ŘEŠENÍ VYBRANÝCH KONSTRUKČNÍCH ÚLOH

Marie CHODOROVÁ, Lenka JUKLOVÁ
Jaroslav ŠVRČEK, Vladimír VANĚK

Obsah

Úvod

Konstrukční úlohy patří ve výuce planimetrie na základní i na střední škole mezi základní geometrická témata. Jejich cílem je sestrojit pomocí pravítka, kružítka s pohyblivým poloměrem (popř. úhloměru) daný planimetrický útvar, který je zadán pomocí některých jeho metrických, polohových anebo smíšených údajů. Uvedený studijní text je zaměřen na konstrukce trojúhelníku daného výhradně pomocí základních údajů, zejména pak pomocí délek tzv. *základních metrických prvků v trojúhelníku.* Všechny uvedené úlohy mají přitom *parametrický* charakter, tj. nepracujeme zde s konkrétními číselnými hodnotami u daných metrických údajů.

Řešení každé parametrické konstrukční úlohy má zpravidla následující části: rozbor úlohy, popis konstrukce, důkaz správnosti konstrukce (provádí se však pouze v případě, kdy v konstrukci využíváme neekvivaletních kroků v postupu – v popisu konstrukce), podmínky řešitelnosti a diskuse o počtu možných řešení dané parametrické konstrukční úlohy. V případě neparametrických konstrukčních úloh zařazujeme bezprostředně za popis konstrukce ještě provedení vlastní konstrukce trojúhelníku. Vzhledem k tomu, že mezi prezentovanými úlohami jsou výhradně ty, jejichž popis konstrukce neobsahuje žádné neekvivaletní kroky, nebudeme důkaz správnosti konstrukce u žádné z úloh uvádět.

Rozbor úlohy je těžištěm řešení každé konstrukční úlohy. Jeho součástí je obrázek znázorňující cílovou situaci. Jsou v něm zpravidla zřetelně vyznačeny všechny zadané metrické údaje. V rámci rozboru je provedena potřebná analýza celé situace, která obsahuje nalezení nutných (v případě ekvivalentních kroků také postačujících) podmínek vedoucích ke stanovení postupu (popisu konstrukce) při řešení úlohy.

Popis konstrukce obsahuje v jednotlivých krocích (bodech) stručný záznam postupu konstrukce hledaného planimetrického útvaru (trojúhelníku). Je založen na provedené analýze řešení v rámci rozboru úlohy. V případě *neparametrické* úlohy provedeme bezprostředně poté **konstrukci** konkrétního hledaného útvaru (trojúhelníku) s danými metrickými údaji.

Důkaz správnosti konstrukce (zkoušku správnosti) provádíme – podobně jako u algebraických úloh – pokud v rozboru úlohy používáme důsledkové úpravy (úvahy). V takovém případě je nutno vyloučit ta řešení, která nesplňují podmínky dané úlohy. V případě použití shodných nebo podobných zobrazení, popř. množin bodů dané vlastnosti není zpravidla nutno zkoušku provádět.

Podmínky řešitelnosti uvádíme při řešení každé parametrické konstrukční úlohy. Na základě provedeného rozboru a následného popisu konstrukce v nich sumarizujeme všechny (nutné a postačující) podmínky potřebné ke konstrukci daného útvaru (trojúhelníku).

Diskuse o počtu řešení je povinnou součástní jak parametrických, tak neparametrických konstrukčních úloh. V případě parametrických úloh se zohledňují především nalezené podmínky řešitelnosti dané konstrukční úlohy.

Připomínáme zde, že pro libovolné tři nekolineární body A, B, C v rovině definujeme *trojúhelník* ABC jako průnik polorovin ABC, BCA a CAB, tj.

$$\Delta ABC = \overrightarrow{ABC} \cap \overrightarrow{CAB} \cap \overrightarrow{BCA}.$$

V celém textu budeme dále (s ohledem na vyloučení tzv. *nepřímo* shodných trojúhelníků) používat značení vrcholů konstruovaných trojúhelníků v matematicky *kladném smyslu.*

Základní metrické prvky v trojúhelníku ABC

a, b, c — po řadě délky jeho stran BC, CA, AB,

α, β, γ — po řadě velikosti vnitřních úhlů při vrcholech A, B, C,

t_a, t_b, t_c — délky jeho těžnic po řadě z vrcholů A, B, C,

v_a, v_b, v_c — délky jeho výšek po řadě z vrcholů A, B, C,

r, ρ — po řadě poloměry jeho kružnice opsané, vepsané.

Další používaná označení

T_a, T_b, T_c — po řadě středy stran BC, CA, AB trojúhelníku ABC,

V_a, V_b, V_c — po řadě paty z vrcholů A, B, C v trojúhelníku ABC,

O, I — po řadě střed kružnice opsané, vepsané trojúhelníku ABC,

$k(O; r)$ — kružnice k se středem O a poloměrem r,

$d(p, A) = d(A, p)$ — vzdálenost bodu A od přímky p,

$d(p, q)$, kde $p \parallel q$ — vzdálenost rovnoběžek p a q,

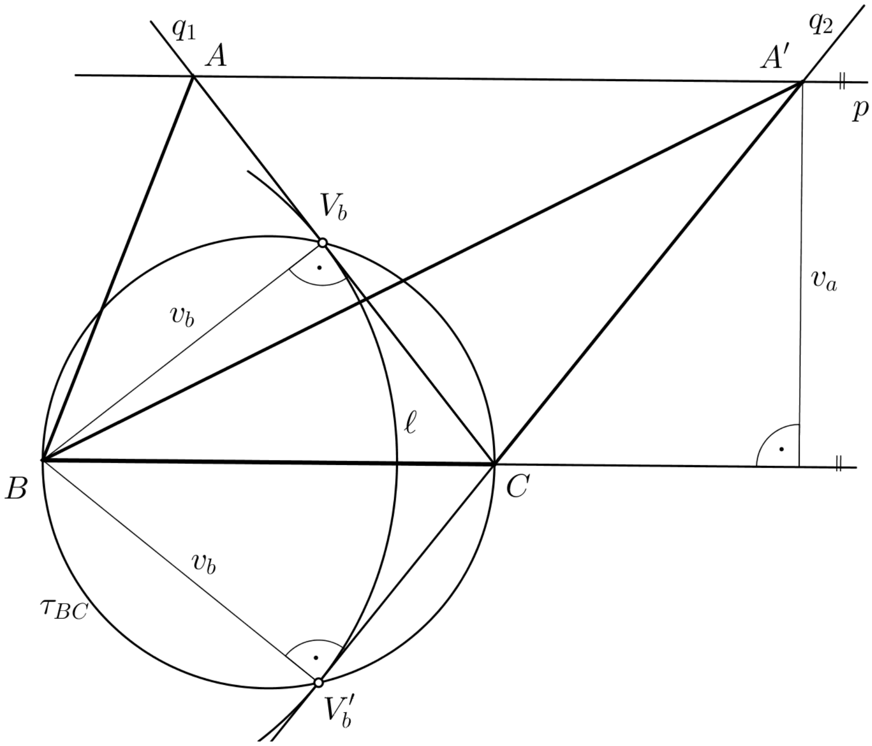
$S(T)$ — středová souměrnost se středem v bodě T,

o_{AB} — osa úsečky AB,

τ_{XZ} — Thaletova kružnice sestrojená nad úsečkou XZ jako průměrem.

Úloha 1 Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: a, v_a, v_b.

Rozbor: Vrchol A konstruovaného trojúhelníku leží v příslušné polorovině vyťaté přímkou BC ve vzdálenosti v_a od přímky BC, tj. bod A leží na rovnoběžce p s přímkou BC vzdálené o v_a od BC. Pata V_b výšky v_b z vrcholu B leží na Thaletově kružnici τ_{BC} o průměru BC, neboť tato kružnice (s výjimkou bodů B a C) je množinou všech bodů v rovině, z nichž vidíme úsečku BC pod pravým úhlem. Současně však vzdálenost bodů B a V_b je rovna v_b, tudíž V_b leží rovněž na kružnici $k(B; v_b)$, neboť tato kružnice je množinou všech bodů v rovině, které mají od bodu B vzdálenost v_b. Odtud plyne konstrukce.



Obr. 1

Zkrácený zápis:

$$\overline{BC} : |BC| = a,$$

$$(d\,(A, BC) = v_a) \Rightarrow [(A \in p)\,, (p \parallel BC)\,, (d\,(p, BC) = v_a)]\,,$$

$$\left(|\sphericalangle BV_bC| = \tfrac{1}{2}\pi\right) \Rightarrow (V_b \in \tau_{BC})\,,$$

$$(|BV_b| = v_b) \Rightarrow [V_b \in k(B; v_b)]\,.$$

Konstrukce:

1. $\overline{BC}$; $|BC| = a$,
2. τ_{BC},

3. k; $k(B; v_b)$,
4. p; $p \parallel BC$, $d\,(p, BC) = v_a$,
5. V_b; $V_b = k(B; v_b) \cap \tau_{BC}$,
6. A; $A = p \cap CV_b$
7. $\triangle ABC$.

Podmínky řešitelnosti a diskuse:

$v_b \leq a$.

- 1 řešení, je-li $v_b = a$,
- 2 řešení, je-li $v_b < a$.

Úloha 2 Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: a, v_a, t_b.

Rozbor: Vrchol A trojúhelníku ABC leží v příslušné polorovině vyťaté přímkou BC na rovnoběžce p s přímkou BC, ve vzdálenosti v_a. Dále je zadaná těžnice t_b trojúhelníku. Střed T_b strany AC leží na ose r pásu rovnoběžek p a BC a současně na kružnici $k(B; t_b)$. Odtud plyne konstrukce.

Zkrácený zápis:

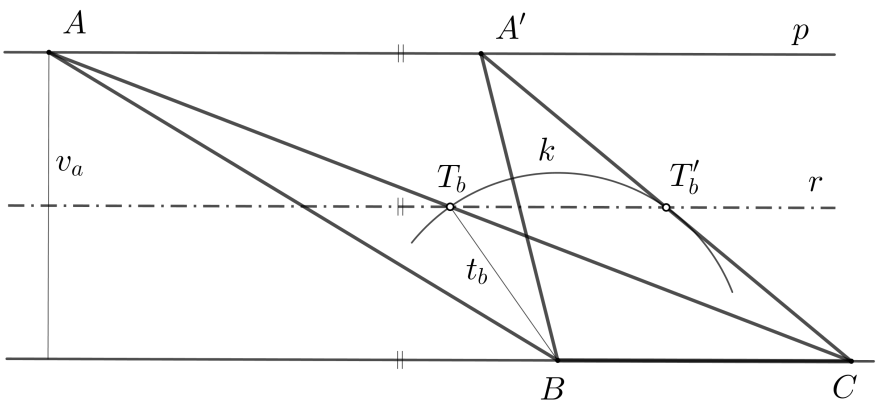
$$\overline{BC} : |BC| = a,$$

$$(d\,(A, BC) = v_a) \Rightarrow [(A \in p)\,, (p \parallel BC)\,, (d\,(p, BC) = v_a)]\,,$$

$$(T_b \ldots \text{ střed } AC) \Rightarrow \left[(T_b \in r)\,, (p \parallel BC)\,, \left(d\,(r, BC) = \tfrac{1}{2} v_a\right)\right],$$

$$(|BT_b| = t_b) \Rightarrow [T_b \in k(B; t_b)]\,.$$

Konstrukce:



Obr. 2

1. $\overline{BC}$; $|BC| = a$,
2. p; $p \parallel BC$, $d\,(p, BC) = v_a$,
3. r; $r \parallel BC$, $d\,(r, BC) = \frac{1}{2}v_a$,
4. k; $k(B; t_b)$,
5. T_b; $T_b = k \cap r$,
6. $\triangle ABC$.

Podmínky řešitelnosti a diskuse:

$t_b \geq \frac{1}{2}v_a$

- 1 řešení, je-li $t_b = \frac{1}{2}v_a$,
- 2 řešení, je-li $t_b > \frac{1}{2}v_a$.

Úloha 3 Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: a, t_b, β.

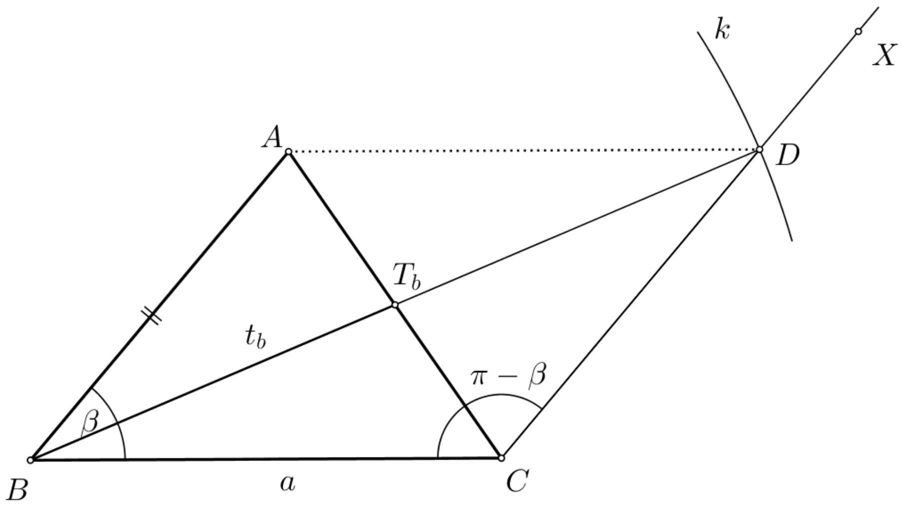
Rozbor: Uvažujme rovnoběžník $ABCD$, viz obr. 3. V trojúhelníku BCD jsou dány délky stran BC ($|BC| = a$) a BD ($|BD| = 2t_b$) a úhel BCD ($|\sphericalangle BCD| = \pi - \beta$). Bod T_b je průsečík úhlopříček AC a BD rovnoběžníku $ABCD$.

