

ZÁKLADY MATEMATIKY 2

MATICE A DETERMINANTY

Matice a jejich použití

Motivace na použití matic vychází opět z praxe:

Nechť kupř. v určitém podniku se ze čtyř surovin s_1, s_2, s_3, s_4 vyrábí tři produkty p_1, p_2, p_3 , přičemž k výrobě jedné jednotky každého z produktů p_1, p_2, p_3 je potřeba tolik jednotek jednotlivých surovin s_1, s_2, s_3, s_4 , jak to určuje tabulka:

	p_1	p_2	p_3
s_1	5	6	2
s_2	3	0	1
s_3	0	2	4
s_4	2	3	2

(Třetí řádek této tabulky se týká suroviny s_3 a značí: na výrobu 1 jednotky produktu p_1, p_2, p_3 je potřeba 0, 2, resp. 4 jednotky suroviny s_3 . Druhý sloupec týkající se produktu p_2 určuje, že na výrobu 1 jednotky toho produktu potřebují mít 6, 0, 2, 3 jednotek uvedených surovin.)

Tuto číselnou tabulku zapsanou do závorek budeme označovat jako matice typu 4×3 (o 4 řádcích a 3 sloupcích); reprezentuje právě vztah mezi 4 surovinami a 3 produkty výroby a v této úloze se nazývá také *maticí spotřeby*. Prvky této matice jsou čísla a na jejich poloze v řádcích a sloupcích záleží.

Uveďme jiný příklad: představme si 4 obce O_1, O_2, O_3, O_4 a předpokládejme, že z obce

- O_1 vede přímá cesta do O_2, O_3, O_4 ,
- O_2 vede přímá cesta pouze do O_1 ,
- O_3 vede přímá cesta do O_1, O_4 ,
- O_4 vede přímá cesta do O_1, O_3 .

(přímou cestou se rozumí cesta neprocházející žádnou jinou obcí). Dejme si za úkol přehledně zapsat systém spojení těchto obcí přímou cestou. Použijeme k tomu matici, a to typu 4×4 (máme 4 obce); do řádku i -tého a sloupce j -tého pro $1 \leq i, j \leq 4$ v této matici umístíme 1, pokud existuje přímá cesta z obce O_i do O_j , jinak na tomto místě bude symbol 0. (Lze předpokládat existenci přímé cesty z O_i do samotné O_i .) Proto systém přímých cest bude vyznačen maticí

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tato matice se nazývá *incidenční maticí* neboli *matice incidence*. Z jejího tvaru lze zpětně vytvořit jednoznačný popis sítě – systému přímých spojení obcí za dodržení podmínky pořadí obcí O_1, O_2, O_3, O_4 . Přehlednost zvoleného vyjádření maticí incidence by se projevila zejména pro velký počet objektů sítě (u nás obcí). Lze si představit sítě objektů

svázaných také jinými druhy spojení, dopravní sítě mají přitom v aplikacích zvláštní význam.

Proto definujeme obecně:

Definice. Maticí A nazýváme $m \times n$ prvků (spec. reálných čísel) uspořádaných do obdélníku s m řádky a n sloupci. Jestliže prvek v i -tém řádku a j -tém sloupci matice A označíme jako a_{ij} , pak matici A lze zapsat ve tvaru

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Číslo m určuje počet řádků matice A , číslo n určuje počet sloupců. Dvojice m, n určuje tzv. *typ matice*: říkáme, že uvedená matice A je *typu* $m \times n$. Zkráceně budeme někdy psát také $A = (a_{ij})$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$; tedy i je index řádku, j je index sloupce.

Jestliže $m = n$, příslušná matice se nazývá *čtvercová matice typu* $n \times n$ nebo také *čtvercová matice stupně* n . Prvky a_{ii} čtvercové matice tvoří *hlavní diagonálu matice* A a tyto prvky se nazývají *prvky hlavní diagonály* neboli *diagonálními prvky* ("severozápadní až jihovýchodní roh, SZ - JV"). Druhá možná diagonála takové matice (SV - JZ) se nazývá *vedlejší diagonálou*. (Hlavní diagonála se zavádí také pro obecnou matici, tedy ne nutně čtvercovou.)

Čtvercová matice A , ve které

$a_{ij} = a_{ji}$ pro všechna $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ se nazývá *symetrickou maticí*;

$a_{ij} = -a_{ji}$ pro všechna $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ se nazývá *antisymetrickou maticí*.

Matice typu $m \times n$ pro $m = 1$ nebo $n = 1$ se nazývá také *vektor* (*řádkový* pro $m = 1$, *sloupcový* pro $n = 1$).

Operace s maticemi

Podobně jako v číselných soustavách, definujeme nejprve rovnost dvou matic, a to "po prvcích":

Definice. Dvě matice A, B se rovnají právě tehdy, jestliže jsou stejného typu a jestliže na odpovídajících místech mají stejné prvky. To znamená, že pokud typ obou matic je $m \times n$ a prvky matic jsou a_{ij} , resp. b_{ij} , pak $A = B$ právě když $a_{ij} = b_{ij}$ pro všechny dvojice indexů i, j , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Motivační příklad 1. Necht' P_1, P_2 jsou 2 prodejny motocyklů, necht' v obou se prodávají 4 modely motocyklů M_1, M_2, M_3, M_4 . Obrat prodeje v tisících dolarů z prodeje jednotlivých modelů za měsíc srpen a září určitého roku zapišme tabulkami:

srpen	M_1	M_2	M_3	M_4	září	M_1	M_2	M_3	M_4
P_1	12	6	0	9	P_1	0	9	0	13
P_2	12	3	2	19	P_2	10	6	4	10

a) Jaký byl obrat jednotlivých prodejen v srpnu a září dohromady sledovaný pro jednotlivé modely? b) Jak vzrostl obrat jednotlivých prodejen v září ve srovnání s obratem v srpnu?

c) Jestliže každá z prodejen dostane 5% bonifikaci z obratu v září, kolik dostane

dohromady každá z prodejen P_1, P_2 ?

