UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

Stanislav Trávníček

OPRAVA PÍSEMEK Z MATEMATIKY

Olomouc
2006

OBSAH

Poděkování:

Prvními čtenáři první verze skript byli:
Doc. RNDr. Josef Molnár, CSc., *RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.* a *Mgr. Emilie Znojilová*, kteří svými připomínkami velmi přispěli k opravě, doplnění a úpravě textu a obrázků. Za to jim patří můj dík.

Zvláště pak děkuji recenzentům, kterými byli
doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc. z Přírodovědecké fakulty MU v Brně a
doc. PhDr. Bohumil Novák, CSc. z Pedagogické fakulty UP v Olomouci,
jejichž podnětné připomínky mi velmi pomohly doladit text skript.

Stanislav Trávníček

Předmluva

Tato skripta jsou vytvořena jako příručka na pomoc budoucím učitelům a učitelkám matematiky, tedy pro studenty učitelství matematiky, ale i učitelé, kteří jsou již v praxi, zde jistě najdou rozumné podněty pro svou další práci. Na základě zkušeností generací učitelů matematiky i posledních poznatků didaktiky matematiky poskytují materiál k výuce „řemesla" (*Kuřina*, 2002) – opravy a vyhodnocení matematických písemek, ale rovněž umožňují čtenáři hlubší vhled do problematiky systémového okolí hlavního tématu. Dobře zadávané a správně opravené a vyhodnocené písemky jsou jedním z velmi efektivních prostředků získání informací o stavu výuky matematiky a o znalostech a dovednostech žáků..[1]

Výklad o problematice písemek z matematiky prováděný zde na základě jevové analýzy je zaměřen na učitele matematiky žáků od 6. roku školní docházky, ale jako pracovní materiál jsou z velké části voleny úlohy z výuky matematiky na čtyřletých gymnáziích. Postup při analýze, opravě a hodnocení písemek se ovšem při výuce matematiky ve vyšších třídách základní školy provádí v zásadě stejně, jen je situace většinou o něco jednodušší a hodnocené jevy v řešení mohou být subtilnější. Pro (budoucí) učitele základních škol může být při našem výběru úloh docela užitečné, když si zde připomenou a uvědomí – co a jak se z „jejich" látky využívá při dalším studiu žáků.

Skripta obsahují výběr z bohatého písemkového materiálu, který vznikal řadu let a podílelo se na něm několik desítek studentů učitelství v rámci semináře ze školské matematiky. Předložené písemky (je jich 64) vycházejí z praxe (včetně jejich zadání a žákovských chyb) a byly sem vybrány takové, které jsou z hlediska oprav typické, zajímavé a poučné.

Jak lze tuto příručku použít co nejúčinněji? Doporučujeme tento postup: Nejprve si pozorně projít kapitoly 0 a 1 a první tři části kapitoly 2. Pak postupně zpracovávat úlohy zadané ve 2.4.1, tj. každou úlohu vždy nejprve vyřešit a provést jevovou analýzu řešení, výsledek konfrontovat s podklady v kapitole 3 a při odlišnosti uvažovat o příčinách rozdílů. Nato si prohlédnout příslušnou písemku opravenou v kapitole 6 a přitom si přečíst komentář k opravě uvedený v kapitole 3.

U úloh ve 2.4.2 a 2.4.3 opět každou úlohu nejprve vyřešit, provést jevovou analýzu řešení, pořídit si kopii písemky a pak do kopie provést opravu písemky (včetně vyhodnocení a známky). Nakonec své řešení a analýzy porovnat s příslušnou částí v kapitolách 4 a 5, případně provést novou opravu do nové kopie písemky nebo do originálu ve skriptech.

Autor přeje čtenářům pracujícím s textem skript mnoho zdaru. Setkání s tolika žáky (jejich písemkami) nejrůznějších úrovní i povah bude pro čtenáře jistě docela zajímavé.

V Olomouci dne 1. 12. 2006

Autor

---

[1] Naše milé učitelky, i ty budoucí, jistě prominou, že pro stručnost nadále budeme psát jen *učitelé* matematiky – nebo *my*, i když se to vše stejně týká i učitelek; rovněž tak studenty a studentky středních škol, žáky i žákyně základních škol zde jednotně nazýváme *žáci*, i když jsme si vědomi edukačních rozdílů mezi chlapci a děvčaty (*Průcha*, 2005) i mezi žáky různého věku. Tyto rozdíly však pro naše téma nebudou příliš významné.

0. Úvod

0.1. Všeobecně o písemkách

0.1.1. Edukace v matematice

Tato publikace nemá v žádném případě suplovat učebnice didaktiky matematiky. Pro zařazení našeho tématu *oprava písemek* do správných souvislostí je však třeba zde v úvodu stručně připomenout některé obecné poznatky, z nichž dále vycházíme.

Cíle edukace (výchovy a vzdělání) v matematice jsou: Žák má

a) získat pro danou školu stanovené znalosti matematických pojmů a metod, schopnosti a zručnost je používat;

b) umět používat matematické modely při řešení problémů mimo matematiku;

c) zvládnout na dané úrovni přesné matematické myšlení a vyjadřování, pochopit a naučit se používat matematický přístup k problémům a situacím i mimo matematiku (kritičnost, racionální myšlení, exaktní práce, ad.).

Přitom od osvojení jeho vědomostí, dovedností a návyků se vyžaduje *úplnost*, *hloubka*, *uvědomělost* a *trvalost*.

Naplnění těchto cílů vede k matematické gramotnosti žáků (*Kuřina*, 2005) a proto je respektuje jak Rámcový vzdělávací program, tak každý Školní vzdělávací program, kde je stanoveno, co by měl znát absolvent školy a jak toho dosáhnout, tj. je vytvořen časový harmonogram postupných cílů i cíle konečného. V souladu s tím si učitel formuluje Tematické plány, podle nichž pak postupuje při výuce.

Připomeňme si zde ještě Niemierkovu taxonomii výukových cílů (*Chráska*, 1999):

- *zapamatování poznatků* (schopnost vybavit si fakta, neplést si je);
- *porozumění poznatkům* (dovést je formulovat i jinak, reagovat správně i na jinak položenou otázku);
- *používání vědomostí v typových situacích* (schopnost použít vědomosti v situacích, které již byly ve škole probrány);
- *používání vědomostí v problémových situacích* (schopnost použít vědomosti v situacích, které dosud nebyly ve škole řešeny);

Obsahové a didaktické stránce výkladu nového učiva se zpravidla věnuje hodně pozornosti, ale stejnou pozornost, ne-li větší, si zaslouží i ta druhá fáze výuky – procvičování a opakování učiva a prověřování vědomostí (*Vláčilová*, 1979). Připomeňme si v několika bodech, jaké úkoly se v této druhé fázi plní:

a) Naučit žáky algoritmům běžných výpočtů a jistým dovednostem z geometrie. Na těchto „řemeslných" znalostech lze pak založit hlubší (i tvůrčí) práci v matematice a její správné pochopení. Pěstovat smysl pro odhady výsledků.

b) Rozvíjet logické (matematické) myšlení žáků („objevování" matematiky, hledání více způsobů řešení, volba nejvhodnějšího řešení a její odůvodnění, vytvoření a odůvodnění algoritmů řešení, pěstování smyslu pro analogii ad.). Pěstovat přesné vyjadřování a správné zápisy využíváním matematické a logické symboliky a využívat je i k přiměřeným důkazovým úlohám.

c) Upevňovat vědomosti tím, že se upotřebí opakovaně a v různých situacích a že se spojováním nového i staršího učiva vytváří provázaný systém.

d) Ukazovat aplikace učiva v praxi nebo v jiných vědních oborech.

e) Cvičit potřebné praktické dovednosti (konstrukce rovinných obrazců, rýsování a čtení grafů, používání kalkulačky a počítačů, práce s knihou) a prostorovou představivost.

f) Učit žáky samostatně pracovat a přitom zvláštní pozornost věnovat jak nadaným, tak zaostávajícím žákům.

g) Prověřovat a hodnotit stav matematického vzdělání žáků a zpětnou vazbou vyvozovat důsledky pro další edukaci.

0.1.2. Didaktické testy

Mimořádně významným prostředkem pro plnění všech těchto bodů jsou písemné práce. Podle (*Gábor – Kopanev – Križalkovič*, 1989) je písemné zkoušení v matematice vůbec nejvýznamnější metodou kontroly dosažených výsledků. Je známa celá plejáda různých druhů didaktických testů a jejich teorie je nyní rozpracována do veliké hloubky, viz např. (*Chráska*, 1999), (*Gavora*, 2000).

Didaktické testy jsou zkoušky speciálně konstruované, splňující přesně stanovené požadavky, určené pro zjišťování vědomostí a výsledků edukační činnosti, vyhodnocovatelné kvantitativně i kvalitativně (*Gábor – Kopanev – Križalkovič*, 1989).

Podle (*Mikulčák*, 1970) lze pojem testu vysvětlit takto: Testy jsou vhodně sestavené písemné úlohy nebo zkoušky (popř. také celé soubory úkolů a zkoušek),. které slouží 1. jednak k zjišťování určitých duševních vlastností člověka, jako jsou pozornost, paměť, schopnosti, nadání, charakter apod. (testy psychologické) nebo 2. k ověřování, ovládá-li zkoušená osoba určité poznatky, dovednosti a návyky, které si měla osvojit učením (testy didaktické). Otázky, úkoly a výzvy v testu jsou přitom formulovány tak, že je na ně možno odpovědět velmi stručně, a to buď větou, slovem, číslem nebo značkou, což vede k jednoznačnosti odpovědi a usnadňuje vyhodnocování jednotlivých odpovědí a celého testu. Z odpovědí lze vyjádřit stupeň schopností nebo vědomostí zkoušené osoby číselně pomocí bodů, v procentech, známkou apod. Při *výběrových* odpovědích (v tzv. uzavřených testech) se žákům předkládá několik hotových výsledků, z nichž jeden je správný a ostatní chybné; žák má označit správný výsledek. Při odpovědích *tvořených* (v tzv. otevřených testech) doplňuje žák připravenou odpověď požadovanou značkou, symbolem, termínem nebo vypočteným číslem.

Studium a výroba testů dnes v řadě zemí probíhá s velkou intenzitou; hlavní ideou je racionalizace hodnocení žáků a získání všeobecně srovnatelných výsledků při širším použití testů. Pokud jde o podmínky učitelské praxe, nutno upozornit, že jejich *správné* sestavení je pro nepoučeného tvůrce obtížné (snad s výjimkou triviálních testů typu *Jak se jmenuje tento obrazec?*). Jedinec nemá takové možnosti jako firmy, které se výrobou testů zabývají –

je to pro ně i docela zajímavý byznys. Vcelku snadné vyhodnocování testů, viz též (*Kafková – Tlustý*, 2004) občas vede k jejich použití při některých zkouškách, ale ve výuce obvykle jen výjimečně. Dá se však předpokládat stálé zdokonalování externích testů a jejich lepší využitelnost i ve smyslu formativním.

Konference ICME v r. 1991 se zabývala i otázkou testů (*Burjan*, 1991) a kromě výčtu několika kladných stránek, z nichž jen dvě se dotýkají edukace, se v analýze objevuje i několik stránek záporných, z nichž uveďme „nutnost omezit se jen na určité typy úloh a tím rezignovat na testování některých významných abilit, nedocenění vyšších kognitivních činností". Mnoho matematiků se na využití testů ve výuce (zejména uzavřených) dívá dost skepticky, tedy jen jako na jakousi doplňkovou záležitost, která může postihnout některé stránky matematického vzdělání, ale ne všechny ty podstatné. Jejich přínos pro výuku matematiky považují za poměrně omezený, neboť testy poskytují učiteli mnohem méně informací než písemky (*Kabele*, 1979). Někdy vzniká otázka, která část matematického vzdělání se při těchto testech vlastně zjišťuje a hodnotí; proto se v (*Černý*, 2000) doporučuje kombinovat testy s výběrovou odpovědí s testy s tvořenou odpovědí. V podstatě platí, že test je splněn úspěšně, když všechny žákovy odpovědi (*výsledky*) jsou správné. Při práci s testy je proto pro žáky přínosem, mají-li předchozí zkušenosti s odhady výsledků matematických úloh.

Některé fakulty využívají u přijímacích zkoušek vstupní testy, zejména právě pro snadnost statistického zpracování výsledků při velkém množství uchazečů, a proto by se i s testy rozhodně měli vyučující i žáci v průběhu svých studií setkat a vyzkoušet si jejich použití. (Ovšem i při zadávání externích profesionálních testů by měl být učitel o podmínkách jejich použití a vyhodnocení poučen.) Je k tomu bohatá literatura, např. již citované (*Chráska*, 1999). Ze závěru této publikace citujme:

„Používání a zejména tvorba didaktických testů klade na učitele vysoké nároky. Autor testu by měl být dobrým odborníkem i pedagogem, měl by mít určitou kvalifikaci psychologickou, musí být orientován v oblasti statistických metod apod. Vynaložená námaha se však zanícenému učiteli vyplatí, protože testy mohou určitým způsobem zhmotnit výsledky jeho jinak jen velmi obtížně postižitelného úsilí a práce."

Zvláštním případem testů jsou počítačové matematické testy, při nichž příslušný program zadá žákovi úlohy k řešení a pak jeho výkon (žákem vložená řešení) vyhodnocuje (známkuje).

My se však *nebudeme zabývat didaktickými testy v plné šíři, ale jen jejich podmnožinou, kterou budeme nazývat písemky*, protože naším hlavním tématem je *oprava písemek* a běžné testy se prakticky neopravují, jen připravují a statisticky vyhodnocují.

0.1.3. Písemné práce v matematice – písemky a jejich význam

Za typickou školní písemku zpravidla považujeme tu část výuky, kde učitel zadá žákům úkoly k samostatnému písemnému vypracování, žáci úkoly řeší, zapíší svá řešení a výsledky a učitel pak opraví a vyhodnotí *průběh řešení* zadaných úloh a jejich *výsledky*. Přitom písemka sestává z jednoho nebo několika úloh. Dodejme, že i na běžné školní písemky můžeme pohlížet jako na zvláštní druh didaktických testů, a to jako na *nestandardizované kognitivní produkční testy s tvořenou odpovědí*. Pro srozumitelnost však budeme tyto pojmy rozlišovat a do pojmu *testy* zde zpravidla písemky zahrnovat nebudeme.

Které *společenské prvky* jsou s písemkami spojeny (*Burjan*, 1991):

1. *Iniciátor* – zpravidla vyučující, ale někdy též např. ředitel školy, inspektor nebo ministerstvo školství.
2. *Hodnocený subjekt* – kdo či co je hodnoceno, např. jednotliví žáci, třída, škola nebo učební program..
3. *Realizátor získání podkladů pro hodnocení* – např. iniciátor nebo i nějaká specializovaná firma.
4. *Hodnotící* – interní nebo externí.
5. *Adresát* – uživatel výsledného hodnocení, např. učitel, přijímací komise ad.
6. *Účel hodnocení* – stanoví zpravidla iniciátor, např.
   - zkvalitnění výuky (zpětná vazba pro učitele),
   - klasifikace žáka,
   - informace pro rodiče žáka,
   - přijetí nebo nepřijetí žáka na školu, jeho zařazení do specializované třídy nebo udělení dokladu o vykonání zkoušky,
   - posouzení kvality učitele, školy nebo učebního programu.
7. *Důsledky* – rady žákovi, klasifikace žáka, jeho přijetí na školu, rady rodičům, korekce výuky nebo i vzdělávacího programu apod.

Při zjišťování efektivnosti výuky konfrontujeme dosažené výsledky s cíli výuky dle aktuální osnovy výuky a písemky jsou jednou z metod zpětné vazeby, jak tuto konfrontaci provádět. Samozřejmě nestačí psát jen nějaké závěrečné (sumativní) písemky, nejcennější je prověřování a hodnocení výsledků i písemkami již v průběhu výuky (formativní písemky), kdy je ještě možno reagovat na současný stav a zařizovat nápravu.

Při dobré přípravě a využití jsou písemky efektivní po věcné i časové stránce. Poskytují učiteli trvalý a navzájem srovnatelný materiál, který charakterizuje stav znalostí všech žáků, neboť se žákům předkládají úkoly za týchž podmínek, ale umožňují i posoudit vývoj matematické úrovně třídy jako celku i jednotlivých žáků – jak trvale a uvědoměle ovládli učivo z poslední doby i učivo dřívější, jak správně a racionálně dovedou počítat, dělat úpravy výrazů, používat kalkulačku a tabulky, provádět konstrukce, znázorňovat údaje a vztahy, jak chápou souvislosti mezi jednotlivými matematickými tématy, jak dovedou své znalosti uplatnit při samostatném řešení matematických úloh, správně formulovat své myšlenky, matematicky se vyjadřovat (dělat správné matematické zápisy) a také, jak jsou pečliví. Na druhé straně písemky učiteli rovněž ukazují, jak efektivní je jeho výuka, v čem ano, v čem ne, jak se mu podařilo posoudit individualitu třídy i jednotlivých žáků a nakolik k nim zvolil vhodný přístup (*Šedivý*, 1977). Na základě poznatků z písemek může vyučující korigovat své vzdělávací záměry a didaktické postupy ve třídě jako celku, a také sledovat a individuálně ovlivňovat výkony jednotlivých žáků.

Popsaný význam písemek pro výuku však není jediným jejich úkolem. Jejich další úkoly lze zformulovat takto:

a) Žáci by výukou matematiky měli získat ucelené matematické vzdělání svého stupně a typu školy. Z hlediska budoucího užití matematiky v praxi jsou písemky pro žáky logickou a systémovou součástí výuky, neboť charakter práce matematika i uživatele matematiky má především písemnou formu (*Šmida*, 1979). Až žáci přijdou do praxe, pokud se setkají s problémy úměrnými jejich vzdělání a řešitelnými užitím matematiky (počítání, grafika, atd.), budou je řešit často sami a ponejvíce písemně s užitím přiměřené techniky. Proto lze písemky a vůbec samostatné práce považovat i za trénink správného matematického přístupu k písemnému řešení různých problémů a za trénink v obratnosti písemně či graficky se v matematice vyjadřovat.

b) Žáci, kteří budou dále studovat na vyšším typu školy nejen matematiku, ale i další obory, kde se matematika využívá, budou potřebovat kromě ucelených matematických znalostí i určitou obratnost a zkušenost se samostatným písemným řešením i teoretických problémů. Je proto správné nedívat se ani na trénink rutinních výpočtů s despektem, pokud to není jediná matematika, kterou přibližujeme žákům. Matematická praxe je základ, na kterém lze rozvíjet matematické (tedy i tvůrčí) myšlení, stejně jako je řemeslo základem umění.

c) Vyšší stupně škol si často vybírají své studenty a žáky pomocí přijímacích zkoušek. Proto výuka matematiky by měla prostřednictvím písemek uvědoměle připravit žáky i na tento závažný životní krok. Písemné přijímací zkoušky sestávají zpravidla z několika úloh nebo testových úloh, které se liší svou náročností. Bývají tu úlohy na základní znalosti, úlohy standardní, ale o něco obtížnější, a také úloha náročnější (ale neobsahující žádný trik, takže výborně připravený žák by si s ní měl poradit i za poněkud stresující situace písemné zkoušky). Úlohy jsou voleny zpravidla tak, aby řešení nezabralo příliš mnoho času a mohly se na nich ukázat znalosti i kvalita myšlení žáků, jejich „matematická kultura". Ta závisí mnohem víc na způsobu uvažování než na hromadění pojmů, často zvládnutých jen formálně a mechanicky, takže je žáci neumějí používat a brzy je zapomínají. Co požadují vyšší stupně od nižších: aby měli žáci učivo své úrovně zažité, tj. aby si je důkladně promysleli, pochopili souvislosti a uměli poznané v nejrůznějších souvislostech aplikovat. Mnohem cennější je kvalita poznatků než jejich velký a nezvládnutý rozsah. Písemky v „kritických" ročnících (tj. po nichž žáky čekají přijímací zkoušky) by se tak měly přizpůsobit i požadavkům navazujících stupňů a uvědoměle na ně trénovat žáky. Učitel by také měl sledovat didaktický časopis, kde bývají zpracována vyhodnocení s poukazem na nejčastější chyby a nedostatky uchazečů (*Novák*, 1989).

Vyskytovala se i kritika toho, že se žáci jednostranně připravují k přijímacím zkouškám (tj. např. řeší se jen takové úlohy, jaké bývají u zkoušek) místo toho, aby se uzavíralo jejich vzdělání z hlediska profilu absolventa, že dostat své absolventy na vyšší typ školy je zúžený cíl. Jde však patrně jen o nedorozumění. Cestou za abstraktními výchovnými a vzdělávacími cíli matematiky jako vyučovacího předmětu nemůžeme pominout konkrétní individuální potřeby (rodičů a) žáků. Přitom samozřejmě přijímací zkoušky na vyšší typ školy musí ctít profil absolventa toho nižšího typu, jinak by šlo o zásadní pochybení toho vyššího typu školy, takže obě záležitosti jsou ve shodě.

Někdy jsou vůči písemkám námitky, že u žáků působí určitý stres, nervozitu, žáci jsou neklidní a v tomto stavu mysli dělají hodně zbytečných chyb. Ono to však závisí i na osobnosti učitele, jaké prostředí pro písemku připraví a vytvoří, jaký výběr úloh provede, za jakých podmínek přistoupí k psaní písemky, jak pojme opravu písemek. Učitel je přitom sice determinován svými osobními kvalitami a názory, ale také bere v úvahu stav třídy – ví, kde si jakou písemku může dovolit. Učitel, který zavede písemné práce jako trvalou a pravidelnou součást výuky (např. jednou za 1 – 2 týdny), jako jednu z forem samostatné práce, odstraní u žáků zkouškovou nervozitu a zbavuje je strachu z písemek, neboť písemky tím ztrácejí svou výlučnost. Je velmi vhodné, když učitel žákům opakovaně poradí, jak se učit matematiku a jak se připravovat na písemky. K tomu existují rady i v literatuře, viz např. (*Denig-Helmsová. – Konnertz,*1997). Navíc ne každou písemku je třeba známkovat, je však vhodné kladně zhodnotit případný dobrý výkon žáka v matematice slabšího, nešetřit tedy pochvalou, když žák projeví snahu a zlepšení, i to přispívá k lepší pohodě. Žáci by si měli také uvědomit, že v matematice nejde jen o „matematické nadání" (což je jakási směs různých genetických předpokladů) – někdo je má větší a někdo menší, ale také o to, co se svými předpoklady udělají, jak je dovedou využít a svou prací své matematické schopnosti rozšiřovat, prohlubovat a zkvalitňovat; i matematika chce práci a její výsledky se pak projeví ve znalostech a dovednostech žáka a tedy i při hodnocení jeho výkonu.

Všimněme si ještě otázky objektivnosti hodnocení. Různí učitelé mají různé přístupy, takže se zpravidla může dosáhnout objektivnosti hodnocení úrovně výsledků výuky v rámci dané třídy, ale už méně v rámci dané školy nebo dokonce mezi různými školami. Jednotné vnější sumativní testy by měly umožnit objektivní hodnocení a srovnávání, ale jejich široké použití v průběhu edukačního procesu není příliš proveditelné, protože každá škola může mít jiný vzdělávací program a probírat témata v jiném pořadí než školy jiné.

Existují však určité objektivně zjištěné poznatky, které zde připomeneme a které by si učitel měl uvědomovat. Předně by učitel měl mít (a dalším vzděláváním si stále doplňovat a zlepšovat) tyto kompetence:

– dobré odborné znalosti (důkladně zvládnutou matematiku jako učební předmět),

– solidní pedagogicko – psychologické znalosti,

– znalosti o žácích a o tom, co ovlivňuje jejich učební výsledky.

Subjektivní faktory se však uplatňují i na straně žáků, např. někteří žáci potřebují více času k porozumění textu úlohy, jiní jsou méně zruční při rýsování, apod. Písemky vyžadují značné vypětí sil žáků, neboť při nich pracují samostatně a bez pomoci, ale záleží na způsobu výuky matematiky, abychom z matematických písemek neudělali neoblíbené strašáky, a na pedagogickém taktu a citlivosti učitele, aby tyto subjektivní faktory dovedl správně posoudit a vyhodnotit.

K postavení písemek ve výuce však připomeňme, že výsledky písemek nelze přeceňovat ani absolutizovat. Vyhodnocením žákovy písemky nehodnotíme, jak žák ovládá matematiku, ale jen to, jaký výkon podal toho a toho dne při písemce na to a to téma. Přitom výkon v písemce nemusí ani vždy zcela odpovídat schopnostem žáka například proto, že mohl zapůsobit vliv okamžitých subjektivních faktorů, které záporně (někdy i kladně) vychýlily jeho výkon na písemce. Jedna výhrada proti přeceňování písemek jako ukazatele žákových matematických znalostí je zásadní: žádná písemka nevystihuje komplexně učební cíle matematiky jako školního předmětu. Běžná matematická písemka se z hlediska obecných cílů edukace v matematice (str. 6) zabývá téměř výhradně jen vybranými tématy z bodu a) a jen minimálně z b). Posouzení úspěšnosti výuky a matematické úrovně musí učitel získat dalšími metodami; patří mezi ně vedle ústního zkoušení zejména soustavné pozorování žáků (učitel si všímá schopností jednotlivých žáků, jejich přípravy, pracovního nasazení, aktivity, zběhlosti při počítání a rýsování, tendencí i odchylek, úspěšnosti v samostatných pracích). Písemky jsou tedy jen součástí skupiny metod, jak hodnotit úspěšnost výuky a matematickou úroveň žáků.

Zabýváme se dále hlavně *opravou písemek* a problémy s tím souvisejícími. Pro úspěšnost písemky se musí učitel zaměřit na dva body: dobře ji zadat a dobře ji vyhodnotit. Dobře vyhodnotit lze ovšem jen dobře opravenou písemku – špatně opravená písemka může její výsledky zcela znehodnotit. V této oblasti nacházíme hodně neinformovanosti a živelnosti, a proto chce tento spisek poradit a pomoci těm, kteří o radu a pomoc stojí. Dodejme ještě, že vedení některých škol, která „z finančních důvodů" nezajišťují odběr a využívání odborného didaktického časopisu, jako je Matematika-fyzika-informatika, šetří na nepravém místě, neboť v něm se čtenáři seznamují nejen s přístupy k výuce jednotlivých témat, ale též s mnoha dobrými nápady a zkušenostmi svých kolegů na jiných školách. Velmi málo je pak využíváno možností lokálního setkávání učitelů matematiky a výměna jejich zkušeností na tematických besedách nebo na odborných didaktických seminářích. Celostátní akce jsou významné, ale ty mají trochu jiné poslání a zasahují zpravidla jen nepříliš širokou vrstvu učitelské veřejnosti. Pokud se situace změní, autor rád poslední tři souvětí opraví.

Součástí studia učitelství matematiky je naučit se písemky zadávat, opravovat a hodnotit a získat k tomu základní teoretické poznatky i přiměřenou praxi; z tohoto pohledu o technologii oprav matematických písemek pojednáme. Předložené teze mohou být užitečné nejen pro studenty a ty učitele, kteří svůj přístup k písemkám teprve hledají, ale i pro ty, kteří již považují psaní a opravy písemek za rutinu, nad níž není třeba přemýšlet.

