovolné skaláry $c, d \in T$ a libovolné matice $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(T)$ platí

1. $c \cdot (A + B) = c \cdot A + c \cdot B$,
2. $(c + d) \cdot A = c \cdot A + d \cdot A$,
3. $(c \cdot d) \cdot A = c \cdot (d \cdot A)$,
4. $1 \cdot A = A$.

Součin matic

Definice 4.6
Nechť $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{jk})_{n\times p}$ jsou matice nad tělesem T. *Součinem matic* A a B rozumíme matici

$$A \cdot B = (c_{ik})_{m\times p},$$

kde

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nk}$$

pro všechny indexy i, k .

Součin matic

Příklad 4.3
Součinem matic

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

je matice

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

Součin matic

Příklad 4.3
Součinem matic

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

je matice

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$-1 = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot (-1)$$

Součin matic

Příklad 4.3
Součinem matic

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

je matice

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$0 = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 0$$

Součin matic

Příklad 4.3
Součinem matic

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

je matice

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 & \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$5 = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 2$$

Součin matic

Příklad 4.3
Součinem matic

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

je matice

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 & 0 \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$0 = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1$$

Součin matic

Příklad 4.3
Součinem matic

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

je matice

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 & 0 \\ -3 & & & \end{pmatrix}$$

$$-3 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-1)$$

Součin matic

Příklad 4.3
Součinem matic

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

je matice

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 & 0 \\ -3 & 2 & & \end{pmatrix}$$

$$2 = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 0$$

Součin matic

Příklad 4.3
Součinem matic

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

je matice

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 & 0 \\ -3 & 2 & 6 & \end{pmatrix}$$

$$6 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2$$

Součin matic

Příklad 4.3
Součinem matic

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

je matice

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 & 0 \\ -3 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$4 = 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1$$

Součin matic

Věta 4.3
Pro libovolné matice $A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{jk})_{n\times p}, C = (c_{kl})_{p\times r}, D = (d_{jk})_{n\times p}$ nad tělesem T platí

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$,
2. $A \cdot (B + D) = A \cdot B + A \cdot D$,
3. $(B + D) \cdot C = B \cdot C + D \cdot C$.

Okruh čtvercových matic

Věta 4.4
Nechť $(T; +, \cdot)$ je číselné těleso a n přirozené číslo. Pak množina $\mathcal{M}_n(T)$ spolu se zavedeným sčítáním a násobením tvoří unitární okruh, který pro $n > 1$ není komutativní.

Maticová transpozice

Definice 4.7
Je-li $A = (a_{ij})_{m\times n}$ matice nad tělesem T, pak *transponovanou maticí* k matici A rozumíme matici

$$A^T = (a_{ji})_{n\times m}.$$

A^T tedy vznikne vzájemnou záměnou odpovídajících řádků a sloupců matice A, tedy jakýmsi překlopením matice A přes hlavní diagonálu.

Příklad 4.4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Maticová transpozice

Věta 4.5
Pro libovolné matice $A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{m\times n}, C = (c_{jk})_{n\times p}$ nad tělesem T a libolný skalár $c \in T$ platí

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$,
2. $(c \cdot A)^T = c \cdot A^T$,
3. $(A \cdot C)^T = C^T \cdot A^T$.