1 Hodnost matice

Obsah

Obsah

Řádkový podprostor matice

Definice 7.1
Řádkovým podprostorem matice $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(T)$ rozumíme podprostor v aritmetickém VP T^n, který je generovaný řádkovými vektory matice A.

Příklad 7.1
Řádkovým podprostorem matice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3,1 & 5 \\ -3 & 1,8 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 4,5 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbf{R})$

je tedy prostor $[\{(2;-1;3,1;5),(-3;1,8;-2;4),(0;0;4,5;0)\}] \subseteq\subseteq \mathbf{R}^4$.

Elementární řádkové transformace

Definice 7.2
Elementárními řádkovými transformacemi (EŘT) matice $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(T)$ nazýváme tyto úpravy:

1. vzájemnou záměnu dvou řádků v A;
2. vynásobení některého řádku nenulovým číslem z T;
3. přičtení nenulového násobku některého řádku k jinému řádku v A.

Definice 7.3
Nechť $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(T)$. Říkáme, že matice A je *řádkově ekvivalentní* s maticí B, jestliže můžeme matici B získat z A pomocí konečného počtu EŘT. Pak píšeme $A \sim B$.

Elementární řádkové transformace

- $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(T)$
- Pokud $A \sim B$, pak taky $B \sim A$, což nás opravňuje k tomu, že dále budeme pouze říkat, že *matice A a B jsou řádkově ekvivalentní* místo toho, že A je řádkově ekvivalentní s B.
- Dokonce můžeme ukázat, že binární relace "$\sim$" je relace ekvivalence na množině $\mathcal{M}_{m\times n}(T)$.

Příklad 7.2

Platí $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = B$, protože B můžeme z A získat takto:

1. zaměníme 1. a 3. řádek;
2. 1. řádek získané matice vynásobíme (-2);
3. ke 3. řádku této matice přičteme její 2. řádek.

Elementární řádkové transformace

Věta 7.1
Nechť $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(T)$. Jestliže $A \sim B$, pak matice A i B určují stejné řádkové podprostory.

Definice 7.4
Vedoucím prvkem řádku (řádkového vektoru) matice $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(T)$ rozumíme první nenulový prvek zleva v tomto řádku.

Gaussův tvar matice

Definice 7.5
O matici $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(T)$ řekneme, že je v *Gaussově tvaru* (GT), pokud všechny její nulové řádky jsou až za nenulovými a navíc pro každé její dva nenulové řádky $\vec{a_i}, \vec{a_j}$ musí být splněno, že pokud $i < j$, pak vedoucí prvek i-tého řádku leží ve sloupci, jehož index je menší než index sloupce, ve kterém leží vedoucí prvek j-tého řádku.

Gaussův tvar matice

Příklad 7.3

$$\text{Matice } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ \textit{je} v GT.}$$

$$\text{Matice } B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \text{ \textit{není} v GT.}$$

Gaussův tvar matice

Věta 7.2
Každá matice $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(T)$ je řádkově ekvivalentní s některou maticí v Gaussově tvaru.

Příklad 7.4
Platí, že $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 10 \end{pmatrix} = B.$

Nejdříve v A zaměníme 1. a 2. řádek, tedy:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = C_1$$

Gaussův tvar matice

Věta 7.2
Každá matice $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(T)$ je řádkově ekvivalentní s některou maticí v Gaussově tvaru.

Příklad 7.4
Platí, že $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 10 \end{pmatrix} = B.$

Dále v C_1 přičteme ke 2. řádku čtyřnásobek 1. řádku a ke 3. řádku pak dvojnásobek 1., tzn.

$$C_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} = C_2$$

Gaussův tvar matice

Věta 7.2
Každá matice $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(T)$ je řádkově ekvivalentní s některou maticí v Gaussově tvaru.

Příklad 7.4
Platí, že $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 10 \end{pmatrix} = B.$

V C_2 vynásobíme 3. řádek číslem -7, pak

$$C_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & 4 \\ 0 & -42 & -7 & -14 \end{pmatrix} = C_3$$

Gaussův tvar matice

Věta 7.2
Každá matice $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(T)$ je řádkově ekvivalentní s některou maticí v Gaussově tvaru.

Příklad 7.4
Platí, že $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 10 \end{pmatrix} = B.$

A konečně v C_3 přičteme ke 3. řádku šestinásobek 2. řádku:

$$C_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & 4 \\ 0 & -42 & -7 & -14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -11 & -10 \end{pmatrix} = B$$

Gaussův tvar matice

Věta 7.3
Nenulové řádky matice $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(T)$, která je v Gaussově tvaru, jsou lineárně nezávislé.

Věta 7.4
Je-li $A \sim B$ pro některé matice $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(T)$, pak nenulové řádky matice B tvoří bázi řádkového podprostoru matice A.

Hodnost matice

Definice 7.6
Hodností matice $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(T)$ rozumíme dimenzi řádkového podprostoru matice A a značíme ji $\mathrm{h}(A)$.

- Podle Def. 7.1 se $\mathrm{h}(A)$ musí rovnat počtu LNZ řádků matice $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(T)$, tedy $h(A) \leq m$.
- Jestliže $A \sim B$, pak $\mathrm{h}(A) = \mathrm{h}(B)$.
- $\mathrm{h}(A)$ je rovna počtu nenulových řádků libovolné matice B v GT takové, že $A \sim B$.

Věta 7.5
Hodnost matice $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(T)$ je rovna maximálnímu počtu jejích LNZ sloupců.

~~2 Řešení soustav lineárních rovnic~~

~~**Obsah**~~