Řešení. Tabulky čísel budeme považovat za matice; označme je jako A, B .

a) Obrat za srpen a září dohromady můžeme vyjádřit opět jako *matici* C o 2 řádcích a 4 sloupcích, kde na jednotlivá místa napíšeme součet obrátů jednotlivých prodejen za jednotlivý model za oba měsíce, tedy součty "po prvcích na stejných místech v maticích A, B ":

$$C = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 0 & 9 \\ 12 & 3 & 2 & 19 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 & 13 \\ 10 & 6 & 4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 15 & 0 & 22 \\ 22 & 9 & 6 & 29 \end{pmatrix}$$

(kupř. v prodejně P_1 byl obrat z prodeje modelu M_3 nulový v srpnu a také v září, proto také v součtu za oba měsíce musí být nulový.)

b) Růst obrátu v září vzhledem na obrat v srpnu můžeme také reprezentovat *maticí* D ; příslušné prvky budou teď rozdíly prvků v matici B a v matici A nacházejících se na stejných místech:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 & 13 \\ 10 & 6 & 4 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 6 & 0 & 9 \\ 12 & 3 & 2 & 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 3 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & 2 & -9 \end{pmatrix}$$

(kupř. v prodejně P_2 klesl obrat u modelů M_1, M_4 , a to o 2, resp. 9 tisíc dolarů, ale vzrostl u modelů M_2, M_3 o 3, resp. 2 tisíce dolarů.)

c) Bonifikaci z prodeje stanovíme *maticí*, která vznikne z matice B násobením každého jejího prvku číslem 0,05; tím se určí bonifikace z prodeje jednotlivých modelů pro obě prodejny:

$$0,05 \cdot B = 0,05 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 & 13 \\ 10 & 6 & 4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0,45 & 0 & 0,65 \\ 0,50 & 0,30 & 0,20 & 0,50 \end{pmatrix}.$$

Interpretujme: prodejna P_1 (první řádek v této matici) dostala spolu za prodej všech modelů bonifikaci 1,1 tisíc dolarů - to je součet bonifikací v prvním řádku; prodejna P_2 (druhý řádek matice) dostala bonifikaci 1,5 tisíc dolarů (řádkový součet čísel ve druhém řádku). •

Obecně definujeme:

Definice. *Součet dvou matic.* Jestliže $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ jsou dve matice shodného typu $m \times n$ s prvky, kterými jsou reálná čísla, pak *součtem* matic A, B se nazývá matice $C = (c_{ij})$ typu $m \times n$, jejíž prvek c_{ij} je součtem prvků: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$; tato matice se označuje jako

$$C = A + B$$

a je utvořena ze součtů prvků na stejných místech v maticích A, B , tedy "po prvcích". Protože prvky matic A, B jsou reálná čísla, sčítání matic A, B je komutativní: platí $A + B = B + A$. (Součet dvou matic odlišných typů se nedefinuje!)

Definice. *Násobek matice číslem.* Nechť c je reálné číslo; pak *c-násobkem* matice A typu $m \times n$ nazýváme matici $D = (d_{ij})$ typu $m \times n$, pro prvky které platí: $d_{ij} = c \cdot a_{ij}$. Jestliže $c = -1$, pak matice s prvky $-a_{ij}$ se nazývá *opačná* k matici A a označuje se jako $-A$. Pro reálná čísla c, d a matice A, B , obě typu $m \times n$, platí distributivní zákony

$$c \cdot (A + B) = c \cdot A + c \cdot B, \quad (c + d) \cdot A = c \cdot A + d \cdot A.$$

Nulovou maticí typu $m \times n$ se nazývá matice, pro prvky které platí $a_{ij} = 0$ pro všechna

$1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$. Jestliže A je nulová matice typu $m \times n$, pak pro libovolnou matici B typu $m \times n$ platí $A + B = B + A = B$. Součet matice A s maticí, která je k ní opačná, je nulová matice. *Jednotková matice typu $n \times n$* : čtvercová matice A typu $n \times n$ taková, že $a_{ii} = 1$ pro všechna $i = 1, \dots, n$, $a_{ij} = 0$ pro $i \neq j, 1 \leq i, j \leq n$, se nazývá *jednotkovou maticí typu $n \times n$* (nebo stupně n) a označuje se E_n :

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Matice transponovaná k dané matici: necht' $A = (a_{ij})$ je matice typu $m \times n$. Matice $B = (b_{ij})$ typu $n \times m$ taková, že $b_{ij} = a_{ji}$ (v původní matici A vyměníme její řádky za sloupce a obráceně), se nazývá *transponovanou maticí k matici A* a značíme ji $B = A^T$.

Kupř. transponujeme matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix};$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Zřejmě platí $(A^T)^T = A$, $(E_n)^T = E_n$, $(A + B)^T = A^T + B^T$; také $A^T = A$ pro každou čtvercovou symetrickou matici.

Součin dvou matic

Motivační příklad 2. Exportéři E_1, E_2, E_3, E_4 dodávají určité zboží do některého ze 3 velkoskladů V_1, V_2, V_3 podle první tabulky, ve které symboly 1, 0 vyznačují situace "dodává", resp. "nedodává". Z velkoskladů se pak dodává zboží do některých z 5 malo-prodejen M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 podle druhé tabulky; symboly 1, 0 mají stejný význam. Od kterého exportéra dostává zboží jednotlivá malo-prodejna z 5 uvedených?

	V_1	V_2	V_3		M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
E_1	1	1	0	V_1	1	1	0	1	0
E_2	0	0	1	V_2	0	0	1	1	0
E_3	1	0	1	V_3	1	0	0	0	1
E_4	0	0	1						

Řešení. Tabulky čísel považujeme za matice A, B . Kvůli přehlednému určení vztahu mezi 4 exportéry a 5 malo-prodejny vytvoříme opět matici C (proto její typ musí být 4×5); její prvky c_{ik} budou čísla 1 nebo 0 s významem "dodává zboží", "nedodává zboží". Zjistíme, kdy zboží od i -tého exportéra bude dodáno do k -té malo-prodejni, $1 \leq i \leq 4, 1 \leq k \leq 5$, tedy kdy v i -tém řádku a k -tém sloupci nové matice C bude 1. K tomu je potřeba, ale také stačí, aby existoval alespoň jeden, j -tý, velkosklad, do kterého zboží dodává i -tý exportér a z kterého odchází zboží do k -té malo-prodejni. Tedy $c_{ik} = 1$ právě tehdy, jestliže existuje index $j, 1 \leq j \leq 3$ takový, že $a_{ij} = 1$ a současně $b_{jk} = 1$. Druhá možnost $c_{ik} = 0$ nastane, jestliže pro žádné j nedochází k takové shodě symbolů 1, čili při postupném prohledávání dvojic prvků v i -tém řádku matice A a současně v k -tém sloupci matice B

najdeme pro každé $1 \leq j \leq 3$ pouze některou dvojici z množiny kombinací $\{00, 10, 01\}$. Tímto způsobem potřebujeme postupně kombinovat všechny *řádky první matice* A (spolu 4 řádky) se *sloupci druhé matice* B (spolu 5 sloupců), až konečně vytvoříme 20 prvků hledané matice $C = (c_{ik})$:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kupř. $c_{45} = 1$ (E_4 dodává zboží do M_5), protože existuje velkosklad, a to V_3 , kterému dodává E_4 a ze kterého se zásobuje zbožím M_5 . •

