

ZÁKLADY MATEMATIKY 2

4. SÉRIE: LINEÁRNÍ PROSTORY, ARITMETICKÉ VEKTORY

Přípravní úlohy V této sérii se předpokládá znalost maticového počtu – operací s maticemi, a rovněž poznatky o reálných funkcích ze ZMAT1; potřebujeme vhléd do některých vlastností těchto funkcí. Řešte úlohy 01 – 02:

01. Měření teploty – úloha na použití matic. V průběhu m dní jsme na určitém místě pravidelně n -krát denně měřili teplotu. Výsledky jsme zapsali do tabulky – matice typu $\{m, n\}$. Záznam nebo prvek t_{ij} v této matici tudíž znamená teplotu naměřenou v j -tém měření i -tého dne. Vyřešte následující úlohy v tomto smyslu:

– запиšte s použitím potřebných prvků matice nebo řádků, sloupců této matice, co je potřeba vypočítat.

- (1) Jaké byly v jednotlivých dnech průměrné denní teploty?
- (2) Jaké maximální, resp. minimální denní teploty se za období měření dosáhly v jednotlivých dnech?
- (3) Jaký je průměr všech maximálních denních teplot?
- (4) Jaké je minimum všech maximálních denních teplot?
- (5) Jaké je maximum všech minimálních denních teplot?
- (6) Určete průměrné teploty naměřené vždy ve stejnou dobu měření.
- (7) Ve kterých dnech teplota ani v jednom měření nedosáhla průměrnou denní teplotu?
- (8) Který den byl z hlediska průměrné teploty nejteplejším, resp. nejchladnějším dnem?
- (9) Který den byl z hlediska maximální naměřené teploty nejteplejším dnem?
- (10) Který den byl z hlediska minimální naměřené teploty nejchladnějším dnem?
- (11) Ve kterých dnech byly rozdíly maximálních a minimálních teplot největší?
- (12) Ve kterých dnech teplota v prvním měření byla nižší než v předchozím dni?
- (13) Existovaly takové dva po sobě jdoucí dny, ve kterých rozdíl průměrných teplot byl nejmeně 10 st. C?

(Návod. Kupř. pro (1) potřebujeme vypočítat pro každé i , $1 \leq i \leq m$ hodnoty

$$A_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n t_{ij}, \text{ neboli určit sloupcový vektor obsahující těchto } m \text{ prvků.})$$

02. Prodej zboží – úloha na použití matic. Vydavatel zaznamenal počty knih n různých titulů, které se prodávaly za konkrétní rok v síti m prodejen. Výsledky zapsal do tabulky – matice typu $\{m, n\}$. Záznam nebo prvek a_{ij} v této matici znamená proto počet knih titulu j , $1 \leq j \leq n$, prodaných v i -té prodejně, $1 \leq i \leq m$. Napište formulami, jak je potřeba prohledávat nebo jaké operace potřebujeme provést s prvky této matice, jejími řádky nebo sloupci pro řešení úlohy:

- (1) Prodala každá prodejna alespoň jeden titul?
- (2) Ve které prodejně se některý titul vůbec neprodal?
- (3) Který z titulů se prodával nejlépe v jednotlivých prodejnách?
- (4) Který z titulů se prodával nejlépe ve všech prodejnách dohromady?
- (5) Ve kterých prodejnách se prodala stejná množství 1. titulu?

(6) Pokud se ve všech prodejnách j -tý titul prodává za stejnou cenu p_j Kč, $1 \leq j \leq n$, jaké by byly tržby jednotlivých prodejen z prodeje všech titulů?

03. Necht f, g jsou dvě reálné funkce proměnné x definované na množině M , necht c je reálné číslo. Předpokládejme, že obě funkce f, g mají na množině M určitou vlastnost v . Rozhodněte, zda funkce $f + g, c \cdot f$ mají rovněž tuto vlastnost v ; pokud ano, zdůvodněte, pokud ne, uveďte protipříklad.