Zkrácený zápis:

$$\overline{BC} : |BC| = a,$$

$$(|BD| = 2t_b) \Rightarrow ([D \in k(B; 2t_b)]) \, ,$$

$$(|\sphericalangle BCD| = \pi - \beta) \Rightarrow \left(D \in \overrightarrow{CX}, |\sphericalangle BCX| = \pi - \beta\right).$$



Obr. 3

Konstrukce:

1. $\overline{BC}$; $|BC| = a$,

2. $\overrightarrow{CX}; |\sphericalangle BCX| = \pi - \beta$,
3. k; $k(B; 2t_b)$,
4. D; $D = k \cap \overrightarrow{CX}$,
5. T_b; ... střed úsečky BD,
6. A; $S\,(T_b) : C \to A$,
7. $\triangle ABC$.

Podmínky řešitelnosti a diskuse:

a) $\beta \in \left(0; \frac{1}{2}\pi\right)$, pak $\pi - \beta \in \left(\frac{1}{2}\pi; \pi\right)$.
   - 1 řešení, je-li $a \leq 2t_b$.

b) $\beta \in \left\langle \frac{1}{2}\pi; \pi\right)$, pak $\pi - \beta \in \left(0; \frac{1}{2}\pi\right)$.
   - 1 řešení, je-li $a \leq 2t_b$,
   - 2 řešení, je-li $x = a\sin(\pi - \beta) \leq 2t_b < a$.

Úloha 4 Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: a, t_b, α .

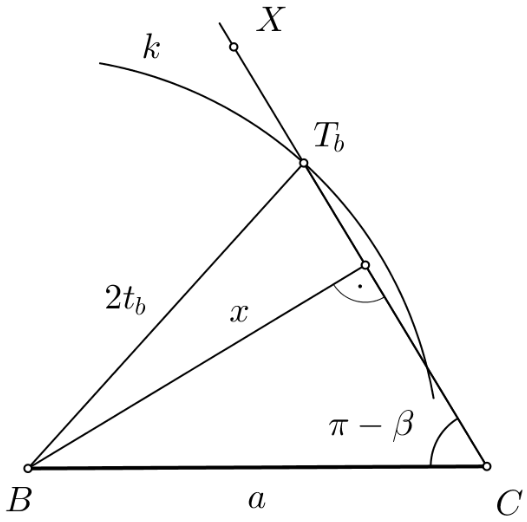
Rozbor: Uvažujme rovnoběžník $ABCD$, viz obr. 5, kde T_b je průsečíkem jeho úhlopříček, tj. T_b je střed strany AC a současně střed úsečky BD. Strany BC a AD jsou shodné a jejich velikost je a. Velikost úhlu BAT_b je α. Odtud je patrné, že bod A leží na kružnicovém oblouku ω, z něhož vidíme těžnici BT_b pod daným úhlem α. Protože $|AD| = a$ leží bod A současně na kružnici $k(D; a)$.

Zkrácený zápis:

$$\overline{BT_b} : |BT_b| = t_b,$$

$$(|\sphericalangle BAT_b| = \alpha) \Rightarrow (A \in \rho = \{X, |\sphericalangle BXT_b| = \alpha\}),$$

$$(|AD| = a) \Rightarrow [A \in k(D; a)].$$



Obr. 4

Konstrukce:

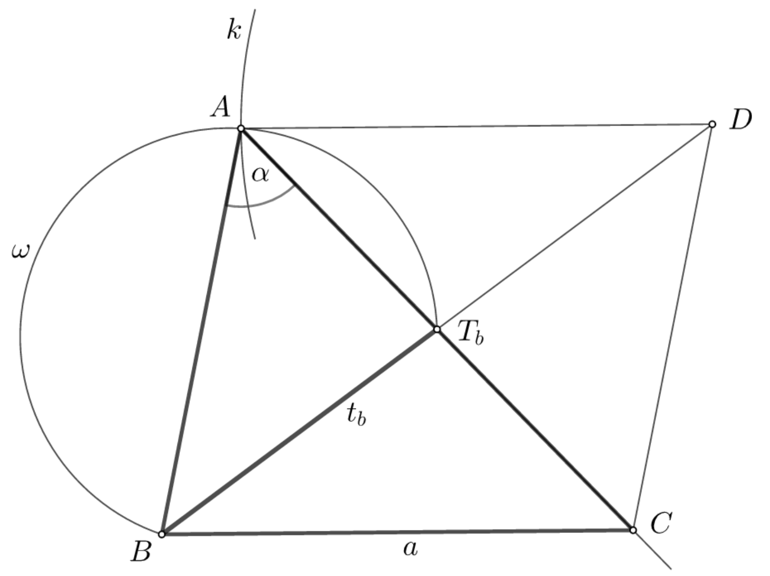
1. $\overline{BT_b}$; $|BT_b| = t_b$,
2. D; $S\,(T_b) : B \longrightarrow D$,
3. ω; $\omega = \{X, |\sphericalangle BXT_b| = \alpha\}$,
4. k; $k(D; a)$,
5. A; $A = k \cap \omega$,
6. $\triangle ABC$.

Podmínky řešitelnosti a diskuse:

a) $\alpha \in \left(0; \frac{1}{2}\pi\right)$

Platí:

$$|LM| = \frac{t_b}{2\,\mathrm{tg}\alpha},$$



Obr. 5

$$|DL| = \sqrt{\left(\frac{3t_b}{2}\right)^2 + \left(\frac{t_b}{2\,\mathrm{tg}\alpha}\right)^2} = \frac{t_b}{2\,\mathrm{tg}\alpha}\sqrt{1+9\,\mathrm{tg}^2\alpha},$$

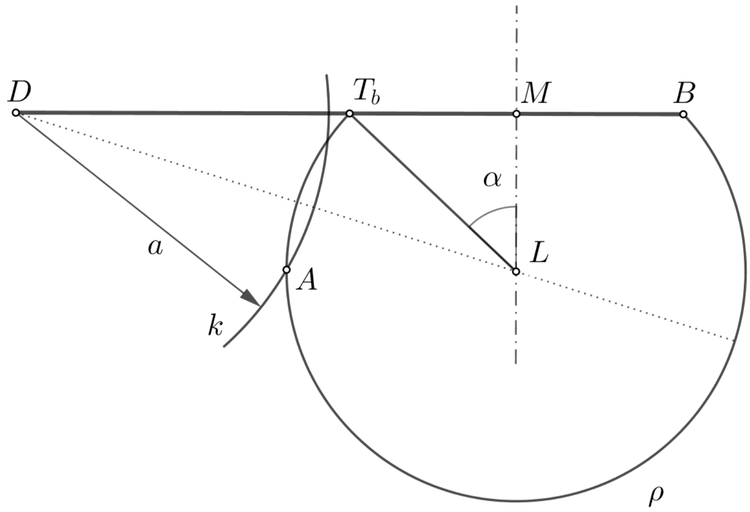
$$|LT_b| = \frac{t_b}{2\sin\alpha},$$

$$||DL| - |LT_b|| \le a \le |DL| + |LT_b|\,.$$

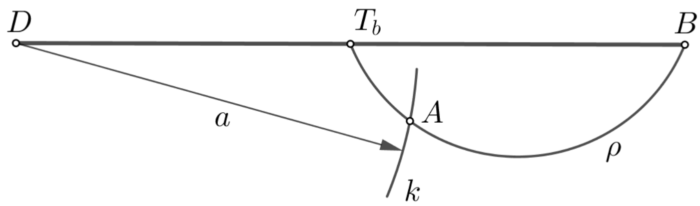
b) $\alpha \in \left\langle \frac{1}{2}\pi; \pi\right)$

- 1 řešení, je-li

$$\left[\alpha \in \left(0; \tfrac{1}{2}\pi\right) \wedge (t_b \le a \le 2t_b)\right] \vee$$
$$\vee \quad \left[\alpha \in \left\langle \tfrac{1}{2}\pi; \pi\right) \wedge (t_b < a < 2t_b)\right],$$



Obr. 6



Obr. 7: $t_b < a < 2t_b$

- 2 řešení, je-li

$$\alpha \in \left(0; \tfrac{1}{2}\pi\right) \wedge$$
$$\wedge \quad \{(||DL| - |LT_b|| \leq a \leq t_b) \vee (2t_b \leq a \leq |DL| + |LT_b|)\}$$

$$\alpha \in \left(0; \tfrac{1}{2}\pi\right) \wedge \left\{ \left(\left[\tfrac{t_b}{2\mathrm{tg}\alpha} \sqrt{1 + 9\mathrm{tg}^2\alpha} - \tfrac{t_b}{2\sin\alpha} \right] \leq a \leq t_b \right) \vee \right.$$
$$\left. \vee \quad \left(2t_b \leq a \leq \left[\tfrac{t_b}{2\mathrm{tg}\alpha} \sqrt{1 + 9\mathrm{tg}^2\alpha} + \tfrac{t_b}{2\sin\alpha} \right] \right) \right\}.$$

Úloha 5 Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: a,v_b, r.

Rozbor: Nechť V_b je pata výšky z vrcholu B trojúhelníku ABC. Vzdálenost bodů B a V_b je v_b, proto bod V_b leží na kružnici $l(B, v_b)$, neboť kružnice $l(B, v_b)$ je množina všech bodů v rovině, které mají od bodu B vzdálenost v_b. Úhel BV_bC je pravý, tedy bod V_b leží současně na Thaletově kružnici sestrojené nad BC, protože Thaletova kružnice τ_{BC} je množina všech bodů v rovině, ze kterých vidíme úsečku BC pod pravým úhlem. Bod A leží na kružnici $k(O;r)$ opsané trojúhelníku ABC, kde $|OB| = |OC| = r$.

Zkrácený zápis:

$$\overline{BC} : |BC| = a,$$

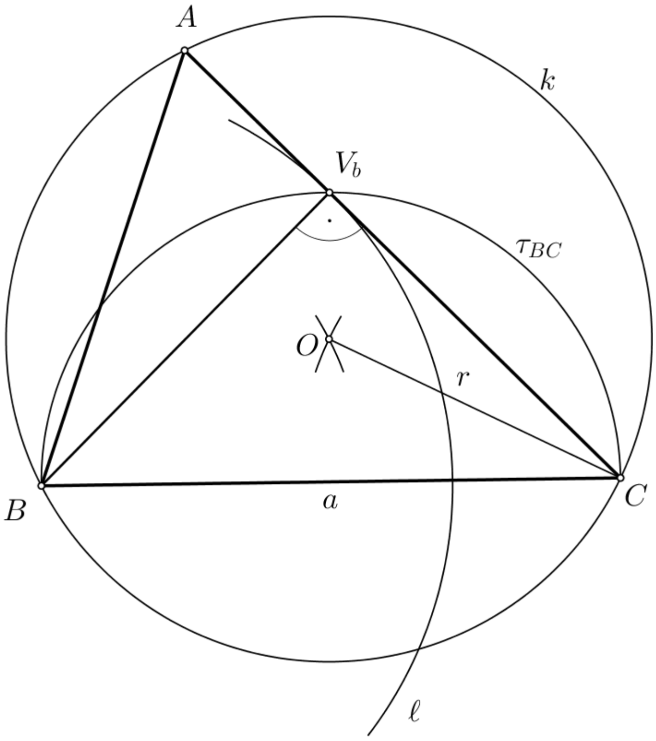
$$(|BV_b| = v_b) \Rightarrow [V_b \in \ell(B, v_b)]\,,$$

$$\left(|\sphericalangle BV_bC| = \tfrac{1}{2}\pi\right) \Rightarrow (V_b \in \tau_{BC})\,,$$

$$(|OA| = |OB| = |OC| = r) \Rightarrow A \in k(O;r)$$

Konstrukce:

1. $\overline{BC}$; $|BC| = a$,
2. τ_{BC},
3. ℓ; $\ell(B, v_b)$,
4. V_b; $V_b = \ell \cap \tau_{BC}$,
5. O; $|OB| = |OC| = r$,
6. k; $k(O;r)$,
7. A; $A = k \cap CV_b$,
8. $\triangle ABC$.



Obr. 8

Podmínky řešitelnosti a diskuse:

$[(a < 2r) \wedge (v_b \leq a)] \vee [(a = 2r) \wedge (v_b < a)]$

- 1 řešení, je-li

  $$[(a < 2r) \wedge (v_b = a)] \vee [(a = 2r) \wedge (v_b < a)] \vee [(a < 2r) \wedge (v_b = r)]\,,$$

- 2 řešení, je-li $[(a < 2r) \wedge (v_b < a) \wedge (v_b \neq r)]$.

Úloha 6 Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: a, β, r.

Rozbor: Nechť O je středem kružnice opsané trojúhelníku ABC, její poloměr je r, a platí $|OB| = |OC| = r$. Bod A leží na kružnici $k(O;r)$. Velikost úhlu ABC je β, odtud plyne, že bod A leží na polopřímce BA' v příslušné polorovině vyťaté přímkou BC, která svírá úhel β se stranou BC.

Zkrácený zápis:

$$\overline{BC} : |BC| = a,$$

$$(|OA| = |OB| = |OC| = r) \Rightarrow A \in k(O;r)$$

$$(|\sphericalangle ABC| = \beta) \Rightarrow \left(A \in \overrightarrow{BA'}, |\sphericalangle A'BC| = \beta\right)$$

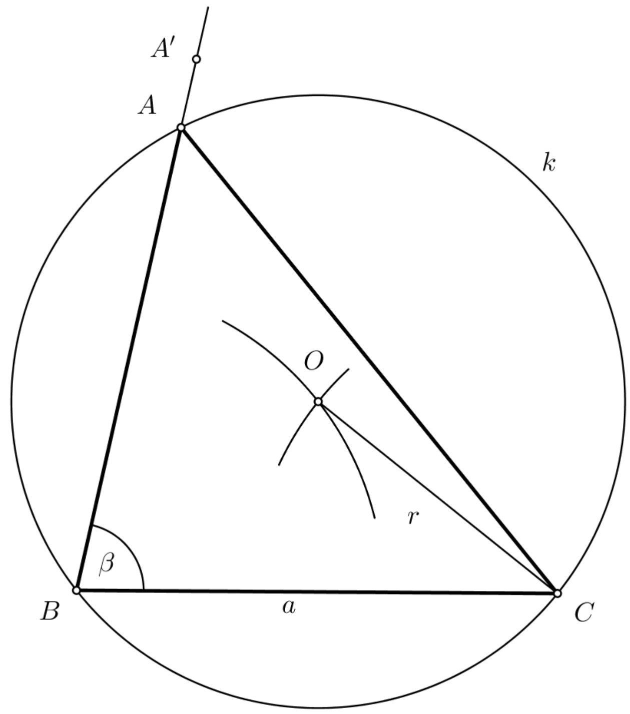
Konstrukce:

1. $\overline{BC}$; $|BC| = a$,
2. O; $|OB| = |OC| = r$,
3. k; $k(O;r)$,
4. $\overrightarrow{BA'}$; $|\sphericalangle A'BC| = \beta$,
5. A; $A = k \cap \overrightarrow{BA'}$,
6. $\triangle ABC$.

