

# ZÁKLADY MATEMATIKY 2

## SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

**Motivace.** Jednou z elementárních úloh středoškolské matematiky je určování všech bodů  $P[x, y]$  společných 2 přímkám  $p_1, p_2$  v rovině. Zabývejme se jí v následující úloze pro přímkou  $p_1, p_2$  určené obecnými rovnicemi:

$$p_1: 2x + 2y = 4, p_2: 3x - 2y = 11.$$

Řešení spočívá v nalezení takových hodnot  $x, y$ , pro které jsou současně splněny obě rovnice. Tyto rovnice jsou lineární v neznámých  $x, y$ :

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 4 \\ 3x - 2y &= 11 \end{aligned}$$

Mluvíme proto o *soustavě dvou lineárních rovnic* s dvěma neznámými. Tuto soustavu lze snadno vyřešit, pokud si uvědomíme, že jakákoliv dvojice hodnot  $x, y$  splňující obě rovnice musí splňovat také rovnici, kterou lze získat jako součet těchto rovnic, tj. rovnici

$$5x = 15$$

Odtud plyne  $x = 3$  a dosazením této hodnoty do první rovnice soustavy dostaneme  $y = -1$ . Našli jsme tedy řešení soustavy, kterým je uspořádaná dvojice  $x = 3$  a  $y = -1$ , neboli zadané přímkou  $p_1, p_2$  mají společný bod  $P[x, y] = [3, -1]$ . Toto řešení je jediné, což plyne z postupu výpočtu; nalezený bod je jediný společný bod obou přímek. Proto stejné řešení dané soustavy lineárních rovnic bychom obdrželi i pomocí jiné metody. Námi použitá metoda spočívala v takové úpravě rovnic soustavy (v našem případě to bylo sčítání dvou rovnic), které vedlo k vyloučení (eliminaci) neznámé  $y$  a tím k možnosti snadného výpočtu hodnoty zbývajících neznámé  $x$ .

Na základě geometrické interpretace lze očekávat, že obecně úloha o určování bodů společných 2 přímkám v rovině může mít

- jediné řešení (přímky jsou různoběžné),
- žádné řešení (přímky jsou rovnoběžné různé),
- nekonečně mnoho řešení (přímky jsou rovnoběžné totožné).

Druhou a třetí možnost ilustrují tyto soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{array}{ll} x + y = 1 & x + y = 1 \\ 3x + 3y = 2 & 3x + 3y = 3 \end{array}$$

(Pokud souřadnice  $x, y$  nějakého společného bodu  $P[x, y]$  splňují levou stranu v první rovnici každé z uvedených soustav, pak levá strana druhé z rovnic tvoří trojnásobek součtu  $x, y$ ; ale pravá strana druhé rovnice v první soustavě není trojnásobkem, proto soustava se nemůže splnit. V druhé soustavě je evidentně druhá rovnice trojnásobkem první, proto představuje rovnici totožné přímky.)

### Matice a rozšířená matice soustavy dvou lineárních rovnic

Zabývejme se opět soustavou dvou lineárních rovnic; příkladech, taková soustava úplně určena svými číselnými koeficienty  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$  – poslední dva z uvedených

jsou koeficienty na pravých stranách rovnic. Jelikož na označení neznámých nezáleží, můžeme zkráceně soustavu dvou lineárních rovnic jednoznačně reprezentovat tímto obdélníkovým systémem koeficientů, pro každou jednotlivou rovnici zapsaných do řádku. Takové obdélníkové schema se nazývá *maticí*.

Pro naši soustavu sestavíme matici  $A$  o 2 řádcích a 2 sloupcích koeficientů levých stran rovnic, neboli matici koeficientů u neznámých; tato matice je pak *typu*  $2 \times 2$  (2 řádky, 2 sloupce) a nazývá se *matice soustavy*. Doplněním matice soustavy  $A$  o koeficienty pravých stran rovnic soustavy se vytvoří *rozšířená matice soustavy*  $\bar{A}$ ; má 2 řádky a 3 sloupce, tudíž je typu  $2 \times 3$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \left( \begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array} \right).$$

Matice soustavy je částí matice rozšířené. Sloupec pravých stran lze v rozšířené matici psát oddělený kvůli zvýraznění svislou čarou. Pokud pro sloupec pravých stran soustavy lineárních rovnic použijeme symbolicky písmeno  $b$ , lze rovněž symbolicky psát  $\bar{A} = (A | b)$ .

### Eliminační metoda – úvod

**Příklad.** Máme investovat spolu 5 000 dolarů, část s úrokem 5%, zbytek s úrokem 10%. Jak rozložit 5 000 dolarů, abychom při využití obou úročení získali na úrocích přesně 400 dolarů?

**Řešení.** Rozdělme 5 000 dolarů na součet dvou investic  $x, y$  dolarů. Úloha vede na určení řešení soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých  $x, y$ :

$$\begin{aligned} x + y &= 5000 \\ 0,05x + 0,1y &= 400 \end{aligned}$$

Na základě rovnosti reálných čísel v řádcích této soustavy místo druhé rovnice lze napsat její dvacetinásobek:

$$\begin{aligned} x + y &= 5000 \\ x + 2y &= 8000 \end{aligned}$$

K řešení se teď dostaneme tak, že od druhé rovnice odečteme první rovnici, tudíž od obou stran druhé rovnice odečteme stejné reálné číslo. Máme novou soustavu, ve které se tím vyloučila (eliminována) v druhé rovnici neznámá  $x$ :

$$\begin{aligned} x + y &= 5000 \\ y &= 3000 \end{aligned}$$

Pomocí  $y = 3000$  teď z první rovnice vypočteme  $x = 5000 - 3000 = 2000$ . Dvojice  $(2000, 3000)$  splňuje obě rovnice (lze se o tom přesvědčit dosazením), proto tato dvojice je řešením původní soustavy, ale i dalších z ní úpravami získaných soustav lineárních rovnic, proto také naší úlohy. •

Smyslem značně podrobně popsaných úprav na dvou soustavách lineárních rovnic v našich úlohách bylo vyloučení – eliminace některé neznámé, což vedlo ke zmenšení počtu neznámých v soustavě. To bude cílem úprav na soustavách obecně.

Operace provedené na rovnicích v soustavě tuto soustavu nezměnily v takovém smyslu, že původní soustava a rovněž z ní získané soustavy mají stejnou množinu řešení. Takové soustavy rovnic se nazývají *ekvivalentními*.