Začínající učitel by měl vycházet z poznatků didaktické teorie a ze zkušeností jiných pedagogů – zde je hojně připomínáme, viz např. (*Liška*, 1962) a další – postupně získávat vlastní zkušenosti a vytvořit si svůj přístup nejvíc vyhovující jeho osobnosti a cílům profese, přístup stále otevřený novým poznatkům. I didaktické teorie jsou ovšem zkrystalizované poznatky a zkušenosti všech generací učitelů i teoretiků. Takto je tedy třeba chápat i všechno to, co dále uvádíme.

0.2. Úroveň úloh

Při zavádění nového pojmu (operace) probíhá výuka postupně tak, aby osvojovací proces měl svou logiku. Žáci zpravidla projdou nějakou propedeutikou pojmu, seznámí se s pojmem, uvědomí si, oč jde a k čemu to je, učí se ho odlišovat od jiných pojmů, učí se s ním zacházet a učí se ho aplikovat. Jednotlivým úrovním osvojovacího procesu odpovídají i *úrovňové kategorie úloh*.

1. *Prosté rozlišení objektů*

Úloha 0.2.1. (*K pojmu racionální číslo*)

Je dána množina

$$\boldsymbol{M} = \{3{,}14;\ \sqrt{2};\ \pi;\ -\sqrt{3{,}24};\ -0{,}3;\ \sin 45°;\ -6;\ \mathrm{tg}\ 45°;\ -\frac{3}{4};\ 0\}.$$

Zapište podmnožinu $\boldsymbol{M}_1$ všech racionálních čísel množiny $\boldsymbol{M}$.

2. ***Aktivní zacházení s pojmem***

V této etapě se používají jednoduchá cvičení (hlavně s jednou novou operací, s jedním novým vzorcem), která obsahují konkrétní příznaky a vlastnosti daného pojmu nebo pravidla. Přitom se pestrosti dosahuje širokou variabilitou nepodstatných příznaků a forem zadání.

Úloha 0.2.2. (*K pojmu přímka daná dvěma body*)

Jsou dány body $A[-2; 3]$, $B[2; 5]$; napište obecnou rovnici přímky AB.

Žáci nejprve sledují vzorový příklad – frontální předvádění jeho řešení – a pak řeší úlohy samostatně. V další etapě zapojují nový pojem do systému, tj. hledají souvislosti s jinými pojmy a odlišnosti, zjišťují, kdy který pojem použít.

3. ***Zapojení pojmu do systému souvisejících pojmů***

Úloha 0.2.3. (*K úvodním pojmům analytické geometrie*)
Je dán trojúhelník ABC, $A[-2{,}5; -1]$, $B[3{,}5; 1]$, $C[1{,}5; 5]$. Zapište obecné rovnice těžnic trojúhelníku, zjistěte souřadnice těžiště a trojúhelník s těžnicemi graficky znázorněte.

4. ***Použití pojmu v jiných částech matematiky a při řešení úloh z praxe***

Samostatné činnosti s množinou nových pojmů vstřebaných už do systému žákovských znalostí (řešení na základě vlastního plánu řešení).

Úloha 0.2.4. (*K lineárním funkcím*)

V 6 hodin ráno byla venkovní teplota –5 °C, v poledne 3 °C. Za předpokladu, že teplota rostla rovnoměrně, vypočtěte, v kolik hodin bylo 0 °C a jaká teplota byla v 7.45 hodin. Růst teploty graficky znázorněte.

Studium libovolného pojmu nebo pravidla jen ve 2. úrovni, tj. izolovaně od jiných pojmů a pravidel, nemůže zabezpečit jeho osvojení. V lepším případě může vést k vytvoření mechanického návyku řešení daného typu úlohy. Psaní písemek v první a ve druhé etapě výuky má proto jen omezený význam. Každý zkušený učitel ví, že iluze, že žáci si už osvojili učivo, která vzniká při písemkách o izolovaně odučených pravidlech (vzorcích, operacích), ihned mizí, když zadáme úlohy, v nichž se tato pravidla proplétají. Žáci se buď přestanou orientovat v situaci a nevidí možnosti, jak použít naučená pravidla, nebo začnou směšovat jednotlivá pravidla a pojmy. Odsud je zřejmá nutnost třetí etapy, kdy se ujasní shody a rozdíly mezi pojmy a naleznou se ty vztahy mezi nimi, které spojují pojmy v jednotný systém.

Objevují se tu tak dvě stránky *zaměření žáků* (na určitý typ úloh). Na jedné straně pomáhá, žáci se pohybují myšlenkově v menším prostoru, který zvládají a úlohy daného zaměření jim nedělají problémy. Např. při probírání kvadratických rovnic a po jejich procvičení jsou typické úlohy většinou dobře řešeny. Ale vybočíme-li z typu, ukáže se, že takto jednoznačně zaměřená výuka vedla do značné míry k formalizmu, že nestačí k dobrému pochopení a správnému používání znalostí. Proto je tak důležité řešit úlohy oněch dvou vyšších etap.

Práce na cvičeních třetí etapy, které mají větší pestrost a ve kterých žák musí používat kombinovaně různá pravidla (vzorce, operace), podstatně přispívá k rozvoji logického myšlení – ke schopnosti analýzy a syntézy, abstrakce a zobecňování. To pak umožní postoupit až do čtvrté etapy, v níž by se znalosti měly stát univerzální, tj. fungovat bez ohledu na to, co se právě probírá a jakou matematickou úlohu máme řešit. Mělo by to vést k dosažení nejcennějšího stavu, kdy si na základě formulované úlohy dovede žák sám vybrat metodu řešení.

0.3. Jevová analýza

Učitel nedostatečně odborně a metodicky vzdělaný má zpravidla velké problémy při hodnocení a klasifikaci písemek. I když je třeba sám subjektivně nepociťuje, objektivně může dělat docela hrubé chyby se závažnými výchovnými následky. Když hodnocení neodpovídá výkonu, když učitel nerozlišuje podstatné od nepodstatného, pak se žák nedovede zorientovat, zda látku ovládá, resp. může mít pocit křivdy s následnou nechutí k matematice. Ani učitel pak nepozná, jestli látku odučil dobře a co vlastně žáci ovládají nebo neovládají. Proto je potřebné znát metody, jak přistupovat k opravám písemek.

Výcvik oprav písemek zde zakládáme na *jevové analýze* úloh. Ta spočívá v tom, že při analýze řešení stanovíme jednotlivé jevy (podstatné pro řešení), jejichž vyřešení (tj. když je žáci zvládnou) budeme kladně hodnotit a přidělíme jim váhy (body, procenta). Je tedy samozřejmé, že před jevovou analýzou si musíme úlohu vyřešit metodami, jejichž použití očekáváme od žáků. Za *jev* považujeme každou provedenou operaci, použití algoritmu nebo vzorce, formulaci výsledku, obrázek rozboru, popis konstrukce, atd. U složitějších středoškolských úloh by tak mohl být počet jevů u jediné úlohy příliš veliký a vedlo by to k nepřehlednosti opravy, a proto některé příbuzné (blízké, bezprostředně navazující) jevy můžeme sdružovat a takové sdružené jevy zde budeme též nazývat *hodnocené kroky*. Volba váhy hodnoceného kroku musí být ve spektru všech hodnocených kroků přiměřená. Vhodně určenou vahou kroků můžeme někdy závažnost některých jevů v písemce zdůraznit (ale pak bychom to měli žákům říci) a některé jevy, jejichž znalost je už všeobecná, hodnotit méně.

Prakticky půjde v každé úloze zpravidla vždy o 3 – 6 hodnocených kroků a každý krok bude hodnocen zpravidla 1 – 4 body. V celém dalším našem textu však budeme jako výchozí váhu volit procenta, kdy jednotlivé kroky jsou hodnoceny tak, že správné vyřešení celé úlohy znamená zisk 100 %. Volba procent je *univerzální*, neboť procenta lze podle situace lehce přepočítat na body, a to podle toho, kolik bodů chceme přidělit správně vyřešené úloze.

V kapitolách 3 – 5 se budeme jevové analýze obsáhle věnovat. V tomto úvodu ukážeme jako ilustraci jen dva mezní případy – analýzu úloh jednodušších a úlohy složitější. Pro mladší žáky (na základní škole) provádíme jevovou analýzu jemnější. Např. následující úlohu, která by byla na gymnáziu jediným hodnoceným krokem, zde rozložíme na 4 jevy.

Úloha 0.3.1.

Řešte rovnici a proveďte zkoušku: $3(y-1)-2 = y-9$.

Hodnocené jevy:

- Úprava levé strany. 25 %
- Vyjádření 2y. 25 %
- Výpočet y. 25 %
- Zkouška. 25 %

A ještě jedna úloha základní úrovně:

Úloha 0.3.2.

Válec má průměr podstavy 2 dm a výšku 4 dm. Vypočtěte jeho objem.

Hodnocené jevy:

- Určení poloměru. 15 %
- Správný vzorec pro objem. 25 %
- Výpočet objemu. 40 %
- Správná odpověď s jednotkou. 20 %

Nyní uveďme ukázku úlohy ze školní matematické soutěže, její řešení a stanovení hodnocených kroků.

Úloha 0.3.3.

Je dáno nezáporné reálné číslo a. Rozhodněte, které z čísel

$$\left(a+\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{a}\right),\ \left(a+\sqrt{a}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)$$

je větší. Kdy platí rovnost?

Řešení:

Neznámou je zde relační znak a proto lze problém řešit jako relační výrokovou formu:

$$\left(a+\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{a}\right)\ \rho\ \left(a+\sqrt{a}\right)\left(2+\sqrt{2}\right),$$

kde $\rho \in \{<, \leq, =, >, \geq\}$ je neznámá, viz (*Trávníček*, 1999).

Protože u žáků nepředpokládáme, že by znali pojem relační výrokové formy, převede se problém na důkazovou úlohu, kdy mezi zadané výrazy vložíme rozumně zdůvodněný relační znak. Např. pro $a = 0$ je 1. výraz roven $2\sqrt{2}$ a druhý je roven 0, takže vložíme znak $\geq$. Takže máme novou úlohu:

Dokažte, že pro všechna reálná nezáporná a platí

$$\left(a+\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{a}\right) \geq \left(a+\sqrt{a}\right)\left(2+\sqrt{2}\right);$$

kdy platí rovnost?

Výrazy roznásobíme

$$2a + a\sqrt{a} + 2\sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{a} \geq 2a + a\sqrt{2} + 2\sqrt{a} + \sqrt{2}\sqrt{a},$$

nerovnost upravíme

$$a\sqrt{a} + 2\sqrt{2} - a\sqrt{2} - 2\sqrt{a} \geq 0,$$

a levou stranu rozložíme na součin

$$a\sqrt{a} - a\sqrt{2} - 2\sqrt{a} + 2\sqrt{2} \geq 0,$$

$$a\left(\sqrt{a}-\sqrt{2}\right) - 2\left(\sqrt{a}-\sqrt{2}\right) \geq 0,$$

$$(a-2)\left(\sqrt{a}-\sqrt{2}\right) \geq 0.$$

Diskuse: Pro $a > 2$ je na levé straně součin kladných čísel, takže je splněna ostrá nerovnost;

pro $a < 2$ je na levé straně součin dvou záporných čísel, takže je rovněž splněna ostrá nerovnost;

pro $a = 2$ nastává rovnost.

Závěr: Vzhledem k tomu že byly prováděny jen ekvivalentní úpravy, platí stejné závěry i pro výchozí nerovnost, tedy:

Pro $a \neq 2$ je první zadané číslo větší než druhé, pro $a = 2$ jsou si zadaná čísla rovna.

□

Volba hodnocených kroků a jejich vah může být u této úlohy provedena např. takto:

- Převedení úlohy na důkaz nerovnosti 10 %.
- Roznásobení a úprava 20 %.
- Rozklad na součin 30 %.
- Diskuse 30 %.
- Závěr 10 %.

Přiřazení vah jednotlivým krokům, tj. kolik % lze přiznat za který krok, to záleží na celkovém pojetí bodování soutěže, ovšem než řešitel překoná rozhodující krok řešení (zde je to rozklad na součin), může získat nějaká procenta, ale mělo by to být méně než 50 %.

Soutěžní úlohy domácího kola by neměly obsahovat větší formální nedostatky, jako jsou např. chybějící závorky, nepořádně zapsané zlomky a odmocniny, nepřehledné zápisy, nezdařené obrázky a jejich nevyhovující popis, apod., ale také by tu neměl chybět žákův komentář v místě řešení, kde je nezbytný. V dalších kolech se při hodnocení úloh už některé formální nedostatky zpravidla *částečně* tolerují.

Také u „normálních" školních písemek můžeme požadovat jistou úroveň úpravy a formálních zápisů. Proto při hodnocení řešení lze při žákově *soustavných* nedostatcích a pochybeních ubrat nějaká % při oceňování příslušného hodnoceného kroku. Lze však postupovat také tak, že do analýzy zařadíme jev (hodnocený krok) „formální úroveň" nebo „přesnost a úhlednost rýsování" apod. a předepíšeme mu nějakou váhu (např. 5 – 10 %). Kdybychom formální závady a nepořádnost zcela tolerovali, nevedlo by to ke zvyšování úrovně matematického vyjadřování, ke snaze odstranit takové chyby a jejich příčiny, nemotivovalo by to žáky napravit svou nedbalost, nepozornost, neestetičnost písemného projevu apod. Navíc formální chyby mohou přerůstat i v chyby věcné. Učitelé někdy u složitějších úloh tolerují i drobné věcné chyby (chybný součet dvou čísel, drobná chyba při úpravě zlomku, aj.), ale to lze také jen do určité míry. Je třeba později zjistit, zda šlo o omyl nebo neznalost; v písemce můžeme reagovat ubráním % za příslušný hodnocený krok.

Při bodování úlohy záleží na tom, kolik bodů je přiřazeno dané úloze; např. kdyby to v úloze 0.3.3 bylo 8 bodů, mohli bychom volit rozdělení: 1 – 2 – 2 – 2 – 1 (tj. zaokrouhlíme součiny $8 \cdot 0{,}1$, $8 \cdot 0{,}2$, $8 \cdot 0{,}3$, $8 \cdot 0{,}3$, $8 \cdot 0{,}1$), při 7 bodech: 1 – 1 – 2 – 2 – 1 (zaokrouhlili jsme součiny $7 \cdot 0{,}1$, $7 \cdot 0{,}2$, $7 \cdot 0{,}3$, $7 \cdot 0{,}3$, $7 \cdot 0{,}1$) apod. Při menším počtu bodů můžeme některé kroky sdružit, takže při celkových 6 bodech můžeme vzít 2 – 2 – 2 (kde jsou sdruženy kroky 1 a 2 a kroky 4 a 5, tedy zaokrouhlíme $6 \cdot 0{,}3$, $6 \cdot 0{,}3$, $6 \cdot 0{,}4$), atd. Rozdělení bodů nemůže ovšem přesně sledovat uvedená procenta, ale záleží zde na odborném posouzení učitele.

0.4. Oprava písemek a didaktické principy

Když učíme žáky řešit úlohy, chceme, aby jejich řešení mělo patřičnou úroveň a potřebné náležitosti. Proto sami musíme jít příkladem a pak můžeme požadovat a očekávat, že v určité míře se náš vzorový postup a pěkné zápisy odrazí i v žákovských řešeních. U písemek lze některá „provinění" (písmo, úpravu, nedostatečné vysvětlení apod.) zčásti tolerovat, ale u neklasifikovaných samostatných prací a zejména u domácích úkolů můžeme být náročnější. Pojednejme nyní o tom, co se má při posuzování a opravě písemek sledovat v souladu s didaktickými principy:

(1) *Správnost* z matematicko-logického hlediska, a to nejen správnost výsledku, ale i správnost postupu i správnost zápisů, systematičnost postupu řešení.

(2) *Porozumění* látce; chceme postihnout, zda žák učivo pouze umí, naučil se je, nebo zda mu také rozumí. Je proto třeba volit občas úlohy s větší entropií (neurčitostí), aby odpověď obsahovala více informace, aby tedy žák musel nad řešením více přemýšlet a svou odpovědí prokázal, že věci rozumí. Např. požadovat sestrojení trojúhelníku, je-li dáno a, v_a, t_a (pro konstrukci si délky vhodně volit), kde žák musí uvažovat nad podmínkami řešitelnosti a počtem řešení.

Opakem porozumění jsou formální znalosti, kdy si žák zapamatuje jakési vnější náležitosti a dovede určité postupy reprodukovat (např. řešení kvadratické rovnice vzorcem), aniž by jim porozuměl. Pak stačí jen malá změna situace nebo zadání a takový žák si už neporadí. Opět tu vystupuje do popředí nutnost správného osvojení matematického jazyka, tj. nejen syntaxe, ale i sémantiky. Formálnost postupu žáka svědčí o tom, že se matematiku učí stejně jako třeba dějepis a že si tak často vlastně ani neuvědomuje, oč tu jde.

(3) *Aktivita* žáků je při písemce podnícena už samotným faktem, že se písemka píše, je třeba jen dbát, aby se tato aktivita nezvrhla špatným směrem (shánění řešení u spolužáků). Ale jde tu ještě o jinou aktivitu, aktivitu v užším smyslu, tj. aby se u žáků aktivizovala myšlenková činnost specifická pro matematiku. To ovšem při opravě zjistíme jen nepřímo podle úrovně podaného řešení.

(4) *Názornost* výuky by se měla u písemek projevit tím, že i řešení úloh budou žáci podávat názorně a že prokáží, že mají o látce správnou představu. Konstrukční úlohy přímo vy-

žadují vyhotovení náčrtku – obrázku pro rozbor a pak konstrukci požadovaného obrazce. Také u polohových a metrických úloh v planimetrii i stereometrii by měli žáci umět vhodně graficky znázornit zadání, případně i řešení. S grafy, náčrtky, schématy a tabulkami se setkáme rovněž v analytické geometrii, u komplexní proměnné, u funkcí, u některých slovních úloh, při grafickém řešení rovnic a nerovnic a jejich soustav, ve statistice, u derivací a integrálů, tedy velmi často. Při opravě písemek tak můžeme posoudit, zda je žákům blízký geometrický význam různých pojmů a vztahů, jak jsou na tom s prostorovou představivostí a s dovedností vyjádřit se graficky. Pojem názornosti lze však vztáhnout i na logickou stránku řešení úloh – mít řádnou představu o významu logických symbolů, např. je otázka, zda žák ihned vidí význam např. tohoto výroku o posloupnosti: $\exists K \in \boldsymbol{R}\ \forall n \in \boldsymbol{N}: (a_n < a_{n+1}) \wedge (a_n < K)$ a naopak, zda takový zápis na základě slovního vyjádření dovede vytvořit. Podobně lze do problematiky názornosti zahrnout i vytváření matematického modelu reálné situace.

(5) *Trvalost vědomostí* částečně pozná učitel při písemce, pokud řešená úloha zasáhla i do starší látky. Takové úlohy je jistě třeba do písemek zařazovat cílevědomě vzhledem k platnosti psychologického poznatku, že zapamatování učiva závisí do značné míry na jeho opakování. Přitom opakování je nejúčinnější a nejvíce přispívá k zapamatování učiva právě tehdy, když spojuje starší témata s látkou právě probíranou do jednoho systému.

(6) *Individuální přístup.* Písemky poskytují velmi dobrou příležitost k poznání individuality jednotlivých žáků. Někdo látku chápe rychleji, jiný pomaleji, někdo do hloubky, jiný jen povrchně, někdo potřebuje hodně procvičovat a poznat věc z různých stran, jinému stačí jeden – dva příklady, někdo myslí a počítá rychle, jinému to chvíli trvá, apod. Je tu velký rozptyl individuálních přístupů a potřeb a také schopností podat dobrý písemný výkon. Proto i známky z písemek musíme brát s ohledem na individualitu žáka. Podle písemek často zřetelně poznáme, který žák potřebuje jakou pomoc.

Žáci, kteří bývají s písemkou brzy hotovi a mají vše správně, potřebují řešit obtížnější úlohy, třeba jako dobrovolné, aby neztratili zájem o matematiku a aby po matematické stránce dále individuálně rostli. Při písemkách se současně řeší i praktická otázka, aby tito žáci po skončení své práce nerušili ostatní.

Jak už jsme připomněli v 0.1, jsou žáci vzhledem k různým subjektivním faktorům různí. Žáci, kteří na písemce dobře počítají rutinní úlohy, ale mají problémy s matematickým myšlením, potřebují jako pomoc soustavné zadávání úloh, které se v něčem odlišují od běžných rutinních úloh, ale jen tak, aby tito žáci měli šanci uspět při jejich řešení, aby se naučili přemýšlet nad zadáním a postupně tak získávali návyky matematického myšlení.

Žáci, kteří počítají dobře, ale pomalu, potřebují propočítávat více úloh, aby nabyli více praxe a zkušeností s písemným projevem.

U žáků, kteří počítají špatně, je třeba zjistit důvod jejich neúspěchů (např. absence pro nemoc, nepochopení látky, špatná pracovní morálka) a podle okolností jim pomoci radou nebo mimořádnými konzultacemi, nebo je domluvou či jinak přimět k řádné práci v matematice.

Písemka je náročná nejen pro žáky, ale i pro učitele. Připomeňme si zde, že učitel je rozhodujícím činitelem kvality vyučování (*Hejný*, 2005). Jeho vztah k žákům a k matematice, jeho tvořivost, potřeba pracovat na sobě, dovednost posuzovat své vlastní pedagogické jednání a umění podle situace je promyšleně korigovat, na tom všem spočívá kvalita jeho práce. Při písemkách se plně uplatní učitelova kompetence a všechny jeho *klíčové dovednosti* (*Kyriacou*, 1996). Zformulujme je nyní přehledně a stručně, protože v souvislosti s písemkami o nich konkrétněji pojednáme v paragrafech 1. kapitoly.

1. *Plánování a příprava.* Učitel musí písemku správně naplánovat časově i věcně a pečlivě ji připravit, aby splnila svůj účel.
2. *Realizace vyučovací jednotky.* Připravenou písemku zadá a opraví.
3. *Řízení vyučovací jednotky.* Zajistí hladký průběh práce na písemce.
4. *Klima třídy.* Pro práci zabezpečí potřebné vhodné klima.
5. *Kázeň.* Dbá na klidnou práci, projevy nekázně utlumí.
6. *Hodnocení prospěchu žáků.* Písemky vyhodnotí a hodnocení probere se svými žáky.
7. *Reflexe vlastní práce a evaluace.* Z výsledků písemky vyvodí závěry i pro svou další práci ve směru jejího zkvalitňování.

1. Písemky jako způsob komunikace

1.1. Druhy písemek

Písemek je několik druhů a každý z nich má v matematickém vzdělávání svou funkci (i testy, těmi se však zde nezabýváme). Celkově (podle účelu, úrovně, zaměření tematiky a způsobu použití) se používají zejména dále uvedené druhy písemek:

1⁰ ***Krátké kontrolní písemky*** (zvané též ***prověrky,*** v trvání 5 – 15 minut); nejčastěji bývají dvojúlohové, ale záleží to na náročnosti úloh. Učitel si jimi ověřuje, zda a jak žáci pochopili učivo probrané v předchozí výuce. Tyto písemky se zpravidla týkají nějaké stěžejní myšlenky, obratu, vzorce, postupu, konstrukce apod. (jde obvykle o úlohy 1. a 2. kategorie, viz 0.2); umožňují zjistit dosažené výsledky práce, typické chyby žáků i výkony jednotlivců. Pokud jsou prováděny po přiměřeném procvičení a zopakování učiva, tak si na nich učitel ověřuje, jak danou látku naučil, tedy jak ji žáci pochopili, jak si osvojili učivo (a to někdy již i pro úlohy 3. kategorie), zda již bezpečně znají různé algoritmy výpočtů a konstrukcí, jak logicky uvažují a dovedou formulovat své myšlenky a jak dovedou s učivem samostatně pracovat, tj. jak je dovedou aplikovat při řešení úloh. Také žáci si při nich uvědomí, kde mají ještě mezery. Většinou však jde o ověřování vědomostí a dovedností sice formálního charakteru, ale nezbytných pro další výuku matematiky (např. početní výkony s čísly, úpravy výrazů, řešení rovnic nebo nerovnic, slovní úlohy určitého typu, výpočty podle vzorců a algoritmů, geometrické konstrukce, apod.). Po zjištění stavu (hlavních chyb a nedostatků) může učitel operativně zjednat nápravu. Kontrolní písemky jsou tak nenahraditelnou hospodárnou pomůckou, jak zjistit okamžitý stav výuky a připravenosti žáků u všech žáků najednou. Dávají také možnost sledovat pokrok jednotlivých žáků, srovnávat jejich výkony a jsou prostředkem výchovy žáků k samostatnosti a k růstu jejich sebedůvěry.

Vedlejším produktem těchto písemek může někdy být i jejich klasifikace nebo její náhrada (pomocnými body). Při soustavně neklasifikovaných písemkách mohou totiž žáci ztratit motivaci (že je jedno, co tam napíšou) a mohli by takové písemky odbývat. K posílení motivace můžeme použít alternativu vyzkoušenou v praxi: Kontrolní písemky jsou dosti časté, bodují se, body se akumulují a po každé písemce učitel vydá tabulku s pořadím žáků podle počtu bodů. Pro žáky je to motivace (i ve sportovním duchu a často dosti silná) k tomu, snažit se získat co nejvíce bodů a co nejlepší umístění. Učitel pak k této tabulce přihlíží, když rozhoduje o výsledné klasifikaci za příslušné klasifikační období.

2⁰ ***Tematické písemky*** (20 minut až celá vyučovací hodina) zařazuje učitel zpravidla po ukončení a procvičení tematického celku nebo jeho ucelené části (úlohy 2., ale zejména 3. kategorie). Smysl písemky je stejný jako v předchozím případě, ale jde o širší tematiku (např. kvadratické rovnice, konstrukční úlohy na geometrická místa bodů, kombinatorika, apod.). Učitel pak zpravidla probírá již nové učivo, ale písemkou zjistí, na co se více zaměřit při dalším zpětném procvičování a opakování předchozího tematického celku. Tyto písemky lze také považovat za trénink na klasifikační čtvrtletní práce. Někteří učitelé zařazují do písemek i teoretické otázky, např. formulace definic a vět nebo zopakování probraných důkazů (např. matematickou indukcí).

3^0 ***Klasifikační písemky***, zejména jsou to hodinové čtvrtletní práce. Obsahují úlohy různé obtížnosti z různých tematických celků, z látky probrané v delším časovém období a zpravidla před písemkou zopakované. Může se jimi také uzavírat tematický celek. Nejzávažnějším problémem je tu vhodné zadání písemky (výběr úloh zejména 3. kategorie), její oprava, hodnocení a klasifikace. Je třeba volit vhodnou sestavu úloh s ohledem na rozličnou úroveň znalostí a schopností žáků a *docenit význam správného výběru a formulace zkušebních úloh*. U čtvrtletní písemky jsou zpravidla zadávány 4 úlohy (kategorie 2 – 4) pokrývající poslední i starší učivo a také *různé typy* úloh – početní, geometrické, slovní apod. – v závislosti na probrané látce. Sestavou úloh na písemku by učitel měl soustavně oživovat i starší učivo; nejlépe, když se to podaří „organicky", tj. tak, že toto starší učivo je potřebné k vyřešení některé úlohy z nového učiva. Úlohy na písemku je vhodné volit ve střední obtížnosti, avšak přitom by jedna měla být lehčí (nikoli však příliš lehká) a jedna zase o něco náročnější (ale ne přespříliš náročná), viz dále 2.2, ad g. U úloh střední obtížnosti pak právem očekáváme, že výborní žáci je vyřeší vynikajícím způsobem, průměrní žáci je vyřeší bez velkých obtíží a slabí žáci s obtížemi a s chybami, na lehčí se chytí i slabší žáci, těžší úlohy by měli bez větších problémů zvládnout ti, co jim jde matematika lépe. Pohled na obtížnost úlohy je však do určité míry individuální a proto je vhodné umožnit žákům, aby je řešili v pořadí, jaké je pro ně individuálně nejvhodnější. U delších písemek se osvědčuje připravit navíc i „dobrovolnou" úlohu jako zaměstnání pro žáky, kteří budou s písemkou dříve hotovi.