Podmínky řešitelnosti a diskuse:

$\left(\frac{1}{2}a \leq r\right) \wedge \left(\beta \leq \arccos\frac{a}{2r} + \frac{1}{2}\pi\right)$

- 1 nebo 2 řešení – podle počtu průsečíků polopřímky BA' a kružnic k, k'.



Obr. 9

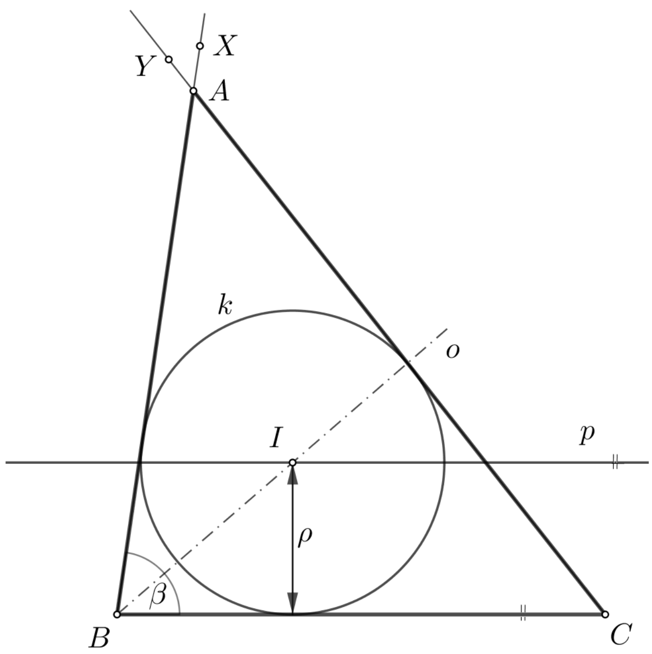
Úloha 7 Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: a, β, ρ.

Rozbor: Bod A leží na polopřímce BX, která svírá se stranou BC úhel β, v příslušné polorovině vyťaté přímkou BC. Střed I kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží na ose úhlu CBX a současně jeho vzdálenost od strany BC je velikost poloměru ρ, leží tedy na rovnoběžce p s přímkou BC, jejíž vzdálenost od BC je ρ. Strana AC se dotýká kružnice $k(I;\rho)$.

Hledaný vrchol A leží na tečně ke kružnici $k(I;\rho)$ z bodu C.

Zkrácený zápis:

$$\overline{BC} : |BC| = a,$$
$$(|\sphericalangle ABC| = \beta) \Rightarrow \left(A \in \overrightarrow{BX}, |\sphericalangle CBX| = \beta\right),$$
$$(d\,(I, BC) = \rho) \Rightarrow [(I \in p) \wedge (p \parallel BC)]\,,$$
$$(d\,(I, AB) = d\,(I, BC)) \Rightarrow [(I \in o)\,, o \ldots \text{osa úhlu}\, CBX]\,,$$
$$\overleftrightarrow{CY} \ldots \text{tečna kružnice}\; k(I;\rho)$$



Obr. 10

Konstrukce:

1. $\overline{BC}$; $|BC| = a$,

2. $\overrightarrow{BX}; |\sphericalangle CBX| = \beta$,

3. $o \ldots$ osa úhlu CBX,

4. I; $I = o \cap p$,

5. k; $k = (I; \rho)$,

6. p; $p \parallel BC$, $d\,(p, BC) = \rho$,

7. $\overleftrightarrow{CY}$ ... tečna kružnice $k(I; \rho)$,

8. $\triangle ABC$.

Podmínky řešitelnosti a diskuse:

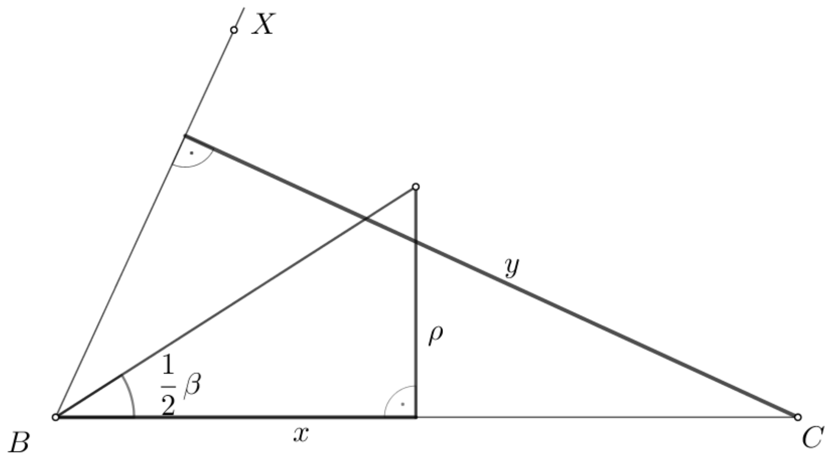
Z obrázku 11 je patrné, že nutně musí platit: $x < a$, kde $x = \frac{\rho}{\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}}$, tj. $\frac{\rho}{\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}} < a$, neboli $\rho < a \cdot \mathrm{tg}\frac{\beta}{2}$. Podobně platí $y < 2\rho$, kde $y = a \sin\beta$, tj. $a \sin\beta < 2\rho$. Podmínky řešitelnosti tedy jsou:

$\left(\rho < a \cdot \mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\right) \wedge (a \sin\beta < 2\rho)$

- 1 řešení, je-li $\left(\rho < a\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\right) \wedge (a \sin\beta < 2\rho)$.

Úloha 8 Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: a, v_b, t_a.

Rozbor: Nechť V_b je pata výšky z vrcholu B. Bod V_b leží na kružnici $k(B; v_b)$, neboť kružnice $k(B; v_b)$ je množina všech bodů v rovině, které mají od bodu B vzdálenost v_b. Úhel BV_bC je pravý, tedy bod V_b leží současně na Thaletově kružnici sestrojené nad průměrem BC. Vzdálenost středu T_a strany BC od vrcholu A je t_a, proto vrchol A leží v příslušné polorovině vyťaté přímkou BC na kružnici $l(T_a, t_a)$, viz obr. 12.



Obr. 11

Zkrácený zápis:

$$\overline{BC} : |BC| = a,$$

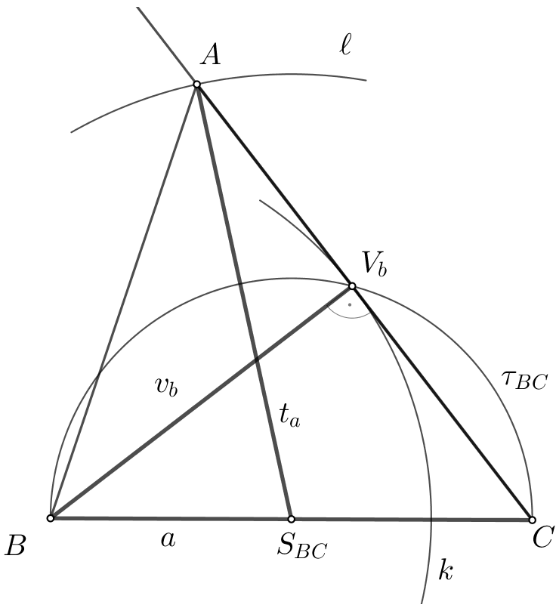
$$\left(|\sphericalangle BV_bC| = \tfrac{1}{2}\pi\right) \Rightarrow (V_b \in \tau_{BC}),$$

$$(|BV_b| = v_b) \Rightarrow [V_b \in k(B; v_b)],$$

$$(|AT_a| = t_a) \Rightarrow [A \in \ell(T_a; t_a)].$$

Konstrukce:

1. $\overline{BC}$; $|BC| = a$,
2. τ_{BC},
3. k; $k(B; v_b)$,
4. k; $V_b = k \cap \tau_{BC}$,
5. ℓ; $\ell(T_a; t_a)$,
6. A; $A = \ell \cap CV_b$,



Obr. 12

7. $\triangle ABC$.

Podmínky řešitelnosti a diskuse:

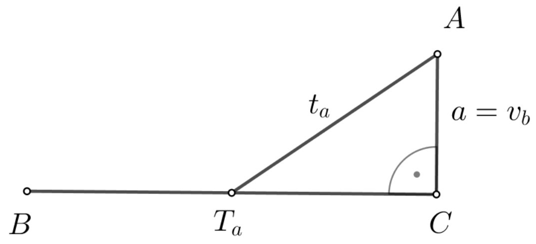
$\left[(v_b < a) \wedge \left(t_a \geq \frac{1}{2}v_b\right)\right] \vee \left[(v_b = a) \wedge \left(t_a > \frac{1}{2}v_b\right)\right]$

- 1 řešení, je-li

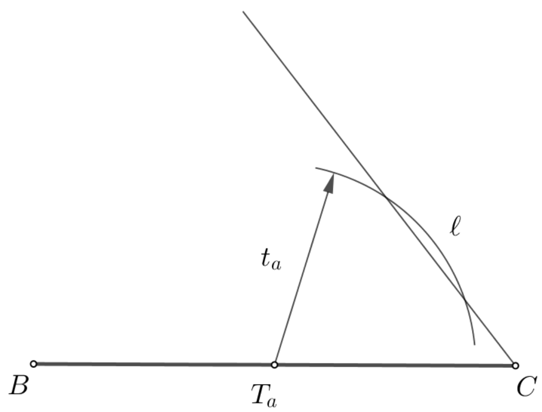
$$\begin{aligned} &\left[(v_b = a) \wedge \left(t_a > \tfrac{1}{2}v_b\right)\right] \vee \\ \vee \quad &\left[(v_b < a) \wedge \left(t_a = \tfrac{1}{2}v_b\right)\right] \vee \left[(v_b < a) \wedge \left(t_a = \tfrac{1}{2}a\right)\right], \end{aligned}$$

- 2 řešení, je-li $(v_b < a) \wedge (v_b < 2t_a < a)$.

Úloha 9 Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: t_a, v_b, α.



Obr. 13: $(a = v_b) \Rightarrow \left(|\sphericalangle BCA| = \frac{1}{2}\pi\right)$



Obr. 14: $t_a < \frac{1}{2}a$

Rozbor:

Nechť bod B leží na rameni AX úhlu XAY, jehož velikost je α, a podobně nechť bod C leží na rameni AY téhož úhlu. Vrchol B trojúhelníku ABC leží současně na rovnoběžce p s AY (v polorovině AYX), jejíž vzdálenost od AY je v_b. Protože bod T_a je středem strany BC, leží T_a

ose pásu o, který je omezen rovnoběžkami p a AY. Vzhledem k tomu, že délka úsečky AT_a je t_a, leží bod T_a současně na kružnici $k(A; t_a)$, neboť kružnice $k(A; t_a)$ je množina všech bodů v rovině, které mají od bodu A vzdálenost t_a.

Zkrácený zápis:

$$\sphericalangle XAY, |\sphericalangle XAY| = \alpha,$$

$$B \in \overrightarrow{AX}, C \in \overrightarrow{AY},$$

$$\left(d\left(B, \overleftrightarrow{AC}\right) = v_b\right) \Rightarrow \left[(B \in p), \left(p \parallel \overleftrightarrow{AY}\right), \left(d\left(p, \overleftrightarrow{AY}\right) = v_b\right)\right],$$

$$(T_a \ldots \text{ střed } BC) \Rightarrow \left[(T_a \in r), (r \parallel p), \left(d(r, p) = \tfrac{1}{2}v_b\right)\right],$$

$$(|AT_a| = t_a) \Rightarrow [A \in k(T_a; t_a)].$$

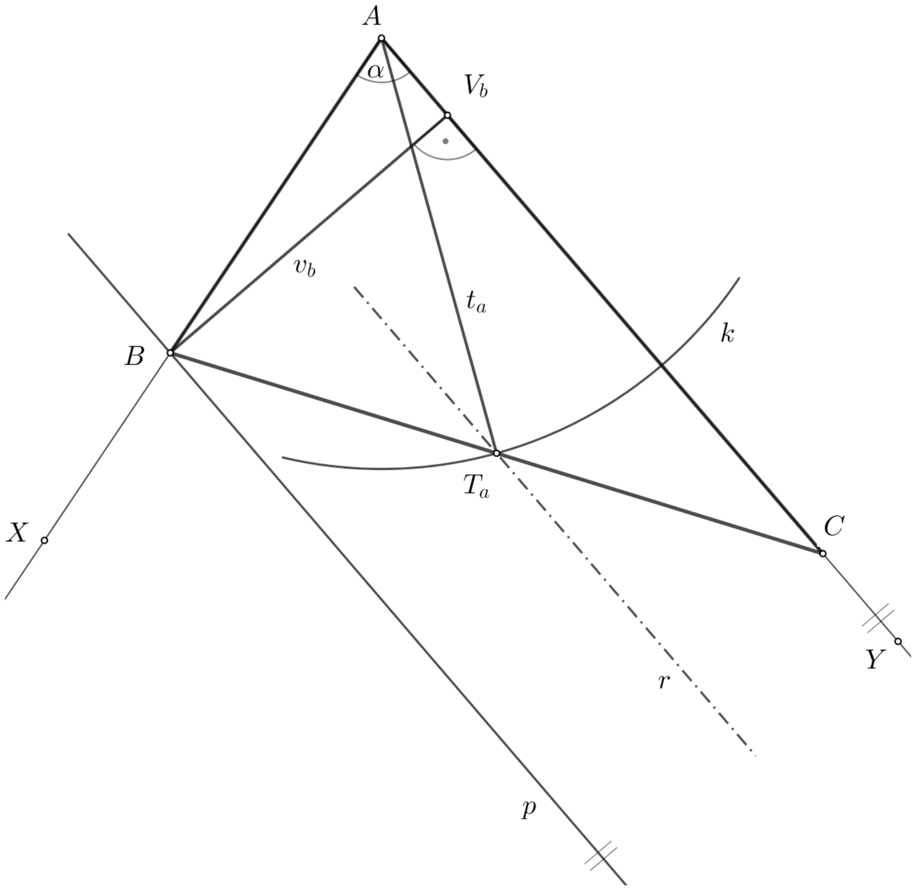
Konstrukce:

1. $\sphericalangle XAY$; $|\sphericalangle XAY| = \alpha$,
2. p; $\left(p \parallel \overleftrightarrow{AY}\right), \left(d\left(p, \overleftrightarrow{AY}\right) = v_b\right)$,
3. B; $B = p \cap \overleftrightarrow{AY}$,
4. r; $(r \parallel p) \wedge \left(d(r, p) = \frac{1}{2}v_b\right)$,
5. k; $k(A; t_a)$,
6. T_a; $T_a = k \cap r$,
7. $\triangle ABC$.

