1 Báze a dimenze vektorového prostoru

Obsah

Obsah

Levá vnější operace

Definice 5.1
Nechť $A \neq \emptyset \neq B$. *Levou vnější operací nad* A *a* B nazýváme každé zobrazení "$\cdot$" $: A \times B \to B$.

Příklad 5.1
Násobení matice skalárem je levá vnější operace nad T a $\mathcal{M}_{m\times n}(T)$.

Vektorový prostor

Definice 5.2
Čtveřici $(V;\ +\ ,T,\ \cdot\ )$ nazýváme *vektorový prostor*, jestliže

1. $(V;\ +\ )$ je abelovská grupa s jednotkou $\vec{o}$ (*nulový vektor*);
2. T je číselné těleso;
3. $\cdot\ : T \times V \to V$ je levá vnější operace nad T a V;
4. Pro všechny $\vec{u}, \vec{v} \in V$ a všechny $c, d \in T$ platí
   - $c \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = c\ \cdot \vec{u} + c\ \cdot \vec{v}$,
   - $(c + d)\ \cdot \vec{u} = c\ \cdot \vec{u} + d\ \cdot \vec{u}$,
   - $(c \cdot d)\ \cdot \vec{u} = c \cdot (d\ \cdot \vec{u})$,
   - $1\ \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

- *Pole vektorového prostoru* ... množina V
- *Vektory* ... prvky pole V
- *Skaláry* ... prvky tělesa T

Vektorový prostor

Příklad 5.2

- Množina všech čtvercových matic stupně n nad číselným tělesem T spolu se sčítáním a násobením matice skalárem, tedy $(\mathcal{M}_n(T)\ ;\ +\ , T,\ \cdot\ )$ tvoří vektorový prostor nad tělesem T.
- Množina $C[a,b]$ spojitých funkcí na intervalu $\langle a,b\rangle \subseteq \mathbf{R}$ spolu s bodovým sčítáním funkcí a násobením funkcí reálným číslem zleva, tedy $(C[a,b]\ ;\ \oplus\ , \mathbf{R},\ \cdot\ )$, kde

$$\forall f,g \in C[a,b],\ \forall x \in \langle a,b\rangle,\ \forall c \in \mathbf{R}\text{:} \quad \begin{array}{c} (f \oplus g)(x) \stackrel{def}{=} f(x) + g(x), \\ (c \cdot f)(x) \stackrel{def}{=} c \cdot f(x), \end{array}$$

  tvoří vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{R}$.

Lineární kombinace vektorů

Definice 5.3
Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T, nechť $\vec{v}, \vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_n} \in V$. Říkáme, že vektor $\vec{v}$ je *lineární kombinací* vektorů $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_n}$, jestliže existují skaláry $c_1, c_2, \dots, c_n \in T$ tak, že

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} c_i \vec{u_i} = c_1 \vec{u_1} + c_2 \vec{u_2} + \cdots + c_n \vec{u_n}\ .$$

Příklad 5.3
Nulový vektor $\vec{o} \in V$ je lineární kombinací libovolných vektorů z V.

Lineární nezávislost vektorů

Definice 5.4
Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Vektory $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_n} \in V$ nazýváme *lineárně závislé*, jestliže existují skaláry $c_1, c_2, \dots, c_n \in T$ tak, že

$$\vec{o} = \sum_{i=1}^{n} c_i \vec{u_i} = c_1 \vec{u_1} + c_2 \vec{u_2} + \cdots + c_n \vec{u_n},$$

a přitom alespoň jedno z číslo mezi $c_1, c_2, \dots, c_n$ je nenulové.

V opačném případě, tedy pokud

$$\vec{o} = \sum_{i=1}^{n} c_i \vec{u_i} = c_1 \vec{u_1} + c_2 \vec{u_2} + \cdots + c_n \vec{u_n},$$

pouze v případě, že $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$, se vektory $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_n} \in V$ nazývají *lineárně nezávislé*.

Lineární nezávislost vektorů

Příklad 5.4

- Nulový vektor $\vec{o} \in V$ je lineárně závislý.
- Vektor $\vec{o} \neq \vec{u} \in V$ je lineárně nezávislý.