Den čtvrtletní klasifikační písemky oznámíme žákům včas, aby se na ni mohli dobře připravit. Před písemnou zkouškou látku zopakujeme, případně i přezkoušíme. Jestliže zjistíme, že příliš mnoho žáků má ve vědomostech mezery, raději zkoušku odložíme a učivo znovu zopakujeme. Písemky bychom měli mít opraveny do týdne, aby byla oprava pro žáky ještě aktuální.

4^0 ***Orientační písemky*** (zpravidla 1 vyučovací hodina) jsou používány mimořádně; píšou se např. na počátku školního roku ve třídách, v nichž se sešli žáci z různých škol, nebo při změně složení třídy. Také nový učitel matematiky může takto získat první orientační informaci o matematických poznatcích jednotlivých žáků i celé třídy, kterou převzal; viz např. (*Horáková – Rakušan*, 1953), (*Sovíková*, 1985). Ukáží klady i zápory – co mají žáci zvládnuté, co je třeba zopakovat a do jaké úrovně, co je třeba jen procvičit, ale také, co je třeba znovu probrat. Získané poznatky se tedy stávají podkladem pro opakování v prvním období po písemce. Aby tato písemka dala pravdivý obraz o stavu třídy a jejích žáků, musí být dobře připravena a provedena. Je možno ji zvládnout v jedné vyučovací hodině nebo ji rozdělit na části a napsat formou kratších písemek. Jsou pro ně vhodné zejména úlohy 2. a zčásti i 3. kategorie.

Tyto písemky není vhodné naplno klasifikovat, ale ohodnotit je orientační známkou, která se žákům sdělí jen pro informaci, aby věděli, jak na tom jsou. Nejspolehlivější výsledek dostaneme na základě jevové analýzy. Při opravě orientační písemné zkoušky si učitel též všímá, jakou formální úroveň má písemné vyjadřování jednotlivých žáků – tedy formální správnosti a pečlivosti zápisů, výstižnosti vyjádření myšlenky a popisu řešení, přesnosti a úhlednosti grafického projevu, co dělají dobře a co konkrétně nedovedou správně vyjádřit, znázornit nebo zapsat, případně jaké mají zlozvyky; získá tak informaci i o této stránce osobnosti žáků i podněty pro další svou práci.

Někteří učitelé píší orientační písemky vždy při opakování na začátku školního roku, aby zjistili, kolik toho žáci přes prázdniny zapomněli. Podle (*Jelínek – Zelinka*, 1955) má však písemka na začátku školního roku význam jen tehdy, jestliže učitel jejím *podrobným rozborem* zjistí nedostatky u jednotlivých žáků a pak se tyto nedostatky snaží odstranit individuální prací s jednotlivými žáky. Někteří učitelé píší takové písemky i před probíráním nového tematického celku, aby zjistili, zda žáci mají úvodní znalosti potřebné v tomto novém tematickém celku.

Rovněž při přípravě žáků na přijímací zkoušky na jiných školách se mohou psát písemky tohoto charakteru, a to s úlohami 2. – 4. kategorie.

5^0 *Kontrolní písemky na porozumění* (*open – book exams*) jsou svěží obměnou tradičních písemek. Při nich se nekontroluje to, co a kolik si toho žáci pamatují, ale jak probranému učivu porozuměli a dovedou je aplikovat při řešení úloh. Podstata zvláštního postavení těchto písemek spočívá v tom, že žáci při nich mohou používat učebnici i své poznámky. Tento postup vlastně *nejlépe odpovídá situaci v praxi*, kde velmi často není nutno, aby si člověk všechno pamatoval; něco jistě musí znát a umět zpaměti, ale někdy je třeba si udělat poznámky, ověřit si postupy a vzorce nebo zjistit chybějící údaje. Musí se tedy vědět, kde potřebnou informaci nalezneme a jak si s ní máme počínat. Tyto písemky tak současně vyvíjejí tlak na žáky, aby si psali své poznámky přehledně a srozumitelně a aby se naučili orientovat se v učebnici. Přitom se zároveň učí, protože si mohou uvědomit souvislosti, které jim při „normálním" učení unikaly. Kdo všechno zná a umí bezpečně i zpaměti, tím lépe pro něj.

Jinou alternativou, rovněž odpovídající situaci v praxi, je, že si žáci např. během týdne před písemkou mohou napsat *písemnou pomůcku* („tahák") a při písemce mohou tuto pomůcku používat (ale učebnici a sešit už pak ne). Přitom musí být dána pravidla pro zajištění efektivnosti tohoto způsobu psaní písemek. Předně je stanoven rozsah a forma pomůcky, např. 1 stránka formátu A4 či A5 (podle rozsahu opakování) psaná rukou autorovou a autorem podepsaná. Je vyzkoušeno, že žáci se toho při psaní „taháku" dost naučí, a je-li omezen jeho rozsah, učí se vyhledávat a rozpoznávat v učivu to podstatné. Zkušenost říká, že matematicky zdatnější žáci si píší své pomůcky jen velmi stručné nebo třeba i vůbec žádné, zatímco slabší žáci je píší obšírnější, takže si stanovené učivo vydatněji zopakují.

Této situaci musejí být přizpůsobeny i zadané úlohy. Je třeba samozřejmé, že nemá smysl zadávat stejné úlohy, jako již byly řešeny ve škole či doma nebo úlohy velmi podobné. Je vhodné volit úlohy kombinované, ale spíše do šířky než do hloubky. Např. v analytické geometrii jsou dány tři vrcholy trojúhelníku v rovině a mají se zjistit délky jeho stran, těžnic a výšek, střed a poloměr kružnice opsané. Zpravidla stačí obvyklé dvě verze A, B, i když pro klid při práci může být (i v jiných případech) účelné, aby sousedé zleva doprava i zpředu dozadu měli různá zadání, na což stačí 4 verze.

Způsob hodnocení písemek na porozumění se pak samozřejmě liší od způsobu hodnocení „normálních" písemek. Např. za znalost vzorce nebo pravidla nezíská žák žádný kladný bod, ale kladné body získá až za to, že tento vzorec nebo pravidlo umí správně použít a dobrat se výsledku.

Význam písemek na porozumění není zatím zcela doceněn, ale jejich konání lze plně doporučit.

6^0 ***Písemky u přijímacích a závěrečných zkoušek.*** Obsahují průřezové úlohy z celého učiva příslušného školského stupně, bývají alespoň hodinové s úlohami 2. – 4. kategorie. Tyto písemky mají něco společného s úlohami matematických soutěží (viz dále 9^0), protože jsou vlastně také soutěžemi. Komunikační proces mezi učitelem a žáky je zde velmi redukován, neboť žáci jsou seznamováni až s celkovým výsledkem a písemky dostávají jen k nahlédnutí. V minulosti byla v časopise pro učitele matematiky často publikována pro informaci učitelů zhodnocení a zkušenosti z různých přijímacích a závěrečných zkoušek, viz např. (*Beneš – Valíšková*, 1984), (*Šůla – Běloun*, 1985).

U těchto písemek jde žákům o hodně, takže je třeba je vyhodnotit podrobně, objektivně a přesně. Připravíme si tabulku se seznamem žáků. Při opravě pak do jednotlivých okének dopisujeme body a provádíme součty a nakonec klasifikaci (podrobněji viz dále v 1.4.4). Vyplněná tabulka nám dává současně podrobnou informaci o tom, jak byly zvládnuty jednotlivé kroky. V uvedené tabulce lze ke každé úloze přidat ještě jednu rubriku na mimořádné body (za dobrý nápad, za pěkné matematické zápisy) nebo srážky (např. za formální chyby).

Vzhledem k poměrné závažnosti těchto písemek využívá často řada žáků možnosti vyzkoušet si vypracovat písemnou zkoušku předpokládaného typu „nanečisto" (*Husar*, 2002). Např. v maturitním ročníku lze výjimečně napsat i delší (dvouhodinovou) písemku. Pro technické usnadnění přijímacích zkoušek se někdy místo písemek zadávají testy.

7^0 ***Domácí úkoly*** jsou do určité míry také písemkami (jsou zadány, žáci je samostatně vypracují, jsou hodnoceny), avšak od ostatních se odlišují především tím, že nelze rozumně ověřit, nakolik byly zpracovávány samostatně, viz např. (*Zedek*, 1960), takže ze správně napsaného domácího úkolu nelze činit žádné hodnověrné závěry.

V systému školní výuky má však pravidelné zadávání domácích úkolů své nezastupitelné místo a proto je třeba věnovat jim potřebnou pozornost, aby jejich vypracování přinášelo požadovaný vzdělávací efekt.

Zadávají se domácí úkoly tří druhů:

- úloha, kterou se má dokončit předchozí výuka (dopočítat rozpracovanou úlohu, narýsovat obrázek, přepsat si z učebnice věty nebo vzorce, apod.);
- úloha, kterou se procvičuje probrané učivo nebo která s učivem jinak souvisí;
- úloha, kterou se připravuje příští výuka (něco zjistit, vypsat, vypracovat zvláštní případ budoucího učiva apod.).

Uveďme některé předpoklady pro efektivitu domácích úkolů:

a) Domácí úkoly by měly být zadávány pravidelně.

b) Domácí úkoly je třeba zadávat včas (ne až při zazvonění), aby bylo dost času a klidu pro zadání a případná vysvětlení či pokyny i pro jejich zaznamenání.

c) Rozsah úkolu by měl být přiměřený (jeho vypracování by žákům středních škol nemělo trvat více než 30 minut).

d) Uložené úkoly by měly být středně obtížné a rozmanitého druhu (tj. ne vždy jen na formální úpravy a výpočty).

e) Zadání by mělo být zcela jasné, aby žák neměl doma pochybnosti, co má vlastně dělat. V případě potřeby by učitel měl již při zadávání domácího úkolu dát žákům srozumitelné pokyny, jak si mají počínat.

f) Vypracovaný domácí úkol by měl obsahovat text zadání (ne jen odkaz na zadání), aby při pozdějším opakování látky bylo žákovi zřejmé, co vlastně řešil.

g) Domácí úkoly je třeba kontrolovat, zda jsou vypracovány, zda jsou správně a zda byly zpracovány samostatně. Při větším počtu závad je třeba správný postup vysvětlit žákům dodatečně a případně zadat jiný podobný úkol.

h) Domácí úkoly by měly přispět k tomu, aby se žáci naučili pracovat s učebnicí.

Originální řešení vždy oceníme, případně na místě vyhodnotíme, v čem je lepší než způsob probraný ve škole a v čem jsou jeho nedostatky (např. že postihuje jen zvláštní případ). K hledání jiných řešení můžeme i žáky vyzvat: „Řešili (počítali) jsme to takto..., zkuste to i jinak!

U domácích úkolů by měl učitel vyžadovat lepší formální úroveň než u školních písemek. Podcenění tohoto faktoru vede k tomu, že žáci si zvyknou provádět své zápisy nedbale a pak v nich ztrácejí orientaci, což vede k chybám a i k nezvládnutí řešení. Na druhé straně se však nesmí učitel spokojit jen s pěkně zapsaným domácím úkolem, ale musí přehlédnout i věcnou správnost (*Lebeda*, 1953). Někteří učitelé se omezí jen na to, že – třeba v průběhu vyučovací hodiny – vždy jenom zběžně ovidují výsledky, a tak se může jejich vidovací značka objevit i u části s věcnými chybami. Žáci pak reagují logicky: stačí to napsat pěkně, o správnost už tak nejde. Ani výměna sešitů mezi žáky a jejich vzájemná kontrola není dostatečná. Čas od času si musí učitel sešity vybrat a provést jejich důkladnější kontrolu, včetně domácích úkolů. Je vhodné, když kvalitu vypracovaných domácích úkolů přitom slovně ohodnotí.

Při této příležitosti se zmiňme i o školních sešitech. Učitel by měl žákům poradit a radit, jak si je vést a jak s nimi pracovat, jak se s jejich pomocí učit. Klíčem k úspěchu v matematice je soustavná práce a sešit by tedy měl být jedním z žákových pomocníků. Z toho plyne nutnost správnosti a úplnosti zápisů, jejich přehlednosti, grafické úrovně (např. rámečky, podtržení, barevné vyznačení apod.). Žáci se tak mohou učit poznávat a rozlišovat, co je podstatné a co ne, což je velmi důležitá schopnost i pro život. Dobře vedený sešit se žákům vyplatí i u písemek dle 5^0. Někteří učitelé ohodnocují úpravu sešitů jednou známkou za čtvrtletí.

Učitel by měl věnovat zvýšenou pozornost domácím úkolům slabších žáků a žáků po delší absenci a pomocí kontrolních dotazů zjistit, zda tito žáci řešili zadaný úkol správně a samostatně. Někteří učitelé volí občas takovouto možnost kontroly samostatnosti – domácí úkol na počátku hodiny nekontrolují, ale před koncem hodiny napíší písemnou prověrku na úlohy podobné, jako byly v minulém domácím úkolu.

Žáci by se měli vždy dozvědět, jaký byl u domácího úkolu správný postup a výsledek, což je zpravidla obsahem části hodiny „Kontrola domácích úkolů". V případě větší skupiny žáků, kteří některé úlohy řešili špatně nebo se omlouvají, že si nevěděli rady, je třeba bez ohledu na naplánovaný obsah vyučovací hodiny dotyčné úlohy znovu vysvětlit a vyřešit.

Domácí úkoly mají být vypracovávány samostatně. Od žáků však nemůžeme očekávat, že se naučí samostatně pracovat sami od sebe, ale měli bychom je to ve škole naučit. Zejména tak, že s nimi *provádíme samostatné práce ve škole*, jak je o nich dále v části 8^0, aby získali potřebné návyky a sebedůvěru.

8^0 ***Samostatné práce*** individuální nebo skupinové, konané v průběhu výuky, nepatří mezi písemky, i když zde žáci také samostatně písemně řeší různé matematické úlohy, mají však některé znaky písemek. Jejich úkolem je vést žáky k myšlenkové aktivitě a ke schopnosti samostatně pracovat; viz např. (*Maláč*, 1958 a 1959), (*Mašková*, 1962), (*Simerský*, 1962), (*Běloun*, 1963), (*Šíma*, 1973), (*Žídek*, 1991). K tomu směřují:

1. *Praktické práce*

Žáci si při nich ověřují, aniž by jim hrozilo špatné hodnocení nebo známka, nakolik už nové a částečně procvičené učivo pochopili a nakolik s ním dovedou samostatně pracovat (zpravidla však ve stylu vzorové úlohy). Jestliže žák neví, jak dál, může se zeptat učitele, ovšem hlavním cílem žáka není dopočítat konkrétní úlohu, ale uvědomit si, proč se „zasekl", co nevěděl a co by už příště vědět měl.

2. *Výzkumné práce, včetně prací propedeutického charakteru, připravující zavedení nového pojmu.*

Často jde o ověřování platnosti různých pravidel a vzorců, o hledání vztahů zatím pro žáky neznámých nebo o experimentální práce v matematice.

Samostatné práce vykonávají žáci bez přímé účasti učitele, ale dle jeho zadání. Mohou mít formu individuální, skupinovou nebo kolektivní.

Při individuální samostatné práci každý žák řeší svůj úkol samostatně. Všichni žáci mohou mít úkol stejný, nebo může být zadáno několik variant, nebo každý žák může řešit jinou úlohu. Takové práce jsou nejvydatnější, ale také nejnáročnější na přípravu a organizaci. Učitel totiž nemůže po zadání práce jen čekat na výsledky, ale musí průběh práce sledovat a kontrolovat. Kontrola průběhu samostatné práce žáků se provádí současně s jejich individuálním vedením. Učitel sleduje práci žáků (obchází třídu), všímá si postupu jejich práce, správnosti, pohotovosti a prováděných zkoušek. Ponechává žákům značnou volnost, ale na druhé straně poradí těm, kteří v některém kroku uvázli. Je tu zároveň příležitost věnovat se více i rozvíjení a prohlubování znalostí talentovaných žáků tím, že dostanou náročnější úkoly a že se od nich bude vyžadovat kvalitnější řešení.

Při skupinové samostatné práci se žáci mají naučit společně řešit problémy – prodiskutovat způsob řešení, rozdělit si práci, konfrontovat řešení různých žáků, společně formulovat závěry. Rozhodně taková práce nesmí probíhat tak, že jeden žák ve skupině úlohu řeší a ostatní jeho řešení opisují, ale mělo by jít o práci týmovou. Učitel postupuje jako v předchozím případě a sleduje komunikaci v jednotlivých skupinách; je to forma náročná.

Při kolektivní samostatné práci je pracovním kolektivem celá třída, jednotliví žáci navrhují způsob řešení, další se k tomu vyjadřují, opravují, zlepšují a všichni pak na problému pracují. Učitel pomáhá organizovat rozpravu a pozorně sleduje její průběh, může dávat i impulzy k dalšímu rozvíjení řešení.

Po skončení práce učitel ještě zkontroluje, kdo nemá práci dokončenu a kdo ano a s jakým výsledkem. Kontrolu výsledků může provádět tak, že

– prohlédne řešení jednotlivých žáků (nejspolehlivější, ale náročné na čas a organizaci),

- vyvolá jednoho nebo více žáků, kteří sdělí svá řešení (postup a výsledek) a ostatní si s tím porovnají svá řešení, učitel pak zjistí, kdo to má jinak a podle situace reaguje,
- provede kontrolu jiným systémem (speciální učebny, speciální pomůcky).

Učitel pak samostatnou práci celkově zhodnotí a může i pochválit – např. když vyhodnotí slabšího žáka, který pracoval mimořádně pečlivě a se zájmem, je takové hodnocení pro žáka zaslouženým povzbuzením. Samostatné práce však nejsou součásti klasifikačního hodnocení, nýbrž výcviku, jejím účelem není klasifikace. Nebylo by však vhodné klasifikací samostatné práce žáků porušit ovzduší naprosté důvěry k učiteli, které je tu nezbytné, má-li se žák bez obav dotazovat a žádat o radu bez nebezpečí, že za to bude nepříznivě hodnocen.

Pokud učitel ještě samostatné práce žáků neprováděl, musí na ně žáky nejprve zvyknout. První etapou může být kolektivní práce třídy (bez žáka u tabule), kdy na pokračování vždy některý žák nahlas říká, jak v řešení postupovat dál. Nebo může jít o polosamostatnou práci, kdy učitel řešení na tabuli začne (ve spolupráci se třídou) a žáci je samostatně dokončí. Uplatní se tu zásada: Co může udělat žák, to za něho nedělej.

9^0 ***Úlohy matematických soutěží (olympiád).*** Zejména jde o soutěže třídní, školní nebo i meziškolní, a také MO. V těchto případech se vlastně nejedná o opravu úloh v pravém slova smyslu, ale o vyhodnocení správnosti předloženého řešení a jeho částí. Úlohy jsou bodovány podle jevové analýzy a opravující učitel dostane od organizátora instrukce, jak bodovat (u školních soutěží je případně předem sám připravuje, viz úlohu 0.3.3). Zpravidla se od řešitelů vyžaduje i určitá grafická úroveň (zejména u úloh domácího kola) a zejména standardní úroveň vyjadřování (v kvalitě i kvantitě) při komentování jejich řešení. Při opravě se postupuje podobně jako při opravách jiných písemek, ovšem učitel zde nevede komunikaci se žákem, ale s odborníkem, který případně bude opravy kontrolovat či korigovat; podle toho volí při opravě i své symboly a vzkazy. Soutěžící se zpravidla dozvědí až celkový výsledek a až dodatečně si mohou podle zveřejněných vzorových řešení uvědomit, v čem postupovali dobře a co nezvládli. Někdy jde o testy s výběrovou nebo tvořenou odpovědí (soutěž Matematický klokan).

10^0 ***Jiné***; sem zahrneme všechny další možnosti, z nichž některé uvedeme zvlášť.

Předně jsou to *písemky s vnějším iniciátorem* (např. ministerstvo školství) a v tomto případě bývá dodáno i zadání formou různých testových úloh a pravidla pro hodnocení, viz např. (*Andrys – Váňa*, 1965).

Krátké individuální klasifikované prověrky. Někteří učitelé se snaží racionalizovat využití času při ústním zkoušení tak, že u tabule zkoušejí současně dva žáky a po dobu jejich zkoušení píše několik žáků v první lavici krátkou písemku, kterou učitel pak na místě prohlédne a oklasifikuje, ostatní žáci konají samostatnou práci.

Někteří učitelé občas píší pro posílení soutěživosti a zručnosti v provádění matematických úkonů tzv. *rychlostní prověrky*, které se však neklasifikují, protože nedávají odpovídající obraz o žákovských matematických kvalitách.

Je vhodné občas zařadit *prověrky správného výsledku*. V praktickém životě je na všech výpočtech nejdůležitější právě správný výsledek, takže i škola musí pěstovat v žácích odpovědnost za správné výsledky, aby si je žáci dovedli ověřit a pak si za ně ručili. U písemné prověrky to můžeme praktikovat např. tak, že před písemkou žákům ohlásíme bodové hodnocení: poslední krok jevové analýzy (zápis výsledku) je za 80 %, všechny ostatní kroky řešení jen za 20 %.

Diktáty v matematice jsou další alternativou běžných písemek. Učitel je použije, když chce zjistit, jak žáci rozumějí matematickým formulacím a dovedou splnit zadaný úkol v daném časovém limitu (*Vrána*, 1960). Lze je použít pro zpestření výuky při zjišťování samostatnosti a pohotovosti žáků vybavit si potřebné znalosti a dovednosti, ale nejde o běžný způsob zjišťování vědomostí žáků. Doporučená délka diktátu je 5 – 15 minut a v této době by se měly vyřešit 3 – 4 úlohy. Uveďme příklad pětiminutového diktátu jedné úlohy z (*Gábor – Kopanev – Križalkovič*, 1989).

- Zapište součet čísel $2a$ a $5b$;
- naznačený součet dělte třemi;
- podíl vynásobte rozdílem čísel $2a$ a $5b$;
- naznačenou operaci vykonejte;
- do součinu dosaďte za a číslo 1 a za b číslo 2;
- vypočtěte konečný výsledek.

Někteří učitelé, zejména ve specializovaných třídách, zadávají *písemné referáty* na prohloubení nebo částečné rozšíření tematických celků, viz např. (*Maříková – Tomanová*, 1980). Žáci se tak učí pracovat s odbornou literaturou matematického zaměření resp. i s internetem. Po přednesení referátu následuje pak ve třídě diskuse. Učitel zpravidla neopravuje napsaný referát, ale hodnotí obsah a kvalitu přednesu a to, jak si referent vedl při diskusi.

Všimněme si, že tu nejsou zařazeny „písemky za trest", které by uvedený sortiment neměly obohacovat jakožto akce pedagogicky nevhodné.

Dále se zaměříme především na *běžné školní písemky* (body 1^0 až 4^0) (*Urbanová*, 1979) a ponecháváme na úvaze čtenáře, aby posoudil, co z našeho výkladu se hodí i na další druhy písemek.

1.2. Písemky jako proces komunikace

Školní písemky mají společné to, že jsou učitelem připraveny a zadány, žáci je píší, učitel je opravuje a hodnotí, s výsledkem seznamuje žáky a podle potřeby koná další potřebná opatření. Tento proces je zvláštním případem *komunikace* mezi učitelem a žáky a přestože probíhá se všemi žáky najednou, je to proces individuální, tedy jde o *dialog mezi učitelem a (každým) žákem*. V tomto dialogu uplatní učitel plně své klíčové dovednosti (viz str. 19).

Jak tento dialog zpravidla probíhá?

1. Na počátku tohoto dialogu učitel připraví a žákům zadá úkol (úlohy k řešení).
2. Žák svou písemnou prací zadaný úkol plní (za dohledu učitele).
3. Učitel písemku opraví a vyhodnotí (přičemž zpravidla hned po písemce krátce sdělí žákům správné výsledky, resp. i správný postup). V další vyučovací hodině (tj. až písem-

ky opraví) sdělí žákům poznatky z opravy (co dopadlo dobře, hlavní chyby a nedostatky, celkové hodnocení, může použít i pochvaly a napomenutí).

4. Žák dostane opravenou písemku a seznámí se s opravou a hodnocením, vyhledá a uvědomí si své chyby, přizná si jejich příčiny. Při nejasnostech se dotáže učitele.
5. Učitel zodpoví položené dotazy a podle potřeby může (nejčastěji prostřednictvím úspěšných žáků) na tabuli předvést správná řešení zadaných úloh. Může také v souvislosti s náplní písemky zadat domácí úkol..
6. Žák provede opravu svých chyb v písemce formou odpovídající druhu písemky a vypracuje i případně zadaný domácí úkol.
7. Učitel opravu, resp. vyřešené úlohy prohlédne a oviduje.

Má-li tento dialog být efektivní, je především třeba, aby se v jeho průběhu obě strany vyjadřovaly srozumitelně, ale o tom ještě dále.

1.3. Příprava písemky a průběh vyučovací hodiny s písemkou

Učitel připravuje písemku tak, aby žáci mohli pracovat *klidně* a *samostatně*. Klid pomůže navodit důvěra žáků, že je čekají úkoly, jejichž splnění je v jejich moci (tj. žádné „chytáky", ale typy úloh, jaké byly dříve probrány a procvičeny). Pro zajištění samostatnosti práce a klidu při práci je vhodné posadit žáky do lavic po jednom. To však často není možné a tak se písemky zadávají ve více verzích, zpravidla ve dvou, A a B. Jestliže totiž dva žáci ve stejné lavici řeší tutéž úlohu, tak je tato okolnost v podstatě ruší v práci. Buď je to láká k zvědavému nakukování k sousedovi – jak je už daleko? postupoval jako já? má stejný výsledek? – nebo dokonce ke snaze načerpat inspiraci pro svou další práci. Bohužel, zatím se u nás mnohde (kde ještě nevzniklo ani čestné ani konkurenční prostředí) považuje mezi žáky i přímé opisování při písemkách a posílání taháků za kladný výraz solidarity.

Učitel by si měl vytvořit a udržovat databázi písemkových úloh. V této souvislosti připomeňme seriál *Písemkové příklady na SŠ*, který v MFI vycházel již od r. 1993, viz (*Trávníček*, 1993 a 2006). O přípravě databáze písemkových úloh viz dále 2.1, kde je ukázáno, že součástí přípravy úloh na písemku je i jejich jevová analýza a stanovení hodnocených kroků řešení, včetně váhy těchto kroků a odpovídajících mezivýsledků a výsledků.