Podmínky řešitelnosti a diskuse:

$t_a > x,\ x = \frac{v_b}{2\sin\alpha}$, $t_a > \frac{v_b}{2\sin\alpha}$, $2t_a \sin\alpha > v_b$

$$\left[\left(\alpha \leq \frac{1}{2}\pi\right) \wedge (2t_a \sin\alpha > v_b)\right] \vee \left[\left(\alpha > \frac{1}{2}\pi\right) \wedge (2t_a \geq v_b)\right]$$

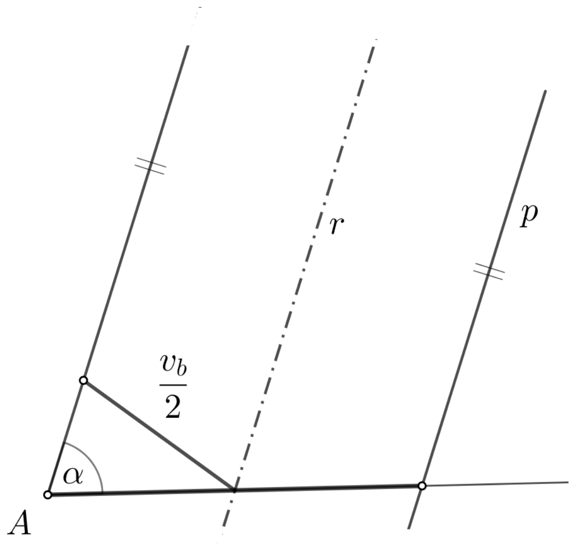


Obr. 15

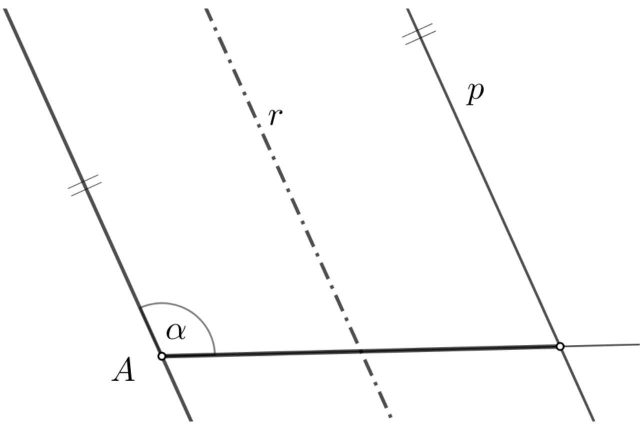
- 1 řešení, je-li

$$\left[\left(\alpha \le \tfrac{1}{2}\pi\right) \wedge (2t_a \sin\alpha > v_b)\right] \vee$$
$$\vee \quad \left\{\left(\alpha > \tfrac{1}{2}\pi\right) \wedge [(2t_a = v_b) \vee (2t_a \sin\alpha \ge v_b)]\right\},$$

- 2 řešení, je-li $\left(\alpha > \frac{1}{2}\pi\right) \wedge \left(v_b < 2t_a < \frac{v_b}{\sin\alpha}\right)$.



Obr. 16



Obr. 17

Úloha 10 Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: t_a, t_b, t_c.

Rozbor: Trojúhelník ABC doplníme na rovnoběžník $ABDC$, v němž T_a je střed úhlopříčky AD, (a také úhlopříčky BC). Na těžnici AT_a leží uvnitř trojúhelníku ABC těžiště T, jímž procházejí všechny těžnice a dělí je, jak známo, v poměru 2 : 1. Využijeme středové souměrnosti se středem v bodě T_a. Uvažujme bod T', který je obrazem těžiště T v této středové souměrnosti. Podle věty *sss* lze sestrojit trojúhelník $TT'B$, viz obr. 18. Známe totiž délky všech tří stran tohoto trojúhelníku.

Zkrácený zápis:

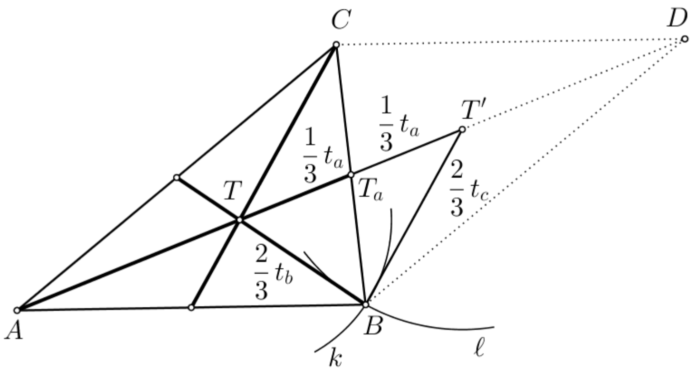
$$\overline{AT_a}, |AT_a| = t_a,$$

$$T \in \overline{AT_a}, |AT| = \tfrac{2}{3}t_a,$$

$$S(T_a)\colon T \longrightarrow T',$$

$$\left(|TB| = \tfrac{2}{3}t_b\right) \Rightarrow \left(B \in k\left(T, \tfrac{2}{3}t_b\right)\right),$$

$$\left(|T'B| = \tfrac{2}{3}t_c\right) \Rightarrow \left(B \in \ell\left(T', \tfrac{2}{3}t_c\right)\right),$$



Obr. 18

Konstrukce:

1. $\overline{AT_a}$; $|AT_a| = t_a$,

2. T; $T \in \overline{AT_a}$, $|AT| = \frac{2}{3}t_a$,
3. T'; $S(T_a)\colon T \longrightarrow T'$,
4. k; $k(T; \frac{2}{3}t_b)$,
5. ℓ; $\ell(T'; \frac{2}{3}t_c)$,
6. B; $B = k \cap \ell$,
7. $\triangle ABC$.

Podmínky řešitelnosti a diskuse:

$t_a + t_b > t_c > |t_a - t_b|$

- 1 řešení (v případě splnění podmínek řešitelnosti).

Úloha 11 Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: t_a, v_b, v_c.

Rozbor: Uvažujme rovnoběžky p, q, jejichž vzdálenost je v_c (q leží v příslušné polorovině vyťaté přímkou p, viz obr. 19). Vrcholy A, B trojúhelníku ABC leží na p a vrchol C na q. Protože T_a je středem strany BC, leží T_a na ose r pásu rovnoběžek p, q a současně na kružnici $k(A; t_a)$. V pravoúhlém trojúhelníku CV_bB s pravým úhlem při vrcholu V_b je úsečka T_aV_b' střední příčkou, tedy bod V_b' leží na Thaletově kružnici sestrojená nad AT_a a současně na kružnici $\ell(T_a; \frac{1}{2}v_c)$.

Zkrácený zápis:

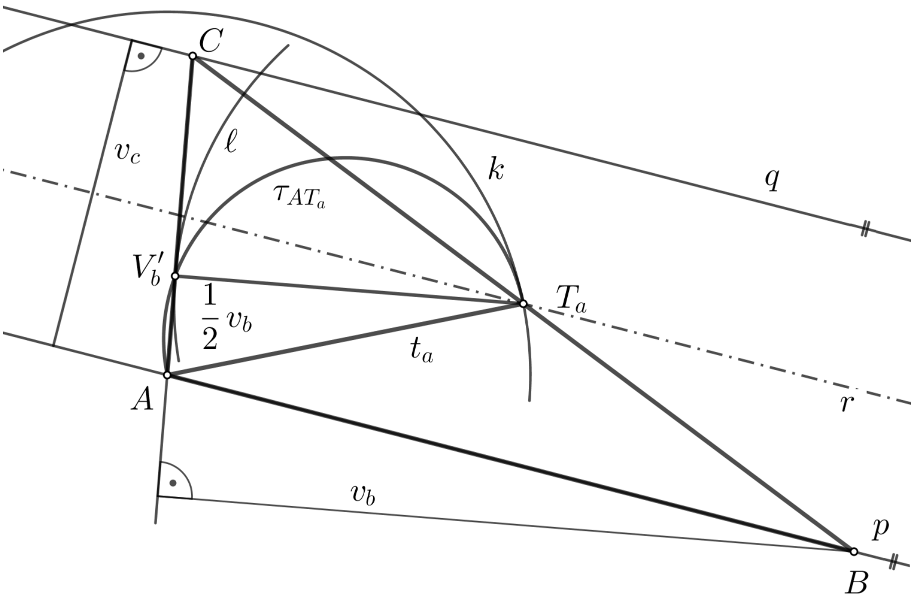
$$p, q;\ \ p \parallel q, d\,(p,q) = v_a, A \in p,$$

$$|AT_a| = t_a \Rightarrow T_a \in k(A; t_a),$$

$$(T_a \ldots \text{ střed úsečky } BC) \Rightarrow \left[(T_a \in r)\,, (r \parallel p)\,, \left(d\,(r,p) = \tfrac{1}{2}v_c\right)\right],$$

$$\left(|\sphericalangle CV_bB| = \tfrac{1}{2}\pi\right) \Rightarrow \left(|\sphericalangle CV_b'T_a| = \tfrac{1}{2}\pi\right) \Rightarrow \left(V_b' \in \tau_{AT_a}\right),$$

$$|T_aV_b'| = \tfrac{1}{2}v_b \Rightarrow V_b' \in \ell(T_a; \tfrac{1}{2}v_b),$$



Obr. 19

Konstrukce:

1. p, q; $p \parallel q$, $d\,(p,q) = v_c$,
2. A; $A \in p$,
3. k; $k(A; t_a)$,

4. r ... osa pásu rovnoběžek p, q,
5. T_a; $T_a = r \cap k$,
6. τ_{AT_a},
7. ℓ; $\ell(T_a; \frac{1}{2}v_b)$,
8. V_b'; $V_b' = \ell \cap \tau_{AT_a}$,
9. C; $C = q \cap AV_b'$,
10. $\triangle ABC$.

Podmínky řešitelnosti a diskuse:

$(2t_a \geq v_c) \wedge (2t_a \geq v_b)$

- 1 nebo 2 řešení – podle počtu průsečíků přímky r a kružnice k.

Úloha 12 Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: t_b, v_a, α.

Rozbor: Uvažujeme rovnoběžky p, q, jejichž vzdálenost je v_a (q leží v příslušné polorovině vyťaté přímkou p, viz obr. 20). Vrcholy B, C trojúhelníku ABC leží na p (polohu bodu B předem zvolíme) a vrchol A na q. Bod T_b je středem strany AC, tudíž leží na ose r pásu rovnoběžek p, q a současně na kružnici $k(B; t_b)$. Velikost úhlu BAT_b je α, z toho vyplývá, že bod $A \in q$ musí současně ležet na oblouku kružnice ω, z něhož vidíme těžnici BT_b pod úhlem α.

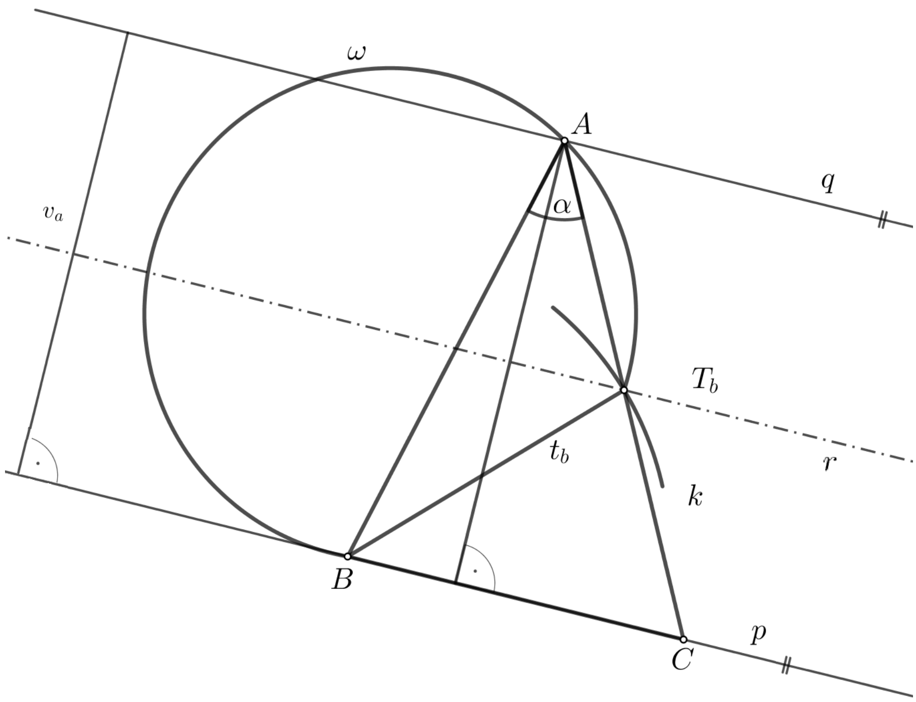
Zkrácený zápis

$$(p, q) = v_a, B \in p,$$

$$|BT_b| = t_b \Rightarrow T_b \in k(B; t_b),$$

$$(T_b \ldots \text{ střed úsečky } AC) \Rightarrow \left[(T_b \in r), (r \parallel p), \left(d(r, p) = \tfrac{1}{2}v_a\right)\right],$$

$$(|\sphericalangle BAT_b| = \alpha) \Rightarrow (A \in \omega = \{X, |\sphericalangle BXT_b| = \alpha\}).$$



Obr. 20

Konstrukce:

1. p, q; $p \parallel q$, $d\,(p, q) = v_b$,
2. B; $B \in p$,
3. k; $k(B; t_b)$,
4. r …osa pásu rovnoběžek p, q,
5. T_b; $T_b = r \cap k$,
6. ω; $\omega = \{X, |\sphericalangle BXT_b| = \alpha\}$,
7. A; $A = q \cap \omega$
8. $\triangle ABC$.