Úpravami na rovnicích lze postupovat při řešení zmíněné úlohy o společných bodech 2 přímek; obecná rovnice přímky v rovině  $ax + by = c$  je lineární v  $x, y$ . Vyřešme tuto úlohu.

**Příklad.** Určeme všechny společné body dvojic přímek:

- a)  $p_1: x - 3y = 1, \quad p_2: 2x + y = 9;$   
 b)  $p_3: x + 3y = 2, \quad p_4: 2x + 6y = 4;$   
 c)  $p_5: x - 3y = 2, \quad p_6: 2x - 6y = 14.$

**Řešení.** V každé úloze nahradíme soustavu lineárních rovnic ekvivalentní soustavou tak, že od druhé rovnice odečteme dvojnásobek první rovnice; tuto operaci lze chápat jako výsledek složení dvou operací, a to nejprve vytvoření dvojnásobku první rovnice a pak odečtení vzniklé první rovnice od druhé rovnice.

a) V soustavě dostaneme:

$$\begin{array}{r} x - 3y = 1 \\ 7y = 7 \end{array}$$

tudíž  $y = 1, x = 1 + 3y = 4$ , proto dvojice  $(4, 1)$  je řešení soustavy rovnic. To značí, že bod  $[4, 1]$  je jediným společným bodem přímek  $p_1, p_2$  (přímky se protínají v bodě).

b) V této soustavě je:

$$\begin{array}{r} x - 3y = 2 \\ 0 = 5 \end{array}$$

Tato soustava nemá řešení, jelikož obsahuje spornou rovnici  $0 = 5$ ; přímky  $p_3, p_4$  jsou rovnoběžné různé.

c) Teď máme

$$\begin{array}{r} x + 3y = 2 \\ 0 = 0 \end{array}$$

jako ekvivalentní soustavu, druhá rovnice se v ní splní vždy a lze ji vypustit. Proto soustava se redukuje na jednu rovnici pro dvě neznámé  $x + 3y = 2$  a má nekonečně mnoho řešení – dvojic  $\left(x, \frac{2-x}{3}\right)$ . Jsou to právě všechny body přímky  $p_5$  a současně také  $p_6$ ; přímky  $p_5, p_6$  jsou rovnoběžné a totožné. •

Je významné uvědomit si, že při všech úpravách rovnic jsme prováděli úpravy na koeficientech těchto rovnic, neboli na rozšířené matici soustavy. Pod úpravami na matici i v dalších postupech budeme mít na mysli ekvivalentní úpravy na rovnicích, které řádky těchto matic reprezentují. Obráceně, z nově získaných matic lze příslušné rovnice bez problémů napsat.

Vyřešme ještě úlohy o vzájemné poloze dvou, tří nebo více rovin v prostoru. Jde o zobecnění předchozích úloh o přímkách v rovině; obecná rovnice roviny  $ax + by + cz = d$  v prostoru je lineární v proměnných  $x, y, z$ . Speciálně, jestliže každé z reálných čísel  $a, b, c, d$  je nenulovým číslem, pak tato rovnice je rovnicí roviny určené body  $P[d/a, 0, 0], Q[0, d/b, 0], R[0, 0, d/c]$ . Úloha o vzájemné poloze tří rovin v prostoru vede na soustavu tří lineárních rovnic o 3 neznámých; ilustruje ji následující příklad.

**Příklad.** Určeme všechny společné body tří rovin  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  s obecnými rovnicemi:  $\rho_1: 3x - 2y + 4z = 6, \rho_2: 2x + 3y - 5z = -8, \rho_3: 5x - 4y + 3z = 7.$

**Řešení.** Obecné rovnice rovin tvoří soustavu lineárních rovnic. Na soustavě provedeme ekvivalentní operace s cílem eliminace některých neznámých.

$$3x-2y+4z = 6$$

$$2x+3y-5z = -8$$

$$5x-4y+3z = 7$$

První rovnici násobíme  $-2$  a ke třetí rovnici pak připočítáme takto upravenou první rovnici:

$$-6x+4y-8z = -12$$

$$2x+3y-5z = -8$$

$$5x-4y+3z = 7$$

$$-6x+4y-8z = -12$$

$$2x+3y-5z = -8$$

$$-x \quad -5z = -5$$

Zřejmě záměna pořadí rovnic nemá vliv na řešení. Násobíme třetí rovnici číslem  $(-1)$  a napíšeme ji pak jako novou první rovnici:

$$x \quad +5z = +5$$

$$-6x+4y-8z = -12$$

$$2x+3y-5z = -8$$

Ke druhé rovnici teď připočteme šestinásobek první rovnice, ke třetí rovnici  $(-2)$ -násobek první rovnice:

$$x \quad + 5z = 5$$

$$4y+22z = 18$$

$$3y-15z = -18$$

Vydělme druhou rovnici číslem 2, třetí rovnici číslem 3:

$$x \quad + 5z = 5$$

$$2y+11z = 9$$

$$y- 5z = -6$$

K druhé rovnici připočítáme  $(-2)$ -násobek třetí rovnice a pak vyměníme mezi sebou druhou a třetí rovnici:

$$x \quad + 5z = 5$$

$$y- 5z = -6$$

$$21z = 21$$

Pro trojici  $(x, y, z)$ , která je řešením této soustavy, máme

$$z = 1, y = -6 + 5z = -6 + 5 = -1, x = 5 - 5z = 5 - 5 = 0.$$

Postup značí, že trojice  $(0, -1, 1)$  je jediným řešením této soustavy; proto roviny  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  mají jediný společný bod  $A[0, -1, 1]$ . •

Kromě uvedené možnosti jediného průsečíku může nastat při zkoumání vzájemné polohy tří rovin v prostoru ještě některý z případů:

- tři roviny protínající se v jedné přímce;

- tři rovnoběžné totožné roviny;

- žádné společné body: tři navzájem rovnoběžné různé roviny; nebo takové tři roviny, že každé dvě z nich se protínají v přímce a všechny tři nemají společný bod; nebo dvě

rovnoběžné a třetí totožná s některou z nich; nebo dvě různoběžné roviny protínající se v přímce a třetí rovina totožná s některou z nich.

