Podobnost matic

Definice 8.4
Dány matice $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Jestliže existuje regulární matice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ tak, že $B = P^{-1}AP$, pak říkáme, že matice B je *podobná* matici A a píšeme $A \simeq B$.

- Takto zavedená binární relace je ekvivalence na $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.
- Existuje tedy rozklad $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ na třídy vzájemně podobných matic.

Věta 8.5
Nechť $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ jsou regulární. Jestliže $A \simeq B$, pak

1. $\det(A) = \det(B)$,
2. $\mathrm{h}(A) = \mathrm{h}(B)$.

Charakteristická matice

Definice 8.5
Charakteristickou maticí matice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ rozumíme matici $A - \lambda E$, tedy

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Příklad 8.3
Charakteristická matice k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

je matice

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom matice, vlastní čísla

Definice 8.6
Charakteristickým polynomem matice $A = \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ nazýváme determinant matice $A - \lambda E$. Píšeme $\mathrm{ch}_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$. Jeho kořeny nazýváme *vlastní čísla* matice A.

Příklad 8.4
Charakteristický polynom matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

je polynom

$$\mathrm{ch}_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 3.$$

Vlastní čísla matice A jsou tedy $1 \pm \mathrm{i}\sqrt{2}$.

Spektrum matice

- Matice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ má tedy právě n vlastních čísel v množině $\mathbf{C}$ a to včetně jejich algebraických násobností.
- Množina vlastních čísel matice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ se nazývá *spektrum* matice A, píšeme $\mathrm{Spec}(A)$. Tedy

$$\mathrm{Spec}(A) = \{\lambda \in \mathbf{C} : \ \det(A - \lambda E) = 0\}.$$

- Nechť $\mathrm{Spec}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$, a přitom násobnost vlastního čísla λ_i je rovna n_i. Pak $k \leq n$ a $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

Věta 8.6
Podobné matice mají stejná spektra, včetně algebraických násobností vlastních čísel.

Podobnost matic, charakterizace

Věta 8.7
Dány matice $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ se stejným charakteristickým polynomem $(\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$. Pak matice A a B jsou podobné právě když platí

$$\mathrm{h}(A - \lambda_i E)^j = \mathrm{h}(B - \lambda_i E)^j \qquad \forall i = 1, \dots, k \quad \forall j = 1, \dots, n_i.$$

Podobnost matic, charakterizace

Příklad 8.5
Pro matice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \\ -5 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -7 & -2 & 9 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

vzhledem k předchozímu kritériu máme

$$A \simeq C \not\simeq B \not\simeq D,$$

a to proto, že matice A, C, D mají stejný charakteristický polynom,

$$\mathrm{ch}(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2,$$

přitom ale jiný než matice B a navíc

Podobnost matic, charakterizace

Příklad 8.5
platí, že

$$\mathrm{h}(A-E)=2, \quad \mathrm{h}(C-E)=2, \quad \mathrm{h}(D-E)=2,$$

dále

$$\mathrm{h}(A-2E)=2, \quad \mathrm{h}(C-2E)=2, \quad \mathrm{h}(D-2E)=1,$$

a konečně

$$\mathrm{h}(A-2E)^2=1, \quad \mathrm{h}(C-2E)^2=1, \quad \mathrm{h}(D-2E)^2=1.$$

Vlastní vektory čtvercové matice

Definice 8.7
Nechť λ je vlastní číslo matice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Pak vektor $\vec{x} \in \mathbf{C}^n$ splňující $A\vec{x}^T = \lambda\vec{x}^T$ se nazývá *vlastní vektor* matice A příslušný k vlastnímu číslu λ.

- Maticovou rovnici $A\vec{x}^T = \lambda\vec{x}^T$ můžeme ekvivalentně psát ve tvaru

  $$(A-\lambda E)\vec{x}^T = \vec{o}^T,$$

  což je homogenní SLR s maticí $(A-\lambda E) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.
- Tato matice je pro každé vlastní číslo λ matice A singulární.
- To ale znamená, že uvedená homogenní soustava má nekonečně mnoho řešení.
- Tedy jednomu vlastnímu číslu λ odpovídá nekonečně mnoho vlastních vektorů, které tvoří podprostor v $\mathbf{C}^n$, který značíme N_λ. Jeho dimenze je rovna $n - h(A-\lambda E)$.