Řešte pro následující vlastnosti:

- | | |
|---|---|
| – funkce je nezáporná, | – funkce je nenulová, |
| – $f(x) \geq 0$ pro $x \geq 0$, | – funkce je konstantní, |
| – funkce je lineární, | – funkce je omezená, |
| – funkce nemá nulové body, | – funkce je spojitá (nespojité), |
| – má pouze konečný počet bodů nespojitosti, | – funkce je sudá (lichá), |
| – funkce je periodická, | – funkce je prostá, |
| – funkce je rostoucí (klesající), | – platí $f(0) = 0$, |
| – platí $f(x) = 0$ pro danou $M_1, M_1 \subset M$, | – platí $f(0) = 10$, |
| – obě funkce mají stejnou ASS v ∞ , | – obě funkce mají ASS v ∞ , |
| – funkce je konvexní (konkávní), | – platí $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$. |

1. Lineární prostor. Zjistěte, zda uvedená množina s obvyklými operacemi sčítání a násobení reálným číslem tvoří lineární prostor:

a) E_2 (resp. E_3) – množina všech dvojic (resp. trojic) reálných čísel – vektorů, operace v E_2 definujeme po složkách;

b) V_n – množina všech n -tic reálných čísel (n -složkových vektorů, n -rozměrných vektorů) pro dané n , operace ve V_n definujeme po složkách (R je množina všech reálných čísel);

c) V_{n0} – množina všech n -rozměrných vektorů s vlastností $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$;

d) V_{n1} – množina všech n -rozměrných vektorů s vlastností $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$;

e) $A_1 = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in R, x_2 = kx_1, k \in R\}$ pro $k \in R$ dané;

f) $A_2 = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in R, x_2 = 2 - x_1\}$;

g) $A_3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in R, i = 1, 2, 3, x_2 = 0\}$;

h) množina $F(x)$ všech funkcí $f : R \rightarrow R$;

i) množina $F(x)$ všech funkcí $f : R \rightarrow R$, rostoucích na R ;

j) množina $P(x)$ všech polynomických funkcí s reálnými koeficienty;

k) množina $P_n(x)$ všech polynomických funkcí s reálnými koeficienty stupně nejvíce n , kde n je dané;

l) množina $SF(x)$ všech funkcí $f : R \rightarrow R$, spojitých na R ;

m) množina M_n všech číselných čtvercových matic stupně n pro dané n ;

n) množina SM_n všech čtvercových symetrických matic stupně n pro dané n ;

o) množina DM_n všech číselných čtvercových matic A stupně n pro dané n takových, že $\det A = 1$;

p) množina RM_n všech číselných čtvercových regulárních matic stupně n pro dané n .

2. Lineární kombinace v lineárním prostoru. Vyjádřete vektor x jako lineární kombinaci vektorů $a_1, a_2, \dots, a_n$ a určete koeficienty této lineární kombinace:

a) $x = (0, 3, -4), a_1 = (1, -1, 2), a_2 = (2, 1, 0)$;

b) $x = (0, 3, -4), a_1 = (-3, 2, 1), a_2 = (2, 1, 0)$;

- c) $x = (0, 0, 0)$, $a_1 = (1, 2, -1)$, $a_2 = (2, 1, -1)$, $a_3 = (0, 1, 1)$;
d) $x = (0, 0, 0)$, $a_1 = (-1, 0, 1)$, $a_2 = (0, 1, 1)$, $a_3 = (1, 1, 0)$;
e) $x = (6, 9, 14)$, $a_1 = (-1, 0, 1)$, $a_2 = (0, 1, 1)$, $a_3 = (1, 1, 0)$;
f) $x = (0, 0, 0, 0)$, $a_1 = (1, 2, -1, -2)$, $a_2 = (2, 3, 0, -1)$, $a_3 = (1, 2, 1, 3)$,
 $a_4 = (1, 3, -1, 0)$;
g) $x = (-1, 0, 2, 3)$, $a_1 = (1, -1, 0, 2)$, $a_2 = (1, 2, 0, 3)$, $a_3 = (1, -4, 2, 1)$;
h) $x = (4, 4, -6, -18)$, $a_1 = (1, 1, 0, 1)$, $a_2 = (0, -1, 2, 7)$, $a_3 = (2, -1, 0, 1)$;
i) $x = (1, -1)$, $a_1 = (1, 3)$, $a_2 = (5, -1)$, $a_3 = (1, 7)$.

3. Lineární kombinace. Vyjádřete vektor $f(x) = 4x^2 + 2x - 14$ jako lineární kombinaci vektorů $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ pro všechna reálná x a určete koeficienty této lineární kombinace:

- a) $f_1(x) = x + 1$, $f_2(x) = x^2 + x - 3$, $f_3(x) = 1 - x^2$;
b) $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 1 + x$, $f_3(x) = (1 + x)^2$.

