# 1 Permutace na množině

**Obsah**

## Obsah



**Permutace na množině**

**Definice 6.1**
Dána konečná množina $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. *Pořadím* $\pi$ množiny $A$ nazveme každou $n$-tici $\pi = (a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_n}) \in A^n$ takovou, že každý prvek z $A$ je v ní zastoupen právě jednou.

**Definice 6.2**
*Permutací $P$ na množině* $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ rozumíme každou bijekci $P : A \to A$.

- Permutaci $P$ množiny $A$ můžeme zapisovat ve tvaru

$$P = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_{\pi(1)} & a_{\pi(2)} & \ldots & a_{\pi(n)} \end{pmatrix},$$

  kde $\pi$ je některé pořadí indexové množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$.

**Permutace na množině**

**Věta 6.1**
Pro každou $n$-prvkovou ($n \geq 1$) množinu $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ je počet permutací na ní stejný jako počet pořadí této množiny, a je roven číslu $n!$.

- Protože nazáleží na povaze prvků $a_1, a_2, \ldots, a_n$ množiny $A$, můžeme dále pracovat přímo s množinou prvních $n$ přirozených čísel, tedy $\{1, 2, \ldots, n\}$.
- *Základním pořadím* množiny $A$ přitom rozumíme $n$-tici $\pi_0 = (1, 2, \ldots, n)$.
- Každou permutaci na množině $A$ můžeme zkráceně psát jako $P = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix}$, kde $\pi_1$ a $\pi_2$ jsou některá pořadí množiny $A$.

**Permutace na množině**

- Všimněme si, že zápisy

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

  jsou ekvivalentní vyjádření jedné permutace $P$ na množině $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, tedy

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Permutace na $A$ budeme tedy pokud možno zapisovat v tzv. *základním tvaru*, tj. ve tvaru

$$P = \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \end{pmatrix},$$

  kde $\pi_0$ je základní pořadí množiny $A$.

**Znaménko pořadí**

**Definice 6.3**

- Nechť $\pi = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ je pořadí množiny $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Říkáme, že prvky $k_i$ a $k_j$ tvoří *inverzi* v $\pi$, jestliže $i < j$, přestože $k_i > k_j$.
- *Znaménkem pořadí* $\pi$ nazveme číslo $sgn(\pi) = (-1)^{[\pi]}$, přitom $[\pi]$ značí počet inverzí v pořadí $\pi$.
- Je-li $sgn(\pi) = 1$, nazveme pořadí $\pi$ *sudé*.
- Je-li $sgn(\pi) = -1$, nazveme $\pi$ *liché*.

*Příklad 6.1*
V pořadí $\pi = (2, 1, 4, 5, 3)$ množiny $A$ jsou inverze 2,1 4,3 5,3 tedy $sgn(\pi) = (-1)^3 = -1$, tedy $\pi$ je liché.

**Znaménko permutace**

**Definice 6.4**

- Nechť $P = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix}$ je permutace množiny $A$.
- *Znaménkem permutace* $P$ nazveme číslo 1, jestliže $sgn(\pi_1) = sgn(\pi_2)$, a číslo $-1$, pokud $sgn(\pi_1) \neq sgn(\pi_2)$.
- Je-li $sgn(P) = 1$, nazývá se permutace $P$ *sudá*.
- Je-li $sgn(P) = -1$, říkáme, že $P$ je *lichá*.

*Příklad 6.2*
Dána permutace $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix}$. Pak

$$sgn(\pi_1) = (-1)^2 = 1 \quad a \quad sgn(\pi_2) = (-1)^2 = 1,$$

tedy $P$ je sudá permutace.