Lineární nezávislost vektorů

Věta 5.1
Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Jsou-li mezi vektory $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n} \in V$ některé lineárně závislé, pak jsou lineárně závislé i $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}$.

Důsledek 5.2
Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Je-li mezi vektory $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n} \in V$ nulový vektor, pak jsou $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}$ lineárně závislé.

Důsledek 5.3
Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Jsou-li vektory $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n} \in V$ lineárně nezávislé a je-li $\{\vec{u_{j_1}}, \vec{u_{j_2}}, \ldots, \vec{u_{j_k}}\} \subseteq \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}\}$, pak $\vec{u_{j_1}}, \vec{u_{j_2}}, \ldots, \vec{u_{j_k}}$ jsou lineárně nezávislé.

Lineární nezávislost vektorů

Věta 5.4
Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a nechť $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n} \in V$. Pak $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}$ jsou lineárně závislé právě když je aspoň jeden z nich lineární kombinací ostatních.

Podprostory vektorového prostoru

Definice 5.5
Nechť $(V;\ +\ ,T,\ \cdot\ )$ je vektorový prostor nad tělesem T a nechť $\emptyset \neq W \subseteq V$. Pak $(W; +, T,\ \cdot\ )$ nazveme *podprostor* vektorového prostoru V, jestliže

1. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in W : \qquad \vec{u} + \vec{v} \in W,$
2. $\forall \vec{u} \in W, \forall c \in T : \quad c \cdot \vec{u} \in W.$

Příklad 5.5

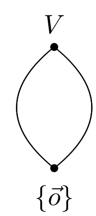
- Množina všech diagonálních čtvercových matic stupně n nad číselným tělesem T je polem podprostoru ve vektorovém prostoru $(\mathcal{M}_n(T)\ ;\ +\ ,T,\ \cdot\ )$.
- Množina všech funkcí f z $C[a,b]$ splňujících $f(a) = 0$ tvoří pole podprostoru ve vektorovém prostoru $(C[a,b]\ ;\ \oplus\ ,\mathbf{R},\ \cdot\ )$.

Podprostory vektorového prostoru

Věta 5.5
Neprázdná podmnožina W pole vektorového prostoru $(V;+,T,\ \cdot\ )$ je polem podprostoru ve V právě když s každými prvky $\vec{u_1},\vec{u_2},\ldots,\vec{u_n}$ obsahuje také každou jejich lineární kombinaci.

Podprostory vektorového prostoru

- Podprostory ve VP $(V;+,T,\ \cdot\ )$ můžeme uspořádat vzhledem k relaci " $\subseteq$ ".
- $Sub(V)$ ... množina všech podprostorů ve VP $(V;+,T,\ \cdot\ )$
- $(Sub(V);\ \subseteq\ )$ je uspořádaná množina s Hasseho diagramem



- Pro každou množinu $A \subseteq V$, která není polem podprostoru ve V, existuje nejmenší podprostor prostoru V obsahující A, tzv. *podprostor generovaný množinou* A, značíme $[A]$.

Lineární obal množiny

Definice 5.6
Nechť $(V;+,T,\ \cdot\ )$ je vektorový prostor nad tělesem T a nechť $\emptyset \neq M \subseteq V$. *Lineárním obalem množiny M ve VP V* budeme nazývat množinu všech lineárních kombinací libovolných vektorů z M.

Věta 5.6
Nechť $(V;+,T,\ \cdot\ )$ je vektorový prostor nad tělesem T a nechť $\emptyset \neq M \subseteq V$. Pak lineární obal množiny M ve V je právě podprostor generovaný M.

Průnik podprostorů vektorového prostoru

- Průnik $W_1 \cap W_2$ dvou podprostorů W_1 a W_2 ve VP $(V;+,T,\ \cdot\ )$ je obecně opět podprostor ve V. Je to " největší " (vzhledem k $\subseteq$) podprostor ve V, který je obsažen současně ve W_1 a W_2.