Způsob řešení odpovídající soustavy musí dát možnost odlišit, která z těchto 7 situací nastane. Opět si všimněme, že úpravy na rovnicích se prováděly pomocí úprav na systému koeficientů v jednotlivých řádcích.

## Matice a rozšířená matice soustavy lineárních rovnic

Obecně soustava  $m$  lineárních rovnic o  $n$  neznámých  $x_1, \dots, x_n$  má tvar:

$$(S) \quad \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & & \dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n & = & b_i \\ \dots & & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Analogicky, k soustavě (S) náleží *matice soustavy*  $A$  typu  $m \times n$ , resp. *rozšířená matice soustavy*  $\bar{A}$  typu  $m \times (n+1)$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \left( \begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} & b_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

*Řešením soustavy* (S) nazýváme každou uspořádanou  $n$ -tici čísel  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , pro kterou se po dosazení do soustavy (S) splní každá z rovnic soustavy. Na pořadí čísel záleží, proto mluvíme o uspořádané  $n$ -tici. Pro soustavu (S) v závislosti na jejích koeficientech může nastat jedna ze tří možností:

- jediné řešení (jedinou  $n$ -tici  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ),
- nekonečně mnoho řešení (ve smyslu nekonečně mnoho  $n$ -tic), nebo
- žádné řešení.

Jestliže  $m = n$ , pak má soustava tolik rovnic, kolik je neznámých; mluvíme o *čtvercové soustavě* se *čtvercovou maticí soustavy* typu  $n \times n$ , nebo také řádu  $n$ .

Poznamenejme, že v dalších kapitolách se budeme maticemi, jejich vlastnostmi a operacemi s maticemi zabývat mnohem podrobněji. Zatím nám o maticích stačí tyto úvodní pojmy a následující interpretace: řádek rozšířené matice soustavy reprezentuje příslušnou lineární rovnici ze soustavy, proto lze na něj pohlížet, při dosazení libovolného řešení, jako na rovnost dvou reálných čísel. Pokud provádíme úpravy s reálnými čísly zachovávající rovnost dvou reálných čísel, má smysl napsat odpovídající řádky vyjádřující postup těchto úprav jako nové, postupně pozměněné "záznamy" platných vztahů rovnosti. Uveďme také, že prvek matice  $a_{ij}$  s *řádkovým indexem*  $i$  a *sloupcovým indexem*  $j$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$ , je koeficientem u  $j$ -té neznámé v  $i$ -té rovnici soustavy. Prvky  $a_{ii}$  matice  $A$  tvoří tzv. *hlavní diagonálu*.

Dvě matice  $A, B$  se rovnají neboli jsou shodné,  $(A = B)$ , pokud jsou stejného typu a pokud na stejných pozicích mají stejné prvky. Rovnost matic odlišných typů se nedefinuje.

Zavedeme maticové označení také pro sloupec  $n$  neznámých  $x_1, x_2, \dots, x_n$  tvořících

spolu složky řešení  $x$ , a pro  $m$ -složkový sloupec pravých stran rovnic  $b_1, b_2, \dots, b_m$  – označme jej jako  $b$ : půjde o matice typu  $1 \times n$ , resp.  $1 \times m$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_i \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Poznamenejme, že z důvodů úspory místa v textu si je někdy dovolíme psát i jako řádky; jejich význam v soustavě je určen kontextem úlohy, kupř. vždy mluvíme o sloupci pravých stran. Pokud budeme provádět úpravy, zápis  $x, b$  sloupцем nelze vypustit.

Rozšířenou matici soustavy budeme psát také ve tvaru  $\bar{A} = (A | b)$ .

### Gaussova eliminační metoda (GEM)

Nechť  $(S)$  je soustava  $m$  lineárních rovnic s  $n$  neznámými, nechť  $A$ , resp.  $\bar{A}$  je matice, resp. rozšířená matice soustavy  $(S)$ . Univerzální metoda, pomocí které lze určit řešení soustavy  $(S)$ , naznačena i v našich příkladech, se nazývá Gaussova eliminační metoda. Zakládá se na konečném počtu postupně prováděných úprav na řádcích rozšířené matice  $\bar{A}$ , které vedou k ekvivalentní soustavě rovnic s přehlednou rozšířenou maticí; řešení této ekvivalentní soustavy lze získat velmi jednoduchým způsobem.

#### Elementární řádkové úpravy

Následující tři druhy úprav na řádcích rozšířené matice  $\bar{A}$  soustavy se nazývají *elementární řádkové úpravy (ERO)*:

(A) záměna dvou řádků; jestliže zaměníme mezi sebou  $i$ -tý a  $j$ -tý řádek  $R_i, R_j$ , symbolicky k matici zapíšeme  $R_i \leftrightarrow R_j$ ;

(B) násobení řádku reálným číslem  $k \neq 0$ : pro  $i$ -tý řádek symbolicky budeme psát  $kR_i \rightarrow R_i$  (znak  $\rightarrow$  značí, že místo původního řádku  $R_i$  napíšeme nový řádek tvaru  $kR_i$ );

(C) k některému řádku připočteme  $k$ -násobek jiného řádku; jestliže k  $i$ -tému řádku  $R_i$  připočteme  $k$ -násobek  $j$ -tého řádku  $R_j$ , zapíšeme to symbolicky k matici jako  $R_i + kR_j \rightarrow R_i$  (tím se změnil  $i$ -tý řádek matice  $\bar{A}$ ).

Řádek matice  $\bar{A}$  reprezentuje jednu rovnici ze soustavy  $(S)$ , tudíž při dosazení libovolného řešení dvě reálná čísla, která se rovnají. Žádná z elementárních řádkových úprav nemá vliv na rovnost zmiňovaných čísel – jejich rovnost zachová. Elementární řádkové úpravy vytvoří soustavu lineárních rovnic ekvivalentní s původní soustavou. Vraťme se k úlohám analogickým k úvodním a úpravy prováděné na soustavách označme podle typu těchto úprav.