4. Lineární závislost (LZ), lineární nezávislost (LNZ). Rozhodněte o lineární závislosti nebo nezávislosti vektorů:

- a) $a_1 = (1, 2, 3)$, $a_2 = (3, 6, 7)$;
b) $a_1 = (4, -2, 6)$, $a_2 = (6, -3, 9)$;
c) $a_1 = (2, -3, 1)$, $a_2 = (3, -1, 5)$, $a_3 = (1, -1, 4)$;
d) $a_1 = (5, 4, 3)$, $a_2 = (3, 3, 2)$, $a_3 = (8, 1, 3)$;
e) $a_1 = (0, 1, 1)$, $a_2 = (1, 0, 1)$, $a_3 = (1, 1, 0)$;
f) $a_1 = (4, -5, 2, 6)$, $a_2 = (2, -2, 1, 3)$, $a_3 = (6, -3, 3, 9)$, $a_4 = (4, -1, 5, 6)$;
g) $a_1 = (-2, -3, -5)$, $a_2 = (1, 0, -2)$, $a_3 = (-1, -7, -9)$, $a_4 = (-1, 0, 1)$;
h) $a_1 = (-2, -5, -7, -3)$, $a_2 = (1, -1, 0, 0)$, $a_3 = (-1, 0, -2, -3)$.

5. Lineární závislost, lineární nezávislost. Rozhodněte o lineární závislosti nebo nezávislosti prvků lineárního prostoru $P_2(x)$:

- a) $1 + x$, $1 - x$, $2 + x - x^2$; b) $1 - x$, $x - x^2$, $x^2 - 1$.

6. Lineární závislost, lineární nezávislost. Rozhodněte o lineární závislosti nebo nezávislosti prvků lineárního prostoru $P_3(x)$:

- a) 1 , $1 + x$, $1 + x^2$, $1 + x^3$; b) $1 - x$, $x - x^2$, $x^2 - x^3$, $x^3 - 1$;
c) x , $x + x^2$, $x^2 + x^3$, $x^3 + 1$; d) $1 + x$, $1 - x$, $x^3 + 2x$, $x^3 - 2x^2$.

7. Lineární závislost, lineární nezávislost. Nechť x , y , z jsou 3 lineárně nezávislé vektory v lineárním prostoru L . Zjistěte, zda následující vektory jsou lineárně závislé nebo lineárně nezávislé:

- a) $x + y$, $y + z$, $z + x$; b) $x + 2y$, $y + 3z$, $z + 4x$;
c) x , $x + y$, $x + y + z$; d) $x - y$, $y - z$, $z - x$;
e) $x + y$, $x - y$, $x + y + z$.

8. Lineární závislost, lineární nezávislost. Nechť x , y , z , u jsou 4 lineárně nezávislé vektory v lineárním prostoru L . Zjistěte, zda následující vektory jsou lineárně závislé nebo lineárně nezávislé:

- a) $x + y$, $y + z$, $z + u$, $u + x$;
b) $x + y + z$, $y + z + u$, $z + u + x$, $u + x + y$;
c) $x + y + z + u$, $x - y + z + u$, $x + y + z - u$, $x - y + z - u$.

9. Hodnost dané množiny vektorů (maximální počet LNZ vektorů v této množině).

Určete hodnost množiny vektorů:

- a) $a_1 = (1, 1, 0)$, $a_2 = (3, 6, 7)$;
 b) $a_1 = (4, -2, 0)$, $a_2 = (1, 1, -1)$, $a_3 = (5, -1, -1)$;
 c) $a_1 = (0, 1, 1)$, $a_2 = (1, 0, 1)$, $a_3 = (1, 1, 0)$;
 d) $a_1 = (2, 0, 0)$, $a_2 = (0, -3, 0)$, $a_3 = (0, 0, 4)$;
 e) $a_1 = (10, 1, 1)$, $a_2 = (0, 10, 1)$, $a_3 = (1, 0, 10)$;
 f) $a_1 = (3, 0, 1)$, $a_2 = (1, 2, 1)$, $a_3 = (1, 1, 1)$;
 g) $a_1 = (2, 0, -1)$, $a_2 = (-4, 0, 2)$, $a_3 = (10, 0, -1)$;
 h) $a_1 = (2, 1, -1, 0)$, $a_2 = (3, 2, 1, 2)$, $a_3 = (2, 0, 1, 1)$, $a_4 = (3, 0, 2, 1)$.

