MDIM6 – příklady DÚ

Vzorově řešte následující středoškolské úlohy:

1. Je dán $\triangle ABC$, kde $A[6,-1]$, $B[1,4]$, $C[-3,-4]$. Znázorněte jej graficky, určete směrnicový tvar rovnice výšky (jako přímky) jdoucí bodem A a vypočtěte velikost této výšky (jako úsečky).

2. Funkce f je dána rovnicí $y = \sqrt{3} - 2\cos(2x + \frac{\pi}{6})$. Najděte rovnici tečny ke grafu funkce f v tom bodě $x_0 \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, v němž graf funkce f protíná osu x.

3. Sestrojte lichoběžník $ABCD$ ($AB||CD$) s pravým úhlem při vrcholu A, je-li dáno $|AC| = 5\,\mathrm{cm}$, $|BD| = 7\,\mathrm{cm}$ tak, aby úhlopříčka AC dělila lichoběžník na dvě části, jejichž obsahy jsou v poměru $2:1$. (Ke konstrukci dopočítejte potřebné údaje.)

4. Dokažte, že mezi čísly tvaru $6n+3$, kde $n \in \mathbb{N}$, existuje nekonečně mnoho druhých mocnin přirozených čísel a mezi čísly tvaru $3n+2$, kde $n \in \mathbb{N}$, neexistuje žádná druhá mocnina přirozeného čísla.

5. Dokažte, že platí rovnost
$$\frac{\cos 2\alpha - 2\cos\alpha + 1}{\sin 2\alpha} = -\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$
Pro která α je tato rovnost definována? Ověřte ji pro $\alpha = 120°$.

6. Je dán kvádr $ABCDA'B'C'D'$ s hranami v souřadnicových osách $D[0,0,0]$, $B'[3,6,3]$ a bod $E[0,0,p]$, kde p je nezáporný reálný parametr. Vypočtěte obsah řezu rovinou $\rho = BCE$. Ve volném rovnoběžném promítání znázorněte graficky řezy pro $p = 2$ a $p = 5$.

7. Jsou dána kladná reálná čísla a, b ($a > b$). Určete, pro jaké hodnoty podílu $\frac{a}{b}$ existuje trojúhelník o stranách délky a, b, $c = \sqrt{ab}$. Dále určete hodnoty podílu $\frac{a}{b}$, pro něž je trojúhelník ostroúhlý (pravoúhlý, tupoúhlý).

8. Znázorněte množinu všech bodů v rovině, jejichž souřadnice $[x, y]$ vyhovuje nerovnici
$$\frac{(x^5 - 13x^3 + 36x)(y^4 - 17y^2 + 16)}{(y^5 - 13y^3 + 36y)(x^4 - 17x^2 + 16)} \geq 0.$$
Určete, kolik z těchto bodů má souřadnice celočíselné a přitom náleží množině $\langle -2, 2\rangle \times \langle -2, 2\rangle$.

9. V $\mathbb{R}$ řešte rovnici $\log_2(2+x) - 1 = \log_2(1-x) + \log_2(3-x)$.

10. Sestrojte $\triangle ABC$, je-li dáno $a+b, \beta, \gamma$. Konstrukci proveďte pro $a + b = 12\,\mathrm{cm}$, $\beta = 60°$, $\gamma = 45°$.

11. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic o neznámých x, y

$$\begin{array}{rcrcl} ax & + & y & = & 1, \\ |x| & + & y & = & a. \end{array}$$

Proveďte diskusi vzhledem k reálnému parametru a.

12. Je dána krychle $ABCDEFGH$ o hraně délky 1. Dokažte, že přímka CE je kolmá k rovinám AFH a BDG. Určete poměr povrchu krychle $ABCDEFGH$ a povrchu tzv. pravidelného trojbokého antihranolu o podstavách AFH a BDG?

13. Jsou dány tři různé přímky a, b, c a bod $A \in a$. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby platilo $B \in b$, $C \in c$. Konstrukci proveďte pro vhodně zvolenou polohu zadaných prvků.

14. Užitím principu MI dokažte pro všechna přirozená čísla platnost vzorce

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

15. Určete všechny dvojice (a, b), resp. (c, d) přirozených čísel, pro něž platí

    - $[n(a,b)]^2 + [D(a,b)]^2 = 50$,
    - $c \cdot d = 68 \cdot D(c,d)$,

    kde $n(x, y)$, resp. $D(x, y)$ je nejmenší společný násobek, resp. největší společný dělitel čísel x, y.

16. Je dán trojúhelník o obsahu S. Daným bodem ležícím uvnitř jedné z jeho stran procházejí rovnoběžky s oběma zbývajícími stranami, které dělí trojúhelník na dva trojúhelníky o obsazích P a Q a rovnoběžník o obsahu R.
Dokažte, že platí $S = (\sqrt{P} + \sqrt{Q})^2$ a $R = 2\sqrt{PQ}$.

17. Řešte rovnici $(3 - \operatorname{tg}^2 x)(\cos 2x + 5 \sin x + 2) = 0$.

18. V rovině jsou dány dvě různé přímky a, b a bod M. Sestrojte kružnici k, která se dotýká obou přímek a, b a prochází bodem M. Proveďte diskusi vzhledem k různým možnostem vzájemné polohy přímek a, b a bodu M. Konstrukci proveďte pro případ, že a, b jsou různoběžky a bod M neleží na žádné z nich.

19. Tři žáci A, B, C se domlouvají, že během příštího týdne si půjdou společně zaplavat. Bazén je otevřen 7 dní týdně. Žáku A vyhovuje pouze pondělí, úterý a pátek. Žáku B nevyhovuje pondělí, středa a pátek. Žák C má volné právě čtyři dny v týdnu. Dále víme, že všechny dny, kdy může přijít aspoň jeden ze žáků B, C, může přijít aspoň jeden ze žáků A, C. Pátek je jediný den, který se nehodí ani jednomu z žáků B, C, ale vyhovuje aspoň jednomu z žáků A, C. Určete, ve které dny může přijít žák C a ve které dny mohou přijít všichni žáci společně.

20. Dokažte, že číslo $\sqrt{5}$ je iracionální.