# Obsah

### Lineární rovnice

**Definice 7.7**
Uvažujme číselné těleso $T$ a prvky $a_1, \ldots, a_n, b \in T$. Úloha určit všechny $n$-tice $(x_1, \ldots, x_n) \in T^n$, pro něž platí

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b,$$

se nazývá *lineární rovnice* (LR) o $n$ neznámých nad $T$.

Každá $n$-tice, pro kterou tato rovnost nastane, se nazývá řešení této rovnice.

### Soustava lineárních rovnic

**Definice 7.8**
Nechť $T$ je číselné těleso a $a_{ij}, b_i \in T$ pro každé $i = 1, \ldots, m$ a každé $j = 1, \ldots, n$. Úloha určit všechny $n$-tice $(x_1, \ldots, x_n) \in T^n$, pro které současně platí

$$(S) \left\{ \begin{array}{cr} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j = a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1, & (R_1) \\ \vdots & \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j = a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n = b_m, & (R_m) \end{array} \right.$$

se nazývá *soustava $m$ lineárních rovnic* (SLR) o $n$ neznámých nad $T$.

Každá $n$-tice splňující (S) se nazývá řešení této soustavy.

### Soustava lineárních rovnic

- Jsou-li $M_1, \ldots, M_m$ množiny řešení rovnic $(R_1), \ldots, (R_m)$, pak pro množinu řešení soustavy $(S)$ platí

$$M = M_1 \cap \ldots \cap M_m \ .$$

- Soustavu $(S)$ můžeme zkráceně zapisovat jako

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \ldots, m \ .$$

### Matice soustavy lineárních rovnic

**Definice 7.9**
Dána SLR $(S)$. Pak matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ resp. } (A|\vec{b}^T) = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

nazýváme *matice soustavy* $(S)$, resp. *rozšířená matice soustavy* $(S)$,

**Matice soustavy lineárních rovnic**

- Dána SLR $(S)$, $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(T)$ nechť je její matice.
- Označme $\vec{x}^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{b}^T = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.
- Soustavu $(S)$ pak můžeme psát v tzv. *maticovém tvaru*

$$A\vec{x}^T = \vec{b}^T.$$

**Řešitelnost SLR**

**Definice 7.10**
SLR $A\vec{x}^T = \vec{b}^T$ se nazývá *řešitelná*, jestliže existuje alespoň jedno její řešení. Dvě soustavy lineárních rovnic $A\vec{x}^T = \vec{b}^T$ a $B\vec{x}^T = \vec{c}^T$ nazveme *ekvivalentní*, jestliže mají stejné množiny řešení.

**Věta 7.6**
SLR $A\vec{x}^T = \vec{b}^T$ je řešitelná právě když je vektor $\vec{b}$ lineární kombinací sloupců matice $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(T)$.

**Věta 7.7**
Dány soustavy $A\vec{x}^T = \vec{b}^T$ a $B\vec{x}^T = \vec{c}^T$ $m$ LR o $n$ neznámých nad $T$. Je-li $(A|\vec{b}^T) \sim (B|\vec{c}^T)$, pak jsou tyto dvě soustavy ekvivalentní.

**Řešitelnost SLR**

**Věta 7.8 (Frobeniova nebo Kroneckerova – Cappeliova)**
Soustava lineárních rovnic $A\vec{x}^T = \vec{b}^T$ je řešitelná právě když $\mathrm{h}(A) = \mathrm{h}(A|\vec{b}^T)$.

Je-li v této situaci navíc $\mathrm{h}(A) = n$, pak má tato soustava právě jedno řešení, pokud $\mathrm{h}(A) < n$, pak má nekonečně mnoho řešení (závislých na $n - \mathrm{h}(A)$ parametrech).

**Gaussova eliminační metoda**

- Dána soustava lineárních rovnic $A\vec{x}^T = \vec{b}^T$, kde $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(T)$.
- Matici $(A|\vec{b}^T)$ převedeme pomocí EŘT na matici $(B|\vec{c}^T)$, která je v GT.
- Pracujeme tedy dál s jinou soustavou, která má ale podle Věty 7.7 stejnou množinu řešení jako daná.

