

1. • Matematickou indukcí dokažte, že pro každé sudé kladné číslo n platí rovnost

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots + (n-1)^3 - n^3 = -\frac{1}{4}n^2(2n+3).$$

- Odvoďte vztah pro počet úhlopříček v konvexním n -úhelníku a dokažte jej.
-

2. Dívky tipují, jak bude vypadat na školu právě nastupující učitel tělocviku.

- Věra: Snad bude vysoký a štíhlý nebo to bude blondák s brýlemi.
- Hanka: Bude černoooký a štíhlý nebo bude vysoký černoooký.
- Eva: Nebude nosit brýle. Navíc si myslím, že nebude černoooký a zároveň blondák.

Učitel odpovídal tipu Věry a Evy, Hanka neuhodla. Jaký byl jeho vzhled?

3. Zákazník sděluje prodavačce své přání: „Chci kabát s kapucí. Přitom chci, aby měl pásek a zelenou barvu nebo to může být kabát s teplou vložkou a kapucí. V žádném případě to nesmí být kabát s teplou vložkou a bez pásku.“ Prodavačka upozorňuje zákazníka, že zelený kabát s kapucí, páskem a teplou vložkou nemají. Zákazník si nakonec koupil hnědý kabát s vložkou, s páskem a kapucí.

- a) Odpovídal tento kabát jeho původnímu přání?
 - b) Zapište všechny možnosti výběru kabátu v této prodejně, které odpovídají přání zákazníka.
-

4. V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$144^{|x|} - 2 \cdot 12^{|x|} + a = 0$$

a proveďte diskusi vzhledem k reálnému parametru a .

5. Nákladní automobil A_1 začal odvážet stavební materiál a práci měl dokončit za x dní ($x \in \mathbb{N}, x > 3$). Od 4. dne mu však začala pomáhat auta A_2 a A_3 , přičemž auto A_2 dosahovalo trvale $\frac{3}{2}$ výkonu auta A_1 , ale auto A_3 pouze $\frac{5}{6}$ výkonu auta A_1 . Všechna tři vozidla dokončila společně celou práci za y dní (po jejím zahájení autem A_1).

- a) Určete funkční závislost $y = f(x)$.
 - b) Pro která $x < 60$ jsou příslušná y rovněž přirozená čísla.
-

6. V oboru reálných čísel řešte rovnici $81^{\sin^2 x} = 30 - 9 \cdot 3^{2 \cos 2x}$, pro $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

7. V oboru reálných čísel řešte rovnice

- $\log_2 x + \log_2 \log_2 x = 1$,
 - $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$.
-

8. Řešte danou soustavu za podmínky, že a, b, c jsou celočíselné délky stran trojúhelníku.

$$\begin{aligned}10a + 7b + 2c &= 186, \\3a + 2b + 2c &= 71.\end{aligned}$$

9. V oboru reálných čísel řešte nerovnice

- $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} > 1$,
- $\frac{\log(8-x)}{\log(x-2)} \leq 2$.

10. V oboru komplexních čísel řešte rovnici $x^2 + 3x + 10i = 0$ (algebraické i goniometrické řešení).

11. Sestrojte trojúhelník ABC , jsou-li dány tři nekolineární body (body, které neleží v jedné přímce): průsečík výšek V , pata výšky P_a na stranu BC a střed S_b strany CA .

12. Sestrojte trojúhelník ABC pokud je zadáno: a, v_b, v_c . Konstrukci proveďte pro vhodně zvolené hodnoty.

13. Sestrojte trojúhelník ABC pokud je zadáno: α, β, ρ . Konstrukci proveďte pro vhodně zvolené hodnoty.

14. Kolika způsoby můžeme posadit do řady tři prváky, tři druháky a tři třetíáky tak, aby žádní tři studenti stejného ročníku neseděli vedle sebe?

15.

- Čísla a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 mají tu vlastnost, že první tři tvoří geometrickou posloupnost a poslední čtyři posloupnost aritmetickou. Určete tato čísla, jestliže platí $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 4$ a zároveň $a_2 \cdot a_5 = -8$.
- Určete nejmenší počet přirozených čísel, který lze vložit mezi čísla 1 a 4096 tak, aby získané členy tvořily geometrickou posloupnost, přičemž jedním ze členů je číslo $128\sqrt{2}$.

16. Jsou dány vektory $\vec{AB} = (t, 1)$ a $\vec{AC} = (2, t)$, kde t je reálný parametr. Určete parametr t tak, aby trojúhelník ABC měl obsah $S = 2$ (alespoň dvěma způsoby).

17. Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky a . Necht' M je střed hrany AE , N střed hrany CG a P střed hrany AB . Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou MNP a vypočítejte objem a povrch jehlanu, jehož podstavou je tento řez a hlavním vrcholem je F .

18. Vypočítejte odchylku přímek p, p' (ve stupních), které jsou osově souměrné podle přímky $o: x+2y-10=0$. Přímka p obsahuje bod A , přímka p' bod B , kde $A = [0; 0]$, $B [4; 5]$.

19. Pan Spořivý na začátku každého měsíce posílá do banky 2 000 Kč. Banka nabízí roční úrok 1,5 %. Daň z úroku je 15 %. Úroky jsou připisovány na konci každého měsíce. Za jak dlouho bude mít naspořeno 100 000 Kč? (Peníze si chce vybrat na konci měsíce po připsání úroku.)

20. Pan Burian si založil rentový účet s úrokovou mírou 2 % p. a. a bude spořit 2 200 Kč měsíčně po dobu 20 let. Po dobu 10 let pak bude pobírat měsíční rentu. Úrokovací období banky je jeden měsíc. Daň z úroků je 15 %.

- Kolik korun pan Burian celkem naspoří?
- Jaká je výše měsíční renty?
- Kolik korun bude panu Burianovi celkem vyplaceno?