10. Hodnost matice. Určete hodnost matice A :

- a) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$
 e) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 11 & 13 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 13 & 24 \end{pmatrix}$

11. Frobeniova věta. Pomocí Frobeniovy věty rozhodněte o existenci řešení soustavy lineárních rovnic a určete všechna její řešení; soustavy jsou zapsány pomocí tabulky:

a) $\begin{array}{cccc c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 3 & 1 & -1 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & 3 & -4 & -12 \\ 1 & -5 & 3 & -3 & 3 \end{array}$	b) $\begin{array}{cccc c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & -2 & 3 \end{array}$
c) $\begin{array}{cccc c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{array}$	d) $\begin{array}{ccccc c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline 1 & 3 & -3 & -6 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & -3 & 3 & 9 \end{array}$
e) $\begin{array}{cccc c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline -1 & 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & -1 & 8 \\ 4 & -2 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 4 \end{array}$	

12. Frobeniova věta. Pomocí Frobeniovy věty rozhodněte o existenci řešení soustavy lineárních rovnic a určete všechna její řešení; soustavy jsou zapsány pomocí tabulky:

a) $\begin{array}{ccc c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{array}$	b) $\begin{array}{ccc c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 3 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \end{array}$
--	--

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c|c}
\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \hline
\begin{array}{cccc} 5 & 2 & 1 & -6 \end{array} \\ \hline
\begin{array}{cccc} -2 & 1 & -5 & 7 \end{array} \\ \hline
\begin{array}{cccc} -5 & -2 & 6 & -1 \end{array} \\ \hline
\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \\ \hline
\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}
\end{array}
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\begin{array}{c|c}
\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \hline
\begin{array}{ccc} 2 & -1 & -2 \end{array} \\ \hline
\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 3 \end{array} \\ \hline
\begin{array}{ccc} 4 & -2 & 1 \end{array} \\ \hline
\begin{array}{ccc} 6 & 3 & 4 \end{array} \\ \hline
\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}$$

13. Hodnost matice. Vytvořte takovou matici vhodného typu, aby z jejího tvaru bylo zřejmé, že má hodnost

a) 2; b) 3; c) 4; d) n .

14. Hodnost matice. Určete hodnost matice A v závislosti na parametru p :

$$\begin{array}{l}
\text{a) } \begin{pmatrix} p & 4 \\ 1 & p \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} p^2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ p & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 \\ 1 & 1 & p \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} p & 1 & -1 \\ -1 & p & 1 \\ 1 & -1 & p \end{pmatrix} \\
\text{e) } \begin{pmatrix} -p & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -p & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -p & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -p \end{pmatrix}
\end{array}$$

15. Báze lineárního prostoru. Posuďte, zda následující vektory tvoří bázi prostoru V_3 ; jestliže ano, pak určete souřadnice vektoru $x = (1, 2, 3)$ vzhledem k bázi:

- a) $a_1 = (2, 0, 0)$, $a_2 = (0, 3, 0)$, $a_3 = (0, 0, 4)$;
- b) $a_1 = (1, 1, 1)$, $a_2 = (0, 1, 1)$, $a_3 = (0, 0, 1)$;
- c) $a_1 = (3, 0, 1)$, $a_2 = (1, 2, 1)$, $a_3 = (1, 1, 1)$;
- d) $a_1 = (1, 1, 2)$, $a_2 = (3, 2, 4)$, $a_3 = (-2, -1, -2)$.

16. Báze lineárního prostoru. Posuďte, zda vektory tvoří bázi prostoru V_4 :

- a) $a_1 = (1, 5, 4, 3)$, $a_2 = (1, 2, 1, 4)$, $a_3 = (-1, -3, -2, -1)$, $a_4 = (2, 1, 3, 2)$;
- b) $a_1 = (1, 1, 0, -1)$, $a_2 = (2, 0, 1, 2)$, $a_3 = (-1, 2, 2, 1)$, $a_4 = (3, 1, 1, 3)$;
- c) $a_1 = (1, 0, 2, 3)$, $a_2 = (-1, 1, 0, 0)$, $a_3 = (2, 5, 7, 3)$;
- d) $a_1 = (2, 1, -1, 0)$, $a_2 = (3, 2, 1, 2)$, $a_3 = (2, 0, 1, 1)$, $a_4 = (3, 0, 2, 1)$; jestliže ano, pak určete souřadnice vektoru $x = (5, -1, 5, 3)$ vzhledem k této bázi.