**Gaussova eliminační metoda**

- Je-li $\mathrm{h}(A) = \mathrm{h}(A|\vec{b}^T) = h < n$, pak

$$(B|\vec{c}^T) = \left(\begin{array}{cccccc|c} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1h} & \dots & b_{1n} & c_1 \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2h} & \dots & b_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{hh} & \dots & b_{hn} & c_h \\ 0 & & & \dots & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & & & \dots & & 0 & 0 \end{array}\right).$$

- Přitom se dá vždy zařídit (prohození sloupců), že $b_{ii} \neq 0$ pro každé $i = 1, 2, \dots, h$.

**Gaussova eliminační metoda**

- Z rovnice $b_{hh}x_h + \dots + b_{hn}x_n = c_h$, která odpovídá poslednímu nenulovému řádku matice $(B|\vec{c}^T)$ vypočítáme $x_h$ v závislosti na $x_{h+1}, \dots, x_n$.
- Z rovnice, která odpovídá předposlednímu nenulovému řádku vypočítáme v závislosti na $x_{h+1}, \dots, x_n$ neznámou $x_{h-1}$.

$$\vdots$$

- Z rovnice odpovídající prvnímu řádku $(B|\vec{c}^T)$ dopočítáme $x_1$ v závislosti na $x_{h+1}, \dots, x_n$.

**Gaussova eliminační metoda**

- Jestliže $\mathrm{h}(A) = \mathrm{h}(A|\vec{b}^T) = n$, pak

$$(B|\vec{c}^T) = \left(\begin{array}{cccc|c} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} & c_1 \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} & c_n \\ 0 & & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & & \dots & 0 & 0 \end{array}\right).$$

**Gaussova eliminační metoda**

- Z rovnice $b_{nn}x_n = c_n$, která odpovídá $n$-tému řádku matice $(B|\vec{c}^T)$ máme
$$x_n = \frac{1}{b_{nn}} \cdot c_n \;.$$
- Z rovnice, která odpovídá předposlednímu nenulovému řádku vypočítáme
$$x_{n-1} = \frac{1}{b_{n-1,n-1}} \cdot (c_{n-1} - b_{n-1,n} \cdot x_n) \;.$$
$$\vdots$$
- Až konečně z rovnice odpovídající prvnímu řádku $(B|\vec{c}^T)$ dopočítáme
$$x_1 = \frac{1}{b_{11}} \cdot (c_1 - b_{1n} \cdot x_n - b_{1,n-1} \cdot x_{n-1} - \cdots - b_{12} \cdot x_2) \;.$$

**Cramerovo pravidlo**

- Další možnost jak řešit SLR.
- Nelze použít vždy.
- Pouze když soustava obsahuje tolik rovnic jako neznámých a navíc hodnost její matice je plná.

**Věta 7.9 (Cramerovo pravidlo)**
Dána soustava $n$ lineárních rovnic $A\vec{x}^T = \vec{b}^T$ o $n$ neznámých nad $T$ taková, že platí $\det(A) \neq 0$. Pak tato soustava má právě jedno řešení $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, pro něž platí
$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)} \qquad \forall j = 1, \dots, n.$$
Přitom matice $A_j$ je matice, kterou získáme nahrazením $j$-tého sloupcového vektoru matice $A$, tedy $\vec{a_j}^T$, vektorem $\vec{b}^T$.

**Cramerovo pravidlo**

*Příklad 7.5*
Určete druhou složku vektoru řešení soustavy
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & -9 \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & - & x_3 & = & 25 \end{array} \;.$$

**Řešení:** Podle Cramerova pravidla je $x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}$, kde
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 \end{vmatrix} = 20 \quad \text{a} \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & -9 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 25 & -1 \end{vmatrix} = -60,$$
tedy $x_2 = -3$.