**Příklad.** Řešme soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \begin{array}{l} 3x+4y = 1 \\ x-2y = 7 \end{array} & \text{b)} \quad \begin{array}{l} 3x+4y = 1 \\ 6x+8y = 2 \end{array} & \text{c)} \quad \begin{array}{l} 3x+4y = 1 \\ 6x+8y = 3 \end{array} \end{array}$$

**Řešení.** a) Budeme provádět ERO na rozšířené matici soustavy

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 7 \end{array} \right)$$

Symbole úprav přepíšeme za matici a přechod na upravenou matici vyznačíme symbol-

em  $\sim$ ; tímto symbolem označujeme vztah *ekvivalence* dvou matic. Ekvivalentní matice reprezentují soustavy lineárních rovnic se stejnou množinou řešení (nemusí jít o shodné matice). Máme:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & | & 1 \\ 1 & -2 & | & 7 \end{pmatrix} R_1 \leftrightarrow R_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & | & 7 \\ 3 & 4 & | & 1 \end{pmatrix} R_2 - 3R_1 \rightarrow R_2 \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & | & 7 \\ 0 & 10 & | & -20 \end{pmatrix} 0,1R_2 \rightarrow R_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & | & 7 \\ 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix} R_1 + 2R_2 \rightarrow R_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix}$$

Poslední upravená matice je rozšířená matice soustavy ekvivalentní s původní soustavou; vzhledem na její tvar rovnic přímo čteme z odpovídajících rovnic (jediné) řešení soustavy:  $x = 3, y = -2$ .

b) Soustava se po úpravě na druhé rovnici transformuje na soustavu:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & | & 1 \\ 6 & 8 & | & 2 \end{pmatrix} R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2 \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & | & 1 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Z tvaru poslední soustavy je vidět, že druhá rovnice se splní vždy a soustava má nekonečně mnoho řešení určených jednou rovnicí  $3x + 4y = 1$ . Proto řešení představují dvojice  $\left(\frac{1-4y}{3}, y\right)$ , kde  $y$  je libovolné reálné číslo.

c) Stejná úprava na druhé rovnici nás teď přivádí k soustavě:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & | & 1 \\ 6 & 8 & | & 3 \end{pmatrix} R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2 \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & | & 1 \\ 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Druhá rovnice  $0 \cdot = 1$  nemá řešení. Proto ani soustava nemá řešení. •

### *Redukovaná matice soustavy*

Při řešení soustav lineárních rovnic budeme provádět úpravy na řádcích rozšířené matice  $\bar{A}$  soustavy (S), a to tak, abychom matici  $\bar{A}$  upravili na tzv. *redukovanou matici* (nebo *matici v redukovaném tvaru*). *Redukovanou maticí* přitom rozumíme matici, ve které jsou řádky následujícího tvaru:

1. Každý nulový řádek (t.j. řádek sestávající ze samých nul) se nachází pod libovolným nenulovým řádkem (t.j. řádkem, ve kterém je alespoň jeden nenulový prvek).
2. První nenulový prvek v každém řádku je rovný 1.
3. Sloupec obsahující takový prvek 1 má v pozicích nad a rovněž pod touto 1 samé nulové prvky.
4. Prvek 1 jako první nenulový prvek v řádku se nachází v pozici vždy vpravo vzhledem na prvek 1 jako na první nenulový prvek v řádku nad ním.

Postup úpravy rozšířené matice  $\bar{A}$  soustavy (S) na redukovanou matici není jednoznačně určen, ale vždy je možné ho provést. Lze dokázat, že každá soustava s redukovanou maticí odvozenou z matice  $\bar{A}$  je s původní soustavou ekvivalentní. Důvod spočívá v používaných úpravách ERO.

**Příklad.** Řešme soustavu lineárních rovnic úpravou rozšířené matice soustavy na redukovaný tvar:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 7 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

**Řešení.** Vyznačme podobně jako v předchozím příkladu úpravy na rozšířené matici soustavy a současně vždy napíšeme nově vzniklou soustavu rovnic:

$$\begin{array}{ll} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{array} \right) & R_1 \leftrightarrow R_3 \\ \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 7 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right) & R_2 - 3R_1 \rightarrow R_2 \\ \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & -7 & 7 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right) & R_3 - 2R_1 \rightarrow R_3 \\ \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & -7 & 7 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \end{array} \right) & 0, 1R_2 \rightarrow R_2 \\ \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4/10 & 7/10 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \end{array} \right) & R_3 - 4R_2 \rightarrow R_3 \\ \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -7/10 & 7/10 \\ 0 & 0 & -1/5 & 1/5 \end{array} \right) & (-5)R_3 \rightarrow R_3 \\ \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -7/10 & 7/10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) & R_2 + 0,7R_3 \rightarrow R_2 \\ \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) & R_1 - 2R_3 \rightarrow R_1 \\ \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) & R_1 + 3R_2 \rightarrow R_1 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 10x_2 - 7x_3 = 7 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 10x_2 - 7x_3 = 7 \\ 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - 7/10x_3 = 7/10 \\ 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - 7/10x_3 = 7/10 \\ -1/5x_3 = 1/5 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - 7/10x_3 = 7/10 \\ x_3 = -1 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -1 \\ x_1 - 3x_2 = 2 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -1 \\ x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -1 \end{array}$$

Rozšířená matice poslední soustavy je v redukovaném tvaru; z ní a rovněž z odpovídající soustavy lineárních rovnic plyne, že soustava má jediné řešení  $x_3 = -1$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_1 = 2$ . •

### Popis Gaussovy eliminační metody

(1) Vyhledejte nenulový sloupec v rozšířené matici  $\bar{A}$  s nejmenším sloupcovým indexem a pomocí vhodných ERO vytvořte v jeho prvním řádku prvek 1.

(2) Pomocí vhodných násobků prvního řádku vytvořte pomocí ERO na všech místech pod touto 1 samé nulové prvky.

(3) Opakujte kroky (1), (2) na podmatici, tj. na takové matici, která vznikne vynecháním prvního řádku a prvního sloupce poslední vytvořené matice; pokračujte, pokud se takový



postup neukončí vyčerpáním řádků nebo sloupců.

(4) Uvažujte teď o celé získané matici. Začněte jejím posledním nenulovým řádkem a pokud není současně prvním, pak pomocí vhodných násobků využitím ERO vytvořte nad prvkem 1 s nejmenším sloupcovým indexem (tedy stojícím na hlavní diagonále) samé nulové prvky. Pokračujte po řádcích nahoru až po první řádek včetně.

Provedením kroků (1) – (4) upravíme rozšířenou matici  $\bar{A}$  na redukovaný tvar.

Vzhledem na účel postupu, kterým je řešení soustavy lineárních rovnic, poznamenejme: jestliže na kterémkoliv kroku Gaussovy eliminace získáme řádek tvaru

$$0 \quad \dots \quad 0 \mid c$$

přičemž  $c \neq 0$ , čili sporný řádek, pak postup zastavíme: soustava nemá řešení, protože obsahuje spornou rovnici.