Motivační příklad 3. Určitý výrobní podnik vyrábí 3 produkty A_1, A_2, A_3 a na jednotku jejich výroby (j.v.) potřebuje určitá množství 4 surovin s_1, s_2, s_3, s_4 , která jsou v první tabulce nebo odpovídající matici S spotřeby. Předpokládejme, že existují 2 možné varianty výroby v_1, v_2 produktů A_1, A_2, A_3 závislé na využívání prostředků podniku a podle nich bude objem produkce určen druhou tabulkou nebo maticí V výroby:

	A_1	A_2	A_3		v_1	v_2
s_1	8	0	0	A_1	20	2
s_2	100	0,5	5	A_2	1000	2000
s_3	10	1	0,5	A_3	500	1000
s_4	200	2	2			

Kolik jednotek surovin je potřeba při jednotlivých výrobních variantách?

Řešení. Hledáme vztah mezi množstvím každé ze 4 surovin a 2 výrobními variantami; určíme proto prvky nové matice C , typ které pak musí být 4×2 , a to následovně. Kombinujeme znovu řádky matice S a sloupce matice V ; jestliže se budeme zabývat i -tou surovinou (vezmeme i -tý řádek matice S) potřebnou pro k -tou variantu výroby (k -tý sloupec matice V) a budeme tvořit součet součinů prvků na stejných pozicích, pak vzhledem k významu prvků matic S, V hodnota součtu součinů prvků v i -tém řádku a k -tém sloupci matice C určuje právě celkové množství i -té suroviny potřebné při k -té variantě výroby. Zapišme získané výsledky jako výsledek operace *maticového násobení* $C = S \cdot V$:

$$C = S \cdot V = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 100 & 0,5 & 5 \\ 10 & 1 & 0,5 \\ 200 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 & 2 \\ 1000 & 2000 \\ 500 & 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 160 & 16 \\ 5000 & 6200 \\ 1450 & 2520 \\ 7000 & 6400 \end{pmatrix}$$

(kupř. 2520 jednotek třetí suroviny pro druhou výrobní variantu je potřeba jako součin $10 \cdot 2 + 1 \cdot 2000 + 0,5 \cdot 1000$ při rozpočítání na produkty A_1, A_2, A_3). •

Matice C z příkladu 2 nebo 3 se nazývá *součinem matic* S, V . Definujme obecně součin dvou matic:

Definice. Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu $m \times n$, $B = (b_{jk})$ je matice typu $n \times r$. Pak *součinem matic* A, B nazýváme takovou matici $C = (c_{ik})$ typu $m \times r$, jejíž prvek c_{ik} je

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{ij}b_{jk} + \dots + a_{in}b_{nk}$$

Můžeme tedy napsat matici $C = A \cdot B$ s vyznačením součtu součinů prvků i -tého řádku matice A s prvky k -tého sloupce matice B :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boxed{a_{i1}} & \dots & \boxed{a_{ij}} & \dots & \boxed{a_{in}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & \boxed{b_{1k}} & \dots & b_{1r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{j1} & \dots & \boxed{b_{jk}} & \dots & b_{jr} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & \boxed{b_{nk}} & \dots & b_{nr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1k} & \dots & c_{1r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & \dots & \boxed{c_{ik}} & \dots & c_{ir} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & \dots & c_{mk} & \dots & c_{mr} \end{pmatrix}$$

Jestliže pro sčítání indexovaných veličin použijeme sumační znak Σ (ve významu kupř. $s_1 + s_2 + \dots + s_n = \sum_{j=1}^n s_j$), pak pro c_{ik} můžeme psát

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{ij}b_{jk} + \dots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}.$$

Z definice součinu dvou matic vyplývá, že součin se definuje pouze pro dvě matice A , B takových typů, že počet sloupců matice A se rovná počtu řádků matice B . (Proto v příkl. 3 součin matic $V \cdot S$ neexistuje.)

Motivační příklad 4. Slévárna vyrábí 2 druhy bronzových slitin S_1 , S_2 ; potřebná množství mědi (Cu), cínu (Sn) a zinku (Zn) na výrobu jednotky množství každé ze slitin jsou uvedeny v první tabulce. Měď, cín a zinek může slévárna koupit od 2 dodavatelů D_1 , D_2 za ceny v dolarech za jednotku množství podle druhé tabulky:

	Cu	Sn	Zn		D_1	D_2
S_1	4800	600	300	Cu	0,75	0,70
S_2	6000	1400	700	Sn	6,50	6,70
				Zn	0,40	0,50

Jak si má slévárna vybrat z dodavatelů při kalkulaci ceny?

Řešení. Nechť čísla v tabulkách značí matice M , N . Součin těchto matic dává matici C , která určuje vztah mezi slitinami S_1 a S_2 (řádky) a cenami od dodavatelů D_1 , D_2 (sloupce):

$$C = M \cdot N = \begin{pmatrix} 4800 & 6004 & 300 \\ 6000 & 1400 & 700 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,75 & 0,70 \\ 6,50 & 6,70 \\ 0,40 & 0,50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7620 & 7530 \\ 13880 & 13930 \end{pmatrix}$$

Jestliže slévárna upřednostní dodavatele D_1 , pak mu musí zaplatit $7\,620 + 13\,880 = 21\,500$ dolarů (sloupcový součet), pro dodavatele D_2 to bude $7\,530 + 13\,930 = 21\,460$ dol. •

Poznámky. (1) Nechť A , B jsou dvě čtvercové matice typu $n \times n$; pak existují oba součiny těchto matic v pořadí $A \cdot B$ a také $B \cdot A$. Tyto součiny $A \cdot B$, $B \cdot A$ se jako matice obecně nerovnají, jak to ukazuje jednoduchý příklad:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Proto násobení matic *není komutativní*: obecně $A \cdot B \neq B \cdot A$.