Vlastní vektory čtvercové matice

Příklad 8.6
Charakteristická matice k matici

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

je matice

$$A-\lambda E = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix},$$

a tedy $\mathrm{ch}_A(\lambda) = -(\lambda-2)^2(\lambda-1)$. Pak $\mathrm{Spec}(A) = \{1,2\}$.

Vlastní vektory čtvercové matice

Příklad 8.6
Pro $\lambda = 1$ řešíme soustavu:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pak $N_1 = [\{(2,0,3)\}]$.

Pro $\lambda = 2$ řešíme soustavu:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pak $N_2 = [\{(1,0,1),(0,1,0)\}]$.

Geometrická násobnost vlastního čísla

Věta 8.8
Vlastní vektory odpovídající různým vlastním číslům matice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ jsou lineárně nezávislé.

Definice 8.8
Nechť λ je vlastní číslo matice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Dimenzi podprostoru N_λ říkáme geometrická násobnost vlastního čísla λ.

Geometrická násobnost vlastního čísla

- Geometrická násobnost vlastního čísla λ matice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ nemusí být vždy stejná jako jeho algebraická násobnost.
- Obecně pro $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$ platí, že jeho geometrická násobnost není větší než algebraická, tedy $\mathrm{GN}(\lambda) \leq \mathrm{AN}(\lambda)$.
- Platí, že podobné matice mají stejná spektra a AN vlastních čísel. To samé se dá ukázat pro GN.
- Obráceně neplatí! Např. matice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

  mají stejné spektrum, $\mathrm{Spec}(A) = \mathrm{Spec}(B) = \{7\}$, v obou případech $\mathrm{AN}(7) = 4$, a dokonce pro obě matice $\mathrm{GN}(7) = 2$. Přesto $A \not\sim B$.

Blokově diagonální matice

Definice 8.9
Matice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ se nazývá *blokově diagonální*, jestliže:

1. $A = (A_{ij})_{i,\ j=1,\dots,k}$, kde $A_{ij} \in \mathcal{M}_{n_i \times n_j}(\mathbf{C})$, a přitom $\sum_{i=1}^{k} n_i = \sum_{j=1}^{k} n_j = n$;
2. $A_{ii} \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbf{C})$ pro každé $i = 1, 2, \dots, k$;
3. $A_{ij} = N_{n_i \times n_j}$ pro každé $i, j = 1, 2, \dots, k$, pokud $i \neq j$.

Tedy blokově diagonální matice je obecně matice ve tvaru

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & N_{n_1 \times n_2} & \dots & N_{n_1 \times n_k} \\ \hline N_{n_2 \times n_1} & A_{22} & \dots & N_{n_2 \times n_k} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline N_{n_k \times n_1} & N_{n_k \times n_2} & \dots & A_{kk} \end{array}\right).$$

Jordanův kanonický tvar

Definice 8.10
Jordanovým polem (r-tého stupně) nazýváme pro libovolné komplexní číslo ρ matici $A \in \mathcal{M}_r(\mathbf{C})$ ve tvaru

$$A = \begin{pmatrix} \rho & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \rho & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \rho & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \rho \end{pmatrix}.$$

Jordanovou maticí (nebo *Jordanovým kanonickým tvarem matice*) nazýváme blokově diagonální matici, jejíž všechny diagonální bloky jsou Jordanova pole.

Jordanův kanonický tvar

Příklad 8.7
Matice

$$A = \left(\begin{array}{c|cc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

je v JKT, přičemž Jordanovy buňky na hlavní diagonále v A jsou

$$(2), \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Jordanův kanonický tvar

Věta 8.9
Každá matice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ je podobná některé matici v Jordanově kanonickém tvaru. Je-li podobná dvěma, pak se tyto liší pouze pořadím diagonálních polí.

- Nechť $\mathrm{Spec}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$, a přitom alg. násobnost vlastního čísla λ_i je rovna n_i a jeho geom. násobnost r_i.
- Pak číslu λ_i odpovídá v matici v JKT právě r_i diagonálních polí s n_i hodnotami λ na hlavní diagonále.

Jordanův kanonický tvar

Příklad 8.8
Najděte Jordanův kanonický tvar matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$