

1. • Matematickou indukcí dokažte, že pro každé sudé kladné číslo n platí rovnost

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots + (n-1)^3 - n^3 = -\frac{1}{4}n^2(2n+3).$$

- Odvoďte vztah pro počet úhlopříček v konvexním n -úhelníku a dokažte jej.
-

2. Zákazník sděluje prodavačce své přání: „Chci kabát s kapucí. Přitom chci, aby měl pásek a zelenou barvu nebo to může být kabát s teplou vložkou a kapucí. V žádném případě to nesmí být kabát s teplou vložkou a bez pásku.“ Prodavačka upozorňuje zákazníka, že zelený kabát s kapucí, páskem a teplou vložkou nemají. Zákazník si nakonec koupil hnědý kabát s vložkou, s páskem a kapucí.

- a) Odpovídal tento kabát jeho původnímu přání?
b) Zapište všechny možnosti výběru kabátu v této prodejně, které odpovídají přání zákazníka.
-

3. V oboru reálných čísel řešte rovnici a proveďte diskusi vzhledem k reálnému parametru a .

$$144^{|x|} - 2 \cdot 12^{|x|} + a = 0$$

4. V oboru reálných čísel řešte rovnici $81^{\sin^2 x} = 30 - 9 \cdot 3^{2 \cos 2x}$, pro $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.
-

5. V oboru reálných čísel řešte rovnice

- $\log_2 x + \log_2 \log_2 x = 1$,
 - $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$.
-

6. Řešte danou soustavu za podmínky, že a , b , c jsou celočíselné délky stran trojúhelníku.

$$\begin{aligned} 10a + 7b + 2c &= 186, \\ 3a + 2b + 2c &= 71. \end{aligned}$$

7. Sestrojte trojúhelník ABC , jsou-li dány tři nekolineární body (body, které neleží v jedné přímce): průsečík výšek V , pata výšky P_a na stranu BC a střed S_b strany CA .
-

8. Sestrojte trojúhelník ABC pokud je zadáno: a , v_b , v_c . Konstrukci proveďte pro vhodně zvolené hodnoty.
-

9. Kolika způsoby můžeme posadit do řady tři prváky, tři druháky a tři třetáky tak, aby žádní tři studenti stejného ročníku neseděli vedle sebe?
-

10.
 - Čísla a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 mají tu vlastnost, že první tři tvoří geometrickou posloupnost a poslední čtyři posloupnost aritmetickou. Určete tato čísla, jestliže platí $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 4$ a zároveň $a_2 \cdot a_5 = -8$.
 - Určete nejmenší počet čísel, který lze vložit mezi čísla 1 a 4 096 tak, aby získané členy tvořily geometrickou posloupnost, přičemž jedním ze členů je číslo $128\sqrt{2}$.
-

11. Jsou dány vektory $\overrightarrow{AB} = (t, 1)$ a $\overrightarrow{AC} = (2, t)$, kde t je reálný parametr. Určete parametr t tak, aby trojúhelník ABC měl obsah $S = 2$ (alespoň dvěma způsoby).
-

12. Vypočítejte odchylku přímek p , p' (ve stupních), které jsou osově souměrné podle přímky $o: x+2y-10=0$. Přímka p obsahuje bod A , přímka p' bod B , kde $A = [0; 0]$, $B [4; 5]$.
-

13. Pan Spořivý na začátku každého měsíce posílá do banky 2 000 Kč. Banka nabízí roční úrok 1,5 %. Daň z úroku je 15 %. Úroky jsou připisovány na konci každého měsíce. Za jak dlouho bude mít naspořeno 100 000 Kč? (Peníze si chce vybrat na konci měsíce po připsání úroku.)
-

14. Elipse s poloosami délek $a > 0$ a $b > 0$ je vepsán čtverec. Určete délku jeho strany.