(2) Dá se ovšem dokázat podle pravidla násobení matic, že násobení matic je *asociativní*: pro matice A , B , C vhodných typů obecně platí $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$. Platí rovněž dva *distributivní zákony*, a to pro násobení zprava, resp. zleva ve smyslu:

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C, \quad C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B.$$

(3) Jestliže E_n je jednotková matice typu $n \times n$, pak pro libovolnou matici A typu $n \times n$ platí $A \cdot E_n = E_n \cdot A = A$.

(4) Pro čtvercovou matici A typu $n \times n$ lze definovat její m -tou mocninu, a to indukci:

klademe $A^1 = A$, $A^m = A^{m-1} \cdot A$, jestliže A^{m-1} máme definováno; dále klademe $A^0 = E_n$.

(5) Výsledkem násobení matice A typu $m \times n$ sloupcovým vektorem - maticí B typu $n \times 1$ je opět sloupcový vektor, tedy jejich součin v pořadí $A \cdot B$ je matice typu $m \times 1$; podobně, pro řádkový vektor - matici D typu $1 \times m$ je součinem v pořadí $D \cdot A$ řádkový vektor, tedy matice typu $1 \times n$.

(6) Součinem matice typu $1 \times n$ (řádkového vektoru) s maticí typu $n \times 1$ (se sloupcovým vektorem) se interpretuje jako *reálné číslo*, tedy (obvykle) ne jako matice (záleží na aplikacích); nazývá se také *skalárním součinem* dvou vektorů (anglický termín je *dot product*): kupř.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = -15 + 10 + 60 = 55.$$

(7) Na rozdíl od násobení dvou nenulových reálných čísel, součin dvou nenulových matic může být nulová matice, kupř.:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Stochastické matice

Definice. Čtvercová matice A , jejíž prvky jsou nezáporná čísla, se nazývá *stochastickou maticí*, jestliže součet prvků v každém jejím sloupci je roven 1.

Pomocí pravidla pro násobení matic se dá dokázat: součin $A \cdot A$ je rovněž stochastickou maticí (a proto každá mocnina stochastické matice je také stochastickou maticí).

Motivační příklad 5. Model preferencí zákazníka (stochastická matice). Dva potravinové obchody usilují získat zákazníky. Třebaže malá část zákazníků každého z obchodů zůstává k němu lojální, většina zákazníků nakupuje v obou obchodech. Průzkum ukázal, že 40 % zákazníků nakupujících v obchodě A se vrátí na obvyklý týdenní nákup do obchodu A , zatímco 60 % z něj nakoupí v obchodě B . V obchodě B 80 % jeho zákazníků se vrátí do obchodu B , ale 20 % přijde nakoupit do obchodu A . Jestliže na konci určitého týdne 3000 zákazníků nakupuje v obchodě A a 5000 nakupuje v obchodě B , kolik zákazníků bude nakupovat v jednotlivých obchodech na konci dalšího týdne?

Řešení. Matice P reprezentující pravděpodobnosti, s jakými se uskuteční přechod zákazníků od obchodu k obchodu (tzv. matice přechodu) je stochastickou maticí:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{od } A & \text{od } B \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 \\ 0,6 & 0,8 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \text{do } A \\ \text{do } B \end{matrix} \end{matrix}$$

Začáteční stav se dá popsat maticí $X_0 = \begin{pmatrix} 0,375 \\ 0,625 \end{pmatrix}$. Tato matice je také stochastickou maticí. Proto matice X_1 (opět stochastická), určující stav preferencí zákazníků po uplynutí 1 týdne, je součinem $X_1 = P \cdot X_0$ (nazývá se *stavovou maticí*):

$$X_1 = P \cdot X_0 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,375 \\ 0,625 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,275 \\ 0,725 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} A \\ B \end{matrix}$$

(uskutečnila se změna v preferencích: 2200 zákazníků v obchodě A , 5800 zákazníků v obchodě B v dalším týdnu). •

Motivační příklad 6. Pohyb obyvatel (stochastická matice). Město (city, C) má dvě okrajové části: Glen Park (G) a Walden (W). V průběhu několika posledních let dochází ke stěhování obyvatel z města do okrajových částí, což v procentech vyznačuje matice P (je stochastickou maticí):

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} z\ C & z\ G & z\ W \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0,85 & 0,01 & 0,01 \\ 0,07 & 0,96 & 0,02 \\ 0,08 & 0,03 & 0,97 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \text{do } C \\ \text{do } G \\ \text{do } W \end{matrix} \end{matrix}$$

V roce 1990 mělo město (C) 120 000 obyvatel, v Glen Parku (G) bydlelo 80 000 a ve Waldenu (W) 50 000 obyvatel. Jestliže předpokládáme, že celá městská aglomerace má stejný počet spolu 250 000 obyvatel, kolik obyvatel bude bydlet v jednotlivých částech v roce 1994?

Řešení. Matice začátečního stavu (v procentech) z r. 1990 je

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0,48 \\ 0,32 \\ 0,20 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{obyvatel } C \\ \text{obyvatel } G \\ \text{obyvatel } W \end{matrix}$$

Změny ve velikosti populace nejprve v procentech určíme následovně:

populace v r. 1991:

$$X_1 = P \cdot X_0 = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,01 & 0,01 \\ 0,07 & 0,96 & 0,02 \\ 0,08 & 0,03 & 0,97 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,48 \\ 0,32 \\ 0,20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4132 \\ 0,3448 \\ 0,2420 \end{pmatrix}$$

populace v r. 1992:

$$X_2 = P \cdot X_1 = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,01 & 0,01 \\ 0,07 & 0,96 & 0,02 \\ 0,08 & 0,03 & 0,97 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,4132 \\ 0,3448 \\ 0,2420 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3571 \\ 0,3648 \\ 0,2781 \end{pmatrix}$$

populace v r. 1993:

$$X_3 = P \cdot X_2 = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,01 & 0,01 \\ 0,07 & 0,96 & 0,02 \\ 0,08 & 0,03 & 0,97 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,3571 \\ 0,3648 \\ 0,2781 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3100 \\ 0,3807 \\ 0,3093 \end{pmatrix}$$

populace v r. 1994:

$$X_4 = P \cdot X_3 = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,01 & 0,01 \\ 0,07 & 0,96 & 0,02 \\ 0,08 & 0,03 & 0,97 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,3100 \\ 0,3807 \\ 0,3093 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2704 \\ 0,3934 \\ 0,3362 \end{pmatrix}$$

Proto v r. 1994 bude ve městě (C) bydlet 67 600 obyvatel, v Glen Parku 98 350 a ve Waldenu 84 050 obyvatel. •

Matice inverzní k dané matici

Definice. Nechť A je čtvercová matice stupně n . Jestliže existuje matice X , pro kterou platí

$$A \cdot X = X \cdot A = E_n,$$

pak matice X se nazývá *inverzní maticí* k matici A a označuje se A^{-1} .