Pro psaní písemky by měly být vytvořeny vhodné podmínky, viz např. (*Liška*, 1962) – zkoušet učivo procvičené a zopakované, volit vhodnou vyučovací hodinu (u klasifikačních písemek např. ne po tanečních, ne až kolem oběda, ne na samém konci čtvrtletí, kdy se ve všech předmětech zkouší, apod.), kdy výkonnost žáků může být maximální. Při kratších písemkách (resp. než si žáci na psaní písemek zvyknou) se někdy doporučuje psát tyto písemky až na závěr hodiny (zejména, když písemka nebyla předem ohlášena), protože žáci někdy bývají po písemce rozrušeni a přestávka je přirozenou příležitostí k jejich uklidnění. U kontrolních písemek, které se píšou po probrání a procvičení určitého úseku učiva, lze, ale není nutno na ně předem upozornit, u klasifikačních písemek je třeba jejich konání koordinovat s dalšími předměty a žáci by o nich měli vědět předem, aby si mohli včas zopakovat i starší učivo. Učitelé zpravidla zařazují před takovou písemkou i speciální opakovací hodinu – zejména na pomoc slabším žákům. (Při přijímacích zkouškách na střední školy byl zaznamenán zvláštní paradox: žáci, kteří byli na základní škole šetřeni a nikdy proto nepsali dvě písemky v jednom dni, mohou mít problémy při přijímacích zkouškách, pokud se tu píší krátce po sobě dvě písemky – z českého jazyka a matematiky, protože nejsou zvyklí na takovou dvojí zátěž a cítí se vyčerpáni. Podobné problémy mají studenti u přijímacích zkoušek na vysoké školy.)

Pokud jde o technickou stránku zadávání písemky ve vyučovací hodině, měli bychom zabránit ztrátám času. Připomeňme nejprve „klasický" způsob, kdy učitel píše zadání na tabuli. Je-li zadání jen krátké, je to způsob vhodný; je třeba ovšem racionálně vyřešit zadání pro skupiny A a B (jedna možnost je použita např. ve zmíněném seriálu Písemkové příklady na SŠ; viz též formulace textu úloh ve 2.3). Mnozí učitelé jsou toho názoru, že když si žák zapisuje text úlohy, pomáhá mu to k jejímu pochopení. V dnešní době, kdy se velmi zpřístupnily možnosti rozmnožování textů, mohou žáci na počátku písemky dostat lístky s texty zadání úloh, ušetří se tím čas (ne čas učitele, který musí příklady napsat, namnožit a nastříhat lístky, ale čas ve vyučovací hodině s písemkou) a usnadní se zadání např. pro žáky, kteří hůře vidí. Diktování zadání lze považovat za málo vhodné a použitelné jen zcela výjimečně (viz též matematické diktáty), např. když při prověrce učitel chce, aby se každý žák zabýval stanovenou dobu každou úlohou. Jsou však i další možnosti zadávání písemek v závislosti na technickém vybavení školy (různé druhy přenosných tabulí, meotar, počítače). Jestliže žáci nepíší danou písemku do zvláštního sešitu, je třeba jim před písemkou rozdat volné listy.

Po zadání písemky dá učitel k písemce případné pokyny – např. že není třeba dodržet pořadí řešených úloh (to je dost rozumné, protože když žák vyřeší úlohu, která je pro něj lehčí, tak se uklidní, získá pocit jistoty a lépe se mu dále pracuje), že žáci nesmějí používat koncepty na nějaké pomocné výpočty a také jim může poradit, aby si po vyřešení každé úlohy resp. po napsání písemky provedli kontrolu řešení a nezapomněli vyznačit výsledky. Může též žáky povzbudit a dodat jim sebedůvěru. Je vhodné jim také sdělit váhy jednotlivých úloh, pokud jsou tyto váhy různé. Pak je tu chvíle pro případné dotazy žáků. Učitel by také měl předem sdělit dobu trvání písemky, pokud není na celou hodinu, i když pak samozřejmě může časový plán korigovat (ale spíše výjimečně); když např. vidí, že na konci určené doby ještě všichni pracují, čas přidá, jsou-li naopak již téměř všichni hotovi, může čas zkrátit. Je však vhodné na úpravu doby konce písemky upozornit žáky s předstihem před dříve ohlášeným koncem. Svým vystupováním by měl učitel přispět k vytvoření aktivní, ale pohodové pracovní atmosféry.

Žáci by měli pracovat v klidném prostředí s dostatkem světla a čerstvého vzduchu a na lavici by měli mít jen ty pomůcky, které jsou potřebné k písemce (mobily samozřejmě vypnuté a mimo dosah). Při psaní písemky musí být naprostý klid (jen pracovní ruch), který nesmí narušovat ani učitel např. hlučným přecházením po třídě, okřikováním nebo radami jednotlivým žákům; měl by stát stranou a klidně pozorovat pracující žáky. Případné pokusy o neoprávněné získávání nebo předávání informací řešit klidným napomenutím a věc případně dořešit až po písemce nebo při opravě. Musíme zaměstnat i žáky, kteří skončili s písemkou dříve, aby nerušili ostatní, jak jsme se již zmínili, zadáním dobrovolné úlohy (případně tam, kde to je možné, mohou tito žáci dočasně opustit třídu).

V zájmu dobré komunikace mezi učitelem a žáky je třeba požadovat, aby se žáci v písemce vyjadřovali čitelně a srozumitelně. Předně by měli graficky označit začátek svého řešení, např. zápisem slova „*Řešení:*" (některým učitelům stačí, když žáci oddělí své řešení od zadání čarou). Také by měli své řešení doplnit nejnutnějším slovním nebo symbolickým doprovodem (značkami $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ apod.) tak, aby učitel mohl sledovat jejich myšlenkové pochody a dovedl je ohodnotit. Musí být srozumitelné zejména to, *co žák považuje za výsledek řešení dané úlohy*, což dá najevo např. u početních úloh tím, že *výsledek dvakrát podtrhne*. Tedy podtrhnutí výsledku není počin estetický, ale komunikační, žák tím říká: *toto je můj výsledek*. Není možno považovat za drobnou formální chybu postup, kdy žák uvede několik mezivýsledků a výsledků a předkládá je s tichým vyjádřením: *učiteli, vyber si*. Velmi často se tak děje v případech, kdy žák úloze v podstatě nerozumí, vykoná několik formálních výpočtů, o nichž ví, že takové se dělávají, a sám ani netuší, *co a proč* je výsledkem řešení. U tzv. slovních úloh se zpravidla vyžaduje odpověď. To je sice správné, ale v některých případech snad není nutno trvat na odpovědi za každou cenu. Např. když by se úloha ptala, kolik existuje pětimístných čísel s těmi a těmi vlastnostmi, lze v písemce považovat za úplnou odpověď dvakrát podtržené zjištěné číslo, např. 127.

Na konci písemky, resp. hodiny s písemkou, sdělíme výsledky řešení, případně další informace a zodpovíme dotazy žáků. Zadávat napsanou písemku ihned jako domácí úkol se nepovažuje za vhodné.

1.4. Oprava a vyhodnocení písemky

Smyslem opravy písemky *jako součásti komunikace* je sdělit žákovi na základě informací získaných opravou

- co provedl správně, co u něho učitel oceňuje;
- co nezná, co dobře nepochopil, v čem chybuje a jak závažné to jsou nedostatky.

Učitel se tedy musí naučit v písemce dobře rozpoznat, co je správné a co ne – nejen výsledek, ale i myšlenku, která k němu vede, i když se třeba žákova mysl vine jinudy, než se očekávalo, odlišit, co je žákův omyl a co neumění, a musí to umět žákovi srozumitelně a racionálně sdělit.

1.4.1. Chyby v písemkách

Chyba je přirozená součást učení se a práce s chybou je součástí učitelovy kompetence (*Hejný*, 2004), (*Kulič*, 1971), (*Hanuliaková*, 1980). V běžných písemkách nepovažujeme tedy chybu za jev nežádoucí (ovšem ani žádoucí), někdy lze pomocí žákovy chyby vyvodit cenná poučení a významně zlepšit jeho pochopení matematického učiva. Učitel chybujícího žáka neironizuje a nezesměšňuje, ale dá mu najevo, že je ochoten mu pomoci. Své jednání nezaměřuje jen na matematiku, ale především na žáka.

Učitel tak vede žáky k tomu, aby se chyb nebáli, ale poučili se z nich. Jak? Když po učitelově opravě písemky žák chybu najde, provede si její věcnou analýzu, tj. musí si uvědomit, proč chyba nastala, v jaké jeho nedostatečné nebo chybné znalosti má příčinu, jaké další chybné představy s tím má spojeny (při této analýze mu učitel podle potřeby pomáhá); zapíše při své opravě písemky vše uvědoměle a správně a vyvodí si poučení – co lépe pochopit, na co si dávat pozor. Měli bychom razit zásadu, že člověk sice může udělat chybu, ale neměl by stejnou chybu zase znovu opakovat, a dosáhnout toho, aby žáci nebyli pasivními objekty našich snah, ale aktivními subjekty se zájmem o co nejlepší výsledky.

Některé chyby pramení jen z nepozornosti. Při písemce by tedy měli žáci věnovat vždy velkou pozornost kontrole svých výsledků, zvyknout si na ni. Snad je lze upozornit i na to, že při použití matematiky v praxi musí být všechny výpočty správné, jinak by to mohlo mít velmi neblahé důsledky nejen pro tu praxi, ale i pro autora chybných výpočtů. Jednou z takových situací blízkých chápání žáků jsou částečně písemky u přijímacích zkoušek

Podívejme se nyní na problém chyb konkrétně. Chyby z bezmyšlenkovitosti jsou řídké, žák si při chybě vždy něco myslí, může to mít i svou logiku, ale nesouhlasí to s matematickými pravidly a konvencemi. V matematice je hodně konvencí, např. napíšeme-li a, myslíme tím $1a$, napíšeme-li $3 + 2 \cdot 4$, pak víme, že nejprve provádíme násobení a až pak sečítání, atd. Učitel tyto konvence a pravidla automaticky používá, ale pro žáky samozřejmé nejsou, jednorázová vysvětlení jim často nestačí. To je jeden pramen chyb. Dalším pak je nepochopení daného úseku matematiky a z toho pramenící neznalosti nebo nepochopení dané úlohy. Když žák neví, co dál, začne jednat chaoticky a v jistém smyslu analogicky jako v jiných případech mu povědomých, ale když tato analogie tu ve skutečnosti není, tak je postup zcela chybný. V hlavách žáků se tak mohou dít úplně jiné věci, než si myslíme. K odpovědi na otázku, jak žáci myslí, může hodně přispět důkladná analýza písemek na základě jevové analýzy.

Některé chyby lze považovat za „malé" (např. chyba při výpočtu $6 \cdot 8$), jiné za „velké" = „hrubé" (např. vynechání zkoušky při řešení rovnic s důsledkovými úpravami). Ale pozor: některá „malá" chyba udělaná na začátku řešení úlohy může mít mnohem destruktivnější důsledky než tatáž chyba provedené v jeho závěru. Proto vedle *velikosti* chyby hodnotíme rovněž její *závažnost*. Chybu považujeme za závažnější, když více naruší správný postup při řešení zadané úlohy. Malé chyby tedy mohou být závažné, ale velké chyby jsou závažné vždycky. Množina možných a vyskytujících se chyb je velmi bohatá a posouzení závažnosti chyb často závisí i na dalších okolnostech písemky. Např. chceme-li prověřit znalost určitého algoritmu (třeba částečného odmocňování), budeme považovat chyby provedené v tomto algoritmu za velmi závažné, i když v jiných souvislostech můžeme jejich závažnost posuzovat mírněji. Při hodnocení žákových chyb hraje významnou roli i individualita žáka, např. jedna a táž chyba může mít u různých žáků různé příčiny, ale to vše musí uvážit učitel.

Chyby lze rozdělit do několika skupin (*nikoli disjunktních*) podle jejich původu – a do značné míry i podle jejich „velikosti"; uveďme si přehled:

a) Řešení úlohy nebo její podstatné části zcela chybí nebo je nahrazeno nesouvislými zmatenými zápisy (chyby z bezradnosti). Znamená to, že žáku chybí znalosti zkoušené látky či dílčího algoritmu potřebného k pokračování v řešení. Nevědomost nebo povrchní znalosti lze totiž v matematice zatajit podstatně tíže než v kterémkoli jiném předmětu.

Příklady: neznalost algoritmu řešení kvadratické rovnice; neznalost řešení soustavy nerovnic o jedné neznámé; neznalost řešení rovnic s parametrem; neznalost konstrukce tečny z vnějšího bodu kružnice; neznalost úprav algebraických a jiných výrazů, apod.

b) Chyby věcné – logické (sémantické) znehodnocují věcnou a logickou stránku předloženého řešení.

Příklady:

1) Zanedbala se část řešení: $x(x - 2) = 3x \Rightarrow x - 2 = 3$; při řešení rovnice s důsledkovými úpravami se neprovedla zkouška, apod.

2) Nepochopení sémantické stránky symbolů a z toho plynoucí hrubé syntaktické chyby: $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}=\frac{5}{8}$; $\frac{\sin 2x}{3x}=\frac{\sin 2}{3}$; $2^3 \cdot 2^x = 2^{3x}$; máme-li $|x-1|$, rozlišujeme dva případy: $|x-1| \geq 0$ a $|x-1| < 0$; apod.

3) Chybný rozbor úlohy vedoucí k chybnému závěru. Např. má se zjistit, kolika způsoby při soutěži osmi závodníků může být rozdělena zlatá, stříbrná a bronzová medaile. Odpověď $\binom{8}{3}$ ukazuje na chybný rozbor. Podobně chybný rozbor konstrukční úlohy, který vede k chybné konstrukci.

4) Použití nesprávných analogií: Např. má se rozhodnout, zda bod $M[3;\ 1]$ leží na úsečce AB, případně na přímce AB, $A[-1;\ -1]$, $B[5;\ 2]$. Žák najde parametrické vyjádření úsečky AB: $X = A + t\,\boldsymbol{u},\ t \in \langle 0,\ 1\rangle$; $\boldsymbol{u} = B - A = (6;\ 3)$, zjednoduší vyjádření tím, že vektor $\boldsymbol{u}$ nahradí vektorem $\boldsymbol{v} = (2;\ 1)$, takže parametrické vyjádření úsečky AB v souřadnicích zapíše

$$x = -1 + 2t,\ \ y = -1 + t\ ,\ t \in \langle 0,\ 1\rangle.$$

Dosadí souřadnice bodu M: $3 = -1 + 2t \Rightarrow t = 2$, $1 = -1 + t \Rightarrow t = 2 \Rightarrow t \notin \langle 0,\ 1\rangle \Rightarrow$ závěr: M leží na přímce AB, ale nikoli na úsečce AB. (Z chybného vyjádření úsečky plyne uvedený chybný závěr; změnu směrového vektoru, která je výhodná u přímky, nelze takto provést u úsečky.)

5) Neschopnost sestavit správnou rovnici k dané slovní úloze.

*c) **Chyby věcné – početní a grafické**.* Zpravidla jde o částečně chybnou nebo neúplnou znalost pouček, vzorců a algoritmů nebo o jejich chybné použití (pokud nejde o případy *a* nebo *b*).

Příklady: chybná úprava a výpočet složeného zlomku; chybný rozklad mnohočlenu $a^3 + b^3$; použití chybného vzorce pro $\cos(\alpha - \beta)$; při konstrukci kružnice trojúhelníku vepsané nebyly zjištěny body dotyku; chybně sestrojený úhel 45^0; v náčrtku kvádru je špatně vyznačena viditelnost hran; chybné vynásobení polynomů; chybně vypočtený diskriminant kvadratické rovnice; chybný výpočet na kalkulačce apod.

*d) **Chyby formální**.* Tyto chyby se jeví jako méně závažné, ale mohou se někdy při výpočtech či konstrukcích změnit na chyby věcné, tedy závažné, a proto je jim také třeba věnovat pozornost.

Příklady: chybějící závorky: pokud žák zapíše výraz $3(x-1)-5$ jako $3(x-1-5$, pak ho v dalším výpočtu může zaměnit za $3(x-6)$; krátká čára v symbolu odmocniny: je-li $\sqrt{x^2-2x+1}$ zapsáno jako $\sqrt{x^2-2x}\ +1$; podobně příliš krátká zlomková čára; chybějí pokračovací znaménka operací nebo relací při přechodu výpočtu na nový řádek; rovnítko není na úrovni (hlavní) zlomkové čáry: $x = \frac{2}{3}$, $x = \frac{\frac{1}{2}}{3}$; chybí komentáře tam, kde jsou nezbytné, apod. Patří sem též takřka nečitelné a defektní zápisy.

*e) **Chyby gramatické**.* Patří mezi chyby, které učitel matematiky musí v písemce opravit, ale do hodnocení je zpravidla nezahrnuje. Výjimkou jsou snad jen případy, kdy jde o chyby v matematických termínech, tehdy jde o formální chyby i z hlediska výuky matematiky.

Příklady: logarytmus; kruhová víseč; řídící přímka; rovnostraný trojůhelník; dvěmi body; cosinova věta, oběm kvádru.

f) Chyby zdánlivé. Někdy učitel vyznačí chybu tam, kde se jí žák nedopustil. Může to být např. v případě, kdy si žák při ne zcela přesné formulaci zadání úlohy vyložil svůj úkol jinak, nebo když úlohu řešil nestandardním postupem a ne dost srozumitelně svůj postup komentoval, aj. Když se takový žák přihlásí s námitkou, měl by učitel rychle rozpoznat, zda jde skutečně o žákovu chybu nebo nejde, a v tomto druhém případě svou opravu (i případnou klasifikaci) opravit – neboť i učitel se může zmýlit. Pak by měl svůj omyl přiznat nebo se i omluvit (ne se však vymlouvat). Žáci rádi učiteli chybu prominou (pokud je odborně zdatný) s vědomím, že i učitel je jen člověk.

g) Zmýlená. Žáci se při písemkách dosti pletou, ať už z rozrušení, roztržitosti nebo zbrklosti, ale své pochybení zpravidla zlehčují (já to umím, jen jsem se spletl). Jsou rádi, když i učitel jejich spletení bere shovívavě a příliš ho nezapočítává do klasifikace. Jistá shovívavost tu skutečně je na místě; jestliže se studentu gymnázia stane, že ve složitém výpočtu násobí $3 \cdot 6 = 24$, jistě není pochyb, že násobilku šesti umí. Nebo pokud žák nějakou úpravu udělá třikrát dobře a tutéž úpravu pak jednou špatně, lze to odpustit. Ovšem někdy žáci i svou neznalost omlouvají tím, že se jen spletli, např. odstraňují závorku:

(*) $$-(2a - 3b) = -2a - 3b$$

a po opravě to komentují „spletl jsem se jen v blbým znamínku", zatímco učitel v tom může vidět základní neznalost, zvláště kdyby zde šlo o písemku na úpravy algebraických výrazů a tento výpočet by nebyl podepřen jinými správnými; záleží tedy na okolnostech.

Připomeňme zde ještě zvláštní případ zmýlené, který učiteli přidá při opravě dost práce, kdy se žák zmýlí již při záznamu zadání a pak počítá s jinými čísly nebo počítá dokonce něco úplně jiného. Pokud se tím práce nezjednodušila, opraví učitel úlohu jako při správném zadání, ale chybu v zadání kvalifikuje jako formální chybu. Pokud pozměněná úloha ztratila svou hodnotu, pak i dobře vyřešenou úlohu uzná jen jako část řešení zadané úlohy nebo vůbec ne.

Čtenář nechť uváží, u kterých písemek lze požadovat a hodnotit i určitou grafickou úroveň zápisů a konstrukcí.

Některé chyby se jeví jako *chyby zdravého rozumu*; např. žák má vypočítat 32 % ze 65, vyjde mu 208 a žák toto číslo zapíše a podtrhne jako správný výsledek (dopustil se tu „jenom" řádové chyby) – zatímco mu zdravý rozum měl napovědět, že musí vyjít číslo menší než 65, zhruba $\frac{1}{3}$ ze 65. To ovšem může žákovi vytknout „s čistým svědomím" jenom ten učitel matematiky, který se žáky odhady výsledků trénoval (což se však často velmi zanedbává ke škodě výuky matematiky).

Nedostatečný nácvik provádění sebekontroly při řešení matematických úloh je vleklým problémem, většinou na to „není čas". Kritické zhodnocení získaných výsledků (např. formou zkoušky) je však důležité pro život, vede k sebekritičnosti a zvýšené zodpovědnosti za výsledky vlastní práce (*Volfová*, 1977). Ukažme si jednu úlohu, která by žáky měla donutit zamyslet se nad výsledkem.

Úloha 1.4.1.

Ve vesnici je 20 majitelů motorových vozidel (aut a motocyklů), vlastníků aut je o 11 více než vlastníků motocyklů. Kolik lidí vlastní auto a kolik motocykl?

Řešíme-li tuto úlohu mechanicky, vyjde nám 15,5 vlastníků aut a 4,5 vlastníků motocyklů. Co s tím žáci provedou? Kdy je napadne, že vlastníků aut je 16 a vlastníků motocyklů je 5, protože množiny vlastníků nejsou disjunktní, ale jeden majitel motorových vozidel je vlastníkem jak auta, tak motocyklu? A dojdou k tomu, že jsou i další řešení:

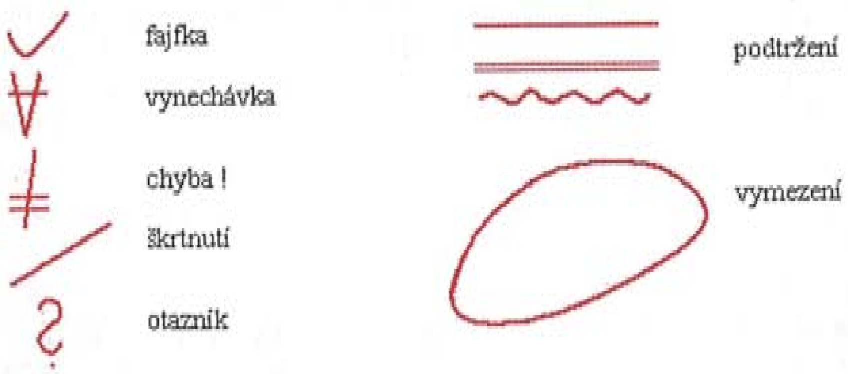
[17; 6], [18; 7], [19; 8], [20; 9]?

1.4.2. Technika opravy

Chápeme-li opravu písemky jakou součást komunikace mezi učitelem a žákem, plyne z toho požadavek, aby učitel svou opravou podal žákovi „rozumné maximum" informací o jeho matematických znalostech a dovednostech, aby to však byl ze strany učitele úsporný způsob. Jedním ze všeobecně srozumitelných, názorných a racionálních prostředků k tomu je univerzální „jazyk oprav", tedy soubor symbolů při opravách zpravidla používaný (viz obr.1.4.1); tyto symboly mohou být samozřejmě doplňovány vhodnými texty.

Použití fajfek. Oprava písemky jako součást konverzace se žákem musí postihovat obě stránky, zápornou (chyby a nedostatky žáka) i kladnou (sdělení, co zvládl dobře), a právě k naplnění toho druhého úkolu slouží fajfky. Používá se zde vyjádření, že „učitel odfajfkuje správný krok".

Použití vynechávky je zřejmé (např. žák vynechal podmínku, část řešení nebo odpověď). Obyčejně je však vhodné doplnit vynechávku textovou nebo symbolickou nápovědí, *co* žák vynechal.



Obr. 1.4.1.

Znak chyby používáme u věcných chyb zejména v případech, kdy je vhodné a možné chybu specifikovat. Např. u příkladu (*) na odstranění závorek (viz předchozí stránku) bychom znakem chyby přetrhli chybné znaménko „mínus" u členu $3b$. Avšak při použití tohoto znaku chyby může jít i o chybnou logickou úvahu, chybnou část konstrukce aj., i zde lze tento symbol doprovodit nápovědí.

Škrtnutí výsledku má své oprávnění, pokud jsme žákovi v průběhu opravy napověděli, kde či v čem udělal chyby. Za této podmínky lze tak škrtnout i části řešení nebo jednotlivé kroky řešení; zpravidla jde o situace, kde jde o kumulované chyby a použití samotného znaku chyby by nebylo výstižné.

Otazník se používá zpravidla pro „lehčí případy", kdy žák jen něco popletl nebo jeho zápis je velmi nepřehledný či s formálními chybami, obrázek je nenázorný, apod. Je-li problematická větší oblast výpočtů, vymezíme čarou tuto oblast, které se náš otazník týká.

***Podtržení** dvěma čarami* se používá zpravidla jako napomenutí žáka, že nepodtrhl výsledek. Podtržení *vlnovkou* se dá přeložit buď jako „takto se v podstatě postupuje, ale s jinými, tedy správnými čísly" anebo při doprovodu s otazníkem jako „cos to tady vyváděl?". Podtržení *jednou čarou* znamená *zdůraznění*, většinou chybného kroku (a pak může být doprovázeno ještě symbolem chyby), ale také tak můžeme zdůraznit správný mezivýsledek (pak přidáme fajfku).

Texty, pokud jsou učitelem připisované do písemek, by měly být stručné, zcela srozumitelné (zápis, který se učiteli zdá v kontextu opravy srozumitelný, se příští den může žákovi jevit jako nejasný) a čitelné (viz učitelův nečitelný zápis: „*Piš čitelně!*") a samozřejmě by měly být bez emocí a ironie.

U klasifikovaných písemek zapíšeme ***známku*** doprovázenou ***parafou*** (podpisovou značkou), a to zpravidla za koncem písemky; pokud ji chceme zapsat hned do záhlaví písemky, měli bychom za koncem písemky udělat ***vidovací značku***, velké písmeno „V." (= viděl, viděla) jako doklad, že jsme prošli a vyhodnotili *celou* písemku. Jestliže mají žáci na písemky zvláštní sešit, zapisují si učitelé často známku z písemky také na přední stranu obalu, aby měli okamžitý přehled o vývoji známek i o tom, kdo kterou písemku nepsal.

1.4.3. Oprava písemky

Učitel by měl přistoupit k opravě písemek dobře připraven, v duševní pohodě, v klidném prostředí umožňujícím plné soustředění a s dostatečnou časovou rezervou (aby ke konci opravy nemusel začít pospíchat). Optimální je, když písemky opraví tak, aby je mohl žákům předložit opravené hned v následující hodině matematiky.

Větší část jeho přípravy na opravu písemek by měla proběhnout už při přípravě úloh na písemku, kdy učitel zadávané úlohy analyzuje a stanoví váhy jednotlivých kroků řešení, viz 0.3 a podrobněji v kap. 2 a 3. Po této analýze učitel tedy zná postup řešení i jeho různé varianty, má k dispozici výsledky i mezivýsledky úloh a připraví si technické prostředky pro kontrolu výpočtů a konstrukcí.

Pro kontrolu předem nastaveného měřítka pro vyhodnocení písemek zkušení učitelé obvykle před opravou nahlédnou do několika písemek (lepších, středních i horších), aby získali představu o celkové úrovni a o fungování připraveného měřítka; přitom se vnoří do problematiky a upřesní si, co budou jak opravovat a hodnotit. V průběhu opravy se pak měřítko stabilizuje, avšak mohou se vyskytnout situace, kdy učitel písemku raději neohodnotí definitivně, ale vrátí se k jejímu hodnocení znovu až po opravě dalších písemek a jejich vzájemném srovnání. Pro učitele bývá jednodušší opravit nejprve např. skupinu A a pak B.

Písemky opravuje bez emocí a poznamenává si typické chyby jako podklad k rozboru písemky a k jejímu celkovému vyhodnocení, případně další poznatky, jež řekne příští hodinu matematiky třídě a co zvlášť jednotlivým žákům (může to i vepsat do jejich písemky jako součást hodnocení).

Je-li výsledek úlohy správný, pak učitel letmo prohlédne i provedené výpočty či konstrukce, aby se přesvědčil, že byly provedeny a jakou metodou (při zvlášť zdařilé žáka pochválí, při velmi neobratné žáka poučí), odfajfkuje výsledek a mezivýsledky (splněné jednotlivé kroky řešení) nebo i zapsané správné úvahy. Když učitel neodfajfkuje formálně jen konečné výsledky, získá žák pocit, že se o jeho práci učitel zajímá a povzbudí ho to.