**Příklad.** Určeme koeficienty  $a, b, c$  v rovnici paraboly  $y = a + bx + cx^2$ , která je určená body  $A[1, -5]$ ,  $B[-2, 7]$ ,  $C[3, 17]$ .

**Řešení.** Napišme podmínky vyjadřující to, že body  $A, B, C$  náležejí parabole; z těchto podmínek plyne, že koeficienty  $a, b, c$  v její rovnici musí být řešením lineární soustavy tří lineárních rovnic:

$$a + b + c = -5$$

$$a - b + 4c = 7$$

$$a + 3b + 9c = 17$$

řešíme pomocí GEM úpravou její rozšířené matice na redukovaný tvar:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 9 & 17 \end{array} \right) R_2 - R_1 \rightarrow R_2, R_3 - R_1 \rightarrow R_3 \sim \\ \sim & \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & 3 & 12 \\ 0 & 2 & 8 & 22 \end{array} \right) (-1/3)R_2 \rightarrow R_2, (1/2)R_3 \rightarrow R_3 \sim \\ \sim & \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & 11 \end{array} \right) R_3 - 2R_2 \rightarrow R_3 \sim \\ \sim & \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array} \right) (1/5)R_3 \rightarrow R_3 \sim \\ \sim & \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) R_1 - R_3 \rightarrow R_1, R_2 + R_3 \rightarrow R_2 \sim \\ \sim & \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) R_1 - R_2 \rightarrow R_1 \sim \\ \sim & \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Poslední matice je už v redukovaném tvaru; odtud plyne  $a = -7$ ,  $b = -1$ ,  $c = 3$  a rovnice hledané paraboly je  $y = -7 - x + 3x^2$ . Tato úloha se nazývá *interpolační úlohou* a nalezený kvadratický polynom je tzv. *interpolačním polynomem*. (Postup lze zobecnit

a pro daných  $(n + 1)$  bodů určovat interpolační polynom stupně  $n$ .) •

*Poznámka.* Neznámé  $a, b, c$  v této soustavě rovnic je možné vypočíst už z matice získané po čtvrté úpravě, tudíž ze soustavy

$$\begin{aligned} a+b+c &= -5 \\ b-c &= -4 \\ c &= 3 \end{aligned}$$

Ze třetí rovnice dosadíme  $c = 3$  do druhé rovnice:  $b - c = -4$ , proto  $b = -4 + c = -1$ . Z první rovnice pak  $a = -5 - b - c = -7$ . Tímto způsobem lze postupovat také obecně a z popisu GEM využívat pouze kroky (1), (2), (3), které se také označují jako tzv. *přímý chod metody*; krok (4) je tzv. *zpětný chod*. Provedení přímého chodu nevytvoří redukovanou matici, ale (pro případně vhodné přeznačení neznámých) tzv. horní trojúhelníkovou matici (je to matice se všemi prvky pod hlavní diagonálou rovnými nule).

### Existence a počet řešení soustavy lineárních rovnic

Nechť  $A$  je matice soustavy (S) typu  $m \times n$ , nechť  $r$  je největší přirozené číslo takové, že pomocí GEM se vytvoří jako část redukované matice jednotková matice  $E_r$  (jako její podmatice). Pak redukovaná matice může mít pouze jeden ze tří následujících tvarů:

(1)  $r = n$  a jestliže v redukované matici existuje víc než  $n$  řádků, jsou všechny až po  $m$ -tý řádek nulové. Pak soustava (S) má jediné řešení.

(2)  $r < n$ , tudíž kromě sloupce odpovídajícího pravým stranám rovnic existuje v redukované matici  $s = n - r$  sloupců; předpokládejme, že pokud existuje víc než  $r$  řádků, jsou všechny až po  $m$ -tý řádek nulové. Pak má soustava (S) nekonečně mnoho řešení: v našem označení neznámé  $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$  (spolu s neznámých) jsou libovolně volitelné a pomocí nich se určují neznámé  $x_1, x_2, \dots, x_r$ .

(3) Nechť pro číslo  $s$  ve významu jako v (2) je teď  $s \geq 0$  a v redukované matici existuje  $(r + 1)$ -tý řádek tvaru

$$0 \quad \dots \quad 0 \mid c$$

kde  $c \neq 0$ . Pak soustava obsahuje spornou rovnici, proto nemá řešení.

*Poznámka.* Pomocí metod lineární algebry lze dokázat, že každá úprava rozšířené matice soustavy na redukovaný tvar vede na stejný počet nenulových řádků v redukované matici, a to nezávisle na typu používaných operací nebo na jejich pořadí. Proto lze definovat tzv. *hodnotu*  $h(A)$  matice  $A$  jako počet nenulových řádků v její redukované matici.

*Poznámka.* V ekonomických aplikacích, zejména v úlohách tzv. lineárního programování, se zavádějí pro některá řešení soustav lineárních rovnic další označení mající speciální význam. Jde o soustavy lineárních rovnic, které mají nekonečně mnoho řešení; uveďme tuto terminologii pouze na příkladu následující soustavy 2 lineárních rovnic pro 4 neznámé:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 &= 4 \end{aligned}$$

Gaussova eliminace vede na redukovanou matici soustavy ve tvaru:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & -2 \end{array} \right)$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení a pomocí volitelných neznámých  $x_3, x_4$  lze určit množinu těchto řešení jako tzv. *obecné řešení* ve tvaru

$$x = \begin{pmatrix} 3 + 2x_3 + x_4 \\ -2 - 5x_3 + x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad x_3, x_4 \text{ lib. reálná čísla.}$$

Speciální volbou  $x_3 = x_4 = 0$  získáme z obecného řešení hodnoty zbývajících tzv. *bázických nebo základních proměnných*  $x_1 = 3, x_2 = -2$  (jsou to nevolitelné neznámé, jejich hodnoty jsou určeny nebo plynou z volby neznámých  $x_3, x_4$ ) a tím vznikne řešení