Z definice inverzní matice plyne:

(1) Inverzní matice A^{-1} je rovněž čtvercovou maticí stupně n a platí pro ni vztahy

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n.$$

(2) Inverzní matice k dané matici (jestliže existuje) je určena jednoznačně.

(3) Platí $(A^{-1})^{-1} = A$ (inverzní matici k A^{-1} je původní matice A).

(4) Pro jednotkovou matici (triviálně) platí $E_n^{-1} = E_n$.

(5) Inverzní maticí k součinu $A \cdot B$ je součin jejich inverzních matic v opačném pořadí, tedy $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Výpočet inverzní matice: metodu určení inverzní matice A^{-1} k dané matici A založenou na úpravách matice A ukážeme na matici stupně 3 (zobecnění na stupeň n lze provést formálním rozšířením počtu prvků). Označme

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix};$$

pro součin matic má být $A \cdot A^{-1} = E_3$. Jestliže sloupce inverzní matice označíme jako x , y , z , tedy zkráceně $A^{-1} = (x \ y \ z)$, pak při označení sloupců jednotkové matice E_3 jako

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

máme z rovnice $A \cdot A^{-1} = E_3$ pro určení neznámé inverzní matice řešit 3 maticové rovnice nebo 3 lineární soustavy

$$A \cdot x = e_1, \quad A \cdot y = e_2, \quad A \cdot z = e_3$$

se stejnou maticí soustavy A . Řešení provedeme pomocí GEM úpravou A na jednotkovou matici (pokud je to možné), a to najednou pro 3 pravé strany, tedy na pravé straně formálně budeme mít jednotkovou matici E_3 ; napíšeme vedle sebe A , E_3 , na A provádíme ERO vedoucí na jednotkovou matici a *stejně úpravy současně* provádíme také na E_3 :

$$(A \mid E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_1 & b_1 & c_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 1 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Tímto algoritmem vznikne na místě původní matice A jednotková matice E_3 a na místě původní E_3 bude inverzní matice A^{-1} . Metoda se nazývá *Jordanova metoda určení inverzní matice*, obecně pro matici A stupně n symbolicky

$$(A \mid E_n) \longrightarrow (E_n \mid A^{-1}).$$

Existence inverzní matice: protože uvedeným postupem současně určujeme k A její redukovanou matici, inverzní matice existuje pouze k takové čtvercové matici A , jejíž hodnota je v našem příkladu 3, obecně tedy její hodnota je n .

Poznámka. Soustavu m lineárních rovnic o n neznámých s maticí A a sloupcem pravých stran b (tedy maticí typu $m \times 1$) můžeme zapsat pomocí maticového násobení jako $A \cdot x = b$, přičemž x je *sloupcový* vektor neznámých $x_1, x_2, \dots, x_n$; uvedený zápis připomíná zápis lineární rovnice v reálných číslech. Jestliže A je čtvercová matice, ke které existuje matice inverzní A^{-1} , pak řešení této soustavy můžeme najít pomocí součinu matic:

$$x = A^{-1} \cdot b.$$

Obecněji, maticovou rovnici $A \cdot X = B$ pro dané matice A, B , za předpokladu, že existuje inverzní matice A^{-1} k matici A , řešíme pomocí inverzní matice: rovnici násobíme inverzní maticí A^{-1} *zleva* a dostáváme

$$A \cdot X = B, \quad A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B, \quad X = A^{-1} \cdot B.$$

Analogicky, za uvedených předpokladů maticovou rovnici $X \cdot A = B$ řešíme násobením inverzní maticí A^{-1} *zprava*:

$$X = B \cdot A^{-1}.$$

Kombinace těchto postupů umožní najít rovněž řešení složitějších maticových rovnic, kupř. $A \cdot X \cdot B = C$, přičemž předpokládáme, že inverzní matice A^{-1}, B^{-1} existují: $X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$.

Permutační matice

Definice. Čtvercová matice P stupně n se nazývá *permutační maticí*, jestliže v každém jejím řádku a současně v každém sloupci je pouze jediný nenulový prvek rovnající se 1.

Snadno lze zjistit, že kupř. pro $n = 3$ existuje právě 6 permutačních matic, pro $n = 4$ lze napsat přesně 24 permutačních matic. Obecně, souvislost počtu permutačních matic stupně n s číslem $n!$, určujícím počet všech permutací na konečné množině s n prvky, plyne z jejich definice. Pro umístění čísla 1 v prvním řádku matice máme totiž na výběr jeden z n možných sloupců, čili celkově n možností; číslo 1 v druhém řádku pak může být pouze v některém ze sloupců vybíraném z $(n - 1)$ možných atd., až nakonec v posledním řádku zbývá pro polohu čísla 1 pouze jediná možnost neboli jediný zbylý sloupec, proto existuje $n!$ permutačních matic stupně n . Tuto korespondenci lze využít na reprezentování permutací prvků konečné množiny pomocí permutačních matic: permutační maticí $A = (a_{ij})$ s číslem 1 na pevných pozicích ij pro dvojice $i, j, i = 1, \dots, n$, je jednoznačně určena permutace konečné n -prvkové množiny

$$p : i \longrightarrow j, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Triviálně, identická permutace je reprezentována jednotkovou maticí E_n . Snadno lze rovněž zjistit, že součin dvou permutačních matic je opět permutační maticí; jestliže sledujeme součin matic a interpretujeme pozice 1 ve smyslu permutování – prostém zobrazování prvků konečné množiny, pak součin dvou permutačních matic odpovídá složenému zobrazování. Korespondence musí jít i dál: každá permutační matice P stupně n má hodnotu n , proto existuje k ní inverzní matice P^{-1} , je to opět permutační matice a tato P^{-1}

odpovídá inverzní permutaci k permutaci popsané původní permutační maticí P .