Podmínky řešitelnosti a diskuse:

$$\left[(2t_b > v_a) \wedge \left(\alpha \leq \arcsin\frac{t_b}{v_a}\right)\right] \vee \left[(2t_b = v_a) \wedge \left(\alpha \leq \arcsin\frac{1}{3}\right)\right]$$

- 1 až 4 řešení – podle počtu průsečíků přímky r a kružnice k a podle počtu průsečíků ω a q.

Úloha 13 Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: v_a, t_b, t_c.

Rozbor: Trojúhelník ABC doplníme na rovnoběžník $AC'BC$, viz obr. 21. Nechť D je pata kolmice z vrcholu C' ke straně BC. Pak $AC'DC$ je pravoúhlý lichoběžník s pravými úhly při vrcholech C' a D. Bod D tedy leží na Thaletově kružnici sestrojené nad CC'. Délka úsečky $C'D$ je v_a, proto bod D leží také na kružnici $k(C'; v_a)$. Na těžnici CT_c uvažujme těžiště T trojúhelníku ABC, jímž procházejí všechny těžnice a dělí je v poměru 2 : 1. Protože známe velikost těžnice t_b, je vzdálenost hledaného bodu B od těžiště T rovna $\frac{2}{3}t_b$. Bod B leží proto na kružnici $\ell(T; \frac{2}{3}t_b)$.

Zkrácený zápis:

$$\overline{CT_c} : |CT_c| = t_c,$$

$$T : |CT| = \tfrac{2}{3}t_c,$$

doplnění trojúhelníku ABC na rovnoběžník $AC'BC$,

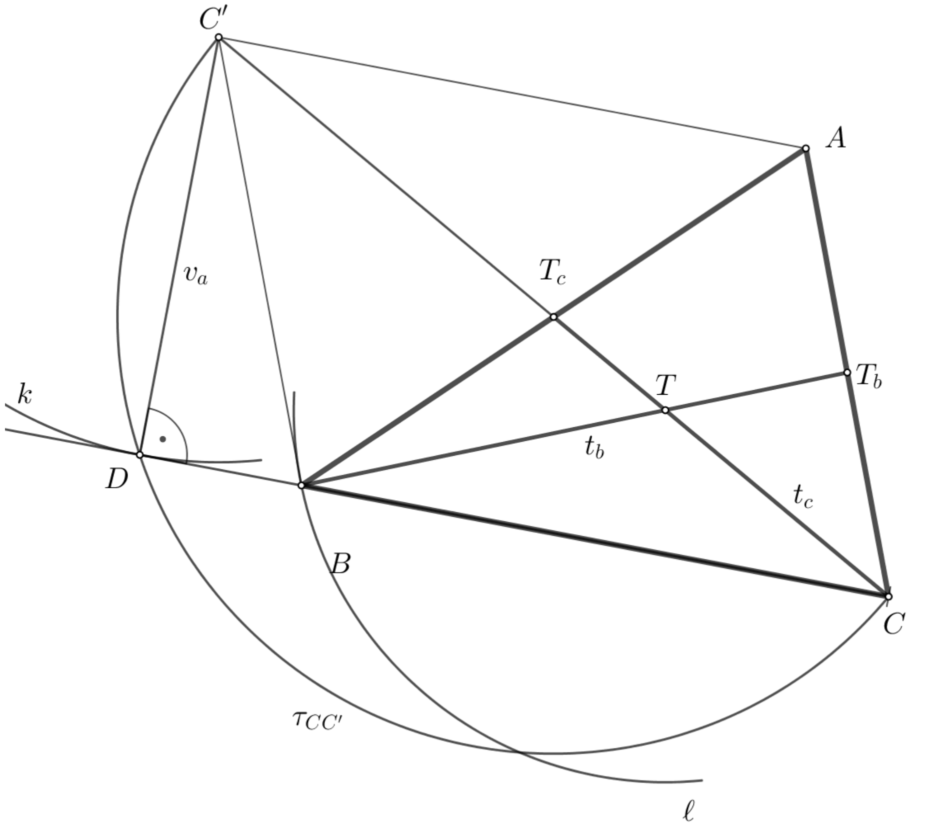
$$\left(|\sphericalangle C'DC| = \tfrac{1}{2}\pi\right) \Rightarrow \left(D \in \tau_{CC'}\right),$$

$$|C'D| = v_a \Rightarrow D \in k(C'; v_a),$$

$$\left(|TB| = \tfrac{2}{3}t_b\right) \Rightarrow \left(B \in \ell\left(T, \tfrac{2}{3}t_b\right)\right).$$

Konstrukce:

1. $\overline{CT_c}$; $|CT_c| = t_c$,



Obr. 21

2. T; $|CT| = \frac{2}{3}t_c$,
3. C'; $S\,(T_c) : C \longrightarrow C'$,
4. $\tau_{CC'}$,
5. k; $k(C', v_a)$,
6. D; $D = k \cap \tau_{CC'}$
7. ℓ; $\ell(T; \frac{2}{3}t_b)$,
8. B; $B = \ell \cap CD$

9. $\triangle ABC$.

Druhý způsob řešení

Rozbor: Uvažujeme rovnoběžky p, q, jejichž vzdálenost je v_a (q leží v příslušné polorovině vyťaté přímkou p, viz obr. 22). Vrcholy B, C trojúhelníku ABC leží na p (polohu bodu C předem zvolíme) a vrchol A na q. Bod T_c je středem strany BC. Protože bod A leží na přímce q a bod C leží na přímce p, leží bod T_c na ose r jejich pásu. Vzhledem k tomu, že délka úsečky CT_c je t_c, leží bod T_c leží na kružnici $k(C;t_c)$. Dále známe velikost těžnice t_b, proto vzdálenost hledaného bodu B od těžiště T je $\frac{2}{3}t_b$. Bod B leží tedy kružnici $\ell(T;\frac{2}{3}t_b)$.

Zkrácený zápis:

$$p,q;\ \ p \parallel q, d\,(p,q) = v_a,\ A,B \in q, C \in p,$$

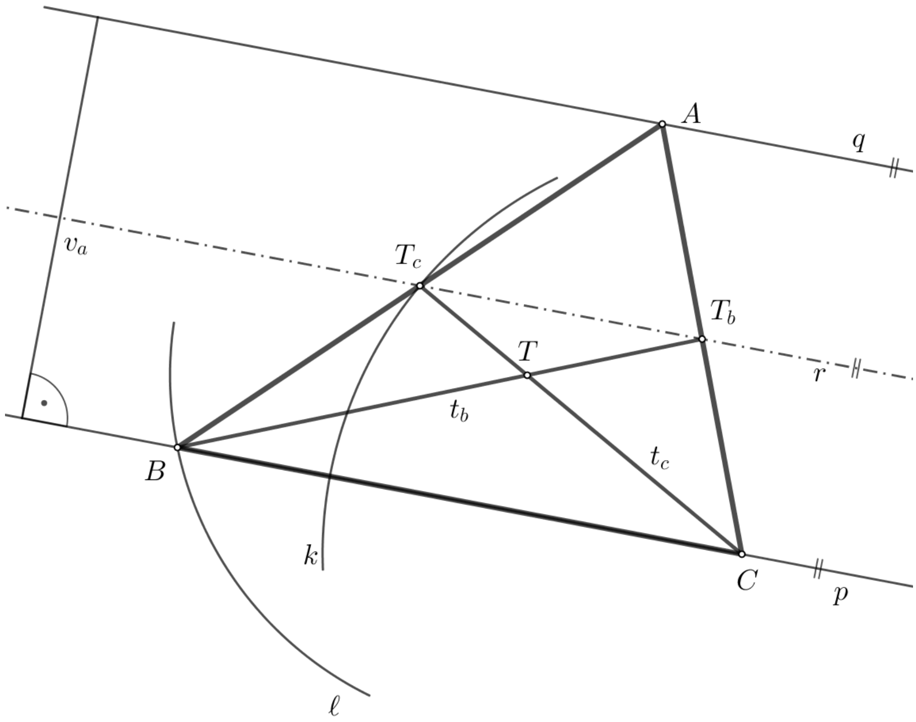
$$(T_c \ldots\ \text{střed úsečky}\ AB) \Rightarrow \left[(T_c \in r)\,,(r \parallel p)\,,\left(d\,(r,p) = \tfrac{1}{2}v_a\right)\right],$$

$$(|CT_c| = t_c) \Rightarrow (T_c \in k(C;t_c))\,,$$

$$\left(|TB| = \tfrac{2}{3}t_b\right) \Rightarrow \left(B \in \ell\left(T, \tfrac{2}{3}t_b\right)\right).$$

Konstrukce:

1. $p,q;\ \ p \parallel q,\ d\,(p,q) = v_a$,
2. C, $C \in p$,
3. k, $k(C;t_c)$,
4. r ... osa pásu rovnoběžek p,q,
5. T_c, $T_c = r \cap k$,
6. ℓ, $\ell(T;\frac{2}{3}t_b)$,
7. B, $B = \ell \cap p$,
8. $\triangle ABC$.



Obr. 22

Podmínky řešitelnosti a diskuse:

$$[(v_a < 2t_c) \wedge (v_a \leq 2t_b)] \vee [(v_a < 2t_b) \wedge (v_a \leq 2t_c)]$$

- 1 nebo 2 řešení – podle počtu průsečíků přímky $CD \equiv p$ a kružnice ℓ.

Úloha 14 Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: v_b, t_b, α.

Rozbor: Uvažujme úhel XAY o velikosti α. Hledaný vrchol C bude ležet na rameni XA a vrchol B bude ležet na rameni AY. Vzdálenost B od přímky XA je v_b. Bod B tedy leží současně na rovnoběžce p s XA ve vzdálenosti v_b. Střed T_b strany AC leží na rameni XA a současně na kružnici $k(B;T_b)$

Zkrácený zápis pro $v_b < t_b$:

$$(|\sphericalangle CAB| = \alpha) \Rightarrow (|\sphericalangle XAY| = \alpha)\,,$$

$$(d\,(B, AX) = v_b) \Rightarrow (B \in p;\, p \parallel AX, d\,(p, AX) = v_b)\,,$$

$$(|BT_b| = t_b) \Rightarrow [T_b \in k(B;t_b)]\,.$$

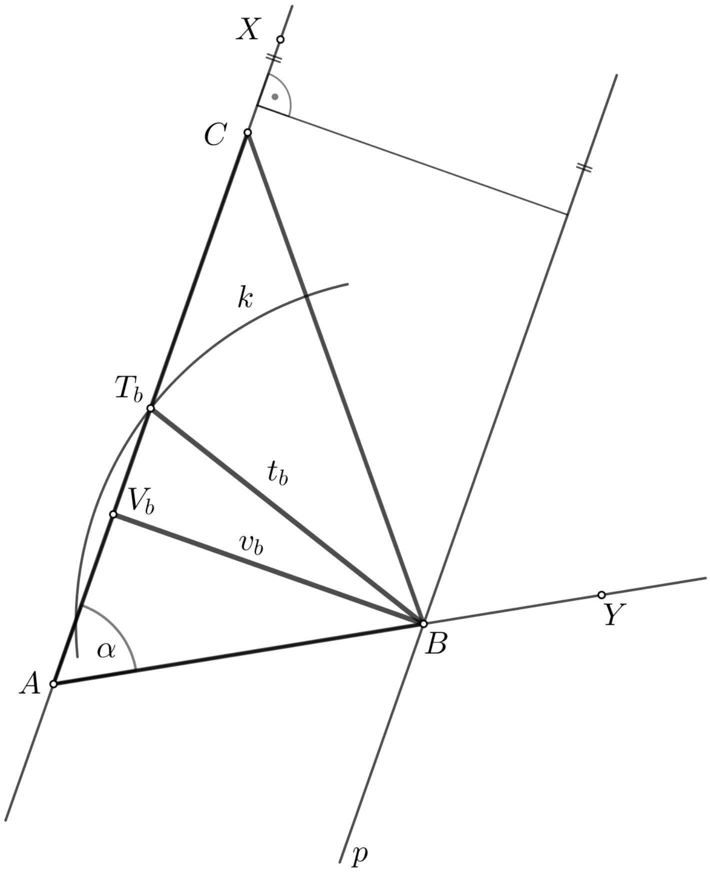
Konstrukce:

(i) pro $v_b < t_b$

1. $\sphericalangle XAY$; $|\sphericalangle XAY| = \alpha$,
2. p; $p \parallel AX$, $d\,(p, AX) = v_b$,
3. B; $B = p \cap \overrightarrow{AY}$,
4. k; $k(B;t_b)$,
5. T_b; $T_b = k \cap \overrightarrow{AX}$,
6. $\triangle ABC$.

(ii) pro $v_b = t_b$

1. $\sphericalangle XAY$; $|\sphericalangle XAY| = \alpha$,
2. p; $p \parallel AX$, $d\,(p, AX) = v_b$,
3. B; $B = p \cap \overrightarrow{AY}$,
4. $T_b = V_b$,
5. $\triangle ABC$.



Obr. 23

Podmínky řešitelnosti a diskuse:

$$\left[\left(\alpha < \tfrac{1}{2}\pi\right) \wedge (v_b \leq t_b)\right] \vee \left[\left(\alpha = \tfrac{1}{2}\pi\right) \wedge (v_b < t_b)\right] \vee$$
$$\vee \quad \left[\left(\tfrac{1}{2}\pi < \alpha < \pi\right) \wedge \left(\tfrac{v_b}{\sin\alpha} < t_b\right)\right]$$

- 1 řešení, je-li

$$\left[\left(\alpha < \tfrac{1}{2}\pi\right) \wedge \left(\tfrac{v_b}{\sin\alpha} \le t_b\right)\right] \vee$$
$$\vee \quad \left[\left(\alpha = \tfrac{1}{2}\pi\right) \wedge (v_b < t_b)\right] \vee \left[\left(\tfrac{1}{2}\pi < \alpha < \pi\right) \wedge \left(\tfrac{v_b}{\sin\alpha} < t_b\right)\right],$$

- 2 řešení, je-li $\left[\left(\alpha < \frac{1}{2}\pi\right) \wedge \left(\frac{v_b}{\sin\alpha} > t_b > v_b\right)\right]$.