Pokud se v řešení úlohy vyskytují chyby, nemusí učitel žákovi předložit všechny jeho chyby podrobně specifikované, osvědčuje se dělba práce; např. učitel napoví, *kde* je chyba, a žák musí objevit, *jaké* chyby se dopustil. Z toho plyne postup učitele při opravě. Když vidí chybný výsledek, jde na předchozí mezivýsledky a od posledního správného postupuje krok za krokem, až objeví, kde je chyba (a jaká). Poslední správný krok odfajfkuje a první nesprávný označí pro žáka jako chybný. Učitel však postupuje při opravě dál i po chybném žákově kroku (má-li to v konkrétním případě smysl) a sleduje, jestli žák ovládá další postup (zda umí řešit další jevy) a již žádné další chyby se nedopustil nebo je-li řešení úlohy zatíženo více chybami, a jakými. Jestliže se po žákově chybě (zpravidla méně závažné) řešení příliš nezjednoduší a další postup je na úrovni postupu se správnými hodnotami, pak učitel zpravidla vyznačí (např. vlnovitým podtržením), že správně je to trochu jinak, ale uzná všechny další jevy žákem zvládnuté. Učitel by si měl všímat i toho, co žák v písemce přeškrtal, aby poznal postup jeho myšlení při hledání řešení a jeho nejistoty, což ovšem do hodnocení nezahrnuje; někdy jsou však přeškrtány i správné myšlenky a výsledky, k čemuž se přihlédnout může.

Jestliže učitel objeví u dvou nebo více žáků shodná řešení nebo jejich rozhodující části, kde autorem je *zcela prokazatelně* žák jediný, pak lze doporučit, aby *žádnému z nich* tuto úlohu do celkového hodnocení nezapočítal a při hodnocení písemky tyto žáky veřejně před třídou napomenul (včetně autora řešení).

1.4.4. Vyhodnocení písemky

Vyhodnocení písemky má tři funkce (*Novák*, 2004):

- *diagnostickou*: zjistit objektivně, komplexně a co nejpřesněji stupeň osvojení vědomostí a dovedností, postihnout příčiny zjištěného stavu a odhadnout další vývoj;
- *informační*: dát učiteli zpětnovazební informaci a též informaci žákům a jejich rodičům o kvalitě osvojení matematického učiva;
- *motivační* (*formativní*): motivovat žáky k úspěšné práci v matematice a optimalizovat jejich další učení.

Vyhodnocení písemky se tedy provádí jednak vzhledem k žákům a jednak vzhledem ke třídě a učiteli.

Vyhodnocení písemky vzhledem k žákům má tři fáze:

a) stanovení (změření) výkonu každého žáka na základě opravy písemky (počet získaných bodů),
b) vyhodnocení jeho výkonu a případná klasifikace (kvalita a rozsah vědomostí – co dovede, v čem chybuje, co neumí),

c) vyhodnocení osobnosti žáka (jak si v písemce vedl, jaké jsou jeho možnosti a tendence, jaká opatření by byla vhodná).

Jaké jsou zásady pro hodnocení výkonu žáků (*Vláčilová*, 1979):

- *dynamičnost a komplexnost:* brát výsledek písemky jako prvek vývoje žáka, být náročný, ale zachovávat úctu k žákovi, pedagogický takt a humanizmus;
- *orientace na žákovy kladné stránky:* na jejich základě nasměrovat žáka v optimálním směru jeho vývoje;
- *objektivnost klasifikace:* nezávislost na osobě posuzovatele, bez zaujatosti a předsudků.

Učitel zpravidla vyhodnocuje (případně i známkuje) písemku každého žáka ihned po její opravě, dokud má obrázek o žákově výkonu v čerstvé paměti; viz např. (*Horálek*, 1963), (*Běloun*, 1966), (*Müllerová*, 1975), (*Smida*, 1979), (*Müsiar*, 1989). Oprava všech písemek však chvíli trvá a tak tu vyvstává ne zcela snadný problém *zachování stejného měřítka v průběhu opravy* všech písemek (týká se ovšem hlavně složitějších písemek). Je známo, že nejen různí učitelé se mohou při klasifikaci téže písemky lišit až o dva stupně, ale i jednomu učiteli se v průběhu opravy může pod vlivem subjektivních faktorů deformovat na počátku nastavené měřítko. Proto je vhodné opravit všechny písemky „v jednom zátahu".

Jevová analýza (metoda hodnocených kroků) velmi přispívá k objektivnosti hodnocení v průběhu opravy a k zachování stejného měřítka při měření výkonu žáků. Analýza úloh na písemku (rozdělení řešení do kroků) může být jemnější nebo hrubší. Např. pro hodnocení písemek 2^0, 3^0, 4^0 (viz 1.1) je namístě jemnější analýza, u kratších písemek stačí hrubší. Při opravě pak učitel sečítá, třeba jen v mysli, příslušné body (procenta); je-li hodnocený krok zvládnut jen zčásti, započítá učitel jen část bodů (procent) a vyjde mu tak, do jaké míry byla úloha vyřešena, tedy na kolik procent zvládl žák jevy, jež byly obsahem písemky. Body za všechny úlohy se sečtou (resp. průměr procent za všechny úlohy, případně vážený průměr, mají-li mít úlohy zařazené do písemky různou váhu) a výsledek pak lze proměnit na známku. Obvykle je vhodné, jsou-li všechny zadané úlohy při běžných písemkách váženy stejně nebo přibližně stejně (tj. lehčí i těžší). Ukázky analýzy a hodnocení kroků jsou v kapitole 2 a 3, ukázky oprav a klasifikace v kapitole 3. Při opravě písemky pak jednotlivé kroky žákovského řešení vyhodnotíme a obodujeme, body sečteme a u klasifikované písemky body převedeme na známku. Nejspolehlivější je připravit si před opravou tabulku, kde *v záhlaví jsou body za úplné vyřešení jednotlivých kroků* a při opravě do ní *zapisovat body, které žák za jednotlivé kroky získá*; uvádíme ukázku tabulky pro trojúlohovou písemku (tab. 1). Tato tabulka je pak pro učitele jedním z podkladů pro naplnění diagnostické funkce hodnocení.

	Úloha 1.					Úloha 2.				Úloha 3.							
Jméno žáka:	1	2	3	2	Σ	2	3	1	Σ	1	2	2	1	2	Σ	Σ	Kl.
1. žák																	
atd.																	

Tab. 1

Vypracování takové tabulky při opravě písemky se na první pohled může zdát příliš pracné a časově náročné, ale je třeba si uvědomit, že *soustavná diagnóza vyučovacího* *procesu je nezbytnou povinností učitele.* (Akceptování písemky jedině jako zdroj známek a jako donucovací prostředek k tomu, aby se žáci učili matematiku, lze ohodnotit jako didaktické barbarství.) Uvedená tabulka dává výborný přehled o jednotlivých žácích (horizontálně), ale co je pro vyučujícího velmi důležité, dovede podle ní (vertikálně) vyhodnotit souhrnně, jak třída zvládla jednotlivé jevy (= vyhodnocení písemky vzhledem ke třídě) – hodnocené kroky (za uspokojivý výsledek se zpravidla bere 70% úspěšnost jejich vyřešení). Proto někteří učitelé používají tyto zápisy do tabulek i u kratších písemek, když mají posuzovat, jak bylo zvládnuto probrané učivo. Získávají tak cenné podklady pro další vedení výuky.

Některým učitelům nestačí výsledné zhodnocení písemky, resp. výsledná známka, ale chtějí hodnotit výkony svých žáků podrobněji. Rozdělí si látku aktuálního čtvrtletí na sledované celky (větší skupiny souvisejících jevů) a hodnotí žáky i zvlášť v těchto celcích – k tomu si zorganizují i záznamy ve svém „notesu". Např. v analytické geometrii by to mohly být celky 1. Vektory, 2. Analytická geometrie bodů a přímek v rovině, 3. Analytická geometrie bodů, přímek a rovin v prostoru, 4. Kuželosečky. Při hodnocení písemky pak pomocí vyplněné tabulky 1 oznámkují zvlášť orientačními známkami (zapsanými jen pro sebe) žáky v těch celcích, které se v písemce vyskytly. Časem tak získají u každého celku posloupnost známek, která jim graficky ukazuje, jak si který žák vede v jednotlivých částech učiva, zda se zlepšuje, zda si už doplnil dřívější neznalosti, ad.

U písemek, které se neklasifikují, lze také použít zjednodušené tabulky; uveďme ukázku tabulky pro čtyřúlohovou písemku (tab. 2).

Místo počtu bodů jsou vepsána jen *pořadová čísla kroků* a splnění jednotlivých kroků lze pak zaznamenávat jen grafickými symboly, např.: + (krok je dobře), / (dobře, jen s nepodstatnou chybou), – (krok je špatně), o (krok nebyl vykonán).

	Úloha 1.					Úloha 2.				Úloha 3.			Úloha 4.		
Jméno žáka:	1	2	3	4	5	1	2	3	4	1	2	3	1	2	3
1. žák															
atd.															

Tab. 2

Připomeňme si, proč nestačí pracovat jen s opravou výsledků a mezivýsledků (tj. bez jevové analýzy). I při zodpovědném postupu totiž v tomto případě učitel nemusí získat dobrou (podrobnou a spolehlivou) informaci o stavu třídy, získá jen povšechné informace. Nepostihne tak, v kterých matematických *jevech* žáci převážně chybují a jakým jevům je tedy dále třeba věnovat zvýšenou pozornost. Ovšem jen opravdu zkušený učitel v málo početné třídě by mohl při opravě jen podle výsledků spolehlivě postihnout i statistiku úspěšnosti žáků v jednotlivých jevech a mohl by zjednat přesně cílenou nápravu.

Jsou bohužel učitelé, kteří při opravě používají jen fajfku a škrtnutí (učitelé – škrtači), tj. dobrý celkový výsledek odfajfkují (i když jsou třeba v postupu chyby) a špatný výsledek škrtnou (i když jde třeba o drobnou numerickou chybu) – a s opravou jsou hotovi. Tento postup ovšem není v souladu s učitelskou způsobilostí k výuce matematiky. Tito učitelé pak za správný výsledek dají plný počet bodů (jedničku) a za chybný (škrtnutý) výsledek 0 bodů (pětku), takže si vlastně písemku pletou s *testy s výběrovou odpovědí*. U písemek tento způsob „vyhodnocování" musíme zamítnout, neboť při opravě písemky nejde jen o to, kolik úloh „je dobře" a kolik „je špatně" (jen do jisté míry s výjimkou „prověrek správného výsledku", viz str. 26), ale o to, nakolik a jak dovede žák úlohu řešit. Navíc písemky přitom mají dát učiteli mnohem hlubší a všestrannější informaci o každém žákovi, o třídě jako celku a o tom, jak se učiteli dařila jeho vzdělávací a výchovná práce.

Při vyhodnocování písemek *vzhledem k žákům* jsou mimořádně významná dvě hlediska, která se velmi často dají z písemky abstrahovat – jak žák látce rozumí a jak se ji učí. Ideální žák látce rozumí a učí se, takovému žákovi lze zadávat mimořádné a obtížnější úlohy, případně ho trénovat na účast v matematických soutěžích. Pak existuje skupina žáků, kteří do věci moc nevidí, ale učí se a dovedou řešit úlohy na základě vzorového řešení; těmto žákům je třeba pomoci k hlubšímu pochopení, oč v matematice jde. Pak tu jsou žáci, kterým to vcelku dobře v matematice myslí, pamatují si, mají prostorovou představivost, ale příliš spoléhají na své schopnosti a při písemkách někdy „kouzlí" originální (ale ne vždy nejlepší) postupy prostě jen proto, že jim část učiva unikla. I takové žáky lze zapojit do soutěží, kde se mohou přesvědčit, že je potřebné nejen myšlení, ale i znalosti. A pak tu jsou žáci, kteří matematice nerozumí a neučí se. Ti potřebují velké povzbuzení – aby porozuměli a dostali alespoň trochu chuti učit se. Ono je to tak, že když se někdo pravidelně a rozumně něco učí, má šanci tomu i dobře porozumět.

Zodpovědně opravená písemka dává učiteli řadu informací také o osobnosti žáka ve spojení s matematikou – kdo postupuje uvážlivě, kdo zbrkle, kdo je jistý a má nad látkou určitý nadhled (např. provádí i více operací najednou), kdo je naopak nejistý a bezradně tápe, kdo umí přemýšlet a kdo jen reprodukuje, aj. Učitel trvale sleduje stav matematických znalostí žáků (resp. jejich uplatnění v písemkách) a vyhodnocuje, kde došlo k pokroku, kde naopak, a jak nadále motivovat jednotlivé žáky pro matematiku.

Zná-li učitel své žáky, pak – řekněme – na 90 % dovede odhadnout, jak si kdo při písemce povede. Zbývající procenta znamenají „překvapení" směrem nahoru či dolů a ta pozitivní by měl učitel ocenit i slovně (pokud si je jistý, že příčinou „zlepšení" nebylo opisování). Neměl by ovšem setrvávat na svém jednou vytvořeném názoru na žáka a měl by sledovat, zda tato uvedená „překvapení" jsou jen dočasnou výchylkou nebo začínající tendencí ke zlepšování žáka nebo k jeho zhoršování, případně by si měl promyslet vhodné podněty na pomoc takovému žákovi. Citlivě a individuálně je třeba řešit případy ojedinělého neúspěchu žáků jinak dobrých a spolehlivě pracujících, nikoli ovšem umělým zlepšováním klasifikace písemky. Pokud má učitel novou třídu a žáky ještě nezná (také např. u přijímacích zkoušek) jsou výsledky písemky jakýmsi generátorem vytvářejícím jeho základní orientaci a názory na žáky. Měl by si však být vědom jisté relativnosti svého pohledu.

Učitel vyhodnocuje písemky i vůči sobě, neboť při opravě všech druhů písemek učitel pomocí jevové analýzy získává poznatky, které se vztahují k jeho výuce minulé i budoucí (jak zkoušenou látku naučil, co se mu nepodařilo, co musí příště udělat lépe). Nestačí tedy písemku jen opravit, ale je třeba *odhalit příčiny nedostatků a chyb* a snažit se je odstranit. Písemka napoví, co bude třeba ještě zopakovat, k čemu se stále vracet a co *stále* promyšleně opakovat, co procvičit a zdůraznit, co třeba i znovu probrat, kde bude zapotřebí individuální doučování.

Při vyhodnocování písemek je vhodné uvažovat z pohledu učitele i další roztřídění chyb (mimo toho, jež jsme uvedli v 1.4.1), a to podle:

– *kognitivní hodnoty*: chyby smysluplné – nesmysluplné;

– *nositele chyby*: chyby individuální – hromadné;

– *závažnosti*: chyby podstatné – nepodstatné;

– *typičnosti*: chyby běžné – neobvyklé;

– *organizovanosti*: chyby pravidelné – nahodilé.

Takové vyhodnocení je vhodné sdělit i žákům. Důležité je vštěpovat jim přitom *umění učit se z vlastních chyb*, což je zásada platná pro celý život. Žák si každou svou chybu musí *uvědomit*, aby se jí příště vyvaroval, jak bylo probráno v 1.4.1. Nemělo by dojít k pasivní opravě písemek, kdy žáci bezmyšlenkovitě opisují z tabule správné řešení.

Zvlášť výrazně si učitel musí uvědomit hromadné chyby, tj. chyby, které udělalo hodně žáků nebo dokonce celá třída. Znamená to totiž, že se stala chyba v jeho výuce, kterou je třeba ihned napravit.

Výsledky písemky by měl učitel nést bez přílišných emocí. Jestliže písemka dopadla „velmi pěkně", může mít radost, ale měl by se nejprve zamyslet, zda nedal příliš lehké úlohy nebo zda mu neunikla rozsáhlá spolupráce žáků při písemce. Jestliže písemka dopadla naopak „velmi špatně", měl by překonat své záporné pocity a v souladu s vyhodnocením písemky přemýšlet nad tím, zda nedal nepřiměřeně těžké (vzhledem k úrovni třídy) úlohy (viz dále str. 42), nebo co ve své výuce má napravit, jak jsme již rozebrali výše. Měl by si také dobře promyslet, co řekne třídě.

Vyučovací hodinu, v níž se opravuje písemka, lze velmi efektivně výchovně využít. Předně tím, že na počátku provede učitel důkladný rozbor nejčastějších chyb a sdělí žákům další své poznatky, ke kterým došel při opravě a vyhodnocování písemky. Někteří učitelé rozdělují rozhovor o písemce na dvě části. V první části iniciují „rozhovor o písemce" – názory žáků na její zaměření a obtížnost a vysvětlení učitele a jeho vyhodnocení hlavních pozitivních poznatků a hlavních nedostatků, ve druhé části se pak rozdají opravené písemky a učitel sdělí připravené konkrétní poznatky, které už mohou žáci sledovat ve svých písemkách. Pak teprve přistoupí k opravě svých písemek.

Znovu zdůrazněme, že je to zpravidla především kladné hodnocení, které je u žáků stimulem úspěšného učení. Pro získání zájmu žáků a jejich aktivní účasti při vyučování matematice je tato skutečnost velmi závažná. Proto i u písemek, které neklasifikujeme, neopomeňme pochválit žáky, kteří si to za své úsilí a výsledky zasloužili, ale také při hodnocení těch „průměrných" se pokusme najít něco, čím bychom žáky povzbudili. Ovšem ani situace, kdy žáka není za co pochválit (má špatnou známku), by žáka neměla degradovat v jeho očích a v očích spolužáků, zde záleží na situaci, na pohlaví a věku žáka, na učitelových znalostech žáků a na jeho taktu. Jestliže žák při písemce neuspěje, přesvědčíme se zpravidla nejprve o rozsahu příčin jeho neúspěchu ústním přezkoušením, poradíme mu a dáme mu v přiměřené lhůtě novou příležitost, aby prokázal, že mezery ve svých vědomostech už odstranil. Není správné hodnotit žáka na konci klasifikačního období horší známkou jen na základě neúspěšné písemky.

Na závěr hodnocení bychom měli mít velkou míru jistoty, že naše hodnocení je *objektivní a spolehlivé*, i zda je *platné* (tj. že se výsledek skutečně vztahuje k tomu, co se vyzkoušet mělo; to se však řeší již ve fázi přípravy písemky). Učitel, který se svými žáky píše samostatné práce a písemky častěji, má větší naději, že vyhodnocení písemky odráží stav v úsecích, jichž se písemky týkají.

1.4.5. Klasifikace

I pro písemky platí, že hodnocení žáků a jejich výkonů je jedna z nejobtížnějších činností učitele (Slavík, 1999). (Přitom cílem hodnocení není jen „známkování", ale též navození pracovní motivace a pohody.) Jak postihnout číslem (známkou, počtem bodů nebo několika slovy) ty přepestré poznatky o žákovi, získané opravou písemky v kontextu s jeho osobností? Co např. s pomalejším žákem, kterému to matematicky myslí, ale který nestíhá vypracovat celou písemku? Proto u některých pracovníků vznikla nevole vůči bodům i známkám na základě názoru, že mnohostranný výkon žáka nelze redukovat na počet bodů či na jednu výslednou číslici – známku. Avšak uvědomme si, že takový postup je běžný třeba v řadě sportů, kde se i komplikovaný „umělecký dojem" vyjadřuje počtem bodů. Jestliže uvážíme, že počet bodů či známky z písemek nejsou jediným zdrojem klasifikace žáka, je tu ještě ústní zkoušení a výsledky soustavného pozorování (reakcí na učivo, snahy a aktivity žáka, atd.), a že tedy vše ostatní o žákových kvalitách je zaznamenáno v mysli učitele (nebo i v jeho notesu v podobě různých písmen a značek) a promítne se do průběžného hodnocení žáka, lze bodování a známkování písemek jako podklad pro klasifikaci přijmout. Jinou alternativou je slovní hodnocení, které je značně náročnější, nemá-li být jen formální, a kterým lze známku vždy i doplnit. (Při slovním hodnocení jako jediném by učitelské notesy musely hodně ztloustnout, kdyby si učitelé i pro sebe chtěli zaznamenat vše, co by vepsali žákům.)

Uveďme si nyní několik poznatků o klasifikaci. Nejprve krátce citujme z (*Mikulčák – Hradecký – Zedek*, 1964) podle tehdejšího přístupu.

‚Při klasifikaci jedné úlohy nebo skupiny obdobných úloh hodnotíme známkou

1 úplné vyřešení bez chyb nebo s 1 – 2 nepodstatnými chybami, je-li postup řešení originální, svědčící o samostatnosti myšlení;

2 řešení se 2 – 3 nepodstatnými chybami;

3 řešení s hrubou chybou nebo s více malými chybami;

4 řešení se dvěma hrubými chybami nebo s jednou hrubou a s více malými chybami;

5 řešení s více než dvěma hrubými chybami.

Při klasifikaci skupiny úloh různé obtížnosti si všímáme především úloh, které se řešily postupy analogickými ke vzorově řešeným úlohám ve škole. Vyřeší-li žák takové úlohy a jen s malými chybami, hodnotíme práci známkou 3; vyřeší-li žák takové úlohy s hrubou chybou, hodnotíme práci známkou 4; řešil-li žák úlohy s více hrubými chybami, je práce nedostatečná. Vyřešil-li žák i úlohy obtížnější a jen s malými chybami, hodnotíme práci známkou 2; je-li řešení bez chyb, je práce výborná. (Pokud se stejná chyba v písemce opakuje vícekrát, považuje se za chybu jedinou.)‘

Uvědomme si, že při tomto způsobu klasifikace hodnotíme žáka vlastně podle toho, *co neumí, kolik toho udělá špatného*. Je to jistě jedna z možností. My se však budeme dále zabývat přístupem pozitivním, *jevovou analýzou – metodou hodnocených kroků*, kdy se žák hodnotí podle toho, *co umí, kolik toho udělá dobrého*. Uvědomíme si, že klasifikace na základě jevové analýzy je vysoce humánní metoda, která mj. dává žákovi šanci získat lepší hodnocení, i když nedokončil danou úlohu nebo se nepodstatně zmýlil. Chyby se tu nedémonizují, ale zaujímají jen předem vymezené podíly hodnocení (*Kaeladisová*, 1985).

O klasifikaci písemek toho lze napsat hodně, ale žádný správný a dostatečně podrobný návod k provádění objektivní a spravedlivé klasifikace neexistuje. Matematických stránek rozvoje žákovy osobnosti je více (stupeň osvojení učiva, jak tomu rozumí, jak dovede abstraktně myslet, jak je bystrý, jak dovede samostatně řešit matematické úlohy, jakou má prostorovou představivost, jak je pořádný a pečlivý, jak se dovede naučit, jak přesně a výstižně se dovede matematicky vyjadřovat, jaká je kvalita jeho grafického projevu a písemného vyjadřování, jaký je jeho zájem o matematiku aj.).

Hodnocení a klasifikace má několik stránek: *výchovné poslání* (má jít o kladné podněty, ne o kárné prostředky), *poslání diagnostické* (jaké matematické úrovně už žák dosáhl a co mu ještě chybí), *společenský význam* (podnět pro žákovy rodiče a pro spolužáky), viz též str. 36. Klasifikace by měla být objektivní, středně přísná, spravedlivá, objektivně zdůvodnitelná. Žáci by měli být vedeni k zodpovědnosti za svou práci a být schopni kritického pohledu na její výsledky. Každý žák by tak měl být přesvědčen o spravedlivosti své známky, neměl by v něm vzniknout pocit nějaké křivdy.

Učitel se může rozhodnout, že danou písemku nebude klasifikovat, a rozhodne se buď předem (a sdělí to žákům) nebo až při opravě. Tento krok je zcela oprávněný, zejména když učitel neodhadl stav výuky matematiky a téměř všichni žáci by z písemky měli dostat pětku (či jedničku). Má-li nevyhovující písemku velká část třídy, pak výsledek svědčí o tom, že učitel zadal úkol nepřiměřený nebo bez dostatečného procvičení učiva. V takovém případě tedy písemku neklasifikujeme, učivo zopakujeme nebo probereme znovu a písemku (s jinými úlohami) napíšeme znovu. Příliš mnoho jedniček pak zase zpravidla svědčí o přílišné jednoduchosti a snadnosti písemky.

A nyní přistoupíme k informacím o praktickém provádění klasifikace písemek podle počtu procent, resp. bodů, které se mohou stát objektivním podkladem pro zhodnocení písemky.

Pro převod procent či bodů na známku si učitel vytvoří převodní tabulku, viz např. tab. 3, v níž je použit převod, který nazveme *rovnoměrný*.

%	Body	Klasifikace
100 – 88	4	1
87 – 63	3	2
62 – 38	2	3
37 – 13	1	4
12 – 0	0	5

Tab. 3

Nyní několik slov k „mínuskám". Ze statistiky plyne – viz (*Chráska*, 1999), že dosáhne-li žák výkonu na hranici klasifikačních intervalů (viz tab. 3, např. 63 %), nelze z toho u písemek činit jednoznačné závěry. Proto když chce učitel vyjádřit, že jde o tento případ, např. že výkon je na hranici intervalu známky 2 a intervalu známky 3, může si zaznamenat, že známka je mezi 2 – 3, stručně 2– . Takové je tedy postavení a odůvodnění „mínusek" z našeho pohledu. V tabulce 4 máme zahrnuty dvě možnosti převodu procent na body a na klasifikaci. V levé polovině tabulky je uveden rovnoměrný převod procent na osmibodovou stupnici a vynecháme-li v tabulce 3. sloupec, tak i na klasifikaci „s mínuskami". Druhý převod procent na známky spočívá na logické úvaze, že interval „hraničního pásma nejistoty" mezi dvěma „normálními" známkami je vhodné poněkud zúžit a to tak, že interval mezi dvěma známkami rozdělíme na tři stejné díly a prostřední z nich je tím „hraničním pásmem", tedy pásmem mínusek; viz pravou polovinu tabulky 4.

%	Body	%	Klasifikace
100 – 94	8	100 – 92	1
93 – 82	7	91 – 84	1–
81 – 69	6	83 – 67	2
68 – 57	5	66 – 59	2–
56 – 44	4	58 – 42	3
43 – 32	3	41 – 34	3–
31 – 19	2	33 – 17	4
18 – 7	1	16 – 9	4–
6 – 0	0	8 – 0	5

Tab. 4

Úřední klasifikace je pětistupňová. Učiteli však nemůže nikdo bránit, aby si zaznamenával hodnocení žákovských výkonů v jemnější škále, dokonce to lze považovat za vhodné. Používá-li mínusek, rozšiřuje si tím 5 oficielních stupňů na 9. Vidíme tedy, že používání „mínusek" je podobné jako bodování písemky osmi body, a v podstatě co bod, to půl stupně klasifikační stupnice. (Kromě mínusek si většina učitelů zaznamenává do svých notesů i některé další „své" symboly – malé známky, barevné známky, různá + a –, různá písmena apod. – podchycující i různé jiné stránky žákova výkonu a fakticky zčásti zastupující slovní hodnocení).

Body	Výpočet	Klasifikace
22 – 20	B až 0,88 · B	1
19 – 14	0,87 · B až 0,63 · B	2
13 – 9	0,62 · B až 0,38 · B	3
8 – 3	0,37 · B až 0,13 · B	4
2 – 0	0,12 · B až 0	5

Tab. 5 (Rozpis klasifikace při maximu B =22 bodů za písemku.)