Ale množina permutačních matic má zajímavé vlastnosti rovněž vně této množiny

samotné: provedme pro matici $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ násobení $A \cdot P$, $P \cdot A$ pro některou

z permutačních matic stupně 3 (ovšem různou od identické matice E_3): zvolme kupř.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ a počítejme}$$

$$A \cdot P = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{pmatrix},$$

protože násobení řádků matice A nejprve s prvním sloupcem S_1 permutační matice P se redukuje vzhledem na tvar sloupce S_1 na výběr prvků v druhém sloupci matice A , násobení řádků druhým sloupцем S_2 permutační matice P vybírá prvky v druhém sloupci matice A , konečně násobení řádků třetím sloupcem S_3 permutační matice P ponechává první sloupec matice A . Sloupce matice A z původního pořadí 123 se dostali tedy do nového pořadí 231; toto pořadí plyne z permutace p 3-prvkové množiny $\{1, 2, 3\}$ odpovídající matici P ; jde o zobrazení, které lze zapsat tabulkou:

$$\begin{array}{c|ccc} x & 1 & 2 & 3 \\ \hline p(x) & 2 & 3 & 1 \end{array}$$

Analogicky lze zjistit, že násobení matic A , P v opačném pořadí $P \cdot A$ vede ke změně pořadí sloupců matice A , opět z původního 123 na nové 231.

Uvedený poznatek lze zobecnit a analogickým způsobem uvažování dokázat, že pro matici A a permutační matici P , obě stupně n , bude sestávat matice

- $A \cdot P$ ze sloupců
- $P \cdot A$ z řádků

původní matice A uspořádaných do pořadí podle permutace p odpovídající permutační matici P . Tímto způsobem – násobením matice A vhodnou permutační maticí zleva – speciálně lze provést jeden druh elementární řádkové operace na matici A , a to vzájemnou výměnu dvou řádků. Proto vzniká přirozená otázka, zda podobným způsobem nelze provést rovněž další dva druhy z ERO operací.

Determinanty

Čtvercová číselná matice a její determinant

V celém odstavci se budeme zabývat výhradně čtvercovými číselnými maticemi. Pro tyto matice přiřadíme určitým způsobem *číslo*, které se nazývá *determinantem matice*; definuje se induktivním postupem.

1. Pro matici A typu 2×2 , kde $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, definujeme její determinant $\det A$

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Uvedený determinant se nazývá determinantem 2. řádu (někdy také 2. stupně) a pro vyznačení vztahu k původní matici používáme označení

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Příklad: $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 0$, $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$.

2. Determinant matice A typu 3×3 definujeme pomocí determinantu 2. stupně:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Uvedený výpočet determinantu 3. stupně vede na formuli, která se nazývá *Sarrusovo pravidlo* (6 součinů, dva z něj určují dvě diagonály, hlavní a vedlejší):

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}.$$

3. Determinant stupně n určíme tzv. *rozvojem podle řádku nebo rozvojem podle sloupce* na principu indukce vzhledem ke stupni n . Zavedme nejprve označení: pro čtvercovou matici A typu $n \times n$ budeme její determinant označovat jako

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

a postup určení $\det A$ je následovný. Vyberme indexy řádku i , resp. sloupce j , pro $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, a to libovolně, ale v dalším

pevně. Jestliže vypustíme i -tý řádek a j -tý sloupec v matici A , vznikne z matice A čtvercová matice typu $(n-1) \times (n-1)$; její determinant se nazývá *minor* nebo *subdeterminant* stupně $n-1$ a označuje se M_{ij} . *Algebraickým doplňkem* A_{ij} patřícím k prvku a_{ij} matice A se nazývá determinant M_{ij} spolu se znaménkem $+1$ nebo -1 podle pravidla

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Nechť i je teď index libovolného, pevně vybraného řádku matice A . Pak determinant $\det A$ je číslo

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij}$$

Uvedený způsob výpočtu determinantu n -tého stupně se nazývá *výpočet rozvojem determinantu podle zvoleného řádku*, v uvedeném postupu tedy podle i -tého řádku. Postup je založen na *principu rekurence*: vyčíslení determinantu n -tého stupně redukuje na vyčíslení determinantů stupně $(n-1)$, atd., až se dostaneme k determinantům stupně 3 nebo 2 a tam použijeme Sarrusovo pravidlo.

Poznámky. (1) Výpočet determinantu $\det A$ uvedeným způsobem je korektný; indukcí lze dokázat, že hodnota determinantu nezávisí na výběru řádku.

(2) Výpočet $\det A$ můžeme provést také rozvojem podle některého sloupce (opět nezávisle na jeho volbě). Rozvoj podle j -tého sloupce bude

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij}$$

(3) Jako vhodný řádek nebo sloupec volíme takový, který obsahuje nejvíce nul; tím se

snižuje počet sčítanců v příslušném rozvoji.

Příklad 1. Počítejme $\det A$ rozvojem podle: a) 1. řádku; b) 3. sloupce; c) 4. řádku; A je matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Řešení. a) V 1. řádku jsou tři prvky nulové, proto

$$\det A = 0 + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} + 0 + 0 = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 80.$$

b) Nebudeme psát sčítance patřící k nulovým prvkům a_{ij} ; ve 3. sloupci to jsou dva prvky $a_{13} = a_{43} = 0$:

$$\det A = 2 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 32 + 48 = 80.$$

c) Rozvoj podle 4. řádku je

$$\det A = 3 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 30 + 50 = 80. \bullet$$

Vlastnosti determinantů

Důkazy následujících tvrzení jsou v učebnicích lineární algebry; dají se ilustrovat na determinantech 3. stupně. Obecně se v důkazech postupuje rozvojem determinantu (podle řádku nebo sloupce).

Vlastnost (V1). Nechť A je čtvercová matice, nechť A^T je její transponovaná matice. Pak platí: $\det A = \det A^T$ (slovy: transponování matice nemění její determinant).

Proto formulace vlastností determinantů pro řádky platí také pro sloupce; přesto v dalším uvedeme kvůli zdůraznění obě formulace.

Vlastnost (V2). Jestliže z determinantu D utvoříme determinant D_1 tak, že všechny prvky některého řádku (sloupce) vynásobíme číslem k , pak $D_1 = k \cdot D$.