**Znaménko permutace, inverzní permutace**

- Pokud je permutace $P$ na $A$ dána v základním tvaru, tedy $P = \binom{\pi_0}{\pi_1}$, pak platí $sgn(P) = sgn(\pi_1)$.
- Symbolem $P_0$ budeme značit identickou permutaci, tj. $P_0 = \binom{\pi_0}{\pi_0}$.
- Je-li $P = \binom{\pi_1}{\pi_2}$ permutace na množině $A$, pak víme, že musí existovat i inverzní permutace $P^{-1}$ (viz Věta 2.11).
- Přitom $P^{-1} = \binom{\pi_2}{\pi_1}$, protože musí platit $P \circ P^{-1} = P_0 = P^{-1} \circ P$.

**Věta 6.2**
Platí $sgn(P_0) = 1$ a pro každou permutaci $P$ na $A$ $sgn(P^{-1}) = sgn(P)$.

**Transpozice na množině**

**Definice 6.5**
*Transpozicí* na $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ rozumíme permutaci $P$ na $A$ takovou, že existují $i, j \in A$ tak, že $P(i) = j,\ P(j) = i,\ P(k) = k$ pro všechny $k \in A \setminus \{i, j\}$.

- Je-li $P$ transpozice na $A$, pak $P^{-1} = P$.
- Je-li $P$ transpozice na $A$ zaměňující prvky $i, j$, pak ji budeme značit $P = T(i, j)$.
- Např. na $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ platí
$$T(1, 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

**Transpozice na množině**

**Věta 6.3**
Každou permutaci je možné vyjádřit jako složení konečného počtu transpozic. Navíc, permutace je sudá (resp. lichá), je-li tento počet sudý (resp. lichý).

*Příklad 6.3*
Permutaci $P = \binom{1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8}{1\,5\,4\,3\,7\,6\,8\,2}$ na množině $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ získáme jako složení transpozic $T(2, 5), T(3, 4), T(2, 7)$ a $T(2, 8)$.

**Transpozice na množině**

*Příklad 6.3*
Permutaci $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 7 & 6 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ získáme jako složení

$T(2,5), T(3,4), T(2,7)$ a $T(2,8)$. Platí totiž

$$T(2,5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Pak ale

$$T(2,5) \circ T(3,4) =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

**Transpozice na množině**

*Příklad 6.3*
Permutaci $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 7 & 6 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ získáme jako složení

$T(2,5), T(3,4), T(2,7)$ a $T(2,8)$.

Pak tedy $T(2,5) \circ T(3,4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

A dále

$$T(2,5) \circ T(3,4) \circ T(2,7) =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 7 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 8 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 7 & 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

**Transpozice na množině**

*Příklad 6.3*
Permutaci $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 7 & 6 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ získáme jako složení

$T(2,5), T(3,4), T(2,7)$ a $T(2,8)$.

Tedy $T(2,5) \circ T(3,4) \circ T(2,7) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 7 & 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

A konečně

$$T(2,5)\circ T(3,4)\circ T(2,7)\circ T(2,8) =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 7 & 6 & 2 & 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 7 & 6 & 8 & 2 \end{pmatrix} = P.$$

# 2 Výpočet a vlastnosti determinantu

**Obsah**

## Obsah

**Determinant**

**Definice 6.6**
Nechť $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(T)$ je čtvercová matice stupně $n$ nad číselným tělesem $T$. *Determinantem* matice $A$ rozumíme číslo $\det(A)$ (někdy také $|A|$) z tělesa $T$ takové, že

$$\det(A) = \sum_P sgn(P) \cdot a_{1k_1} \cdot a_{2k_2} \cdot \dots \cdot a_{nk_n},$$

kde sčítáme přes všechny permutace $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix}$ na indexové množině $\{1, 2, \dots, n\}$.

Každý ze součinů $a_{1k_1} \cdot a_{2k_2} \cdot \dots \cdot a_{nk_n}$ přitom nazýváme *člen determinantu* $\det(A)$.