Učitelé, kteří zapisují pro sebe i známky s „mínuskami", ale navenek dávají známky bez nich, pak zpravidla místo svého např. 1– zapíší žákovi 2 apod. (i jako prevenci reklamací výsledné známky z matematiky ze strany žáků i jejich rodičů). Pracují-li výhradně s čistou pětistupňovou klasifikací, použijí samozřejmě jen tabulku 3.

Není-li písemka bodována procenty, ale jiným počtem bodů, např. zadaný maximálně dosažitelný počet bodů je B = 22, lze klasifikační stupnici přepočítat v souladu s tab. 3 na zadaný počet bodů (viz tab. 5). Při těchto výpočtech zaokrouhlujeme většinou dolní mez nahoru, např. pro první stupeň máme $22 \cdot 0{,}88 = 19{,}36$, zaokrouhlíme na 20.)

Námi uvedenou *rovnoměrnou tabulku si učitel může upravit na základě svých poznatků a zkušeností*, ale lze ji považovat za výchozí a obecně použitelnou, i když ve své humánnosti je poměrně shovívavá ke slabším žákům. Jestliže sledujeme pokyny ke klasifikaci písemek při přijímacích zkouškách i jiných kontrolních zkouškách předkládané v uplynulých desítkách let a publikované matematických didaktických časopisech, najdeme tu sice nejrůznější přístupy, které se však neliší nějak podstatně od zde uvažované rovnoměrné stupnice; viz např. (*Běloun – Barták – Šůla*, 1978), (*Novák*, 2004).

Zkrácený způsob hodnocení a klasifikace

Na závěr této části o klasifikaci písemek dodejme, že mnozí zkušení učitelé u písemek 1^0 i 2^0 dle 1.1, zejména u těch jednodušších, používají pro rychlou opravu *zkrácený způsob hodnocení a klasifikace*. V předchozí tabulce jsme viděli, že pro klasifikaci je docela efektivní, když se písemka boduje osmi body a když v ní jsou 4 úlohy (*Volf*, 1976); v tomto případě je jedna úloha za 2 body, tedy půl řešení je za 1 bod (analýza řešení je tedy redukována na dva hodnocené kroky, každý za 1 bod). Po provedené opravě ihned spočítají, kolik bodů žák získal (b), a zapíší známku $z_1 = 5 - \lfloor 0{,}5 \cdot b \rfloor$ ($\lfloor x \rfloor$značí tzv. dolní celou část čísla x) a pro sebe, pokud používají u známek i znaménka „mínus", si zapíší známku dle vzorce $z_2 = 5 - 0{,}5 \cdot b$ (tj. např. 2,5 je 2–), jak to odpovídá tabulce 3. Vidíme, že při tomto postupu se vlastně boduje polovinami úloh, takže o nějakých abstraktních bodech se nemusí uvažovat, stačí pracovat s těmito polovinami úloh. Je však důležité, aby přitom učitel dovedl postihnout, zda žáci zvládli jednotlivé jevy, jejichž prověření je cílem písemky, a je otázka zkušeností učitele, jestli a nakolik to při tomto způsobu opravy a klasifikace zjistí. Výhody zkráceného způsobu klasifikace čtyřúlohových písemek využívají někteří učitelé i tak, že na písemku dají jen dvě úlohy, ale takové, aby každou z nich bylo možno posuzovat opět jako dvě.

Při používání zkráceného způsobu klasifikace postupují pak při generování známky někteří učitelé pozitivně, jiní negativně; vysvětleme to opět na čtyřúlohové písemce. V prvním případě má žák na počátku opravy pětku a s každou uznanou polovinou úlohy si zlepšuje klasifikaci o půl stupně. Ve druhém případě má žák na počátku opravy jedničku a s každou neuznanou polovinou úlohy se jeho klasifikace o půl stupně zhorší. I když se principielně mají hodnotit znalosti, nikoli neznalosti, měly by se nakonec oba tyto způsoby klasifikace sejít u stejné známky. Tento zkrácený způsob klasifikace nemusí být vždy jednoduše použitelný, např. máme-li písemku s jiným počtem úloh nebo když chceme, aby úlohy měly při hodnocení různou váhu, a *nelze ho už vůbec doporučit jako způsob univerzální*.

1.4.6. Podněty ze školské praxe

Učitelé, kteří přemýšlejí o své práci a chtějí vyzkoušet něco nového, co by přineslo vyšší efektivitu výuky, zkoušejí různé metody. Uveďme několik ukázek publikovaných v uplynulých letech v časopisech Matematika ve škole, Matematika a fyzika ve škole a Matematika-fyzika-informatika (seřazených v abecedním pořadí podle příjmení autorů).

Učitel *Jaroslav Barták* z Kladna (*Barták*, 1970) si k jednotlivým tématům vypracoval soubory úloh (např. Goniometrické rovnice I, Goniometrické rovnice II). Na každém listu souboru byla skupina asi půl druhé desítky úloh seřazených od nejjednodušších ke složitějším a listů s různými skupinami úloh bylo tolik, aby vždy nejvýše tři žáci ze třídy řešili tytéž úlohy. Listy používal opakovaně pro samostatné práce, písemky i pro domácí práce (typu: promyslet si řešení těch a těch úloh) a důmyslným schématem rozdávání listů dosahoval toho, že každý žák se setkal vždy s jinými úlohami. Současně dosáhl individuálního přístupu – lepší žáci mohli řešit složitější úlohy a se slabšími někdy současně počítal společně.

Pan *Antonín Franek* z KPÚ v Olomouci (*Franek*, 1985) popsal využití barevných karet k racionalizaci kontroly výsledků samostatných prací. Po provedené samostatné práci zvedli žáci na výzvu učitele příslušné barevné karty symbolizující výsledek a učitel měl jediným pohledem přehled, jak si který žák počínal.

Učitelka *Ludmila Frantíková* z Dačic (*Frantíková*, 1953) sdělila tuto zkušenost ze ZŠ: žáci píší každý týden pětiminutovku (úlohy připravuje vyučující) a také téměř každý týden delší (klasifikovanou) kontrolní práci (vždy po ukončení a procvičení nějakého úseku látky) ze zadání v učebnici (nebo ve sbírce úloh); písemka je vždy opravena do příští hodiny, dokud je téma „žhavé". Výsledný efekt stojí za pozornost – písemky ztratí svůj punc mimořádnosti, neboť žáci si na ně zvyknou jako na běžnou součást výuky a ve snaze získat dobrou známku se zajímají o dosud neřešené úlohy z učebnice či sbírky (některé z nich budou na písemce) a tím se písemky stávají podnětem k zvýšení aktivity žáků a k jejich samostatné práci. Navíc časté písemky působí, že se žádný žák nemůže spolehnout na to, že po vyvolání k tabuli bude ponechán nějakou dobu v klidu, takže jsou tu trvalé podněty pro žáky, aby pracovali soustavně.

Učitel *Václav Kameníček* z Jeseníku (*Kameníček*, 1966) si uvědomoval, že jeho žáci jsou bezprostředně po písemce velmi aktivní a mají velký zájem o to, jestli mají úlohy správně vyřešené a jak tedy dopadli. Tak pro ně vymyslel mechanickou pomůcku – desku s maskou, která odhalovala jen čistý papír a zadání (každý žák měl jiné). Žák úlohu vyřešil, nevratně přesunul masku a ukázal se mu správný postup řešení, takže své řešení (které už nemohl dodatečně upravovat, neboť bylo schováno za plexisklem masky) mohl srovnat se správným řešením a ihned si uvědomit své chyby. Žákům se pomůcka líbila, protože jim hned dala požadovanou odpověď. Příprava takové písemky byla ovšem velmi pracná, takže náš učitel si jistě zasloužil uznání za přemýšlivost a obětavost.

Učitelka *Hana Lišková* z Litomyšle (*Lišková*, 1993) vyzkoušela systém, kdy se neznámkují žáci zkoušení u tabule (jako prevence stresů) a kdy se klasifikace zakládá na systému častějších krátkých dobrovolných písemek, tj. které sice píší všichni žáci, ale po vypracování odevzdá písemku ke klasifikaci jen ten, kdo chce. Malý počet odevzdaných písemek některých žáků svědčí pak o jejich malé sebedůvěře, nepostačujících vědomostech, nedostatečném pracovním tempu nebo o vlastním nadhodnocování a přihlíží se k němu při čtvrtletní klasifikaci. (Povinné klasifikační písemky se konají normálně.) Ukázalo se, že je to metoda použitelná spíše u starších žáků a že je třeba situaci ve třídě sledovat, aby někteří žáci neztratili motivaci vůbec se matematiku učit.

Učitel *Jiří Machala* z Prahy (*Machala*, 1968) používal kartotéku písemek takto: Každý žák dostal při písemce kartu se čtyřmi úlohami, na každé kartě byly jiné, takže byla zaručena samostatnost práce, případné opisování bylo vyloučeno. Pro učitele byla ovšem příprava písemek dosti náročná, ale šlo zde hlavně o úlohy nepříliš komplikované. Kdo z žáků skončil s písemkou předčasně, dostal další kartu s obtížnějšími úlohami, za ni však nemusel přijmout známku, pokud se mu nelíbila. Někdy však učitel písemky neznámkoval. Tytéž úlohy se mohly použít i podruhé, ale s větším časovým odstupem. Tím, že se úlohy na kartách lišily, byla malá pravděpodobnost, že by některý žák psal znovu tutéž písemku.

Učitelka *Martina Račková* z Banské Štiavnice (*Račková*, 2000) uzavírá se svými žáky dohodu o způsobu jejich hodnocení, do níž patří: žáci mohou spolurozhodovat, co, kdy a jak se bude hodnotit, všechno, co si žáci pokazí mají šanci napravit, uzavřená dohoda platí pro obě strany, žáci mohou předkládat, s čím si nevědí rady a mohou předkládat i matematické zajímavosti. Velké písemky se hodnotí na % , která se dají převést na známky, malé písemky se bodují a body lze převést na % a je dohodnuta váha písemek a způsob výpočtu klasifikace. Způsob hodnocení se osvědčil – žáci zjistili, že si známku „vyrábějí" sami a mohou se rozhodnout, co dělat, aby byli úspěšní a získali potřebné body a procenta.(např. dobrovolné domácí úkoly, opakovaná písemka apod.).

Učitel *Jan Voříšek* ze základní školy v Ústí nad Labem (*Voříšek*, 1973) byl zastáncem názoru, že je třeba, aby si učitel ověřoval častěji kratšími písemnými pracemi stav vědomostí, dovedností a návyků žáků v matematice a soustavně odstraňoval vyskytující se nedostatky dalším procvičováním a opakováním učiva. Po procvičení i menšího celku se může zadat kratší písemná kontrolní práce. Řekl k tomu: „Sestavení kontrolní práce dá dost přemýšlení, aby obsah úloh byl rozmanitý, žákům blízký a obsahoval prvky probraného učiva. Každá kontrolní práce má obsahovat úlohy, které vyřeší i slabší žáci, ale také dostatek úloh pro žáky dobré, aby byli zaměstnáni po celou dobu věnovanou kontrolní práci. Poslední úloha každé kontrolní práce je pak poněkud obtížnější. Snažím se vytvářet takové úlohy, při jejichž řešení by žák uplatnil své znalosti a důvtip a byl nucen uvažovat, i když třeba jen numericky počítá. V geometrických úlohách má také prokázat schopnost úhledného rýsování a přesnost v naměřování zadaných rozměrů." ; k tomu viz též (*Krňan*, 1950).

Učitelka *Eliška Wildhageová* z Prahy (*Wildhageová*, 1977) mimořádně dbala na to, aby se žáci ze svých chyb v písemkách patřičně poučili. Po opravě písemky chtěla, aby vyvolaný žák dovedl říci, jakých chyb se v písemce dopustil. Také žádala, aby si žáci vypisovali chyby ve svých řešeních zvlášť, měli tak přehled o svých nedostatcích a mohli je uvědoměle a snadněji napravovat. Razila též (správnou) zásadu pro žáky, že i matematika se musí učit, jinak vznikají mezery ve vědomostech a tím i nezdary vedoucí ke ztrátě zájmu o matematiku.

Avšak nejen v minulosti přemýšleli učitelé o své práci, když hledali a vymýšleli účinné metody a prostředky pro uplatnění samostatné práce žáků s cílem získání co nejlepších edukačních výsledků. Nastupující éra informačních technologií (počítače, internet, aj.) dává dostatek podnětů i učitelům dnešním.

2. Databáze písemkových úloh

2.1. Příprava databáze

V části 1.2 bylo doporučeno, aby si učitel postupně vytvářel svou databázi písemkových úloh. Učitelovou databází budeme rozumět jeho sbírku úloh, případně sestav úloh vhodných a připravených k použití pro zadání písemky. Samozřejmě taková databáze musí žít, tedy úlohy je třeba obměňovat, doplňovat další, vyřazovat ty, které se ukázaly jako málo vhodné, zohledňovat zaměření tříd, věk žáků (při přesunech tématu do jiného ročníku) apod. Každou úlohu je třeba mít alespoň ve dvou rovnocenných verzích, při výuce v paralelních třídách pak alespoň ve čtyřech verzích s tím, že úlohy ve dvojici jsou blízké, ale druhá dvojice se od první může lišit o něco více (žáci si říkají, z čeho psali písemku).

Je-li učivo jednoduché, nebývá problémem vytvořit třeba i více verzí úloh. Ovšem u učiva, které není zcela jednoduché, může být výběr vhodných partnerských úloh A, B dost obtížný a nelze prostě vzít libovolné dvě úlohy z učebnice nebo sbírky úloh, nechceme-li se při opravě setkat s nepříjemným překvapením (např. že při klasifikaci pak jsou v A samé dvojky a v B samé čtyřky). A dodejme ještě, že u složitějších středoškolských úloh uděláme někdy při sestavování úlohy několik marných pokusů, protože se nám řešení z různých důvodů nelíbí.

Žáci jsou totiž zpravidla citliví na různé jevy, s nimiž se při řešení setkají. I když jde třeba z věcného hlediska o rozdíly nepodstatné, v atmosféře psané písemky se žákům (zejména těm průměrným a slabším) může situace jevit zcela jinak. Uveďme několik příkladů, kdy může být jedna ze skupin nepřiměřeně zvýhodněna či znevýhodněna (ve tvaru dvojic jevů – u jedné skupiny se vyskytne jev napsaný před lomítkem /, u druhé skupiny napsaný za ním):

- běžné označení proměnných, geometrických útvarů, ... / neobvyklé označení;
- pracuje se jen s čísly kladnými / i s čísly zápornými;
- pracuje se s celými čísly / se zlomky a odmocninami;
- v zadání a v řešení se vyskytují jen čísla nenulová / do výpočtů významně vstupuje nula;
- geometrické útvary jsou v „obecné“ poloze / ve zvláštní poloze;
- při konstrukcích jsou všechny body dostupné / musí se pracovat s nedostupnými body;
- problém vede na jednoduchou rovnici nebo soustavu / na složitou rovnici nebo soustavu s náročnějším řešením;

tím však jistě nejsou vyčerpány všechny možnosti.

V sérii článků počínaje (*Trávníček*, 1993) jsou uváděny dvojice nebo i čtveřice úloh vhodných na písemku; ovšem i v dřívějších letech byla v časopise pro učitele matematiky publikována řada návrhů písemek pro jednotlivé třídy – viz např. (*Sovíková*, 1981); existují i knihy prověrek, viz např. (*Muravin*, 1971). Vzhledem k aktuálnosti předmluvy v (*Trávníček*, 1993) k našemu tématu a jejímu většímu časovému odstupu krátce její část citujme:

‚Zdrojem příkladů při přípravě písemek jsou učebnice, sbírky příkladů, zkušenosti jiných i vlastní tvůrčí činnost vyučujících. Pro zajištění větší samostatnosti žáků vyučující zpravidla dělí žáky na skupiny A a B, takže u každého příkladu vznikají dva problémy:

1. *Aby učitel prozkoušel přesně to, co chce.* Jestliže chce např. především prověřit, jak žáci dovedou používat vzorce pro výpočet obsahů a objemů, nevolí příklady se složitými úpravami zlomků. Ale také může, pokud chce prověřit současně i práci se zlomky.

2. *Aby si učitel vyhledal nebo vytvořil dvě rovnocenné, ale přece jen různé verze příkladů,* případně tři, pokud tuto třetí chce použít spolu s jinými příklady při opakování před písemkou nebo jako domácí úkol. Záleží ovšem na stavu třídy a na jejím zaměření, jak mnoho se tyto verze mohou od sebe lišit, aby byla samostatnost práce zajištěna. V žádném případě však nesmí být v jedné verzi Taxis a ve druhé zelená louka.

Dobře vyřešit oba tyto problémy je někdy dost časově náročné a učitel si musí propočítat více příkladů, než se mu podaří připravit si vhodné verze. Po čase si každý zkušený učitel vytvoří „databanku" svých zadání, kterou pak jen průběžně obměňuje a osvěžuje novými vhodnými příklady, s nimiž se setká.'

K formulacím úloh na písemku a k problému jejich srozumitelnosti si ocitujme ještě z knihy (*Hejný*, 1990):

‚Ľahko sa formulujú štandardné úlohy (riešte rovnicu...; upravte výrazy ...; vypočítajte obsah ...; apod.). Ťažkosti bývajú s textáciou neštandardných úloh, ktoré sa vyskytujú ako slovné rovnice, úlohy z kombinatoriky, pravdepodobnosti, stereometrie apod. Osobitne často sa v týchto formuláciách vyskytujú tri typy chýb: dlhé, gramaticky zložité vety, ktoré nedovoľujú slabším žiakom pochopiť, čo sa od nich chce; možnosť viacznačného pochopenia úlohy; nedostatočné oddelenie toho, čo je dané, od toho, čo sa hľadá – nejasnosť cieľa žiakovej činnosti.'

Úlohy by tedy měly být formulovány naprosto srozumitelně, s přiměřenou přesností a přitom tak, aby bylo žákům jednoznačně zadané a zcela zřejmé, co je jejich úkolem a *co má být výsledkem řešení úlohy*, protože sdělení tohoto výsledku je hlavním úkolem uvedeného 2. kroku komunikace (viz 1.2). V úlohách by neměly být na žáky líčeny nějaké léčky. K funkci úloh ve vyučování matematice a k jejich formulaci doporučujeme též přečtení článku (*Trávníček*, 1996).

2.2. Struktura databáze, analýza úloh

Při přípravě (dvojice) úloh na písemky – pro zařazení do databáze, se postupuje ve třech etapách (*Novák*, 2004).

1. *Analytická fáze.* Uvědomíme si, pro jaký druh písemky úlohy připravujeme, co je záměrem a hlavním cílem písemky. Vymezíme obsah (rozsah učiva), tj. jevy, které chceme do písemky zařadit (nové, dřívější), aby bylo zajištěno, že skutečně vyzkoušíme to, co vyzkoušet chceme (tj. aby úloha měla vysokou validitu).

2. *Syntetická fáze.* Zkoumáme vhodnost úloh ze sbírek, případně provádíme jejich obměnu nebo obměnu úloh, které už v databázi máme, nebo si sami úlohy sestavíme. Pak postupujeme v realizaci bodů a – h uvedených níže. Z jejich naplňování může zpětnou vazbou vyplynout požadavek na změnu formulace, na změnu údajů v některé verzi úloh apod. a pak tedy příslušné body zpracujeme znovu. Ze zvolených úloh sestavíme zadání písemky.

3. *Ověření.* Z teoretického hlediska bychom si měli kvalitu písemky ověřit na vzorku žáků, což je v podmínkách školy prakticky nerealizovatelné. Tuto podmínku lze nahradit tím, že používáme úlohy, které se někdy v minulosti už osvědčily (nebo úlohy obměněné) a významnou roli v podmínkách školy hraje i učitelova zkušenost, tj. když ze zkušenosti a na základě analýzy řešení dovede odhadnout, zda je písemka pro daný účel přiměřená. Je docela vhodné, když mladí, ještě nezkušení učitelé, konzultují návrh své písemky se zkušenějším kolegou.

Dobře vymyšlená a připravená úloha učiteli velmi usnadňuje i zkvalitňuje opravu písemek a může dobře posloužit i v dalších letech. Proto je vhodné zpracovat informaci o úloze v tomto doporučeném rozsahu:

a) Text zadání obou verzí úlohy (nebo čtyř) ve znění, jak jej dostanou žáci.
b) Poznámka, co po zadání žákům doplnit, připomenout, doporučit či zdůraznit.
c) Způsob zadávání textu.
d) Obsah – které učivo se při řešení aktivizuje a použije.
e) Výsledky a mezivýsledky (případně i celé řešení) všech verzí.
f) Jevová analýza, tj. hodnocené kroky (i s jejich vahou v %).
g) Náročnost úlohy.
h) Čas na vypracování řešení.

ad a) O kvalitě *textu zadání*, jeho srozumitelnosti a jednoznačnosti, jsme již pojednali. Dodejme, že by texty neměly být příliš rozsáhlé a vyjadřování by mělo být úsporné (například generální dohodou se žáky, že pokud není zadána množina, předpokládá se množina všech reálných čísel, takže třeba „řešte rovnici" znamená její řešení v $\boldsymbol{R}$, apod.). Také texty verzí A, B lze často zapsat společně úsporně (viz dále 2.3).

ad b) Učitel by měl své *poznámky, rady, připomínky a doporučení* sdělit žákům hned po zadání úloh, tj. poté, co si je žáci přečtou, a nevytrhovat je později z práce tím, že si bude postupně rozpomínat, co jim všechno chtěl sdělit; proto může být taková poznámka u úlohy v datové bázi užitečná (např. chce-li učitel poradit „nezapomeňte na jednotky").

ad c) *Způsoby zadávání textu* mohou být různé a pokud učitel používá více možností, je někdy vhodné si způsob poznamenat.

ad d) Když učitel připravuje písemku, napoví mu informace *Obsah*, co může být vhodné před písemkou zopakovat, zejména když úloha zabírá širší úsek učiva, třeba i staršího.

ad e) Znát *výsledky a mezivýsledky* je pro opravu základním požadavkem, v některých složitějších případech je dobré mít k dispozici i části řešení nebo řešení celé. Je-li více možností, jak danou úlohu řešit, měl by mít učitel k dispozici informaci o mezivýsledcích i pro jiné způsoby řešení.

ad f) *Zápis hodnocených kroků* pomáhá učiteli držet stálou úroveň hodnocení v průběhu celé opravy a je i podkladem pro bodové hodnocení řešení. Přidělení procent (resp. bodů) jednotlivým krokům má v sobě prvky subjektivity (i když má sloužit objektivnímu posouzení řešení), každý učitel to však může vidět jinak. Pokud učitel chce v dané písemce z určitých důvodů zdůraznit správné provedení určitého kroku a tento krok dotovat více body, pak by o tom měl žáky informovat; při „normálním" vážení kroků žáky informovat nemusí. Učitel si pak musí při opravě uvědomovat zvolenou váhu jednotlivých kroků, ať už řešení hodnotí bodově, slovně nebo přímo známkou, a respektovat ji v průběhu celé opravy.

ad g) *Náročnost úlohy* (obtížnost) bere učitel v úvahu zvláště při vytváření víceúlohové písemky a také při stanovení času řešení, měřítko si vytváří na základě svých zkušeností s „matematickou kvalitou" tříd, v nichž učí. Jestliže danou úlohu již v písemce použil, může si propříště vypočítat a zaznamenat náročnost této úlohy na základě výsledků písemky. Výpočet se provádí takto:

Uvažujme tzv. *průchodnost úlohy* P s hodnotami v procentech v rozmezí 0 % – 100 %. Výpočet provedeme takto:

$$P = 100\,\frac{\sum b_i}{n \cdot b}\ \%,$$

kde v čitateli je součet bodů získaných všemi žáky za danou úlohu, n je počet všech žáků, kteří psali písemku a b zadané bodové ohodnocení dané úlohy. Vidíme, že úlohu s průchodností 0 % nevyřešil nikdo, úlohu s průchodností 100 % vyřešili všichni správně.

Náročnost úlohy pak můžeme zapsat jako $N = 100\ \% - P$. Učitel si tedy po opravené písemce může provést uvedené jednoduché výpočty (záznam bodového hodnocení do tabulky 1 dle 1.4.4 mu v tom hodně pomůže) a zapsat si vypočtenou náročnost k úlohám ve své databázi (rok použití, třída, náročnost N). Úlohy s náročností do 20 % považujeme za snadné, s náročností nad 80 % jsou obtížné. Při sestavení nové úlohy může dle svých zkušeností učitel číselnou hodnotu náročnosti odhadnout.

Při sestavování čtvrtletní práce je tedy vhodné volit např. jednu úlohu s náročností kolem 25 %, dvě kolem 50 % a jednu kolem 75 %, ale ne příliš blízko 100 % (tj. nevolit úlohu, kterou nikdo nevyřeší).

ad h) Učitel, který zařazuje do písemky (resp. do své databáze) novou dvojici úloh A, B (tj. dvojici, s níž ještě nemá zkušenost), si samozřejmě sám úlohy – obě verze – podrobně vyřeší (propočítá, prorýsuje) metodou, kterou předpokládá u žáků, a pečlivě stanoví věcnou náročnost úloh. Změří si svůj *čas úplného řešení* a odhadne, jaký čas budou potřebovat žáci s mírně podprůměrnou výkonností. Bývá to i 200 % – 300 % času učitelova; tento koeficient si učitel postupně upřesňuje na základě svých zkušeností a je vhodné, když u úloh ve své databázi tyto orientační pracovní časy žáků eviduje. (Tyto časy samozřejmě do určité míry závisejí i na kvalitě jednotlivých tříd.) Pokud vyžaduje zápis zadání, nesm samozřejmě zapomenout na započtení příslušného času.

Uvedené body a) – h) se nezpracovávají zvlášť pro každou úlohu. Např. zadáváme-l víceúlohovou písemku, potřebujeme body a), e) zvlášť pro každou úlohu (tj. pro každou verzi), body d), f), g) pro každou dvojici A, B a body b), c), h) souhrnně za celou písemku.

Jak databázi zvládnout po technické stránce si musí učitel rozmyslet podle toho, jak j hodlá používat. Nabízí se využití počítače, zejména v těch případech, kdy žákům chcem rozdávat natištěná zadání (z počítače je vytiskneme a rozmnožíme). Při opravě je však ne pohodlné opravovat úlohy a přitom nahlížet na obrazovku počítače, takže v úvahu přicház papírové médium (někteří učitelé doporučují např. lístky formátu A6), ale spíše kombinace obou způsobů evidence.

2.3. Ukázky přípravy úloh do databáze

V následujících čtyřech úlohách si ukážeme, jak mohou být připraveny úlohy do databáze písemek ve verzi, kde není uvedeno řešení úloh, ale jen jejich mezivýsledky a výsledky. Z takto připravených úloh pak lze naskládat písemku o více úlohách. (Pro skupiny B a D platí údaje uvedené ve stejných závorkách, jako jsou u tučných písmen **B** a **D**.)

Úloha 1.

A [**B**] Reklamní štítky mají tvar rovnoramenného trojúhelníku o výšce 9,0 cm [5,0 cm], úhel proti základně je 30° [120°]. Vypočtěte, kolik m^2 papíru se spotřebuje na výrobu 25 000 těchto štítků, počítá-li se s 8 % [3 %] odpadu.

Poznámka: Pozor na zaokrouhlování a na jednotky.

Zápis na tabuli.

Obsah: Řešení pravoúhlého trojúhelníku (výpočet protilehlé odvěsny, je-li dán úhel a přilehlá odvěsna); obsah trojúhelníku; výpočet části celku, je-li dán počet procent; práce na kalkulačce s funkcí tangens (u C, D s funkcemi sinus a kosinus) a základními početními operacemi.