Na ilustraci, pro determinant D_1 máme

$$D_1 = \begin{vmatrix} 30 & 60 & 90 \\ 3 & 8 & 5 \\ 12 & 0 & 18 \end{vmatrix} = 30 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 5 \\ 12 & 0 & 18 \end{vmatrix} = 30 \cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 30 \cdot 6 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Získaný determinant můžeme počítat přímo, a to pomocí Sarrusova pravidla, přičemž pracujeme s menšími čísly.

Vlastnost (V3). Má-li determinant D některý řádek (sloupec) nulový, pak $D = 0$. (Plyne z rozvoje podle nulového řádku (sloupce).)

Vlastnost (V4). Jsou-li všechny prvky jednoho řádku (sloupce) determinantu D součtem dvou sčítanců, pak determinant D je součtem dvou determinantů D_1, D_2 takových,

že v příslušném řádku (sloupci) determinantu D_1 , resp. D_2 je první sčítanec, resp. druhý sčítanec.

Vlastnost (V5). Vznikne-li determinant D^* z determinantu D záměnou pořadí dvou řádků (sloupců), pak $D^* = -D$.

Vlastnost (V6) (důsledek (V5)). Jsou-li v determinantu D dva řádky (sloupce) stejné, je $D = 0$.

Vlastnost (V7) (důsledek (V6), (V2)). Jestliže některý řádek (sloupec) determinantu D je k -násobkem jiného řádku (sloupce), pak $D = 0$.

Vlastnost (V8) (důsledek (V4), (V7)). Hodnota determinantu se nezmění, jestliže k některému řádku (sloupci) připočítáme k -násobek jiného řádku (sloupce).

Proto pro velká n výhodně počítáme determinanty D tak, že:

(1) nejprve provádíme úpravy na determinantu, využíváme přitom vlastnosti (V1) – (V8),

(2) provedeme rozvoj determinantu (podle řádku nebo sloupce).

Úpravu determinantu D je vhodné provádět rovněž takovým způsobem, abychom získali determinant $\det A$, kde A je horní trojúhelníková matice; její determinant je součinem diagonálních prvků:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn};$$

z toho také plyne, že determinant diagonální matice - její nenulové prvky se nacházejí pouze v hlavní diagonále - je roven součinu diagonálních prvků, a determinant jednotkové matice E_n je roven 1.

Příklad 2. Počítejme determinant D 4. stupně vhodnými úpravami pro

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Řešení. Nejprve ke 2. řádku připočítáme (-2) -násobek 1. řádku, ke 4. řádku připočteme (-3) -násobek 1. řádku:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & -8 \end{vmatrix}$$

Ted' provedeme rozvoj podle 1. sloupce:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & -7 & -8 \end{vmatrix}$$

Ke 2. řádku ještě připočteme (-2) -násobek 1. řádku, ke 3. řádku připočteme (-3) -násobek 1. řádku:

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & -7 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 0 & 13 & 8 \\ 0 & 8 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 13 & 2 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-3) = -12 \bullet$$

Jako vhodné cvičení lze kupř. dokázat, že pro následující determinanty platí (a, b, c, d, x jsou reálná čísla):

$$a) \begin{vmatrix} 1+a & b & c & d \\ a & 1+b & c & d \\ a & b & 1+c & d \\ a & b & c & 1+d \end{vmatrix} = 1 + a + b + c + d;$$

$$b) \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ b & b & b & -b \\ c & c & -c & -c \\ d & -d & -d & -d \end{vmatrix} = 8abcd;$$

$$c) \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 & x+3 \\ x+1 & x+2 & x+3 & x+4 \\ x+2 & x+3 & x+4 & x+5 \\ x+3 & x+4 & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = 0$$

Poznámka. Úlohou v praxi se často vyskytující bývá výpočet plošného obsahu geometrického útvaru v rovině, který lze provést kupř. triangulací této oblasti na konečný počet trojúhelníků. K výpočtu plošného obsahu trojúhelníku lze odvodit pomocí vektorového počtu vzorec používající determinant 3. stupně:

Plošný obsah A trojúhelníku $\Delta P_1P_2P_3$ s vrcholy $P_i[x_i, y_i]$, $i = 1, 2, 3$, je absolutní hodnotou determinantu

$$A(\Delta P_1P_2P_3) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Výpočet inverzní matice pomocí determinantů

Inverzní matici k dané matici $A = (a_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$ s determinantem různým od nuly můžeme počítat také pomocí determinantů, a to následovně:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{i1} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{i2} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1j} & A_{2j} & \dots & A_{ij} & \dots & A_{nj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{in} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Inverzní matice tedy sestává z algebraických doplňků takovým způsobem, že v jejím j -tém řádku a i -tém sloupci se nachází algebraický doplněk A_{ij} takového prvku a_{ij} , který se v původní matici A nacházel v i -tém řádku a j -tém sloupci.

Inverzní matice A^{-1} existuje pouze ke čtvercové matici

A , pro kterou $\det A \neq 0$; takové matice se nazývají *regulární*. Matice A s $\det A = 0$ jsou tzv. *singulární matice*.

Příklad 4. Vypočítejme inverzní matice k maticím A, B , kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 9 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení. A je regulární: $\det A = -4 \neq 0$. Algebraické doplňky jsou $A_{11} = -2$, $A_{12} = 1$, $A_{21} = 0$, $A_{22} = 2$, proto inverzní matice A^{-1} je

$$A^{-1} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ověříme:

$$A \cdot A^{-1} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} \cdot A = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Pro matici B máme $\det B = 54 + 28 + 45 - (27 + 40 + 63) = -3 \neq 0$. Algebraické doplňky při stejném označení A_{ij} jsou:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -3;$$

$$B^{-1} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -7 & 5 & -6 \\ 6 & -3 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ověříme platnost $B \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot B = E_3$:

$$B \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 9 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -7 & 5 & -6 \\ 6 & -3 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B^{-1} \cdot B = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -7 & 5 & -6 \\ 6 & -3 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 9 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet$$

Poznámka. Z předchozího příkladu plyne, že matice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ je regulární právě tehdy, když její $\det A = ad - bc \neq 0$.