- Uvažujme množiny

$$M^+ = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : \ a, b \in \mathbf{R} \right\}, \ M^- = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix} : \ c, d \in \mathbf{R} \right\}.$$

  Pak $(M^+; +, \mathbf{R}, \cdot)$ a $(M^-; +, \mathbf{R}, \cdot)$ jsou podprostory ve VP $(\mathcal{M}_2(\mathbf{R}); +, \mathbf{R}, \cdot)$ a platí

$$M^+ \cap M^- = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \{\vec{o}\}.$$

Sjednocení podprostorů vektorového prostoru

- Přitom $M^+ \cup M^-$ není polem podprostoru VP $(\mathcal{M}_2(\mathbf{R}); +, \mathbf{R}, \cdot)$, protože např.

$$(-1) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in\ M^+} + 3 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1,5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\in\ M^-} = \begin{pmatrix} 2 & 4,5 \\ -3 & -1 \end{pmatrix},$$

  což není prvek ani z M^+, ani z M^-, tedy ani z $M^+ \cup M^-$.

- Obecně, jsou-li W_1 a W_2 dva podprostory VP V, pak nejmenší podprostor ve V obsahující současně jak W_1, tak i W_2 je podprostor $[W_1 \cup W_2]$.

Součet podprostorů VP

Věta 5.7
Jsou-li W_1 a W_2 podprostory VP $(V; +, T, \cdot)$, pak polem nejmenšího podprostoru obsahujícího současně W_1 a W_2 je množina

$$W_1 + W_2 = \{\vec{w} \in V : \ \vec{w} \ = \ \vec{w_1} + \vec{w_2}, \ \vec{w_1} \in W_1, \ \vec{w_2} \in W_2\}.$$

Definice 5.7
Nechť $(V; +, T, \cdot)$ je VP a W_1 a W_2 jeho podprostory. Podprostor $W_1 + W_2$ nazveme *součet podprostorů* W_1, W_2.

Přímý součet podprostorů VP

Definice 5.8
Nechť $(V; +, T, \cdot)$ je VP a W_1 a W_2 jeho podprostory. Je-li $W_1 \cap W_2 = \{\vec{o}\}$, pak platí $V = W_1 + W_2$, říkáme, že V je *přímý součet podprostorů* W_1, W_2 a píšeme $V = W_1 \oplus W_2$.

Věta 5.8

Je-li VP $(V; +, T, \cdot)$ přímým součtem podprostorů W_1 a W_2, pak každý vektor $\vec{v} \in V$ lze psát právě jedním způsobem ve tvaru $\vec{v} = \vec{w_1} + \vec{w_2}$, kde $\vec{w_1} \in W_1$, $\vec{w_2} \in W_2$.

Příklad 5.6
VP $(\mathcal{M}_2(\mathbf{R}); +, \mathbf{R}, \cdot)$ čtvercových matic stupně 2 nad $\mathbf{R}$ je podle předchozího přímým součtem podprostorů $(M^+; +, \mathbf{R}, \cdot)$ a $(M^-; +, \mathbf{R}, \cdot)$.

Množina generátorů VP

Definice 5.8
Nechť $(V; +, T, \cdot)$ je VP a M neprázdná podmnožina jeho pole. Je-li $[M] = V$, pak M se nazývá *množina generátorů VP V*.

Příklad 5.7
Množina $M = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, kde

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}$$

tvoří množinu generátorů pro VP $(\mathcal{M}_2(\mathbf{R}); +, \mathbf{R}, \cdot)$.

Báze VP

Definice 5.9
VP $(V; +, T, \cdot)$ se nazývá *konečné dimenze*, má-li aspoň jednu konečnou množinu generátorů.

Bází VP konečné dimenze nazveme každou lineárně nezávislou konečnou množinu $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}\}$ jeho generátorů.

Věta 5.9
Nechť $M = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}\}$ je báze VP $(V; +, T, \cdot)$. Potom každý vektor $\vec{v} \in V$ lze jediným způsobem vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}$.

Dimenze VP

Věta 5.10
Je-li $M = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}\}$ množina generátorů VP $(V; +, T, \cdot)$, pak z ní lze vybrat nějakou bázi VP V.

Věta 5.11
Nechť $V \neq \{\vec{o}\}$ je VP konečné dimenze. Pak každé dvě různé jeho báze mají stejný počet prvků.