Úloha 15 Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: t_a, v_a, v_c.

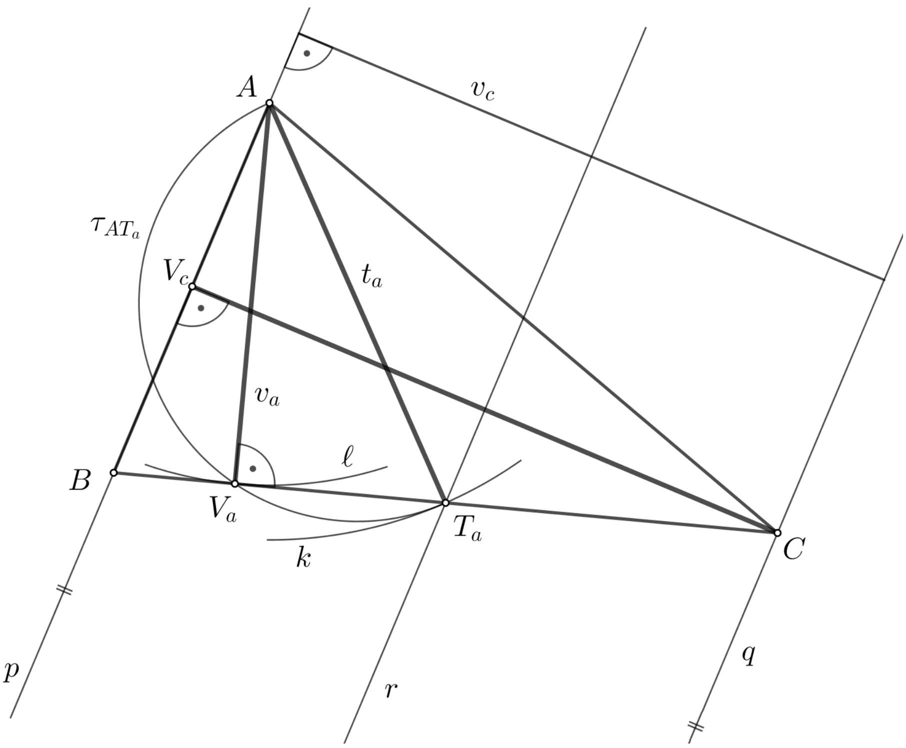
Rozbor: Uvažujeme rovnoběžky p, q, jejichž vzdálenost je v_c (q leží v příslušné polorovině vyťaté přímkou p, viz obr. 24). Vrcholy A, B trojúhelníku ABC leží na p (polohu bodu A předem zvolíme) a vrchol C na q. Bod T_a je středem strany BC, proto leží ose pásu r rovnoběžek p, q a současně na kružnici $k(A;t_a)$. Úhel AV_aT_a je pravý (je-li $t_a > v_a$), bod V_a tedy leží na Thaletově kružnici sestrojené nad úsečkou AT_a a současně na kružnici $\ell(A;v_a)$.

Zkrácený zápis

$$p,q;\ \ p \parallel q, d\,(p,q) = v_c,\ A,B \in p, C \in q,$$
$$(T_a \ldots \text{ střed úsečky } BC) \Rightarrow \left(T_a \in r, r \parallel p, d\,(r,p) = \tfrac{1}{2}v_c\right),$$
$$|AT_a| = t_a \Rightarrow T_a \in k(A;t_a),$$
$$\left(|\sphericalangle AV_aT_a| = \tfrac{1}{2}\pi\right) \Rightarrow (V_a \in \tau_{AT_a}),$$
$$(|AV_a| = v_a) \Rightarrow [V_a \in \ell(A;v_a)].$$

Konstrukce:

1. $p,q;\ \ p \parallel q,\ d\,(p,q) = v_c$,
2. $A;\ A \in p$,
3. $k;\ k(A;t_a)$,



Obr. 24

4. r ... osa pásu rovnoběžek p, q,
5. T_a; $T_a = r \cap k$,
6. τ_{AT_a},
7. ℓ; $\ell(A; v_a)$,
8. V_a; $V_a = \ell(A; v_a) \cap \tau_{AT_a}$,
9. C; $C = V_aT_a \cap q$,
10. $\triangle ABC$.

Podmínky řešitelnosti a diskuse:

$\left[\left(t_a \geq \frac{1}{2}v_c\right) \wedge (t_a > v_a)\right] \vee \left[\left(t_a > \frac{1}{2}v_c\right) \wedge (t_a \geq v_a)\right]$

- 2 řešení, je-li $\left[\left(t_a > \frac{1}{2}v_c\right) \wedge (t_a = v_a)\right] \vee \left[\left(t_a = \frac{1}{2}v_c\right) \wedge (t_a > v_a)\right]$,
- 4 řešení, je-li $\left(t_a > \frac{1}{2}v_c\right) \wedge (t_a > v_a)$.

Úloha 16 Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: a, v_b, ρ.

Rozbor: Nejprve sestrojíme stranu BC. Vrchol A leží na přímce CV_b. Pata V_b výšky v_b z vrcholu B leží na Thaletově kružnici τ_{BC} o průměru BC, neboť tato kružnice (s výjimkou bodů B a C) je množinou všech bodů v rovině, z nichž vidíme úsečku BC pod pravým úhlem. Současně však vzdálenost bodů B a V_b je rovna v_b, tudíž V_b leží rovněž na kružnici $k(B; v_b)$. Střed I kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží na ose úhlu BCV_B a současně na rovnoběžce p (v příslušné polorovině) s přímkou BC ve vzdálenosti ρ. Strana AB je tečnou této kružnice, bod A je proto průsečíkem tečny q ($\neq BC$) z bodu B ke kružnici $\ell(I; \rho)$ a přímky CV_b.

Zkrácený zápis:

$$\overline{BC} : |BC| = a,$$

$$\left(|\sphericalangle BV_bC| = \tfrac{1}{2}\pi\right) \Rightarrow (V_b \in \tau_{BC}),$$

$$(|BV_b| = v_b) \Rightarrow [V_b \in k(B; v_b)],$$

$$(d\,(I, BC) = \rho) \Rightarrow (I \in p,\, p \parallel BC, d(p, BC) = \rho),$$

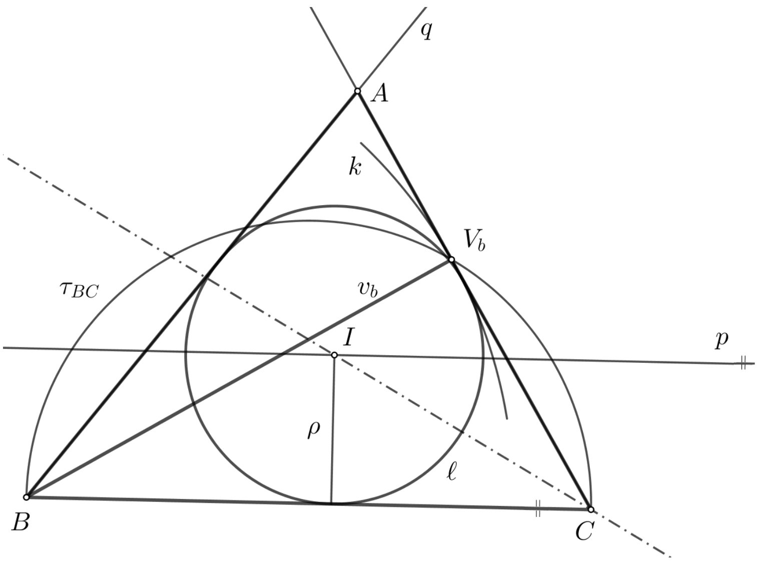
$$(I\ \ldots \text{střed kružnice trojúhelníku } ABC \text{ vepsané}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (I \in o, o\ \ldots\ \text{osa úhlu}\, BCV_b),$$

$$A \in q,\, q\ \ldots\ \text{tečna z bodu } B \text{ ke kružnici } \ell(I; \rho).$$

Konstrukce:

1. $\overline{BC}$; $|BC| = a$,
2. τ_{BC},
3. k; $k(B; v_b)$,



Obr. 25

4. V_B; $V_b = k(B; v_b) \cap \tau_{BC}$,
5. p; $p \parallel BC$, $d\,(p, BC) = \rho$,
6. o … osa úhlu BCV_B,
7. I; $I = p \cap o$,
8. ℓ; $\ell(I; \rho)$,
9. q … tečna z bodu B ke kružnici $\ell(I; \rho)$
10. A; $A = q \cap CV_B$,
11. $\triangle ABC$.

Podmínky řešitelnosti a diskuse:

$(2\rho < v_b \leq a)$

- 1 řešení, je-li $(v_b = a) \wedge (2\rho < v_b)$,
- 2 řešení, je-li $2\rho < v_b < a$.

Úloha 17 Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: α, β, t_c.

Rozbor: Trojúhelník ABC doplníme na rovnoběžník $ADBC$. Střed T_c strany AB je současně i středem rovnoběžníku $ADBC$. Vzhledem k tomu, že $|\sphericalangle CAT_c| = \alpha$, bod A leží na kružnicovém oblouku ω, z něhož je vidět těžnice CT_c pod úhlem α. Ze středové souměrnosti se středem T_c plyne, že $\beta = |\sphericalangle CBT_c| = |\sphericalangle DAT_c|$. Odtud plyne, že úsečku DT_c vidíme z bodu A pod daným úhlem β (popř. lze využít $|\sphericalangle CAD| = \alpha + \beta$) Bod A tedy leží také na kružnicovém oblouku μ, ze kterého vidíme DT_c pod úhlem β.

Zkrácený zápis:

$$\overline{CD} : |CD| = 2t_c,\ T_c \text{ je střed úsečky } CD,$$

$$(|\sphericalangle CAT_c| = \alpha) \Rightarrow (A \in \omega = \{X, |\sphericalangle CAT_c| = \alpha\}),$$

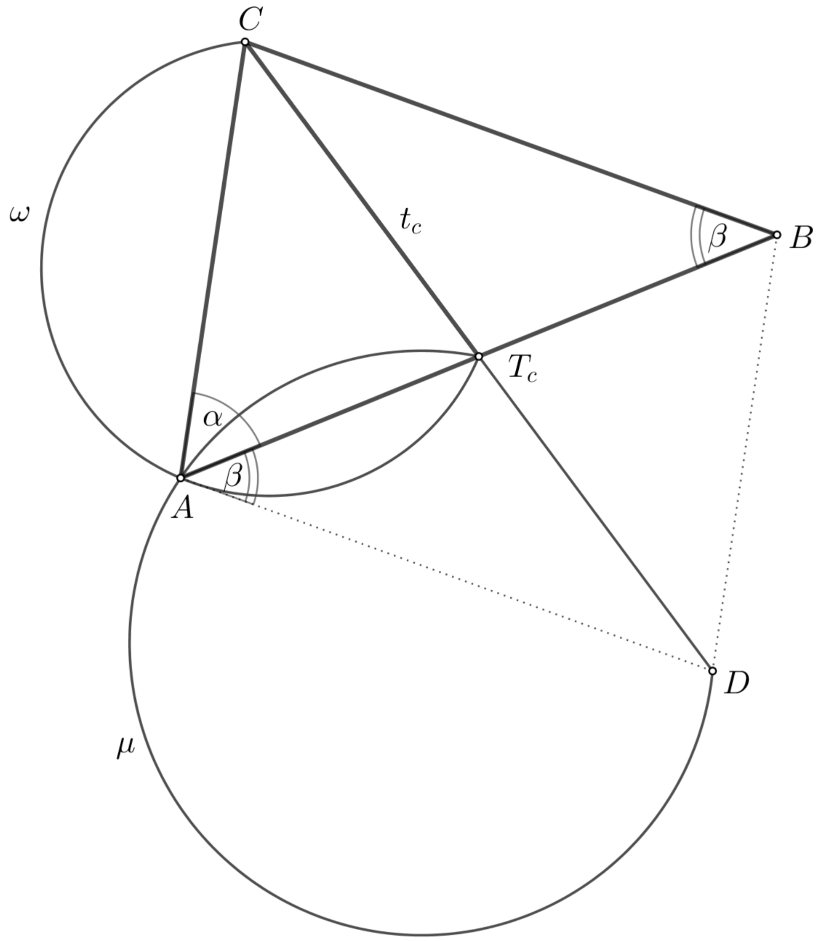
$$(|\sphericalangle DAT_c| = \beta) \Rightarrow (A \in \mu = \{X, |\sphericalangle DAT_c| = \beta\}).$$

Konstrukce:

1. $\overline{CD}$; $|CD| = 2t_c$,
2. $T_c \ldots$ střed úsečky CD,
3. ω; $\omega = \{X, |\sphericalangle CXT_c| = \alpha\}$,
4. ξ; $\mu = \{X, |\sphericalangle DXT_c| = \beta\}$,
5. A; $A = \omega \cap \mu$,
6. $\triangle ABC$.

Podmínky řešitelnosti a diskuse: $(\alpha + \beta < \pi)$

- 1 řešení.



Obr. 26

Úloha 18 Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: a, v_b, t_c.

Rozbor: Pata V_b výšky v_b z leží na Thaletově kružnici τ_{BC} o průměru BC. Vrchol A trojúhelníku ABC leží na přímce CV_B. Současně bod V_b leží na kružnici $k(B; v_b)$. Spojnice středů T_a, T_c stran po řadě BC, AB je střední příčkou v trojúhelníku, která je rovnoběžná se stranou AC. Střed T_c tedy leží na rovnoběžce p s přímkou CV_b procházející bodem T_a

a současně na kružnici $\ell(C;t_c)$.

Pokud $a = v_b$, je trojúhelník ABC pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C. Bod T_c leží na ose úsečky BC a současně na kružnici $\ell(C;t_c)$.