Pro inverzní matici platí:

(1) Pro libovolné dvě čtvercové matice A, B stejného typu $n \times n$ platí pro determinant jejich součinu $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$. Odtud plyne vztah pro determinant matice a determinant její inverzní matice:

$$\det A \cdot \det A^{-1} = \det E_n = 1.$$

(2) Jestliže A, B jsou dvě regulární matice stupně $n \times n$, pak také matice $A \cdot B$ je regulární a platí $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

(3) Jestliže $\det A \neq 0$ a matice A^T je transponovaná k matici A , pak platí $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

(4) Inverzní matice ke horní trojúhelníkové matici je opět horní trojúhelníkovou maticí.

Cramerovo pravidlo (obecný případ)

Uvedeme teď zobecnění metody pro řešení čtvercové soustavy lineárních rovnic nazývané Cramerovým pravidlem, o kterém jsme se zmínili zatím pouze pro soustavu dvou nebo tří rovnic.

Věta (Cramerovo pravidlo). Nechť $A \cdot x = b$ je soustava n lineárních rovnic o n neznámých, nechť D je determinant matice soustavy: $D = \det A$. Jestliže $D \neq 0$, pak soustava má jediné řešení $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, pro jehož složky platí

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \quad i = 1, \dots, n;$$

D_i jsou determinanty, které vzniknou z determinantu D náhradou i -tého sloupce sloupcem pravých stran, $i = 1, \dots, n$.

Důkaz. Nechť je splněno $D = \det A \neq 0$. Nejprve dokážeme, že pokud soustava lineárních rovnic má řešení, pak toto řešení je určeno jednoznačně. Předpokládejme proto, že dva vektory x, y jsou řešení soustavy, tj. platí $A \cdot x = b$ a současně $A \cdot y = b$. Z těchto maticových rovnic plyne

$$x = A^{-1} \cdot b, \quad y = A^{-1} \cdot b, \quad \text{tudíž } x = y.$$

Teď můžeme hledat i -tou složku vektoru řešení; v součinu matic rozepíšeme ještě inverzní matici symbolicky jako matici příslušných algebraických doplňků dělenou číslem $\det A$:

$$x = A^{-1} \cdot b = \frac{1}{\det A} \cdot (A_{ji}) \cdot b.$$

Proto x_i podle pravidla o součinu matic, jako součin i -tého řádku inverzní matice A^{-1} se sloupcem b , je

$$x_i = \frac{1}{\det A} \cdot (A_{1i} \cdot b_1 + A_{2i} \cdot b_2 + \dots + A_{ni} \cdot b_n).$$

Ale závorka $(A_{1i} \cdot b_1 + A_{2i} \cdot b_2 + \dots + A_{ni} \cdot b_n)$ je právě takové číslo, které je hodnotou determinantu D_i , jestliže se D_i určuje rozvojem podle i -tého sloupce, $i = 1, \dots, n$. Proto

$$x_i = \frac{D_i}{D} \cdot \bullet$$

Poznámka. Při určování řešení soustav n lineárních rovnic pomocí Cramerova pravidla potřebujeme tudíž určit hodnoty $(n+1)$ determinantů n -tého stupně. Obvykle v těchto determinantech provedeme vhodné operace s využitím vlastností determinantů a následně stanovíme jejich hodnoty.

Soustavy lineárních rovnic s parametrem

Omezíme se pouze na čtvercové soustavy; v ukázkových úlohách zvolíme postup řešení pomocí determinantů.

Příklad. Určeme všechny hodnoty reálného parametru p , pro které má soustava jediné, resp. žádné, resp. nekonečně mnoho řešení, a napíšeme všechna existující řešení

v závislosti na hodnotách parametru p :

$$\begin{array}{ll} x_1 + x_2 + x_3 = 1 & x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ \text{a) } x_1 + px_2 + x_3 = 1 & \text{b) } x_1 + px_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + p^2x_3 = 1 & x_1 + x_2 + p^2x_3 = 0 \end{array}$$

Řešení. a) Počítejme determinant matice soustavy:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 \\ 1 & 1 & p^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & p-1 & 0 \\ 0 & 0 & p^2-1 \end{vmatrix} = (p-1)^2 \cdot (p+1)$$

Pro $\det A \neq 0$, tedy pro $p \neq 1$, $p \neq -1$, má soustava jediné řešení; určíme jej pomocí Cramerova pravidla:

$$x_1 = \frac{1}{(p-1)^2(p+1)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 \\ 1 & 1 & p^2 \end{vmatrix} = 1, \quad x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & p^2 \end{vmatrix} = x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Jestliže $p = 1$, pak se soustava redukuje na jedinou rovnici $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, proto má nekonečně mnoho řešení: $(1 - x_2 - x_3, x_2, x_3)$, kde x_2, x_3 jsou libovolně volitelné dvě neznámé (jako parametry).

Pro $p = -1$ se soustava redukuje na dvě rovnice (třetí a první rovnice jsou stejné): napíšeme je tabulkou a upravme podle GEM:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}$$

Proto $x_2 = 0$, $x_1 = 1 - x_3$, kde $x_3 \in R$ je libovolné; řešení je nekonečně mnoho trojic $(1 - x_3, 0, x_3)$, $x_3 \in R$ libovolné.

b) Máme $\det A = (p-1)^2 \cdot (p+1)$. Jestliže $\det A \neq 0$, soustava jako homogenní má jediné řešení, a to triviální: $(0, 0, 0)$.

Pro $p = 1$ se soustava redukuje na jedinou rovnici $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, proto existuje nekonečně mnoho řešení $(-x_2 - x_3, x_2, x_3)$, kde x_2, x_3 jsou libovolně volitelné neznámé.

Pro $p = -1$ se soustava redukuje na dvě homogenní rovnice (zapíšeme je tabulkou):

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Řešení je nekonečně mnoho trojic $(x_3, 0, -x_3)$, kde $x_3 \in R$ je libovolně volitelná neznámá.

Pojmy, vztahy, označení

Matice, význačné matice

Operace s maticemi: součet, rozdíl, násobek

Součin matic, vlastnosti součinu

Stochastické matice, použití

Matice inverzní k dané matici; podmínky existence, výpočet

Permutační matice, vlastnosti, použití

Determinant čtvercové matice; Sarrusovo pravidlo

Vlastnosti determinantů

Výpočet determinantu pomocí rozvoje (podle řádku nebo podle sloupce)

Regulární, singulární matice

Výpočet inverzní matice pomocí determinantů (minorů)

Cramerovo pravidlo, obecný případ