**Determinant**

**Jinými slovy**:

- Determinant čtvercové matice je číslo z $T$, které se rovná *součtu* $n!$ *součinů* prvků matice $A$, přičemž v každém z těchto součinů $a_{1k_1} \cdot a_{2k_2} \cdot \dots \cdot a_{nk_n}$ *je každý řádek a sloupec matice zastoupen právě jedním prvkem.*
- Tento součin ale musíme doplnit znaménkem stejným jako je znaménko permutace určené řádkovými a sloupcovými indexy prvků zastoupených v tomto součinu.

**Determinant čtvercové matice stupně 2**

*Příklad 6.4*
Určete determinant matice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(T)$.

**Determinant čtvercové matice stupně 2**

*Příklad 6.4*

Určete determinant matice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(T)$.

**Řešení**: Členy determinantu budou součiny $a_{11} \cdot a_{22}$, který odpovídá permutaci

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

jejíž znaménko je 1,

**Determinant čtvercové matice stupně 2**

*Příklad 6.4*

Určete determinant matice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(T)$.

**Řešení**: Členy determinantu budou součiny $a_{11} \cdot a_{22}$, který odpovídá permutaci

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

jejíž znaménko je 1, a také $a_{12} \cdot a_{21}$, který odpovídá permutaci

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

jejíž znaménko je -1.

**Determinant čtvercové matice stupně 2**

*Příklad 6.4*

Určete determinant matice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(T)$.

**Řešení**: Členy determinantu budou součiny $a_{11} \cdot a_{22}$, který odpovídá permutaci

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

jejíž znaménko je 1, a také $a_{12} \cdot a_{21}$, který odpovídá permutaci

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

jejíž znaménko je -1. Celkem tedy dostáváme

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

**Determinant čtvercové matice stupně 3**

*Příklad 6.5*

Určete determinant matice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(T)$.

**Determinant čtvercové matice stupně 3**

*Příklad 6.5*

Určete determinant matice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(T)$.

**Řešení**: Členy determinantu a znaménka jim odpovídajících permutací na $\{1,2,3\}$ jsou zde

$$1. \qquad a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}, \qquad sgn(P_1) = sgn \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 1,$$

**Determinant čtvercové matice stupně 3**

*Příklad 6.5*

Určete determinant matice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(T)$.

**Řešení**: Členy determinantu a znaménka jim odpovídajících permutací na $\{1,2,3\}$ jsou zde

$$2. \qquad a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}, \qquad sgn(P_2) = sgn \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

**Determinant čtvercové matice stupně 3**

*Příklad 6.5*

Určete determinant matice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(T)$.

**Řešení**: Členy determinantu a znaménka jim odpovídajících permutací na $\{1,2,3\}$ jsou zde

$$3. \qquad a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}, \qquad sgn(P_3) = sgn \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 1,$$

**Determinant čtvercové matice stupně 3**

*Příklad 6.5*

Určete determinant matice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(T)$.

**Řešení**: Členy determinantu a znaménka jim odpovídajících permutací na $\{1, 2, 3\}$ jsou zde

$$4. \qquad a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}, \qquad sgn(P_4) = sgn \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -1,$$

**Determinant čtvercové matice stupně 3**

*Příklad 6.5*

Určete determinant matice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(T)$.

**Řešení**: Členy determinantu a znaménka jim odpovídajících permutací na $\{1, 2, 3\}$ jsou zde

$$5. \qquad a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}, \qquad sgn(P_5) = sgn \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = -1,$$

**Determinant čtvercové matice stupně 3**

*Příklad 6.5*

Určete determinant matice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(T)$.

**Řešení**: Členy determinantu a znaménka jim odpovídajících permutací na $\{1, 2, 3\}$ jsou zde

$$6. \qquad a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}, \qquad sgn(P_6) = sgn \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = -1,$$

**Determinant čtvercové matice stupně 3**

*Příklad 6.5*

Určete determinant matice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(T)$.