Definice 5.10
Je-li $V \neq \{\vec{o}\}$ VP konečné dimenze, pak počet prvků některé jeho báze nazýváme *dimenze VP V* a píšeme $\dim(V)$. Je-li $V = \{\vec{o}\}$, položíme $\dim(V) = 0$.

Dimenze VP

Věta 5.12
Je dán VP $(V; +, T, \cdot)$, kde $\dim(V) = n$ a dále vektory $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n} \in V$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}$ jsou lineárně nezávislé;
2. $[\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}\}] = V$;
3. $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}\}$ je báze V.

Věta 5.13
Nechť W je podprostor VP V konečné dimenze. Pak $\dim(W) \leq \dim(V)$.

Věta 5.14
Nechť W_1 a W_2 jsou podprostory VP V konečné dimenze. Pak $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$.

2 Aritmetické vektorové prostory

Obsah

Obsah

Konstrukce aritmetického VP

- Dáno číselné těleso $(T; +, \cdot)$ a $n \in \mathbf{N}$.
- Na množině $T^n = \underbrace{T \times T \times \cdots \times T}_{n \text{ krát}} = V$ definujeme binární operaci " + "

  takto: $(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) \stackrel{def}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$.
- $(V; +)$ je potom abelovská grupa s jednotkou $(0, 0, \ldots, 0) = \vec{o}$ a s inverzním prvkem $(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ pro každý prvek $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in V$.
- Dále zavedeme levou vnější operaci " $\cdot$ " nad T a V, kde $c \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) \stackrel{def}{=} (c \cdot x_1, c \cdot x$
- Pak $(T^n; +, T, \cdot)$ je vektorový prostor, jehož dimenze je rovna číslu n. Tento vektorový prostor nazýváme *aritmetický*.

Báze aritmetického VP

- Dá se ukázat, že jednou z bází sestrojeného aritmetického VP $V = (T^n;\ +, T,\ \cdot\ )$ je množina $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n}\}$, kde

$$\begin{aligned}
\vec{e_1} &= (1, 0, 0, \ldots, 0),\\
\vec{e_2} &= (0, 1, 0, \ldots, 0),\\
&\vdots\\
\vec{e_n} &= (0, 0, \ldots, 0, 1),
\end{aligned}$$

tzv. *kanonická báze*. Zřejmě pro každý $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in V$ platí, že $\vec{x} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + \cdots + x_n\vec{e_n}$.

Rozklad aritmetického VP na přímý součet podprostorů

- Označme $V_i = \{(0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0) :\ x_i \in T\}$.
- Pak množina V_i je polem podprostoru aritmetického VP $V = (T^n;\ +, T,\ \cdot\ )$, kde $\dim(V_i) = 1$ a platí

$$V_i = [\{\vec{e_i}\}] = [\{(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)\}].$$

- Navíc $V_i \cap V_j = \emptyset$ pro každé $i \neq j$, tedy aritmetický VP $V = (T^n;\ +, T,\ \cdot\ )$ je přímým součtem podprostorů $V_1, V_2, \ldots, V_n$, tzn.

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n.$$

Reprezentace VP konečné dimenze aritmetickým VP

- Uvažujme VP $V = (V;\ +, T,\ \cdot\ )$, který není aritmetický a kde $\dim(V) = n$. Nechť $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}\}$ je některá jeho báze.
- Pak pro každý $\vec{x} \in V$ máme jednoznačné vyjádření

$$\vec{x} = x_1 \cdot \vec{u_1} + x_2 \cdot \vec{u_2} + \cdots + x_n \cdot \vec{u_n}.$$

- Každému vektoru $\vec{x} \in V$ tedy přiřadíme n-tici $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kterou můžeme považovat za vektor v aritmetickém VP $(T^n;\ +, T,\ \cdot\ )$.
- Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in V$ a $c \in T$ platí (resp. můžeme provést přiřazení)

$$\begin{aligned}
\vec{x} + \vec{y} &\longrightarrow (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),\\
c \cdot \vec{x} &\longrightarrow (c \cdot x_1, c \cdot x_2, \ldots, c \cdot x_n).
\end{aligned}$$