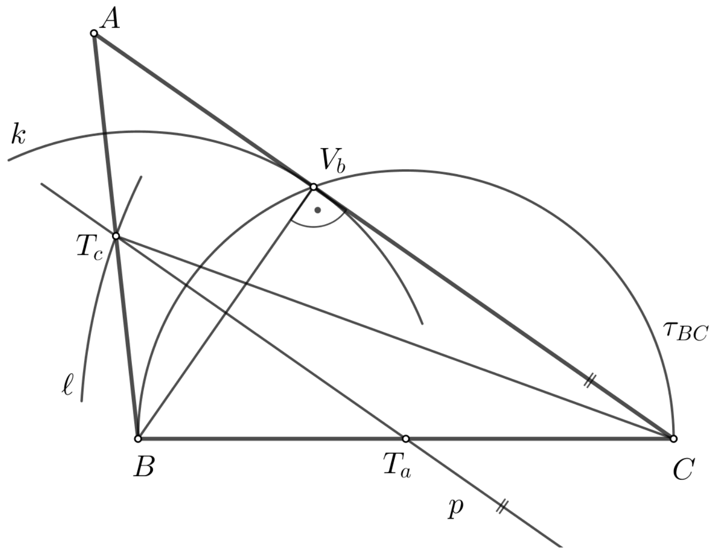
$$\overline{BC} : |BC| = a,$$

$$\left(|\sphericalangle BV_bC| = \tfrac{1}{2}\pi\right) \Rightarrow (V_b \in \tau_{BC}),$$

$$(|BV_b| = v_b) \Rightarrow [V_b \in k(B;v_b)],$$

$$\left(\overleftrightarrow{T_aT_c} \| \overleftrightarrow{AC}\right) \Rightarrow [(T_c \in p), (p \parallel AC) \wedge (T_a \in p)],$$

$$(|CT_c| = t_c) \Rightarrow (T_c \in \ell(C;t_c)).$$



Obr. 27

Konstrukce:

1. $\overline{BC}$; $|BC| = a$,
2. τ_{BC},

3. k; $k(B; v_b)$,
4. V_b; $V_b = k(B; v_b) \cap \tau_{BC}$,
5. p; $p \parallel CV_b$, $T_a \in p$,
6. ℓ; $\ell(C; t_c)$,
7. T_c; $T_c = \ell(C; t_c) \cap p$,
8. $\triangle ABC$.

Podmínky řešitelnosti a diskuse:

$\left[(v_b < a) \wedge \left(t_c \geq \frac{1}{2}v_b\right)\right] \vee \left[(v_b = a) \wedge \left(t_c > \frac{1}{2}v_b\right)\right]$

- 1 řešení, je-li $\left\{(v_b < a) \wedge \left[\left(t_c = \frac{1}{2}v_b\right) \vee \left(t_c = \frac{1}{2}a\right)\right]\right\} \vee$ $\vee \left[(v_b = a) \wedge \left(t_c > \frac{1}{2}v_b\right)\right]$,
- 2 řešení, je-li $\left[(v_b < a) \wedge \left(t_c > \frac{1}{2}v_b\right) \wedge \left(t_c \neq \frac{1}{2}a\right)\right]$.

Úloha 19 Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: v_a, t_a, t_b.

Rozbor: Uvažujme rovnoběžky p, q, jejichž vzdálenost je v_a (q leží v příslušné polorovině vyťaté přímkou p, viz obr. 28). Vrchol A trojúhelníku ABC leží na p (polohu bodu A předem zvolíme) a vrcholy B, C leží na q. Střed T_a strany BC je od vrcholu A vzdálený o t_a, proto bod T_a leží na kružnici $k(A; t_a)$. Těžiště T trojúhelníku ABC leží na těžnici AT_a. Jelikož známe délku těžnice t_b, bod B leží na kružnici $\ell(T; \frac{2}{3}t_b)$ v příslušné polorovině vyťaté přímkou AT.

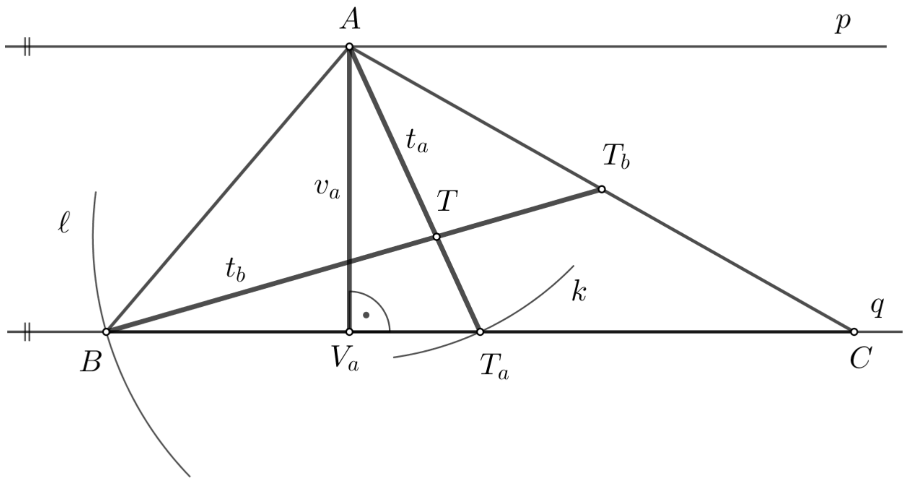
Zkrácený zápis:

$$p \parallel q;\ d\,(p, q) = v_a, A \in p,\ B, C \in q,$$

$$(|AT_a| = t_a) \Rightarrow (T_a \in k(A; t_a))\,,$$

$$(T \in AT_a)\,, \left(|AT| = \tfrac{2}{3}\,|AT_a|\right)$$

$$\left(|BT| = \tfrac{2}{3}t_b\right) \Rightarrow \left(B \in \ell(T; \tfrac{2}{3}t_b)\right).$$



Obr. 28

Konstrukce:

1. $p, q;\ p \parallel q,\ d\,(p, q) = v_a,$
2. $A;\ A \in p,$
3. $k;\ k(A; t_a),$
4. $T_a;\ T_a = k \cap q,$
5. $T;\ T \in \overline{AT_a},\ |AT| = \frac{2}{3}\,|AT_a|,$
6. $\ell;\ \ell(T; \frac{2}{3}t_b),$
7. $B;\ B = q \cap \ell,$
8. $\triangle ABC.$

Podmínky řešitelnosti a diskuse:

$(v_a = t_a < 2t_b) \vee [(v_a < t_a) \wedge (v_a \leq 2t_b)]$

- 1 řešení, je-li $(v_a = t_a < 2t_b) \vee [(v_a < t_a) \wedge (v_a = 2t_b)]$,
- 2 řešení, je-li $(v_a < t_a < 2t_b)$.

Úloha 20 Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: a, v_b, t_b.

Rozbor: Nechť V_b je pata výšky z vrcholu B. Bod V_b leží na kružnici $k(B; v_b)$ a současně na Thaletově kružnici sestrojené nad průměrem BC, neboť úhel BV_bC je pravý. Vzdálenost středu T_b strany AC od vrcholu B je t_b, proto T_b leží na kružnici $\ell(B, t_b)$ a současně na přímce CV_b. Pokud $v_b = a$ leží T_b na kolmici k BC, která prochází bodem C.

Zkrácený zápis:

$$\overline{BC} : |BC| = a,$$

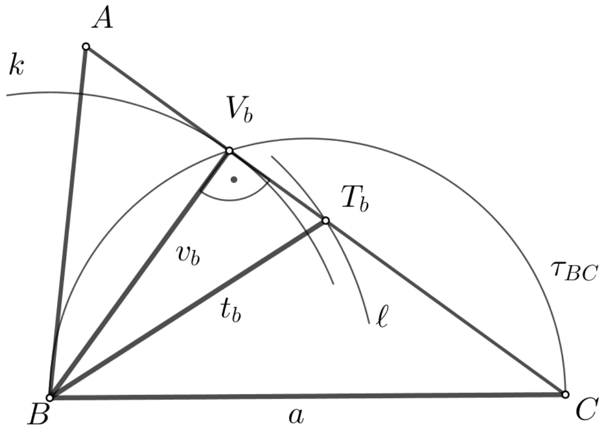
$$\left(|\sphericalangle BV_bC| = \tfrac{1}{2}\pi\right) \Rightarrow (V_b \in \tau_{BC}),$$

$$(|BV_b| = v_b) \Rightarrow [V_b \in k(B; v_b)],$$

$$(|BT_b| = t_b) \Rightarrow [T_b \in l(B; t_b)].$$

Konstrukce:

1. $\overline{BC}$; $|BC| = a$,
2. τ_{BC},
3. k; $k(B; v_b)$,
4. V_b; $V_b = k \cap \tau_{BC}$,
5. ℓ; $\ell(B; t_b)$,
6. T_b; $T_b = \ell \cap CV_b$,
7. $\triangle ABC$.



Obr. 29

Podmínky řešitelnosti a diskuse:

$[(v_b < a) \wedge (v_b \leq t_b)] \vee [(v_b = a) \wedge (t_b > a)]$

- 1 řešení, je-li

  $$[(v_b = a) \wedge (t_b > a)] \vee [(v_b < a) \wedge (t_b = v_b)] \vee [(v_b < a) \wedge (t_b = a)]\,,$$

- 2 řešení, je-li $(v_b < a) \wedge (t_b \neq< a)$.

Úloha 21 Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: $a + b$, v_a, γ.

Rozbor: Na polopřímce BC uvažujme bod A' takový, že $|BA'| = a + b$. Bod A' je obrazem vrcholu A trojúhelníku ABC v otočení se středem v bodě C o orientovaný úhel $-(\pi - \gamma)$ Trojúhelník ACA' je rovnoramenný se základnou AA' a velikost úhlu $AA'C$ je tedy $\frac{\gamma}{2}$. Lze tak sestrojit trojúhelník $BA'A$, neboť známe velikost jeho strany BA' výšku z vrcholu A k této straně a velikost úhlu $BA'A$. Protože trojúhelník ACA' je rovnoramenný, leží vrchol C na ose strany AA' a současně je vnitřním bodem úsečky BA'.

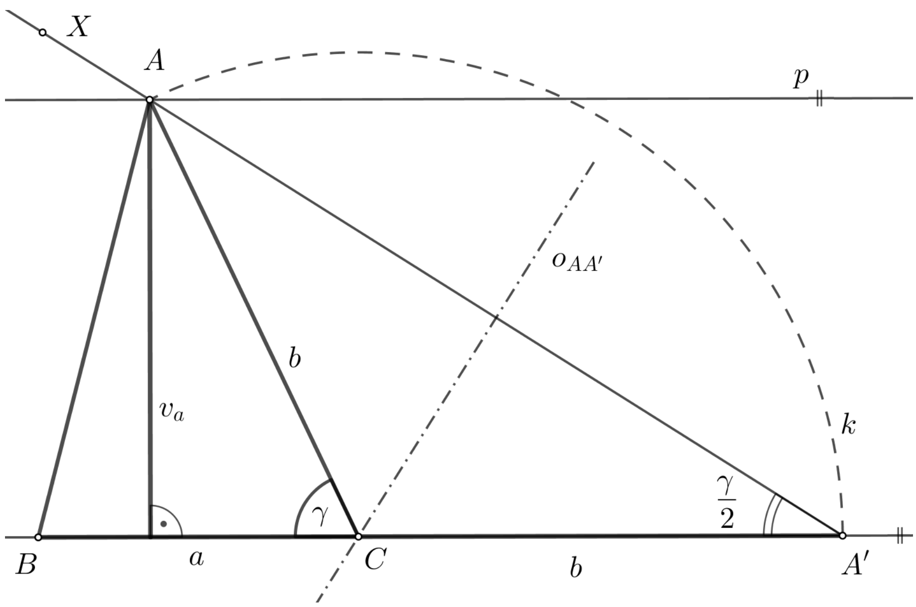
Zkrácený zápis:

$$\overline{BA'} : |BA'| = a + b,$$

$$\left(|\sphericalangle BA'A| = \tfrac{1}{2}\gamma\right) \Rightarrow \left(A \in \overrightarrow{A'X}, |\sphericalangle BA'X| = \tfrac{1}{2}\gamma\right),$$

$$d\,(A, BA') = v_a \Rightarrow (A \in p;\ \ p \parallel BA',\, d\,(p, BA') = v_a)$$

$$(|CA| = |CA'|) \Rightarrow (C \in o_{AA'})$$



Obr. 30

Konstrukce:

1. $\overline{BA'}$; $|BA'| = a + b$,
2. $\overrightarrow{A'X}$; $|\sphericalangle BA'X| = \frac{1}{2}\gamma$,
3. p; $p \parallel BA'$, $d\,(p, BA') = v_a$,
4. A, $A = p \cap \overrightarrow{A'X}$,

5. $o_{AA'}$ ... osa úsečky AA',

6. C; $C = BA' \cap o_{AA'}$,

7. $\triangle ABC$.

Podmínky řešitelnosti a diskuse:

- Úloha má vždy právě 1 řešení.

Úloha 22 Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: $a+b+c$, v_a, β.

Rozbor: Na přímce BC uvažujme body A', A'' takové, že $|A'A''| = a+b+c$. Bod A' je obrazem vrcholu A trojúhelníku ABC v otočení se středem v bodě B o orientovaný úhel $\pi - \beta$. Bod A'' je obrazem vrcholu A trojúhelníku ABC v otočení se středem v bodě C o orientovaný úhel $-(\pi - \gamma)$. Trojúhelník ABA' je rovnoramenný se základnou AA' a velikost úhlu $AA'B$ je tedy $\frac{1}{2}\beta$. Lze tak sestrojit trojúhelník $AA'A''$, neboť známe délku jeho strany $A'A''$ výšku z vrcholu A k této straně a velikost úhlu $AA'A''$. Protože trojúhelník ABA' je rovnoramenný, leží vrchol B na ose strany AA' a současně je vnitřním bodem úsečky AA''. Rovněž trojúhelník ACA'' je rovnoramenný se základnou AA'', tedy vrchol C leží na ose strany AA'' a současně je vnitřním bodem úsečky AA''.