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

kteří se nazývá *základní řešení*. Ale eliminační metoda umožňuje vybrat dvojici volitelných neznámých i jiným způsobem, proto od tohoto základního řešení lze udělat přechod k jinému základnímu řešení. Vybereme-li kupř. za bázické proměnné  $x_1, x_3$  (volitelné neznámé jsou  $x_2, x_4$ ), budeme upravovat pomocí ERO už získanou redukovanou matici soustavy tak, aby ve druhém řádku vznikl jednotkový prvek 1 ve třetím sloupci; zápis pomocí tabulky je:

|       |       |       |       |      |
|-------|-------|-------|-------|------|
| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |      |
| 1     | 1     | 3     | -2    | 1    |
| 0     | 1     | 5     | -1    | -2   |
| 1     | 1     | 3     | -2    | 1    |
| 0     | 0,2   | 1     | -0,2  | -0,4 |

Pomocí volitelných neznámých  $x_2, x_4$  teď získáme obecné řešení soustavy ve tvaru

$$x = \begin{pmatrix} 2,2 - 0,4x_2 + 1,4x_4 \\ x_2 \\ -0,4 - 0,2x_2 + 0,2x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad x_2, x_4 \text{ lib. reálná čísla.}$$

Volba  $x_2 = x_4 = 0$  určí hodnoty bázických proměnných  $x_1 = 2,2, x_3 = -0,4$  a základní řešení

$$x = \begin{pmatrix} 2,2 \\ 0 \\ -0,4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Počet všech možností výběru dvojic volitelných neznámých ze čtyř neznámých v této soustavě určí počet všech možných základních řešení této soustavy; počet těchto výběrů je dán kombinačním číslem  $\binom{4}{2} = 6$ .

Na základě těchto úvah lze pro obecnou situaci usoudit, že:

- 1) soustava lineárních rovnic s nekonečným počtem řešení má konečný počet základ-

ních řešení;

2) jestliže je  $h$  hodnost rozšířené matice soustavy a  $n$  počet neznámých v soustavě, pak počet volitelných neznámých je  $\binom{n}{n-h} = \binom{n}{h}$  a toto číslo současně určuje (maximální) počet základních řešení soustavy.

### GEM pro homogenní soustavy

Soustava lineárních rovnic s nulovým sloupcem koeficientů pravých stran rovnic se označuje jako *homogenní soustava*.

Na základě jejího tvaru platí: homogenní soustava má vždy alespoň jedno řešení, a to *triviální*, sestávající ze samých 0:  $(0, 0, \dots, 0)$ .

V postupu Gaussovy eliminační metody uplatněné na homogenní soustavu se totiž nemůže vytvořit sporný řádek v redukované matici, čili případ (3) v analýze existencí a počtu řešení podle GEM teď nenastává. Proto pro případ  $r = n$  má homogenní soustava jediné řešení, které musí být řešením triviálním. Jestliže nastane druhá možnost  $r < n$ , pak existuje  $s = n - r$  volitelných neznámých, tudíž soustava má nekonečný počet řešení; volitelné neznámé můžeme zvolit i jako nenulové, proto soustava má též netriviální řešení.

**Příklad.** Určeme všechna řešení homogenní soustavy:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 & - & 6x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 & & = 0 \\ 7x_1 + 8x_2 + 6x_3 - 18x_4 & & = 0 \end{array}$$

**Řešení.** Na zápis Gaussovy eliminační metody použijeme tabulku, popis jednotlivých úprav ERO neuvádíme:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |   | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |   |
|-------|-------|-------|-------|---|-------|-------|-------|-------|---|
| 1     | 2     | 0     | -6    | 0 | 1     | 2     | 0     | -6    | 0 |
| 2     | 1     | 3     | 0     | 0 | 0     | 1     | -1    | -4    | 0 |
| 7     | 8     | 6     | -18   | 0 | 0     | 1     | -1    | -4    | 0 |
| 1     | 2     | 0     | -6    | 0 | 1     | 0     | 2     | 2     | 0 |
| 0     | -3    | 3     | 12    | 0 | 0     | 1     | -1    | -4    | 0 |
| 0     | -6    | 6     | 24    | 0 |       |       |       |       |   |

Systém má nekonečně mnoho řešení;  $s = n - r = 2$ , proto 2 neznámé jsou volitelné a dvojici neznámých lze vybrat  $\binom{4}{2} = 6$  způsoby. Pokud je zvolíme jako  $x_3, x_4$ , pak pomocí těchto neznámých určíme  $x_2 = x_3 + 4x_4$ ,  $x_1 = -2x_3 - 2x_4$ . Proto řešení soustavy představují čtveřice tvaru  $(-2x_3 - 2x_4, x_3 + 4x_4, x_3, x_4)$ .

Triviální řešení  $(0, 0, 0, 0)$ , které soustava musí mít, dostáváme jako speciální případ, a to při volbě  $x_3 = x_4 = 0$ . Jako speciální případ dostáváme dvě čtveřice, které odpovídají volbám:

$$\begin{array}{l} x_3 = 1, x_4 = 0: \text{čtveřice } (-2, 1, 1, 0), \\ x_3 = 0, x_4 = 1: \text{čtveřice } (-2, 4, 0, 1). \bullet \end{array}$$

**Poznámka.** Pro každou soustavu lineárních rovnic (nehomogenní, homogenní) lze množinu řešení popsat určitým obecně platným způsobem. Ukážeme takový způsob pouze na příkladu, ve kterém budeme hledat řešení následující nehomogenní soustavy:

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_3 + 5x_4 &= 7 \\x_2 + x_3 - 3x_4 &= 5\end{aligned}$$

Matice této soustavy je už v redukovaném tvaru. Soustava má nekonečně mnoho řešení; obecné řešení je

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 + 2x_3 - 5x_4 \\ 5 - x_3 + 3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4,$$

$x_3, x_4$  lib. reálná čísla. Struktura obecného řešení je následující. Vektor  $x$  obecného řešení nehomogenní soustavy je tvořen součtem dvou vektorů:

$$- \text{vektoru } x^* = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ jenž je řešení nehomogenní soustavy; dostaneme ho speciální}$$

volbou volitelných neznámých  $x_3 = x_4 = 0$ , proto ho lze pojmenovat jako *partikulární řešení nehomogenní soustavy*;

$$- \text{vektoru lineární kombinace } x_{hom} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4, \text{ pro který lze snadno}$$

nahlédnout, že představuje všechna řešení odpovídající homogenní soustavě lineárních rovnic náležící k naší nehomogenní soustavě, dostaneme ji nahrazením pravých stran nulami v původní soustavě; kvůli jeho tvaru se nazývá *obecným řešením homogenní soustavy*.