Výsledky: A: Základna trojúhelníku je $2 \cdot 9 \cdot \mathrm{tg}\ 15°$, obsah jednoho štítku je 21,7 cm^2, celkem se spotřebuje asi 59 m^2 papíru.

B: Základna trojúhelníku je $2 \cdot 5 \cdot \mathrm{tg}\ 60°$, obsah jednoho štítku je 43,3 cm^2, celkem se spotřebuje asi 112 m^2 papíru.

Kroky:

• Obrázek, záznam zadání.	10 %
• Délka základny.	20 %
• Obsah jednoho štítku.	10 %
• Součet obsahů všech štítků.	10 %
• Přidání % odpadu.	30 %
• Přepočítání na m^2.	20 %

Náročnost: Střední (50%).

Čas řešení: 6 min.

C [**D**]: Reklamní štítky mají tvar kosočtverce o straně 5,0 cm [4,0 cm], jeden vnitřní úhel je 45° [75°]. Vypočtěte, kolik m^2 papíru se spotřebuje na výrobu 15 000 těchto štítků, počítá-li se s 6 % [7 %] odpadu.

Výsledky:

C: Úhlopříčky kosočtverce jsou $u_1 = 2 \cdot 5 \cdot \sin 22{,}5°$, $u_2 = 2 \cdot 5 \cdot \cos 22{,}5°$, výška $v = 5 \cdot \sin 45°$; spotřebuje se asi 28 m^2 papíru.

D: Úhlopříčky kosočtverce jsou $u_1 = 2 \cdot 4 \cdot \sin 37{,}5°$, $u_2 = 2 \cdot 4 \cdot \cos 37{,}5°$, výška $v = 4 \cdot \sin 75°$; spotřebuje se asi 25 m^2 papíru.

Kroky:

- Obrázek, záznam zadání. 10 %
- Délka úhlopříček nebo výšky. 20 %
- Obsah jednoho štítku. 10 %
- Součet obsahů všech štítků. 10 %
- Přidání % odpadu. 30 %
- Přepočítání na m^2. 20 %

Čas: 8 min.

Ostatní základní informace k verzím C, D se shodují s informacemi uvedenými k verzím A, B.

Úloha 2.

A | B Zjednodušte výraz

$$V = \frac{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)}{\sin 2\alpha \, \sin\beta} \quad \Big| \quad V = \frac{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)}{\sin\beta \, \left(\cos 2\alpha + \sin^2\alpha\right)}$$

a uveďte, pro které hodnoty úhlů α, β je výraz definován.

Poznámka: Definiční obor uveďte v obloukové míře.

Zápis na tabuli.

Obsah: Užití součtových vzorců a vzorců pro sinus a kosinus dvojnásobného úhlu; nulové body sinu a kosinu, resp. tangens (v C a D).

Výsledky:

$$\text{A: } V = \frac{-2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta} = -\frac{1}{\cos\alpha};\ \alpha \neq k\frac{\pi}{2},\ \beta \neq k\pi;$$

$$\text{B: } V = \frac{2\cos\alpha\sin\beta}{\sin\beta\cos^2\alpha} = \frac{2}{\cos\alpha};\ \alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ \beta \neq k\pi.$$

Kroky:

- Vzorce pro součet a rozdíl funkcí. 35 %
- Vzorec pro dvojnásobný úhel. 25 %

- Krácení. 10 %
- Definiční obor. 30 %

Náročnost: Střední (60%).

Čas řešení: 7 min.

C | [**D**]: Pro která α [β] je definován výraz

$$V = \frac{\sin^3\alpha - \cos^3\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} + \frac{1}{2}\sin 2\alpha \quad \Big| \quad V = \frac{\sin^3\beta + \cos^3\beta}{\cos\beta + \sin\beta} + \frac{1}{2}\sin 2\beta\ ;$$

zjednodušte jej a uveďte, pro které hodnoty úhlu je výraz definován.

Obsah: Užití součtových vzorců a vzorců pro sinus a kosinus dvojnásobného úhlu; nulové body sinu a kosinu, resp. tangens (v C a D).

Výsledky: C: $V = -1$, $\alpha \neq (4k+1)\frac{\pi}{4}$; D: $V = 1$, $\beta \neq (4k+3)\frac{\pi}{4}$.

Kroky:

- Vzorec pro součet a rozdíl 3. mocnin. 35 %
- Vzorec pro dvojnásobný úhel. 25 %
- Krácení. 10 %
- Definiční obor. 30 %

Náročnost: Střední (60%).

Čas řešení: 7 min.

Úloha 3.

A {**B**} Jsou dány body $A[1; -1,5]$, $B[1,5; 2]$, $C[-3; 0,5]$ {$A[-1,5; -2]$, $B[2; -2,5]$, $C[0,5; 2]$}. Napište rovnici kružnice opsané tomuto trojúhelníku a trojúhelník i kružnici graficky znázorněte (jednotkou je 1 cm).

Poznámka: Vzhledem k rozdílné náročnosti různých způsobů řešení uvážit, zda se způsob řešení žákům předepíše.

Zápis na tabuli.

Obsah: Úlohu lze řešit více způsoby, zejména: Najít středy a osy dvou stran (např. užitím vektorů), průsečík os je hledaný střed S kružnice, vzdálenost S od kteréhokoli z bodů A, B, C je poloměr. Jiný postup: Napíšeme rovnici kružnice $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$, dosadíme do ní souřadnice vrcholů trojúhelníku a dostaneme soustavu tří algebraických rovnic o třech neznámých m, n, r.

Výsledky: A: Směrový vektor strany AB je $(1; 7)$, normálový vektor $(7; -1)$, střed strany $[1,25; 0,25]$,

směrový vektor strany BC je (3; 1), normálový vektor (1; −3), střed strany [−0,75; 1,25],
směrový vektor strany CA je (2; −1), normálový vektor (1; 2), střed strany [−1; −0,5],
S[−0,5; 0,5], r = 2,5 cm, rovnice $(x+0{,}5)^2+(y-0{,}5)^2=2{,}5^2$.

B: Směrový vektor strany AB je (7; −1), normálový vektor (1; 7), střed strany [0,25; −2,25],
směrový vektor strany BC je (−1; 3), normálový vektor (3; 1), střed strany, [1,25; −0,25],
směrový vektor strany CA je (1; 2), normálový vektor (2; −1), střed strany [−0,5; 0],
S[0,5; −0,5], r = 2,5 cm, rovnice kružnice opsané je $(x-0{,}5)^2+(y+0{,}5)^2=2{,}5^2$.

Kroky pro 1. *způsob řešení:*

- Obrázek pro rozbor. 10 %
- 1. strana: směrový vektor, střed strany, normálový vektor, normála. 15 %
- 2. strana: totéž. 15 %
- Střed S jako průsečík. 15 %
- Poloměr jako vzdálenost S od vrcholu trojúhelníku. 10 %
- Rovnice kružnice. 5 %
- Výsledný obrázek. 30 %

Náročnost: Větší (75%).

Kroky pro 2. *způsob řešení:*

- Zápis soustavy. 10 %
- Převedení na lineární soustavu. 20 %
- Řešení soustavy. 20 %
- Výpočet poloměru r. 15 %
- Rovnice kružnice. 5 %
- Výsledný obrázek. 30 %

Náročnost: Střední (50%).

Čas řešení: 18 min.

Komentář: Jestliže vynecháme požadavek grafického znázornění a souřadnice všech bodů zdvojnásobíme, ubude počítání s desetinnými čísly; střed kružnice má pak dvojnásobné souřadnice a poloměr je dvojnásobný, tj. r = 5 cm.

C {**D**}: Strany trojúhelníku leží na přímkách p: $x+2=0$, q: $x+5y+7=0$, r: $x+y-1=0$ { p: $x+2=0$, q: $x-3y+11=0$, r: $x-y+1=0$ }. Napište rovnici kružnice opsané tomuto trojúhelníku.

Obsah: Řešením tří dvojic rovnic přímek se najdou souřadnice vrcholů trojúhelníku a dál o obsahu úlohy viz A, B.

Výsledky: C: $A \in p \cap q$, $A[-2; -1]$, $B \in q \cap r$, $B[3; -2]$, $C \in r \cap p$, $C[-2; 3]$,
směrový vektor strany AB je $(5; -1)$, normálový vektor $(1; 5)$, střed strany $[0{,}5; -1{,}5]$,
směrový vektor strany BC je $(1; -1)$, normálový vektor $(1; 1)$, střed strany $[0{,}5; 0{,}5]$,
směrový vektor strany CA je $(0; 1)$, normálový vektor $(1; 0)$, střed strany $[-2; 1]$;
$S[1; 1]$, $r = \sqrt{13}$, rovnice kružnice opsané je $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 13$.

D: $A \in p \cap q$, $A[-2; -1]$, $B \in q \cap r$, $B[4; 5]$, $C \in r \cap p$, $C[-2; 3]$,
směrový vektor strany AB je $(1; 1)$, normálový vektor $(1; -1)$, střed strany $[1; 2]$,
směrový vektor strany BC je $(3; 1)$, normálový vektor $(1; -3)$, střed strany, $[1; 4]$,
směrový vektor strany CA je $(0; 1)$, normálový vektor $(1; 0)$, střed strany $[-2; 1]$;
$S[2; 1]$, $r = 2\sqrt{5}$, rovnice kružnice opsané je $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 20$.

Kroky pro 1. *způsob řešení:*

• Řešení dvojic rovnic, souřadnice vrcholů.	20 %
• Náčrtek trojúhelníku.	10 %
• 1. strana: směrový vektor, střed strany, normálový vektor, normála.	20 %
• 2. strana: totéž.	15 %
• Střed S jako průsečík.	15 %
• Poloměr jako vzdálenost S od vrcholu trojúhelníku.	10 %
• Rovnice kružnice.	10 %

Náročnost: Větší (75%).

Kroky pro 2. *způsob řešení:*

• Řešení dvojic rovnic, souřadnice vrcholů	20 %
• Zápis soustavy.	10 %
• Převedení na lineární soustavu.	20 %
• Řešení soustavy.	20 %
• Výpočet poloměru r.	20 %
• Rovnice kružnice.	10 %

Náročnost: Střední (50%).

Čas řešení: 18 min

Úloha 4

A | B V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$\lvert x-1 \rvert + \lvert y \rvert = 3$	$\lvert x \rvert + \lvert y+1 \rvert = 3$
$2x + y = 2$	$2x - y = 1$

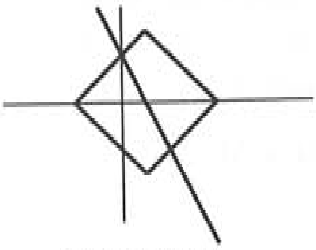
a obě relace graficky znázorněte.

Poznámka: Jednotkou pro graf je 1 cm.

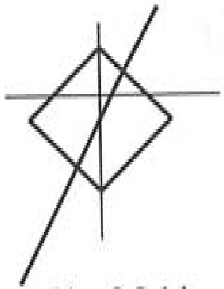
Zápis na tabuli.

Obsah: Relace s absolutní hodnotou; řešení soustav lineárních rovnic; grafické znázornění.

Výsledky: A: Dvě řešení: [0; 2], [2; –2], viz obr. 2.3.1.a ; B: Dvě řešení: [–1; –3], [1; 1], viz obr. 2.3.1.b.



Obr. 2.3.1.a



Obr. 2.3.1.b

Kroky:

- Řešení soustav (všechny případy). 40 %
- Zápis výsledku. 10 %
- Graf 1. rovnice s absolutními hodnotami. 30 %
- Graf 2. rovnice. 15 %
- Vyznačení řešení. 5 %

Náročnost: Střední (60%).

Čas řešení: 16 min.

C [D]: V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic:

$\lvert x\rvert + \lvert y-1\rvert = 4$	$\lvert x+1\rvert + \lvert y\rvert = 4$
$\lvert x-1\rvert - y = 0$	$\lvert x\rvert + y = 1$

a obě relace graficky znázorněte.

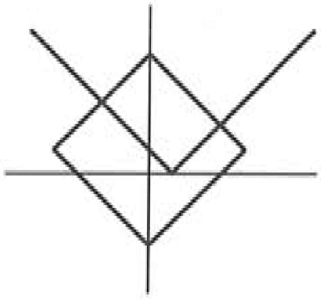
Výsledky: C: Dvě řešení: [3; 2], [–2; 3], viz obr. 2.3.1.c; D: Dvě řešení: [2; –1], [–3; –2], viz obr. 2.3.1.d.

Kroky jako v A, B.

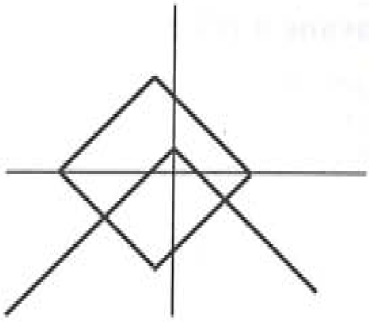
Náročnost: Větší (70%).

Čas řešení: 20 min.

Komentář: Úloha je určena hlavně pro souborné opakování před maturitou.



Obr. 2.3.1.c



Obr. 2.3.1.d

Orientační obrázky pro svou potřebu učitel zpravidla nemusí dělat v měřítku ani je nemusí popisovat.

2.4. Přehled úloh použitých v písemkách

Kapitoly 3, 4 a 5 jsou zaměřeny na výcvik opravy písemek; jsou vybrány úlohy zejména 3. úrovňové kategorie (viz 0.2). Ježto k opravě písemky je třeba mít k dispozici analýzu jednotlivých úloh, je zde prováděna jejich analýza, a to spolu s jejich úplným vyřešením (v kapitole 3 a 4) nebo uvedením mezivýsledků a výsledků (v kapitole 5). Bylo by však velmi dobré, kdyby si čtenář pracující s těmito skripty vyzkoušel samostatné provedení těchto analýz a pak své zápisy porovnal s tím, co je v analýzách uvedeno v kapitolách 3, 4 a 5, jak je doporučeno v předmluvě. Proto v tomto paragrafu 2.4 uvádíme zadání úloh, které jsou obsahem (jednoúlohových) písemek v kapitolách 3 – 6. Úlohy jsou vybrány tak, aby obsáhly co nejširší tematiku.

Organizační informace: V části 2.4.1. jsou zadání písemek (úloh) z kapitoly 3, v části 2.4.2. písemek z kapitoly 4 a v 2.4.3. písemek z kapitoly 5. Vzhledem k tomu, že učitel se ve své praxi může při opravě písemek setkat s chybami všech druhů, jsou použité úlohy řazeny nahodile, ale v čtyřčlenných cyklech vždy počínaje 1. ročníkem, tak aby se čtenář, který projde jen část písemek, setkal s písemkami všech ročníků. Za každým zadáním úlohy je vždy jméno žáka, třída, číslo stránky s analýzou písemky (jež je v kapitole 3, 4 nebo 5) a číslo stránky s písemkou, jež je v kapitole 6. Čtenář jistě objeví, že jména žáků i číslování úloh přispívá k přehlednosti pracovní části skript.

Jména žáků byla volena nahodile, ale byla dodržena zásada, že písemka, jejímž prvotním původcem byla dívka, byla opatřena dívčím jménem, a podobně pro chlapce. Písmena za číslem třídy mají jen navozovat pocit praxe. Další informace jsou v úvodu 6. kapitoly.

Upozornění k uvedeným textům zadání: Tyto texty již byly různými učiteli použity na písemky ve školské praxi; nejsou vždy optimální a také z nich není poznat, která vysvětlení dodal učitel žákům ústně před psaním písemky. Čtenář má tak možnost formulace zadání vylepšovat nebo si zaznamenat *Poznámku,co by po zadání dané písemky ještě k zadání žákům řekl* (viz 2.2, 3 b). Při návrzích opravy textů však pozor! Ježto *text písemky* má být *stručný*, *s přesností přiměřenou věku žáků* a *srozumitelný*, nelze jej zatěžovat informacemi, které lze považovat implicitně za zřejmé a které by byly pohromou pro slabší žáky – ztratili by orientaci v komplikovaném textu zadání.

2.4.1. Analyzované a řešené úlohy a opravené písemky

U následujících dvaceti úloh je v kapitole 3 (3.1 – 3.20) provedena jejich analýza a řešení; dále je tu komentář k opravě a klasifikaci příslušných žákovských písemek vzorově opravených v kapitole 6.

1. Zjednodušte daný výraz a uveďte, kdy má smysl: $V = \frac{2x^2 - x - 6}{2x^2 - 3x - 9} : \frac{x-1}{x-3}$.
(*Pavel Kovář*, 1. A, str. 64 a 130)

2. Pro členy geometrické posloupnosti $\{a_n\}$ platí $a_5 - a_2 = \frac{70}{9}$, $a_3 - a_4 = \frac{20}{3}$. Určete první člen a kvocient této posloupnosti. (*Vlasta Vaněrková*, 4. B, str. 65 a 130)

3. Řešte rovnici $\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x = 1$. (*Vladimír Martinák*, 2. A, str. 66 a 131)

4. Rozhodněte, zda se protínají úsečky AB, CD; $A[-2; 3]$, $B[2; -1]$, $C[-4; -1]$, $D[-1; 1]$, a v kladném případě stanovte jejich průsečík. (*Luděk Souček*, 3. B, str. 67 a 131)

5. Řešte nerovnici $|x^2 - x| > 6$. (*Jaroslav Hubáček*, 1. B, str. 68 a 132)

6. Řešte v oboru komplexních čísel rovnici $9z^2 - 6z + 10 = 0$ dvěma způsoby: pomocí vzorce a užitím vztahu mezi kořeny a koeficienty. (*Jana Mikošková*, 3. B, str. 69 a 132)

7. Posloupnost $\{a_n\}$ je dána rekurentním vzorcem $a_{n+1} = (n+1)\,a_n - n\,a_{n-1}$, přičemž hodnoty členů a_1, a_2 udávají kořeny rovnice $\frac{x+3}{x-2} - \frac{x-2}{x+3} = \frac{5}{6}$. Určete a_4.
(*Adéla Racková*, 4. C, str. 71 a 133)

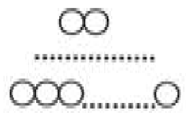
8. Je dána funkce $f\colon\ y = \frac{x+1}{x-2}$. Určete definiční obor, průsečíky grafu se souřadnicovými osami, kořen rovnice $f(x) = -2$ a načrtněte graf této funkce.
(*Eva Sokalová*, 2. C, str. 72 a 133)

9. Obsah rovnoramenného trojúhelníku ABC se základnou AB je 30 cm². Vypočtěte délku strany AB, je-li těžiště T vzdáleno 4 cm od strany AB.
(*Martina Navrátilová*, 1. A, str. 73 a 134)

10. Určete hustotu dřevěné koule, která plove ve vodě ponořená do tří pětin svého průměru.
(*Jiří Kilián*, 3. A, str. 74 a 134)

11. Krychle $ABCD\,A'B'C'D'$ má hranu a. Vrchol krychle odřízneme tak, že vedeme rovinu v 1/3 každé hrany vycházející z vrcholu. Znázorněte výsledné těleso, odřízneme-li takto vrcholy A, B, A', B'. Jak se změní objem a povrch? (*Dušan Tříska*, 2. C, str. 75 a 135)

12. Na hromadě je naskládáno 90 rour dle obrázku, přičemž v každé řadě směrem nahoru je o 1 rouru méně. V nejvyšší řadě jsou roury 2. Určete počet rour ve spodní řadě.



(*Jana Keprová*, 4. B, str. 76 a 135)

13. Řešte rovnici $\sqrt{2x+1+2\sqrt{2x+3}}=1$. (*Pavel Hnát*, 1. B, str. 78 a 135)

14. Řešte rovnici $\binom{x}{x-2}+\binom{x}{x-1}=\frac{x^3+1}{2}$. (*Jarmila Davidová*, 3. C, str. 78 a 136)

15. Pod jakým úhlem protíná parabola $y=\sqrt{x}$ hyperbolu $y=\frac{1}{x}$?
(*Petr Pavelka*, 4. A, str. 79 a 137)

16. Vypočtěte obsah a obvod rovnoramenného lichoběžníku, jsou-li délky jeho základen 22 cm a 12 cm a jeho výška je o 1 cm menší než délka jeho ramene.
(*Tomáš Hanák*, 2. B, str. 81 a 137)

17. Máme 2 čísla. Jestliže první z nich zvětšíme o 8, dostaneme čtyřnásobek druhého. Jestliže druhé zvětšíme třikrát, dostaneme polovinu prvního zvětšenou o 9. Která jsou to čísla?
(*Hana Ševčíková*, 1. C, str. 82 a 138)

18. Na ciferníku hodin stanovte velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku 479.
(*Eva Holubová*, 2. B, str. 83 a 138)

19. Určete vzájemnou polohu kružnice k: $(x-4)^2+(y+1)^2=5$ a přímky p: $x-2y-1=0$.
(*Ema Kroupová*, 3. B, str. 83 a 139)

20. Pomocí matematické indukce dokažte, že pro všechna $n \in \boldsymbol{N}$ platí:

$\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\dots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{2(n+2)}$. (*Milan Lukeš*, 4. A, str. 84 a 139)

2.4.2. Analyzované a řešené úlohy a komentované písemky

U následujících dvaceti úloh je v kapitole 4 (4.1 – 4.20) provedena jejich analýza a řešení; dále je tu komentář k opravě a klasifikaci příslušných žákovských písemek, jejichž oprava v kapitole 6 není provedena, neboť se očekává od čtenáře..

1. Řešte v $\boldsymbol{R}$ rovnici $\sqrt{10-x}+\sqrt{x-8}=2$. (*Martin Lisický*, 1. A, str. 86 a 140).

2. Je dán trojúhelník ABC, $A[0; -3]$, $B[3; 3]$, $C[-3; 0]$, a bod $M[0; 2]$. Rozhodněte, zda bod M leží v trojúhelníku ABC. (*Ivan Raška*, 3. A, str. 87 a 140)

3. Trojúhelníkový pozemek je na plánu v měřítku 1:5000 zakreslen jako trojúhelník o stranách délky 47,5 mm, 63,0 mm a 47,5 mm. Určete skutečné délky jeho stran a výměru pozemku. (*Monika Daňková*, 2. B, str. 88 a 141)

4. Určete limitu $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+5n^2-2}{2n^3-n}$. (*Dana Pilařová*, 4. B, str. 88 a 141)

5. Zjednodušte následující výraz a uveďte, za jakých podmínek má smysl:
$V=\dfrac{a-2\sqrt{ab}+b}{a-b}:\dfrac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. (*Renáta Panchártková*. 1. B, str. 89 a 142)

6. Ze dvou míst A, B ve vodorovné rovině, vzdálených od sebe 3,1 km, byl pozorován mrak nad spojnicí obou míst ve svislé rovině ve výškových úhlech $\alpha=78°40'$, $\beta=63°50'$. Jak vysoko byl mrak? (*Magda Mičulková*, 2. A, str. 90 a 142)

7. Vypočtěte $V=\left[(a+b)(\overline{a}-\overline{b})\right]^2$, kde $a=c-d$, $b=c+d$, $c=2-3\mathrm{i}$, $d=\mathrm{i}\,c$.
(*Karel Kotek*, 3. B, str. 91 a 143)

8. V geometrické posloupnosti je dáno: $a_1=81$, $q=\dfrac{1}{3}$ a $a_n=1$. Vypočtěte n a s_n.
(*Milena Růžičková*, 4. C, str. 92 a 143)

9. Řešte nerovnici $2|x-2|-3<|3-x|$. (*Jiří Duchoň*, 1. B, str. 93 a 144)

10. Zjistěte počet prvků množiny, z nichž lze vytvořit o 49 kombinací 3. třídy s opakováním více než bez opakování. (*Lea Holínková*, 3. C, str. 94 a 144)

11. Poloměr kružnice vepsané pravidelnému desetiúhelníku je 8,0 cm. Vypočítejte délku jeho strany, poloměr kružnice opsané, obsah a obvod. (*Miloš Přidal*, 2. C, str. 95 a 145)

12. Je dána funkce $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-5}$.

1) Vyjádřete funkci $f(x)$ jako součet nebo rozdíl mnohočlenu a zlomku, v němž čitatel má nižší stupeň než jmenovatel.
2) Rozhodněte výpočtem derivace, zda $f'(0)=0$.
3) Určete algebraický tvar $f(z_0)$ v bodě $z_0=-2+\mathrm{i}$.

(*Jana Palečková*, 4. B, str. 96 a 145)

13. Řešte v $\boldsymbol{R}$ soustavu algebraických rovnic
$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5,\quad \dfrac{3}{x}-\dfrac{5}{y}=-9$. (*Michal Šedík*, 1. A, str. 97 a 146)

14. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, je-li dáno: $|BB_1|=6$ cm, kde B_1 je střed strany AC, $v_c=5$ cm, $c=5$ cm. (*Jana Sichertová*, 2. B, str. 98 a 146)

15. Je dána kvadratická funkce $y=2px^2+(1-p)x-\dfrac{4p^2-9}{16}$ s parametrem p. Pro kterou hodnotu parametru prochází graf této funkce počátkem ? Pod jakým úhlem pak v počátku protíná osu x (s přesností na minuty)? (*Václav Knotek*, 4. A, str. 99 a 147)

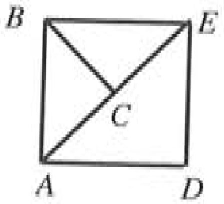
16. V lavici sedí 5 žáků: A, B, C, D, E. Kolika způsoby je může učitel přesadit? Při kolika způsobech usazení a) A není uprostřed, b) A, B sedí vedle sebe, c) A sedí na okraji. (*Martin Soner*, 3. C, str. 100 a 147)

17. V grafu na obrázku vyhledejte a zapište

(1) všechny cesty z A do E

a dále všechny ty z nich, pro něž platí (X znamená výrok „cesta prochází bodem X")

(2) ¬C, (3) B ∧ C, (4) C ∨ D, (5) C ⇒ B, (6) B ⇔ C.



(*Světlana Žižková*, 1. C, str. 101 a 148)

18. Je dán pravidelný trojboký hranol $ABCA'B'C'$, jehož podstavná hrana je 5,0 cm. Vypočtěte jeho objem V, jestliže rovina ABS svírá s rovinou podstavy úhel $\alpha = 30°$; S je střed hrany CC'. Výsledek zaokrouhlete na 1 desetinné místo. (*Lucie Palátová*, 4. C, str. 102 a 148)

19. Ve třídě je 30 žáků, 3 z nich nejsou na vyučování připraveni. V hodině matematiky má být vyzkoušeno 5 žáků. Vypočtěte pravděpodobnost, že mezi zkoušenými bude

a) právě jeden nepřipravený žák,

b) nejvýše dva nepřipravení žáci,

c) alespoň dva nepřipravení žáci. (*Jan Nohýl*, 3. A, str. 103 a 149)

20. Řešte v $\boldsymbol{R}$ rovnici $\log(x^3+1) - \log 7 - \log x = \log(x+1) - \log 6$. (*Jiří Ort*, 2. A, str. 104 a 149)

2.4.3. Analyzované úlohy a komentované písemky

U dalších 24 písemek je v kapitole 5 (5.1 – 5.24), je provedena jevová analýza úloh, jsou uvedeny mezivýsledky a výsledky; dále je tu komentář k opravě a klasifikaci příslušných žákovských písemek, které v kapitole 6 nejsou opraveny, neboť se to očekává od čtenáře. Poslední 4 úlohy jsou ze školních nebo třídních olympiád. Jejich řešení v kapitole 5 uvádíme.