3 Eukleidovské vektorové prostory

Obsah

Obsah

Skalární součin

Definice 5.11
Nechť $V = (V;\ +\ , \mathbf{R},\ \cdot\ )$ je VP nad tělesem reálných čísel. *Skalárním součinem na* V nazveme každé zobrazení $\circ :\ V \times V \to \mathbf{R}$, které pro každé $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\ \in V$ a pro každé $c \in \mathbf{R}$ splňuje:

1. $\vec{u} \circ \vec{v}\ =\ \vec{v} \circ \vec{u}$;
2. $\vec{u} \circ\ (\vec{v} + \vec{w})\ =\ \vec{u} \circ \vec{v} + \vec{u} \circ \vec{w}$;
3. $(c\ \cdot \vec{u})\ \circ \vec{v}\ =\ c \cdot (\vec{u} \circ \vec{v})$;
4. $\vec{u} \circ \vec{u}\ \geq 0$, rovnost nastane právě když $\vec{u}\ =\ \vec{o}$.

Skalární součin

Příklad 5.7

- Je-li $V = (\mathbf{R}^n;\ +\ , \mathbf{R},\ \cdot\ )$ aritmetický VP dimenze n nad $\mathbf{R}$, pak skalární součin zde můžeme definovat následovně:

$$\vec{x} \circ \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i, \quad \forall \vec{x},\ \vec{y}\ \in \mathbf{R}^n.$$

- Je-li $V = (C[a,b];\ \oplus\ , \mathbf{R},\ \cdot\ )$ VP všech spojitých funkcí na reálném intervalu $\langle a, b\rangle$ nad $\mathbf{R}$, pak skalární součin zde můžeme zavést předpisem:

$$f \circ g = \int_a^b f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x, \quad \forall f, g \in C[a,b].$$

Eukleidovský vektorový prostor

Definice 5.12
Eukleidovským vektorovým prostorem (EVP) rozumíme každý VP, na kterém je zaveden skalární součin.

Délka vektoru

Definice 5.13
Nechť V je EVP, $\vec{u} \in V$. Číslo $||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u} \circ \vec{u}}$ nazveme *délka vektoru* $\vec{u}$.

Věta 5.15
Nechť V je EVP, $\vec{u}, \vec{v} \in V$, $c \in \mathbf{R}$. Platí

1. $||c \cdot \vec{u}|| = |c| \cdot ||\vec{u}||$,
2. $||\vec{o}|| = 0$ a pro $\vec{u} \neq \vec{o}$ pak $||\vec{u}|| > 0$.
3. $|\vec{u} \circ \vec{v}| \leq ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||$ (Schwarzova nerovnost).

Úhel vektorů

Definice 5.14
Nechť V je EVP, $\vec{u}\,\vec{v} \in V$, $\vec{u} \neq \vec{o} \neq \vec{v}$. *Úhlem vektorů* $\vec{u}$ *a* $\vec{v}$ rozumíme číslo

$$\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = \arccos \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||}\ .$$

- Ze Schwarzovy nerovnosti plyne, že úhel φ je určen korektně.
- Platí, že $\cos \varphi(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||}$, kde $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Ortogonální vektory

Definice 5.15
Nechť V je EVP. Vektory $\vec{u}, \vec{v} \in V$ nazveme *ortogonální* (tj. *kolmé*), píšeme $\vec{u} \perp \vec{v}$, jestliže $\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$.

Věta 5.16
Nechť V je EVP, $\vec{u}, \vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n} \in V$ a nechť platí $\vec{u} \perp \vec{v_i}$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$. Pak $\vec{u} \perp \vec{w}$ pro každý $\vec{w} \in [\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}]$.

Ortogonální vektory

Definice 5.16
Nechť V je EVP. Vektory $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n} \in V$ nazveme *vzájemně ortogonální*, platí-li $\vec{u_i} \perp \vec{u_j}$ pro každé $i \neq j$, kde $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Věta 5.17
Nenulové vzájemně ortogonální vektory $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}$ z EVP V jsou lineárně nezávislé.

Věta 5.18
Jsou-li vektory $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}$ vzájemně ortogonální v EVP V a platí-li $V = [\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}\}]$, pak množina $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}\}$ je báze VP V, tzv. *ortogonální báze*.