Zkrácený zápis:

$$\overline{A'A''};\ |A'A''| = a+b+c,$$

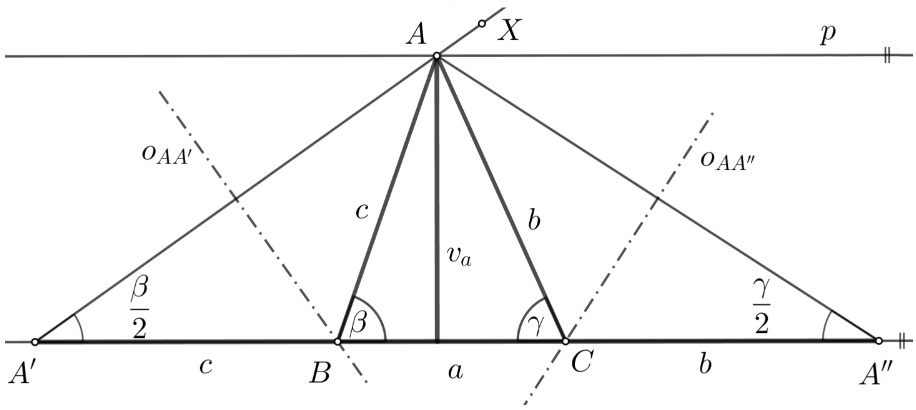
$$\left(|\sphericalangle A''A'A| = \tfrac{1}{2}\beta\right) \Rightarrow \left(A \in \overrightarrow{A'X}, |\sphericalangle A''A'X| = \tfrac{1}{2}\beta\right),$$

$$d\,(A, A'A'') = v_a \Rightarrow A \in p;\ \ p \parallel A'A''; d\,(p, A'A'') = v_a$$

$$(|BA\,|=|\,BA'|) \Rightarrow (B \in o_{AA'})$$

$$(|CA\,|=|\,CA''|) \Rightarrow (C \in o_{AA''})$$

Konstrukce:



Obr. 31

1. $\overline{A'A''}$; $|A'A''| = a + b + c$,
2. $\overrightarrow{A'X}$; $|\sphericalangle A''A'X| = \frac{1}{2}\beta$,
3. p; $p \parallel A'A''$, $d\,(p, A'A'') = v_a$,
4. A, $A = p \cap \overrightarrow{A'X}$,
5. $o_{AA'}$ ... osa úsečky AA',
6. $o_{AA''}$ ... osa úsečky AA'',
7. B; $B = A'A'' \cap o_{AA'}$,
8. C; $C = A'A'' \cap o_{AA''}$,
9. $\triangle ABC$.

Podmínky řešitelnosti a diskuse:

- Úloha má vždy právě 1 řešení.

Úloha 23 Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: $a+b+c$, v_a, α.

Rozbor: Na přímce BC uvažujme body A', A'' takové, že $|A'A''| = a+b+c$. Bod A' je obrazem vrcholu A trojúhelníku ABC v otočení se středem v bodě B o orientovaný úhel $\pi - \beta$. Bod A'' je obrazem vrcholu A trojúhelníku ABC v otočení se středem v bodě C o orientovaný úhel $-(\pi-\gamma)$ Jelikož známe velikost úhlu α, dopočítáme velikost úhlu $A'AA''$ v trojúhelníku $AA'A''$, která je $\frac{1}{2}(\pi+\alpha)$. Lze tak sestrojit trojúhelník $AA'A''$, neboť známe velikost jeho strany $A'A''$ výšku v_a z vrcholu A k této straně a velikost úhlu $A'AA''$. Protože trojúhelník ABA' je rovnoramenný, leží vrchol B na ose strany AA' a současně je vnitřním bodem úsečky AA''. Rovněž trojúhelník ACA'' je rovnoramenný se základnou AA'', tedy vrchol C leží na ose strany AA'' a současně je vnitřním bodem úsečky AA''.

Zkrácený zápis:

$$\overline{A'A''}; |A'A''| = a+b+c,$$

$$\left(|\sphericalangle A'AA''| = \tfrac{1}{2}(\pi+\alpha)\right) \Rightarrow \left(A \in \omega = \left\{X, |\sphericalangle A'XA''| = \tfrac{1}{2}(\pi+\alpha)\right\}\right),$$

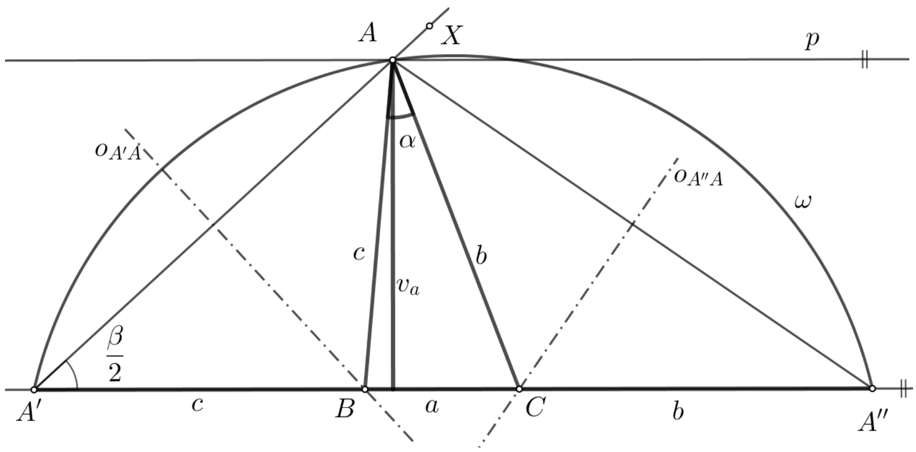
$$d\,(A, A'A'') = v_a \Rightarrow A \in p;\;\; p \parallel A'A''; d\,(p, A'A'') = v_a,$$

$$(|BA| = |BA'|) \Rightarrow (B \in o_{AA'}),$$

$$(|CA| = |CA''|) \Rightarrow (C \in o_{AA''}).$$

Konstrukce:

1. $\overline{A'A''}$; $|A'A''| = a+b+c$,
2. ω; $\omega = \left\{X, |\sphericalangle A'XA''| = \frac{1}{2}(\pi+\alpha)\right\}$,
3. p; $p \parallel A'A'', d\,(p, A'A'') = v_a$
4. A, $A = p \cap \omega$,
5. $o_{AA'}$ ... osa úsečky AA',
6. $o_{AA''}$ ... osa úsečky AA'',



Obr. 32

7. B; $B = A'A'' \cap o_{AA'}$,
8. C; $C = A'A'' \cap o_{AA''}$,
9. $\triangle ABC$.

Podmínky řešitelnosti a diskuse:

$v_a \leq \frac{1}{2}\,(a+b+c)\ \mathrm{cotg}\frac{1}{4}(\pi+\gamma)$

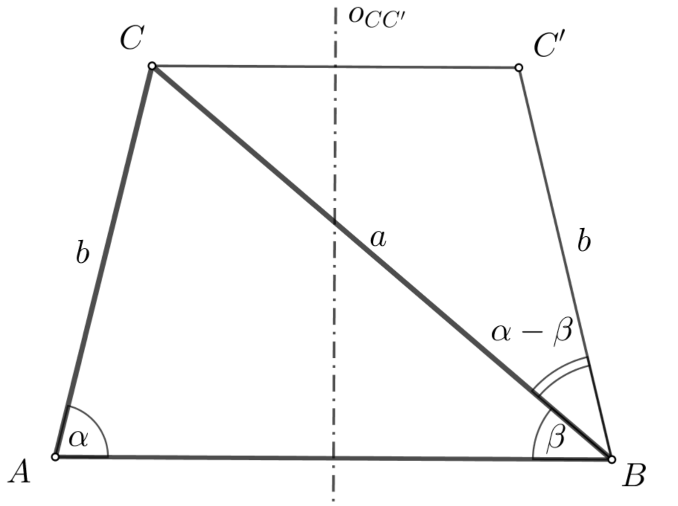
- 1 řešení, je-li $v_a = \frac{1}{2}\,(a+b+c)\ \mathrm{cotg}\frac{1}{4}(\pi+\gamma)$,
- 2 řešení, je-li $v_a < \frac{1}{2}\,(a+b+c)\ \mathrm{cotg}\frac{1}{4}(\pi+\gamma)$.

Úloha 24 Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: a, b, $\alpha - \beta > 0$.

Rozbor: Uvažujme rovnoramenný lichoběžník $ABC'C$ se základnami AB a BC', kde $|AC| = |BC'|$. Trojúhelník BCC' lze sestrojit podle věty *sus*, neboť známe délky stran BC, BC' a velikost úhlu CBC' je $\alpha - \beta$. Bod A je obrazem bodu B v osové souměrnosti s osou $o_{CC'}$.

Zkrácený zápis:

$$\triangle BCC';\ |CB| = a;\ |BC'| = b;\ |\sphericalangle CBC'| = \alpha - \beta$$



Obr. 33

Konstrukce:

1. $\triangle BCC'$ sus; $|CB| = a$; $|BC'| = b$; $|\sphericalangle CBC'| = \alpha - \beta$,
2. $o_{CC'}$ ... osa úsečky CC',
3. A, $O(o_{CC'}) : B \to A$,
4. $\triangle ABC$.

Podmínky řešitelnosti a diskuse:

- Úloha má vždy právě 1 řešení.

Úloha 25 Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB, je-li dáno: $v_a + v_c$, γ.

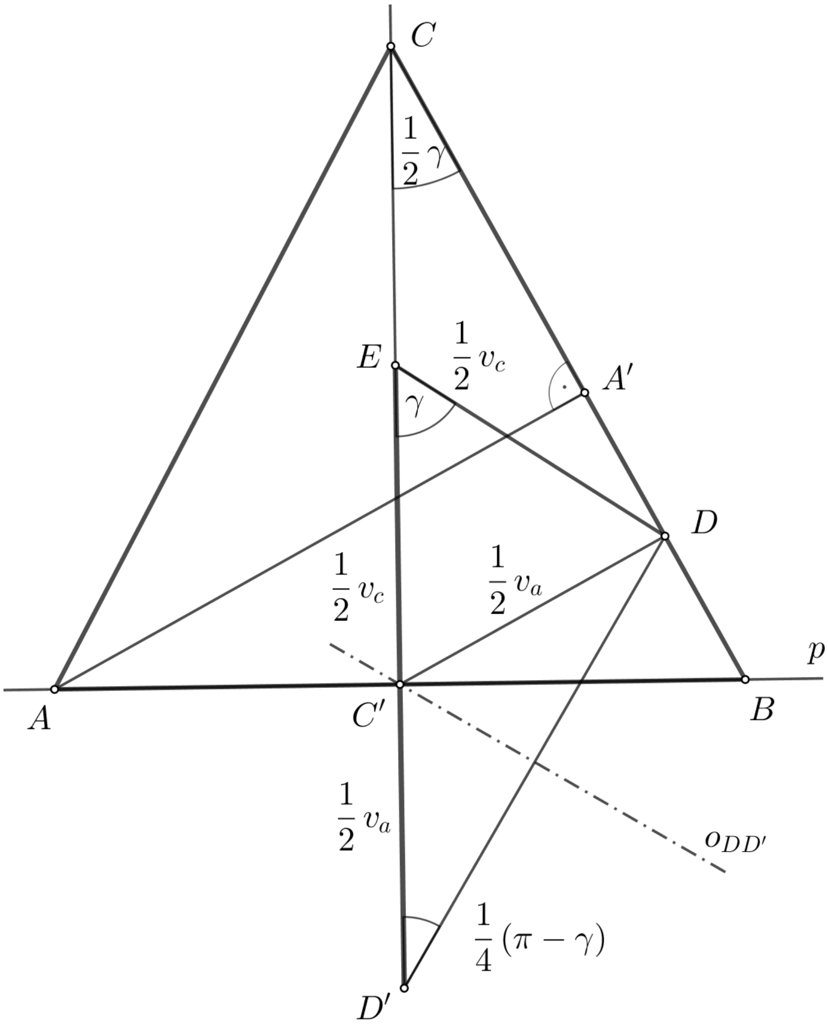
Rozbor: Označme A', C' paty výšek z vrcholů A, C. Bod C' je středem základny AB. Patu kolmice z bodu C' k přímce BC označme D. Úsečka $C'D$ je střední příčkou v trojúhelníku $AA'B$ a platí $|C'D| = \frac{1}{2}\,|AA'| = \frac{1}{2}v_a$. Bod E je středem přepony CC' pravoúhlého trojúhelníku $CC'D$, tedy $|EC'| = |EC| = |ED| = \frac{1}{2}v_c$. Dostáváme tak $|ED| + |C'D| = \frac{1}{2}\,(v_c + v_a)$. Protože trojúhelník DCE je rovnoramenný se základnou DC, platí pro jeho vnější úhel $C'ED$, že $|\sphericalangle C'ED| = \gamma$. Rovnoramenný trojúhelník $C'DE$ je tedy dán součtem délky základny a jednoho ramene a dále úhlem proti základně, viz obr. 34. Platí $|\sphericalangle EC'D| = |\sphericalangle EDC'| = \frac{1}{2}\,(\pi - \gamma)$, tedy $|\sphericalangle ED'D| = \frac{1}{4}\,(\pi - \gamma)$.

Konstrukce:

1. $\triangle ED'D$ usu; $|ED'| = \frac{1}{2}(v_c + v_a)$; $|\sphericalangle D'ED| = \gamma$; $|\sphericalangle ED'D| = \frac{1}{4}(\pi - \gamma)$,
2. $o_{DD'}$ ... osa úsečky DD',
3. C'; $C' = ED' \cap o_{DD'}$,
4. C; $S(E) : C' \to C$,
5. p; $p \perp CC'$, $C' \in p$
6. B; $B = CD \cap p$,
7. $\triangle ABC$.

Podmínky řešitelnosti a diskuse:

- Úloha má vždy právě 1 řešení.



Obr. 34

Literatura

[1] Polák, J.: Přehled elementární matematiky. Prometheus, Praha, (10. vydání) 2015.

[2] Polák, J.: Didaktika matematiky. Fraus, Plzeň, 2014.

[3] Šofr, B.: Euklidovské geometrické konštrukcie, Alfa, Bratislava, 1976.

[4] Švrček, J. – Vanžura, J.: Geometrie trojúhelníka. SNTL, Praha, 1988.