17. Báze lineárního prostoru. V prostoru V_3 označme jednotkové vektory $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ (tvořící jeho *standardní*, nebo *elementární*, nebo také *obvyklou bázi* $\mathcal{E}$) jako $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Určete souřadnice vektor– vzhledem k bázi:

- a) $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ v bázi $\{\vec{j}, \vec{k}, \vec{i}\}$;
- b) $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ v bázi $\{\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}\}$;
- c) $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ v bázi $\{2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}, 3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}\}$;
- d) $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ v bázi $\{\vec{i} + \vec{j}, \vec{j} + \vec{k}, \vec{i} + \vec{k}\}$.

18. Změna souřadnic, matice přechodu od báze k bázi. Nechť $\mathcal{E}$ je standardní báze prostoru V_2 . Báze $\mathcal{B}$ prostoru V_2 je určena vektory $b_1 = (3, 2)$, $b_2 = (7, 5)$ (uvedené souřadnice vektor– b_1 , b_2 se tedy vztahují na bázi $\mathcal{E}$).

- a) Najděte vyjádření vektoru $x = (9, 3)$ v bázi $\mathcal{B}$.
- b) Najděte vyjádření vektoru $x = (10, 7)_B$ v bázi $\mathcal{E}$ (zápis $x = (10, 7)_B$ značí, že 10, 7 jsou souřadnice vektoru x v bázi $\mathcal{B}$).

19. Změna souřadnic, matice přechodu od báze k bázi. Pomocí matice přechodu najděte vyjádření vektoru $x = (2, 3, 4)$ v bázi:

- a) $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$;
- b) $\mathcal{C} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$;
- c) $\mathcal{D} = \{(2, 0, 0), (1, 3, 0), (1, 1, 4)\}$.

20. Změna souřadnic, matice přechodu od báze k bázi. Pomocí matice přechodu najděte vyjádření vektoru $x \in V_2$, resp. $x \in V_3$ vzhledem k bázím $\mathcal{B}, \mathcal{C}$, přičemž tyto báze jsou tvořeny vektory:

- a) $\mathcal{B} = \{(-1, 2), (0, 1)\}, \mathcal{C} = \{(1, 3), (1, 4)\}$;
- b) $\mathcal{B} = \{(1, 2, 1), (2, 3, 3), (3, 7, 1)\}, \mathcal{C} = \{(3, 1, 4), (5, 2, 3), (1, 1, -6)\}$.

21. Změna souřadnic, matice přechodu od báze k bázi. Báze $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ prostoru V_2 jsou $\mathcal{B} = \{(-1, 2), (0, 1)\}, \mathcal{C} = \{(1, 3), (1, 4)\}$. Pomocí matice přechodu najděte souřadnice vektorů

- a) $x = (-7, 8)_B, y = (2, 1)_B, z = (-13, 1)_B$ v bázi $\mathcal{C}$;
- b) $x = (-10, 5)_C, y = (1, 2)_C, z = (0, 4)_C$ v bázi $\mathcal{B}$.

Řešení úloh:

1. d) f) i) o) p) ne; zbývající ano • **2.** a) $x = -a_1 + a_2$; b) x není lin. kombinací (přísl. soustava nemá řešení); c) pouze nulové koeficienty; d) nekonečně mnoho řešení: $x = ta_1 - ta_2 + ta_3, t \in R$ lib.; e) x není lin. kombinací (přísl. soustava nemá řešení); f) nekonečně mnoho řešení: $x = (-2a_1 + a_2 - a_3 + a_2)t, t \in R$ lib.; g) x není lin. kombinací (přísl. soustava nemá řešení); h) $x = 2a_1 - 3a_2 + a_3$; i) nekonečně mnoho řešení: $x = (2 - 9t)a_1 + ta_2 + (4t - 1)a_3, t \in R$ lib. • **3.** a) $f = -2f_1 + 4f_2$; b) $f = 12f_1 - 18f_2 + 4f_3$ • **4.** a) LNZ; b) LZ; c) LNZ; d) LZ; e) LNZ; f) LZ; g) LZ; h) LNZ • **5.** a) LNZ; b) LZ • **6.** a) LNZ, b) LNZ, c) LZ, d) LNZ • **7.** a) LNZ; b) LNZ; c) LNZ; d) LZ; e) LNZ • **8.** a) LZ; b) LNZ; c) LZ • **9.** a) 2; b) 2; c) 3; d) 3; e) 3; f) 3; g) 1; h) 4 • **10.** a) 1; b) 2; c) 3; d) 2; e) 3; f) 3; g) 4; h) 2 • **11.** a) $h(A) = h(\bar{A}) = 4$, proto jediné řešení: $x = (1, -1, 2, 3)$; b) $h(A) = 3, h(\bar{A}) = 4$, proto nemá řešení; c) $h(A) = h(\bar{A}) = 4$, proto jediné řešení: $x = (1, 2, 3, 4)$; d) $h(A) = h(\bar{A}) = 3, x = (41 - 10, 5u + 10v, -11 + 6, 5u - 3v, 2 - u + v, 0, 5u, v), u, v \in R$ lib.; e) $h(A) = h(\bar{A}) = 3, x = (4 - 2t, 8 - 5t, t, 0), t \in R$ lib. • **12.** a) $h(A) = 2, (2t, 7t, 8t), t \in R$ lib.; b) $h(A) = 2, (8t, 7t, 2t), t \in R$ lib.; c) $h(A) = 4$, pouze triviální řešení $(0, 0, 0, 0)$; d) $h(A) = 3$, pouze triviální řešení $(0, 0, 0)$ • **14.** a) pro $p \neq \pm 2$ je $h(A) = 2$; pro $p = \pm 2$ je $h(A) = 1$; b) pro $p \neq 0, p \neq -2$ je $h(A) = 3$; pro $p = 0$ nebo pro $p = -2$ je $h(A) = 2$; c) pro $p \neq 1$ je $h(A) = 3$; pro $p = 1$ je $h(A) = 1$; d) pro $p \neq 0$ je $h(A) = 3$; pro $p = 0$ je $h(A) = 2$; e) pro $p \neq 3, p \neq -1$ je $h(A) = 4$; pro $p = 3$ je $h(A) = 3$; pro $p = -1$ je $h(A) = 1$ • **15.** a) tvoří, $x = 1/2a_1 + 2/3a_2 + 3/4a_3$; b) tvoří, $x = a_1 + a_2 + a_3$; c) tvoří, $x = a_1 - 2a_2 + 6a_3$; d) množina uvedených vektorů není báze V_3 • **16.** a) ne; b) ano; c) ne; d) ano; $x = -a_1 + 2a_3 + a_4$ • **17.** Souřadnice pro vektory $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jsou trojice: a) 0,0,1; 1,0,0; 0,1,0; b) 0,0,1; 0,1,0; 1,0,0; c) -6, 4,1; 5, -3, -1; -2, 1,1; d) 1/2, -1/2, 1/2; 1/2, 1/2, -1/2; -1/2, 1/2, 1/2 • **18.** a) $x = (24, -9)_B$; b) $x = (79, 55)$. **19.** a) $x = (1/2, 3/2, 5/2)_B$; b) $x = (1/2, 5/2, 3/2)_C$; c) $x = (1/6, 2/3, 1)_D$ • **20.** jestliže utvoříme matice sestávající v sloupcích z odpovídajících bázových vektorů a označíme je B, C (jsou to matice přechodu od báze k bázi), pak $x_B = B^{-1} \cdot C \cdot x_C$, resp.

$x_C = C^{-1} \cdot B \cdot x_B$, navíc ještě platí $C^{-1} \cdot B = (B^{-1} \cdot C)^{-1}$; a) $B^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$; b)

$B^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} -27 & 61 & -41 \\ 9 & 18 & 9 \\ 4 & 10 & 8 \end{pmatrix}$ • **21.** a) $x = (34, -27)_C$, $y = (-13, 11)_C$, $z = (77, -64)_C$;

b) $x = (5, -20)_B$, $y = (-3, 17)_B$, $z = (-4, 24)_B$ •

Pojmy, vztahy, označení

Lineární prostor nad reálnými čísly, definice

Lineární prostor aritmetických vektorů

Lineární podprostor lineárního prostoru

Lineární kombinace vektorů

Lineární obal podmnožiny v lineárním prostoru

Lineární závislost, lineární nezávislost vektorů v lineárním prostoru

Generátory a báze lineárního prostoru; souřadnice vektoru v dané bázi

Standardní báze lineárního prostoru aritmetických vektorů

Báze a dimenze lineárního prostoru

Matice přechodu od báze k jiné bázi lineárního prostoru

Hodnost matice, určování hodnosti matice

20. února 2004