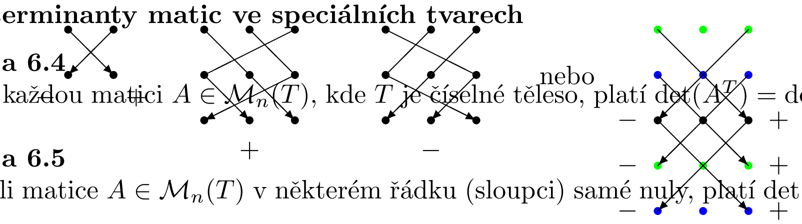
Celkem tedy dostáváme, že

$$\begin{aligned} \det(A) \;=\; & a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \\ & - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \end{aligned}$$

**Sarrusovo pravidlo**

Vyjádření determinantů matic 2. a 3. stupně lze znázornit i schématicky:

$n = 2$ : $\qquad\qquad\qquad$ $n = 3$ :




**Determinanty matic ve speciálních tvarech**

**Věta 6.4**
Pro každou matici $A \in \mathcal{M}_n(T)$, kde $T$ je číselné těleso, platí $\det(A^T) = \det(A)$.

**Věta 6.5**
Má-li matice $A \in \mathcal{M}_n(T)$ v některém řádku (sloupci) samé nuly, platí $\det(A) = 0$.

**Věta 6.6**
Má-li matice $A \in \mathcal{M}_n(T)$ pod (nad) hlavní diagonálou samé nuly, platí $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$.

**Determinanty matic ve speciálních tvarech**

**Věta 6.7**
Vznikne-li matice $B \in \mathcal{M}_n(T)$ z matice $A \in \mathcal{M}_n(T)$ vzájemnou záměnou dvou jejích řádků (sloupců), pak $\det(B) = -\det(A)$.

**Důsledek 6.8**
Vznikne-li matice $B \in \mathcal{M}_n(T)$ z matice $A \in \mathcal{M}_n(T)$ provedením některé permutace $P$ na její řádky (sloupce), pak $\det(B) = sgn(P) \cdot \det(A)$.

**Důsledek 6.9**
Má-li matice $A \in \mathcal{M}_n(T)$ dva stejné řádky (sloupce), pak $\det(A) = 0$.

**Submatice, subdeterminant**

**Definice 6.7**
Nechť $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(T)$. Pak každou matici, která vznikne z $A$ vynecháním některých jejích řádků a sloupců, nazýváme *submatice* (nebo *dílčí matice*) matice $A$.

Je-li submatice čtvercová, pak její determinant nazýváme *subdeterminant* matice $A$.

*Příklad 6.6*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

### Algebraický doplněk prvku ve čtvercové matici

**Definice 6.8**
Nechť $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(T)$. Potom subdeterminant (dílčí) matice, která vznikne z $A$ vynecháním $i$-tého řádku a $j$-tého sloupce, budeme nazývat *minor* matice $A$ příslušný k prvku $a_{ij}$, značíme $M_{ij}$.

*Algebraickým doplňkem* prvku $a_{ij}$ matice $A$ rozumíme číslo

$$\mathcal{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

*Příklad 6.7*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathcal{A}_{32} =$$

### Algebraický doplněk prvku ve čtvercové matici

**Definice 6.8**
Nechť $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(T)$. Potom subdeterminant (dílčí) matice, která vznikne z $A$ vynecháním $i$-tého řádku a $j$-tého sloupce, budeme nazývat *minor* matice $A$ příslušný k prvku $a_{ij}$, značíme $M_{ij}$.

*Algebraickým doplňkem* prvku $a_{ij}$ matice $A$ rozumíme číslo

$$\mathcal{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

*Příklad 6.7*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathcal{A}_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

### Laplaceův rozvoj determinantu

**Věta 6.10 (Laplaceova)**
Nechť $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(T)$. Pak pro každý řádkový index $i = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \mathcal{A}_{ij} = a_{i1} \cdot \mathcal{A}_{i1} + a_{i2} \cdot \mathcal{A}_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot \mathcal{A}_{in},$$

resp. pro každý sloupcový index $j = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot \mathcal{A}_{ij} = a_{1j} \cdot \mathcal{A}_{1j} + a_{2j} \cdot \mathcal{A}_{2j} + \cdots + a_{nj} \cdot \mathcal{A}_{nj}.$$