# 3 Homogenní soustavy lineárních rovnic

**Obsah**

# Obsah

### Homogenní SLR

**Definice 7.11**
Soustava lineárních rovnic $A\vec{x}^T = \vec{b}^T$ se nazývá *homogenní*, jestliže $\vec{b} = \vec{o}$. V opačném případě se nazývá *nehomogenní*.

**Věta 7.10**
Nechť $A\vec{x}^T = \vec{o}^T$ je homogenní SLR nad $T$ taková, že $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(T)$ a $\mathrm{h}(A) = h$. Pak všechna řešení této soustavy tvoří podprostor v AVP $T^n$ (*prostor řešení* této soustavy). Jeho dimenze je přitom rovna $n - h$.

### Fundamentální systém řešení homogenní SLR

**Definice 7.12**
*Fundamentálním systémem řešení* (FSŘ) homogenní SLR $A\vec{x}^T = \vec{o}^T$ rozumíme každou bázi prostoru řešení této soustavy.

- Podle definice je zřejmé, že FSŘ jsou určena všechna řešení této soustavy (báze je množina generátorů).
- Pokud je matice soustavy $A\vec{x}^T = \vec{o}^T$ čtvercová, má tato soustava právě jedno řešení právě když $\det(A) \neq 0$.
- Jediným řešením je přitom $\vec{o}$ (tzv. triviální řešení).
- Dimenze prostoru řešení takovéto soustavy je potom 0, a nemá smysl mluvit o jejím FSŘ.

### Fundamentální systém řešení homogenní SLR

*Příklad 7.6*
Určete FSŘ soustavy

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - \phantom{2}x_3 + 3x_4 - 2x_5 &= 0\\
2x_1 + \phantom{2}x_2 \phantom{{}- 2x_3} + \phantom{3}x_4 - 3x_5 &= 0\\
5x_1 + 4x_2 - \phantom{2}x_3 + 5x_4 - 8x_5 &= 0\\
3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - \phantom{8}x_5 &= 0.
\end{aligned}$$

**Řešení:** Matici soustavy převedeme na GT, tedy

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & -1 & 5 & -8 \\ 0 & 3 & -2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

**Fundamentální systém řešení homogenní SLR**

*Příklad 7.6*
**Řešení:**

- Tedy $\mathrm{h}(A) = 2$, a soustava má proto nekonečně mnoho řešení, která budou záviset na 3 parametrech.
- Za parametry zvolíme např. $x_2, x_3, x_4$.
- Pak ze dvou nenulových řádků nalezené matice v GT získáme tzv. *obecné řešení* soustavy: $(4x_2 - 3x_3 - 7x_4, x_2, x_3, x_4, 3x_2 - 2x_3 + 5x_4)$.
- FSŘ získáme tak, že trojici $(x_2, x_3, x_4)$ volíme v obecném řešení postupně jako jednotlivé prvky kanonické báze v AVP $T^3$, tzn.

| $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |

$\Longrightarrow$

FSŘ je tedy trojice:

$$\begin{aligned} \vec{u_1} &= (4, 1, 0, 0, 3) \\ \vec{u_2} &= (-3, 0, 1, 0, -2) \\ \vec{u_3} &= (-7, 0, 0, 1, 5) \end{aligned}$$

**Vztah řešení homogenní SLR a nehomogenní SLR**

**Definice 7.13**
Nechť $A\vec{x}^T = \vec{b}^T$ je nehomogenní SLR nad $T$. Pak homogenní soustava $A\vec{x}^T = \vec{o}^T$ se nazývá *soustava přiřazená* k $A\vec{x}^T = \vec{b}^T$.

**Věta 7.11**
Nechť $A\vec{x}^T = \vec{b}^T$ je nehomogenní SLR ($A \in \mathcal{M}_{m\times n}(T)$) nad $T$ a nechť $\vec{u}$ je některé její řešení. Pak množina všech řešení této soustavy je tvořena právě všemi vektory $\vec{u}+\vec{v} \in T^n$, kde $\vec{v}$ je libovolné řešení přiřazené homogenní soustavy.