Z postupu GEM pro libovolnou soustavu plyne tvrzení o struktuře řešení rovněž obecně; bez důkazu proto uveďme, že

- vektor  $x$  obecného řešení nehomogenní soustavy je tvořen součtem jednoho, a to libovolně zvoleného vektoru  $x^*$  partikulárního řešení dané nehomogenní soustavy a vektoru  $x_{hom}$  obecného řešení odpovídající homogenní soustavy.

Tato formulace obsahuje rovněž případ, kdy nehomogenní soustava lineárních rovnic má jediné řešení: redukovanou maticí soustavy tehdy musí být matice čtvercová, splní se podmínky  $n = m = r$ , tudíž homogenní soustava náležící k nehomogenní soustavě má triviální (nulové) řešení. Proto v struktuře součtu je vektor  $x_{hom}$  nulový. (Formulace strukturního tvrzení pro případ homogenní soustavy je evidentní.)

## Cramerovo pravidlo

### Determinant 2. stupně

Zabývejme se opět jednoduchou úlohou ze začátku této kapitoly: eliminační metodou určíme řešení soustavy dvou lineárních rovnic pro dvě neznámé  $x_1, x_2$  obecně:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2\end{aligned}$$

První rovnici násobíme číslem  $a_{21}$ , druhou rovnici číslem  $-a_{11}$  a sečteme je; tím vyloučíme neznámou  $x_1$  a získáme pouze jednu rovnici pro určení neznámé  $x_2$ . Neznámé  $x_1, x_2$  lze pak vyjádřit ve tvaru podílů, ve kterých vystupují koeficienty soustavy:

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}, \quad x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}.$$

Podmínkou existence tohoto řešení je ovšem nenulový jmenovatel v těchto zlomcích:  $a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} \neq 0$ .

Pravidelnost nebo symetrii pro čísla v těchto zlomcích lze vystihnout zápisem pomocí čtveřice čísel ve svislých čarách (podobně jako tomu bylo u matic obsahujících koeficienty soustavy) s následujícím pravidlem výpočtu: označíme

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12},$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - b_2 a_{12}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2 a_{11} - b_1 a_{21}.$$

Čísla  $D$ ,  $D_1$ ,  $D_2$  se nazývají *determinanty* příslušných matic a protože jsou odvozeny ze čtvercových matic typu  $2 \times 2$ , nazývají se *determinanty 2. stupně*; jsou to reálná čísla.

$$\text{Kupř. } \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Proto řešení soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých  $x_1, x_2$  lze zapsat ve tvaru podílů dvou determinantů druhého stupně

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \text{ jestliže } D \neq 0.$$

### Determinant 3. stupně a Sarrusovo pravidlo

Čtvercové matici  $A$  typu  $3 \times 3$  přiřadíme determinant  $D = \det A$  jako čtvercové schema sestavené z prvků matice a zapsané ve svislých čarách:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Uvedený symbol se nazývá *determinantem 3. stupně* náležícím ke čtvercové matici 3. řádu a je to číslo, které se vypočítá způsobem nazývaným *Sarrusovo pravidlo*:

$$\det A = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{31} a_{22} a_{13} - a_{21} a_{12} a_{33} - a_{11} a_{32} a_{23}$$

(součet 6 členů, polovina z nich má znaménko  $+$  a polovina znaménko  $-$ ). Členy lze přehledně najít tak, že do uvedeného čtvercového schematu přepíšeme čtvrtý a pátý řádek zopakováním prvního a druhého řádku matice a tvoříme 3 součiny z diagonál začínaje součinem  $a_{11} a_{22} a_{33}$  a z diagonál pod ní se znaménkem  $+$ ; další součiny z diagonály  $a_{31} a_{22} a_{13}$  a z diagonál pod ní mají znaménko  $-$ .

**Příklad.** Vypočítejme determinanty:

$$\text{a) } D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ -8 & 10 & -6 \end{vmatrix} = -48 + 30 + 40 + 32 - 100 - 18 = -642;$$

$$\text{b) } D = \begin{vmatrix} 10 & 0 & -1 \\ -1 & 10 & 0 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 1\,000 - 1 = 999;$$

$$\text{c) } D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{vmatrix} = 108 + 24 + 18 - 12 - 72 - 54 = 12;$$

$$\text{d) } D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 2 & 5 \\ -2 & -5 & -3 \end{vmatrix} = -6a - 15c - 10b + 4c + 25a + 9b = 19a - b - 11c.$$

### Cramerovo pravidlo (případy $n = 2$ , $n = 3$ )

Eliminační metoda v soustavách se čtvercovou maticí  $A$  stupně  $n = 2$  nebo  $n = 3$ , pro kterou platí  $\det A \neq 0$ , vede na způsob řešení, který používá determinanty a nazývá se *Cramerovo pravidlo*. Na tom je založeno následující tvrzení, které uvedeme bez důkazu.

**Cramerovo pravidlo.** Nechť  $(S)$  je soustava  $n$  lineárních rovnic pro  $n$  neznámých,  $n = 2$  nebo  $n = 3$ . Nechť  $D$  je determinant matice soustavy:  $D = \det A$ . Jestliže  $D \neq 0$ , pak soustava má jediné řešení, kterým je  $n$ -tice  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , kde

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \quad i = 1, \dots, n,$$

a  $D_i$  jsou determinanty, které vzniknou z determinantu  $D$  nahrazením  $i$ -tého sloupce sloupcem pravých stran,  $i = 1, \dots, n$ .

*Poznámka.* V další kapitole zavedeme pojem determinantu obecně pro libovolné  $n$ ,  $n \geq 2$ , a budeme se zabývat vlastnostmi determinantů podrobněji. Platnost Cramerova pravidla lze pak rozšířit, zachovávající jeho formální podobu podle právě uvedené formulace, rovněž pro libovolné  $n$ ,  $n \geq 2$ , neboli pro nalezení řešení čtvercových soustav sestávajících z libovolného počtu rovnic. Pro účely této kapitoly postačí zatím omezení na  $n = 2$  nebo  $n = 3$ .