**Laplaceův rozvoj determinantu**

*Příklad 6.8*

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

**Laplaceův rozvoj determinantu**

*Příklad 6.8*

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

**Laplaceův rozvoj determinantu**

*Příklad 6.8*

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} +$$

**Laplaceův rozvoj determinantu**

*Příklad 6.8*

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} +$$

**Laplaceův rozvoj determinantu**

*Příklad 6.8*

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} +$$

$$+ 0 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

**Laplaceův rozvoj determinantu**

*Příklad 6.8*

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} +$$

$$+0 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + (-24) + 0 = -25$$

**Řádkové a sloupcové vektory matice**

Nechť $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(T)$.

- $n$-tici $\vec{a_i} = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ budeme nazývat *$i$-tý řádkový vektor* matice $A$ pro každý index $i = 1, 2, \ldots, m$.

- $m$-tici $\vec{a_j}^T = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ budeme nazývat *$j$-tý sloupcový vektor*

  matice $A$ pro každý index $j = 1, 2, \ldots, n$.

- Zkráceně tedy můžeme psát $A = (\vec{a_1}^T, \ldots, \vec{a_n}^T) = \begin{pmatrix} \vec{a_1} \\ \vdots \\ \vec{a_m} \end{pmatrix}$.

**Úpravy matice při výpočtu determinantu**

**Věta 6.11**

Vznikne-li matice $B \in \mathcal{M}_n(T)$ z matice $A \in \mathcal{M}_n(T)$ vynásobením $i$-tého řádku (sloupce) číslem $c \in T$, pak $\det(B) = c \cdot \det(A)$.

**Důsledek 6.12**

Nechť $A \in \mathcal{M}_n(T)$, $c \in T$. Pak $\det(c \cdot A) = c^n \cdot \det(A)$.

**Úpravy matice při výpočtu determinantu**

**Věta 6.13**
Je-li $i$-tý řádek (sloupec) matice $A \in \mathcal{M}_n(T)$ součtem vektorů $\vec{x}$ a $\vec{y}$ z AVP $T^n$, pak

$$\det \begin{pmatrix} \vec{a_1} \\ \vdots \\ \vec{a_i} \\ \vdots \\ \vec{a_n} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{a_1} \\ \vdots \\ \vec{x} \\ \vdots \\ \vec{a_n} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vec{a_1} \\ \vdots \\ \vec{y} \\ \vdots \\ \vec{a_n} \end{pmatrix} \quad .$$

**Úpravy matice při výpočtu determinantu**

**Věta 6.14**
Přičteme-li k některému řádku (sloupci) matice $A \in \mathcal{M}_n(T)$ některou lineární kombinaci ostatních řádků, pak získáme matici $B \in \mathcal{M}_n(T)$, pro kterou platí $\det(B) = \det(A)$.

**Věta 6.15**
Jsou-li řádkové (sloupcové) vektory matice $A \in \mathcal{M}_n(T)$ lineárně závislé, pak platí $\det(A) = 0$.

**Věta 6.15**
Nechť $A, B \in \mathcal{M}_n(T)$. Pak $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

**Úpravy matice při výpočtu determinantu**

- Předchozích výsledků, a zejména pak Věty 6.14 lze výhodně využít při výpočtu determinantů matic vyšších řádů než 3.
- Nabízí se např. přičítáním různých lineárních kombinací některých řádků k jiným vynulovat prvky nad nebo pod hlavní diagonálou matice, přitom se hodnota determinantu nezmění.
- Další možná varianta je analogickými úpravami vynulovat v některém řádku nebo sloupci všechny prvky až na jeden a následným použitím Laplaceovy věty snížit řád determinantu o 1. Opět neměníme jeho hodnotu.