**Příklad.** Soustavy lineárních rovnic řešme Cramerovým pravidlem:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 7x_1 + 13x_2 = -5 & \text{b) } \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{array} \\ 5x_1 + 7x_2 = 1 & \end{array}$$

**Řešení.** a) Determinant soustavy je  $\det A = 49 - 65 = -16 \neq 0$ , proto soustava má jediné řešení a podle Cramerova pravidla to je:

$$x_1 = -\frac{1}{16} \cdot \begin{vmatrix} -5 & 13 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -\frac{-35 - 13}{16} = 3,$$

$$x_2 = -\frac{1}{16} \cdot \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{7 + 25}{16} = -2.$$

b) Opět je determinant soustavy  $\det A = 12 \neq 0$ , proto  $x_1, x_2, x_3$  podle Cramerova pravidla jsou:

$$x_1 = \frac{1}{12} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 11 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{24}{12} = 2,$$

$$x_2 = \frac{1}{12} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 11 & 3 \end{vmatrix} = \frac{-24}{12} = -2,$$

$$x_3 = \frac{1}{12} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 11 \end{vmatrix} = \frac{36}{12} = 3. \bullet$$

### Soustavy lineárních rovnic s parametrem

Omezíme se pouze na čtvercové soustavy a při jejich řešení budeme využívat determinanty. Půjde o úlohy formulované podobně jako v následující úloze.

**Příklad.** Určeme všechny hodnoty reálného parametru  $p$ , pro které má soustava jediné, resp. žádné, resp. nekonečně mnoho řešení, a najdeme všechna existující řešení v závislosti na parametru  $p$ :

$$\begin{array}{lll} x_1 + x_2 + x_3 = 1 & x_1 + x_2 + x_3 = 0 & (2p-1)x_1 + (p-1)x_3 = 0 \\ \text{a) } x_1 + px_2 + x_3 = 1 & \text{b) } x_1 + px_2 + x_3 = 0 & \text{c) } x_1 + px_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + p^2x_3 = 1 & x_1 + x_2 + p^2x_3 = 0 & (p-1)x_1 + (p-1)x_3 = 0 \end{array}$$

**Řešení.** a) Počítejme determinant matice soustavy:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 \\ 1 & 1 & p^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & p-1 & 0 \\ 0 & 0 & p^2-1 \end{vmatrix} = (p-1)^2 \cdot (p+1)$$

Jestliže  $\det A \neq 0$ , tudíž  $p \neq 1$ ,  $p \neq -1$ , pak soustava má jediné řešení, které vypočítáme pomocí Cramerova pravidla:

$$x_1 = \frac{1}{(p-1)^2(p+1)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 \\ 1 & 1 & p^2 \end{vmatrix} = 1, \quad x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & p^2 \end{vmatrix} = x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

tudíž řešením soustavy je trojice  $(1, 0, 0)$ .

Pro  $p = 1$  se soustava redukuje na jedinou rovnici  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ , proto má nekonečně mnoho řešení:  $(1 - x_2 - x_3, x_2, x_3)$ , kde  $x_2, x_3$  jsou dvě libovolně volitelné neznámé.

Pro  $p = -1$  se soustava redukuje na dvě rovnice (třetí rovnice je totožná s první rovnicí): запише její koeficienty do tabulky a příslušnou rozšířenou matici upravíme podle GEM:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}$$

Proto  $x_2 = 0$ ,  $x_1 = 1 - x_3$ , kde  $x_3$  je libovolně volitelné reálné číslo; řešení představuje nekonečně mnoho trojic  $(1 - x_3, 0, x_3)$ ,  $x_3$  libovolné.

b) Jde o soustavu z předchozí úlohy a), teď jako homogenní. Jestliže

$$\det A = (p-1)^2 \cdot (p+1) \neq 0,$$

pak soustava jako homogenní má jediné řešení, a to triviální:  $(0, 0, 0)$ .



Jestliže  $p = 1$ , soustava se redukuje na jedinou rovnici  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ , proto má nekonečně mnoho řešení  $(-x_2 - x_3, x_2, x_3)$ , kde  $x_2, x_3$  jsou libovolně volitelné neznámé.

Pro  $p = -1$  se soustava redukuje na dvě homogenní rovnice zapsané do tabulky:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |   |
|-------|-------|-------|---|
| 1     | 1     | 1     | 0 |
| 1     | -1    | 1     | 0 |
| 1     | 1     | 1     | 0 |
| 0     | 1     | 0     | 0 |

řešením je nekonečně mnoho trojic  $(x_3, 0, -x_3)$ , kde  $x_3$  je libovolně volitelná neznámá.

c) Počítejme determinant soustavy  $\det A$ : máme  $\det A = p^2 \cdot (p - 1)$ .

Jestliže  $\det A \neq 0$ , co nastává pro  $p \neq 0, p \neq 1$ , pak soustava má jediné řešení  $(x_1, x_2, x_3)$ , které lze určit pomocí Cramerova pravidla:

$$x_1 = \frac{1}{p^2(p-1)} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & p-1 \\ 1 & p & 1 \\ 0 & 0 & p-1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$x_2 = \frac{1}{p^2(p-1)} \cdot \begin{vmatrix} 2p-1 & 0 & p-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ p-1 & 0 & p-1 \end{vmatrix} = \frac{1}{p},$$

$$x_3 = \frac{1}{p^2(p-1)} \cdot \begin{vmatrix} 2p-1 & 0 & 0 \\ 1 & p & 1 \\ p-1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Pro  $p = 0$  má soustava tvar určen tabulkou:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |   |
|-------|-------|-------|---|
| -1    | 0     | -1    | 0 |
| 1     | 0     | 1     | 1 |
| -1    | 0     | -1    | 0 |

První dvě rovnice nelze splnit současně, proto soustava nemá žádné řešení.

Pro  $p = 1$  lze soustavu zapsanou v tabulce upravit pomocí GEM a máme:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |   |
|-------|-------|-------|---|
| 1     | 0     | 0     | 0 |
| 1     | 1     | 1     | 1 |
| 0     | 0     | 0     | 0 |
| 1     | 0     | 0     | 0 |
| 0     | 1     | 1     | 1 |

Proto existuje nekonečně mnoho řešení,  $x_2 = -x_3$ ,  $x_3$  libovolné, tudíž jsou to všechny trojice tvaru  $(0, 1 - x_3, x_3)$ ,  $x_3$  libovolné reálné číslo. •

(Poznámka: Pro  $D = 0$  může mít konkrétní soustava nekonečně mnoho nebo žádné řešení; analýzu provedeme pomocí GEM!)