1. Na číselné ose jsou dány body $O[0]$, $A[3]$, $B[5]$, $C[-2]$. Zapište výsledné množiny, vyznačte je na číselné ose a vyjádřete je též pomocí intervalů:

$\overrightarrow{AC} \cup OB, OB \cup CO, \overrightarrow{AO} \cap \overrightarrow{CB}, AB \cap \overrightarrow{OC}$. (*Julie Martinová*, 1. A, str. 106 a 150)

2. a) Užitím binomické věty vypočtěte $\frac{1}{6}\left(3x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^4$.

b) V binomickém rozvoji tohoto výrazu je třetí člen 9. Vypočtěte x.

(*Petr Musil*, 3. B, str. 107 a 150)

3. Řešte v $\boldsymbol{R}$ rovnici: $4^{\sqrt{3x^2-2x+1}}+2=9\cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}$.
(*Magdalena Šimků*, 2. A, str. 108 a 151)

4. a) Vypočtěte obsah oblasti $\boldsymbol{M}$ ohraničené grafem funkce $f: y = 4x - x^2$ a osou x.
b) Vypočtěte obsah oblasti ohraničené grafy funkcí $f: y = x^2 - 2x$, $g: y = 4x - x^2$.
(*Ivana Fryčerová*, 4. C, str. 109 a 151)

5. Vypočtěte délku strany rovnostranného trojúhelníku vepsaného do kružnice o poloměru 5. (*Radim Literák*, 1. B, str. 110 a 152)

6. Pro které hodnoty reálného parametru c má rovnice

$$(2c-1)x^2+4cx+2c+2=0$$

imaginární kořeny ? Řešte rovnici pro $c = 3$. (*Jaroslav Štefl*, 4. A, str. 111 a 152)

7. Jsou dány body $A[1; 3]$, $B[-2; 4]$, $C[-2; -3]$.
a) Dokažte, že body A, B, C jsou vrcholy trojúhelníku.
b) Napište parametrické vyjádření 1) těžnice t_a, 2) výšky v_b.
c) Vypočtěte délku v_b. (*Kamil Indrák*, 3. C, str. 112 a 153)

8. Sestrojte řez krychle $ABCDA'B'C'D'$ o hraně délky $a = 5$ cm rovinou MNP, kde M leží mimo krychli na přímce $A'B'$, $|MA'| = \frac{1}{2}a$, N je středem hrany BB' a P středem hrany $C'D'$.
(*Michaela Rozkošná*, 2. A, str. 113 a 153)

9. Vzdálenost dvou železničních stanic je 4000 m. Stoupání železniční tratě je 8 ‰. Vypočtěte výškový rozdíl těchto stanic a úhel stoupání. (*Radka Beštová*, 1. C, str. 114 a 154)

10. Určete rovnice tečen ke křivce $y = x^3 + x^2 - 2x$ v průsečících křivky s osou x.
(*Irena Průšová*, 4. B, str. 115 a 154)

11. V lichoběžníku $ABCD$ je dáno: $|AB| = a = 8$ cm, $|BC| = b = 5$ cm, $\beta = 60°$, $\delta = 105°$. Vypočítej délky zbývajících stran lichoběžníku. (*Klára Ruberová*, 2. B, str. 115 a 155)

12. Určete parametr, souřadnice vrcholu, souřadnice ohniska a rovnici řídicí přímky paraboly p: $y^2 - 4x - 4y + 16 = 0$. Parabolu načrtněte. Určete vzájemnou polohu paraboly a přímky q: $x = 1$. (*Zuzana Andělová*, 3. A, str. 116 a 155)

13. Zjednodušte dané výrazy, kde a, b, c, d jsou různé od nuly, a výsledek zapište pomocí mocnin s přirozeným exponentem:

$$V_1 = \frac{7a^3b^{-2}c}{8a^2d^3} : \frac{28a^{-3}b^4d^{-5}}{64ab^6c^{-2}}, \quad V_2 = \left(\frac{4a^2b}{c^{-3}d^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{2a^5b^{-2}}{c^{-4}d^3}\right)^{-2}.$$

(*Eva Nádvorníková*, 1. A, str. 117 a 156)

14. a) Kolik mohu sestavit čtyřciferných čísel dělitelných pěti z množiny číslic $\boldsymbol{M} = \{0, 2, 3, 4, 5, 6\}$?

b) Kolik je možných tipů ve Sportce ? (*Jiří Kvapil*, 3. A, str. 118 a 156)

15. Každý rok ztrácí stroj p procent své hodnoty z předchozího roku. Za jak dlouho klesne jeho hodnota na polovinu ? Řešte obecně a pak pro $p = 12$.
(*Stanislav Sedlák*, 4. A, str. 119 a 157)

16. Dokažte, že platí rovnost $\frac{1+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \cdot \frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$. Pro které hodnoty α je tato rovnost definována? Ověřte ji pro $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. (*Blanka Trojková*, 2. B, str. 119 a 157)

17. Řešte danou soustavu početně třemi způsoby a také graficky:

$x - 4y + 8 = 0,$

$x + 2y - 1 = 0.$ (*Marta Hanáková*, 1. C, str. 120 a 158)

18. Sestrojte trojúhelník ABC, je–li dáno $a = 4$ cm, $v_a = 3$ cm, $\alpha = 60°$.
(*Jan Hruška*, 2. A, str. 121 a 158)

19. Rozhodněte, zda na přímce, případně na úsečce AB leží těžiště ΔPQR ($A[1; 1; -1]$, $B[4; -5; 8]$, $P[2; -3; 3]$, $Q[3; -2; 5]$, $R[4; -4; 7]$). (*Michal Pavlík*, 3. B, str. 122 a 159)

20. Řešte soustavu nerovnic $|2x - 3| \geq 5 \ \wedge\ x^2 - 5x - 24 < 0$.
(*Jiří Fajt*, 4. C, str. 123 a 159)

21. Na rohovém pozemku tvaru pravoúhlého trojúhelníku s přeponou 10 m a s vnitřním úhlem 30° má být postavena chata s obdélníkovým půdorysem. Určete její rozměry tak, aby rozloha chaty v m^2 byla co největší. Určete tuto rozlohu.
(*František Šíp*, 1. A, str. 124 a 160)

22. Určete velikosti $\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$, aniž počítáte samostatně velikosti úhlů α, β, je-li dáno: $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = \frac{5}{13}$. (*Emilie Žáčková*, 2. B, str. 126 a 160)

23. Z kvádru $4 \times 6 \times 8$ jsou odříznuty vrcholy řezy ve tvaru shodných rovnostranných trojúhelníků. Tím se povrch kvádru zmenšil o 9 %. Vypočtěte stranu řezu a proveďte diskusi.
(*Eduard Chyška*, 3. A, str. 127 a 161)

24. Dokažte: Jsou-li a, b délky odvěsen a c délka přepony v pravoúhlém trojúhelníku, pak platí $a + b \leq c\sqrt{2}$. (*Vlastimil Kryštof*, 4. C, str. 128 a 161)

3. Analýza úloh a opravených písemek

V následujících dvaceti ukázkách uvádíme ke každé úloze její zadání, hodnocené kroky s příslušnými vahami v procentech, komentář k žákově výkonu a k prováděné opravě, návrh vyhodnocení písemky na základě posouzení, jak byly kroky řešení naplněny a návrh klasifikace. Autor komentářů zde vychází ze svých analýz a zkušeností a je zcela přirozené, bude-li mít čtenář v některých případech jiný názor, protože neexistuje žádná univerzální zkušenost. Již dříve jsme také uvedli, že učitel může měnit a nastavovat váhy jednotlivých kroků podle toho, který jev chce u dané písemky zdůraznit.

3.1. Pavel Kovář, 1. A

Zjednodušte daný výraz a uveďte, kdy má smysl: $V = \frac{2x^2 - x - 6}{2x^2 - 3x - 9} : \frac{x-1}{x-3}$.

Kroky:

- Výpočet kořenů x_1, x_2 kvadratických trojčlenů $ax^2 + bx + c$. 20 %
- Rozklad trojčlenu v čitateli podle vzorce $a\,(x - x_1)(x - x_2)$. 20 %
- Přeměna dělení na násobení. 10 %
- Zkrácení shodných činitelů. 10 %
- Stanovení definičního oboru. 40 %

Řešení:

$2x^2 - x - 6$: $D = 49$, $\sqrt{49} = 7$, $x_{1,2} = \frac{1 \pm 7}{4} = \left\langle \begin{array}{l} 2 \\ -\frac{3}{2} \end{array} \right.$, $2x^2 - x - 6 = 2\,(x-2)(x + \frac{3}{2})$.

$2x^2 - 3x - 9$: $D = 81$, $\sqrt{81} = 9$, $x_{1,2} = \frac{3 \pm 9}{4} = \left\langle \begin{array}{l} 3 \\ -\frac{3}{2} \end{array} \right.$, $2x^2 - 3x - 9 = 2\,(x-3)(x + \frac{3}{2})$.

$$V = \frac{2(x-2)\left(x + \frac{3}{2}\right)}{2(x-3)\left(x+\frac{3}{2}\right)} \cdot \frac{x-3}{x-1} = \frac{x-2}{x-1}.$$ Definiční obor: $\boldsymbol{D}(V) = \boldsymbol{R} - \left\{-\frac{3}{2}, 1, 3\right\}$.

Komentář k opravě:

Nejprve si všimněme textu. Vidíme, že slovo *výraz* je napsáno nezřetelně, jako *výras*. Proto raději poslední písmeno opravíme, ale tuto opravu nezapočítáme do hodnocení, ani chybějící čárku a tečku. Při řešení úlohy Pavel nejprve převedl dělení na násobení (správně) a pak rozkládal kvadratické trojčleny. Vypočtené kořeny jsou správné, lze je „odfajfkovat"). Přitom mu však učitel může doporučit, aby si vždy nejprve vypočítal diskriminant (zde to však chyba není, protože žáci ještě neznají komplexní čísla). Při rozkladu se Pavel dopustil dost běžné chyby, že zapomněl na koeficient u kvadratického členu. To sice náhodou neovlivní výsledek, ale je to chyba; počítá se však jako jedna, i když se jí dopustil dvakrát. Druhou část úkolu (definiční obor) Pavel nezvládl: chybně chce, aby čitatel byl různý od nuly a nevyloučil nulovost výrazů, které byly dříve ve jmenovateli a které zkrátil. Celkové uspořádání výpočtů je přehledné. Pavel má však tendenci psát příliš krátké odmocniny, je vhodné ho na to upozornit, stejně jako na nesprávné polohy rovnítka, resp. tečky při násobení zlomků. Z formálních chyb lze ještě uvést, že občas něco nedbale vynechává (závorku, odmocninu) a nepodtrhl výsledek. Vidíme, že Pavel se ještě musí naučit stanovovat definiční obor výrazů.

Když při bodovém hodnocení oceníme 2. krok na 10 % a 5. krok nulou, vyjde nám celkový výsledek 50 %. Formální stránka tento výsledek vcelku neovlivní, takže lze klasifikovat známkou 3.

3.2. Vlasta Vaněrková, 4. B

Pro členy geometrické posloupnosti $\{a_n\}$ platí $a_5 - a_2 = \dfrac{70}{9}$, $a_3 - a_4 = \dfrac{20}{3}$. Určete první člen a kvocient této posloupnosti.

Kroky:

- Vyjádření a_2, a_3, a_4, a_5 pomocí a_1 a q. 10 %
- Dosazení do zadání a úprava na součin. 10 %
- Vyloučení a_1. 20 %
- Výpočet q. 25 %
- Výpočet a_1. 25 %
- Závěr (odpověď). 10 %

Řešení:

$a_2 = a_1\, q$, $a_3 = a_1\, q^2$, $a_4 = a_1\, q^3$, $a_5 = a_1\, q^4$.

$a_5 - a_2 = a_1\, q^4 - a_1\, q = a_1\, q\, (q^3 - 1) = \dfrac{70}{9}$, $a_3 - a_4 = a_1\, q^2 - a_1\, q^3 = a_1\, q^2\, (1 - q) = \dfrac{20}{3}$.

$$\frac{a_1 q\,(q-1)(q^2+q+1)}{a_1 q^2\,(1-q)} = \frac{70}{9} : \frac{20}{3} \Rightarrow \frac{q^2+q+1}{q} = -\frac{7}{6} \Rightarrow \ldots\ 6q^2 + 13q + 6 = 0.$$

$$D = 25, \quad \sqrt{D} = 5, \quad q_{1,2} = \frac{-13 \pm 5}{12} = \left\langle \begin{array}{l} -\frac{3}{2} \\ -\frac{2}{3} \end{array} \right. .$$

K výpočtu a_1 použijeme např. vztah $a_1 q^2 (1 - q) = \frac{20}{3}$.

Pro $q = -\frac{3}{2}$ máme $a_1 \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{20}{3} \Rightarrow a_1 = \frac{32}{27}$.

Pro $q = -\frac{2}{3}$ máme $a_1 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{3} = \frac{20}{3} \Rightarrow a_1 = 9$.

Úloha má dvě řešení: $a_1 = \frac{32}{27}, q = -\frac{3}{2}$ a $a_1 = 9, q = -\frac{2}{3}$.

Komentář k opravě:

V textu můžeme vyjádřit pochybnost, zda GP je vhodná zkratka pro geometrickou posloupnost. Při řešení postupovala Vlasta správně, mezivýsledek $-\frac{7}{6}$ lze „odfajfkovat", i předchozí mezivýsledky stejně jako kvadratickou rovnici pro q. Při výpočtu q pak chvíli bojovala s krácením a přepisovala číslice do téměř nečitelna, lze na to upozornit. Při výpočtu a_1 jednou nezvládla znaménko, jednou má výpočet správný. Celkové uspořádání výpočtů je ještě dostatečně vyhovující. Z formálních závad lze připomenout, že není podtržen výsledek, chybí pokračovací rovnítka a všimněme si náznaku tendence psát příliš krátké zlomkové čáry.

Při bodovém hodnocení strhneme ve 4. kroku 5 % a v 5. kroku 10 %, celkem tak má 85 %. Podle tabulky v kap. 1 je výsledná známka 2 (1–).

3.3. Vladimír Martinák, 2. A

Řešte rovnici $\sin^2 x + \frac{1}{2} \sin 2x = 1$.

Kroky:

- Převedení $\sin 2x$ na g.f. jednoduchého úhlu. 15 %
- Použití vztahu $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. 15 %
- Úprava levé strany na součin. 15 %
- Řešení rovnice $\cos x = 0$. 20 %
- Řešení rovnice $\sin x - \cos x = 0$. 25 %
- Závěr (odpověď). 10 %

Řešení:

$\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x = 1 \Rightarrow \sin^2 x + \sin x \cos x = 1 \Rightarrow \sin^2 x - 1 + \sin x \cos x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -\cos^2 x + \sin x \cos x = 0 \Rightarrow \cos x (\sin x - \cos x) = 0.$

a) $\cos x = 0 \Rightarrow x_{1k} = \frac{\pi}{2} + k\pi.$

b) $\cos x \neq 0 \wedge \sin x - \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x - 1 = 0 \Rightarrow x_{2k} = \frac{\pi}{4} + k\pi.$

Závěr: Řešením dané rovnice jsou čísla $x_{1k} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (= 90° + k·180°) a $x_{2k} = \frac{\pi}{4} + k\pi$ (= 45°+ + k·180°).

Komentář k opravě:

Vladimír zná potřebné vzorečky (převedení sin $2x$ na funkce jednoduchého úhlu, vztah mezi sinem a kosinem, hodnotu funkce sinus pro 45°), ale jen formálně, vůbec si neuvědomuje rozsah jejich platnosti, např. používá $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$. Druhé závažné chyby se dopouští, když „odmocňuje" vztah $\sin^2 x = \frac{1}{2}$. Třetí chybou, hrubou, je dělení rovnice výrazem $\cos x$, protože tak zanedbal jednu větev řešení; tato chyba plyne z neznalosti postupu řešení „součinových" rovnic. Z formálních chyb lze vytknout zejména to, že neoddělil řešení od zadání, a dále to, že když je v goniometrické rovnici neznámá označena x, předpokládá se její řešení v míře obloukové. Snad mohlo být v tomto zadání přesnější: „V reálném oboru řešte rovnici ..." Celkově si však Vladimír s příkladem, po svém, věděl rady a dospěl k nějakému výsledku, i když zčásti chybnému.

Při bodovém hodnocení lze započítat 15 % z 1. kroku, 5 % z kroku druhého a 5 % z kroku pátého, celkem tedy 25 %, což je v klasifikaci 4.

3.4. Luděk Souček, 3. B

Rozhodněte, zda se protínají úsečky AB, CD; $A[-2; 3]$, $B[2; -1]$, $C[-4; -1]$, $D[-1; 1]$, a v kladném případě stanovte jejich průsečík.

Kroky:

- Stanovení směrového vektoru a parametrické vyjádření úsečky AB. 20 %
- Totéž pro úsečku CD. 20 %
- Řešení soustavy a stanovení hodnot parametrů. 40 %
- Závěr a odpověď. 20 %

Řešení:

AB: $\boldsymbol{u} = B - A = (4; -4)$,

$x = -2 + 4t$

$y = 3 - 4t,\ t \in \langle 0, 1\rangle$.

CD: $\boldsymbol{v} = D - C = (3; 2)$,

$x = -4 + 3s$

$y = -1 + 2s,\ s \in \langle 0, 1\rangle$.

Pak

$-2 + 4t = -4 + 3s$

$\underline{3 - 4t = -1 + 2s}$

$4t - 3s = -2$

$\underline{4t + 2s = 4}$

… řešíme $\Rightarrow$

$t_0 = 0{,}4,\ s_0 = 1{,}2$.

$s_0 \notin \langle 0, 1\rangle \Rightarrow$ úsečky se neprotínají. (Upřesnění: přitom přímka CD protíná úsečku AB v bodě $[-0{,}4; 1{,}4]$.)

Komentář k opravě:

Luděk zapomněl opsat část zadání o průsečíku úhlopříček, ale asi si ji uvědomoval, protože se pak o průsečík pokoušel. Při řešení úlohy nejprve správně našel parametrické vyjádření obou úseček, ale opomněl zapsat podmínky pro parametry: $s \in \langle 0, 1\rangle$, $t \in \langle 0, 1\rangle$. Z dalšího však vidíme, že si je jich vědom (viz jeho zápis „s = 0,4 protínají se", i když právě toto vyjádření není v pořádku, bylo předčasné, protože měl Luděk zjistit ještě hodnotu parametru t, která je 1,2). Zápis řešení svědčí o určité roztěkanosti nebo nervozitě žáka (škrtání). Při výpočtu průsečíku před koncem zápisu řešení zaměnil Luděk souřadnice x, y a spletl znaménko, ale to se snad započítávat ani nemusí, protože průsečík úseček neexistuje, ani chybný obrázek (spíš jen schematický náčrtek), který nebyl požadován a k řešení úlohy nebyl ani zapotřebí. Učitel však správně reagoval i na tyto dvě aktivity navíc.

Při bodovém hodnocení lze za první dva kroky započítat celkem 35 %, jak bylo výše zdůvodněno, za 3. krok 25 % (výpočet t začal, ale pak si asi chybně řekl, že t nepotřebuje) a asi by bylo možno na 5 % ocenit i to, že když mu vyšla různoběžnost, tak počítal i průsečík (i když s formálními chybami). Celkem 65 %, což podle tabulky dává klasifikaci 2 (2–).

3.5. Jaroslav Hubáček, 1. B

Řešte nerovnici $|x^2 - x| > 6$.

Kroky:

- Rozdělení na dva případy. 10 %
- 1. případ: vyřešení podmínek $x(x-1) \geq 0$. 15 %
- Vyřešení nerovnice $x^2 - x - 6 > 0$ (kořeny + intervaly). 20 %
- Průnik obou předchozích množin. 15 %
- 2. případ: vyřešení podmínek $x(x-1) < 0$. 15 %
- Vyřešení nerovnice $-x^2 + x - 6 > 0$ (nemá řešení). 15 %
- Sjednocení obou případů, odpověď. 10 %

Řešení:

a) Nechť $x^2 - x \geq 0$, tj. $x(x-1) \geq 0$, vstupní podmínka: $x \in (-\infty, 0\rangle \cup \langle 1, +\infty)$.

Pak $|x^2 - x| = x^2 - x$ a daná nerovnice přejde v nerovnici $x^2 - x > 6$, tj. $x^2 - x - 6 > 0$.

Počítáme kořeny trojčlenu: $D = 25$, $\sqrt{D} = 5$, $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm 5}{2} = \left\langle \begin{matrix} 3 \\ -2 \end{matrix} \right.$.

Máme tak $(x-3)(x+2) > 0$, takže $x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$. Všechna tato čísla vyhovují vstupní podmínce, takže množina všech řešení případu a) je $\boldsymbol{X}_a = (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$.

b) Nechť $x^2 - x < 0$, tj. $x(x-1) < 0$, vstupní podmínka: $x \in (0, 1)$.

Pak $|x^2 - x| = -(x^2 - x)$ a daná nerovnice přejde v nerovnici $-x^2 + x > 6$, tj. $x^2 - x + 6 < 0$.

Počítáme kořeny trojčlenu: $D = -23$, trojčlen je kladný pro všechna x, tedy $\boldsymbol{X}_b = \varnothing$.

Výsledná množina všech řešení je $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_a \cup \boldsymbol{X}_b = (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$.

Komentář k opravě:

Jaroslav učivo o kvadratických nerovnicích a o absolutních hodnotách neovládá. Ví jenom to, že se mají rozlišovat dva případy, ale zapomněl na případ rovnosti. V žádném z obou případů a), b) však nedovedl z podmínek vytvořit příslušné intervaly (jen z poloviny). Řešení kvadratické nerovnice $x_{1,2} > \ldots$ svědčí o naprosté neznalosti postupu; podobně v případě b), kde je navíc chybný diskriminant. Náhodou se však stalo, že dvakrát podtržený závěrečný výsledek je správný.

Při bodovém hodnocení lze započítat nanejvýš 5 % za 1. krok, za další už nic, takže při klasifikaci jde o čistou 5. Tento příklad ukazuje, že pouhé odsouhlasení výsledků při opravě písemek by bylo hrubou chybou učitele.

3.6. Jana Mikošková, 3. B

Řešte v oboru komplexních čísel kvadratickou rovnici $9z^2 - 6z + 10 = 0$ dvěma způsoby: pomocí vzorce a užitím vztahu mezi kořeny a koeficienty.

Kroky:

- Výpočet diskriminantu. 10 %
- Řešení vzorcem. 35 %
- Zápis vztahů mezi kořeny a koeficienty. 10 %
- Vyjádření rozdílu kořenů. 30 %
- Výpočet kořenů. 15 %

Řešení:

a) $D = 36 - 360 = -324 < 0 \Rightarrow$ kořeny jsou imaginární. $\sqrt{|-D|} = 18$.

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 18\,\mathrm{i}}{18} = \begin{cases} \frac{1}{3} + \mathrm{i} \\ \frac{1}{3} - \mathrm{i} \end{cases}.$$

b) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$,

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{10}{9}$.

$$(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \frac{4}{9} - \frac{40}{9} =$$

$$= -\frac{36}{9} = -4.$$

Odsud máme

$x_1 - x_2 = \pm 2\mathrm{i}$ (znaménko $\pm$ tu znamená, že označení kořenů je zaměnitelné) a dále

$x_1 + x_2 = \frac{2}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x_{1,2} = \frac{2}{3} \pm 2\mathrm{i}$, $x_{1,2} = \frac{1}{3} \pm \mathrm{i}$.

Komentář k opravě:

Jana se nejprve měla přesvědčit, jaký je diskriminant a který vzorec má použít. Vzorec pro kořeny kvadratické rovnice pro záporný diskriminant je zapsán s chybějící absolutní hodnotou, ale dál si Jana zřejmě tuto absolutní hodnotu částečně uvědomila. Výpočet rozdílu kořenů je prováděn s chybou, ale náhle se objevila správná hodnota rozdílu. Bylo by vhodné se Jany zeptat, jak k ní došla (boční výpočty?). Kořeny jsou vypočteny správně. Žákyně zná obě metody. V textu vypracované písemky je několik formálních chyb, které je též třeba opravit.

Při bodovém hodnocení lze řešení vzorcem ohodnotit 40 %, 3. krok 10 %, čtvrtý 15 % (nejasný původ rozdílu) a poslední naplno 15 %, celkem je to 80 %, 5 % dolů za formální chyby, tedy 75 % a známka 2.

3.7. Adéla Racková, 4. C

Posloupnost $\{a_n\}$ je dána rekurentním vzorcem $a_{n+1} = (n + 1)\,a_n - na_{n-1}$, přičemž hodnoty členů a_1, a_2 udávají kořeny rovnice $\frac{x+3}{x-2} - \frac{x-2}{x+3} = \frac{5}{6}$. Určete a_4.

Kroky:

- Převedení rovnice na rovnici kvadratickou. 20 %
- Řešení kvadratické rovnice. 20%
- Zkouška kořenů rovnice s neznámou ve jmenovateli. 20 %
- Výpočet a_3 a a_4 pro 1. řešení. 20 %
- Výpočet a_3 a a_4 pro 2. řešení. 20 %

Řešení:

Za předpokladu $x \neq 2$, $x \neq -3$ násobíme rovnici výrazem $6\,(x-2)(x+3)$.

$6\,(x+3)^2 - 6\,(x-2)^2 = 5\,(x-2)(x+3) \Rightarrow$

$x^2 - 11\,x - 12 = 0.$

$D = 169$, $\sqrt{D} = 13$, $x_{1,2} = \frac{11 \pm 13}{2} = \left\langle \begin{matrix} 12 \\ -1 \end{matrix} \right.$.

Zkouška: $x_1 = 12$: $L = \frac{15}{10} - \frac{10}{15} = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6} = P$; x_2: $L = \frac{2}{-3} - \frac{-3}{2} = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6} = P$.

1. řešení: $a_1 = 12$, $a_2 = -1$; pro $n = 2$ je z rekurentního vzorce $a_3 = 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 12 = -27$,

pro $n = 3$: $a_4 = 4 \cdot (-27) - 3 \cdot (-1) = -105$.

2. řešení: $a_1 = -1$, $a_2 = 12$; pro $n = 2$ je z rekurentního vzorce $a_3 = 3 \cdot 12 - 2 \cdot (-1) = 38$,

pro $n = 3$: $a_4 = 4 \cdot 38 - 3 \cdot 12 = 116$.

Komentář k opravě:

Kvadratická rovnice je odvozena správně, kořeny jsou správně. Adéla také správně našla 1. řešení úlohy, ale neuvědomila si, že existuje ještě druhé, v němž se zamění a_1 a a_2. Zde však nejde o nějaké hrubé logické pochybení, ale jen o případ jakéhosi nedotažení v pochopení textu. Chybí však zkouška. Pozor na gramatické a formální chyby.

Podle nastaveného bodování dostává tedy Adéla za 1. 2. a 4. krok celkem 60 %, což dává klasifikaci 3 (2–).

3.8. Eva Sokalová, 2. A

Je dána funkce f: $y = \dfrac{x+1}{x-2}$. Určete definiční obor, průsečíky grafu se souřadnicovými osami, kořen rovnice $f(x) = -2$ a načrtněte graf této funkce.

Kroky:

- Definiční obor. 15 %
- Průsečíky grafu se souřadnicovými osami. 20 %
- Řešení rovnice s neznámou ve jmenovateli (včetně zkoušky). 20 %
- Asymptoty; úprava rovnice pro získání druhé asymptoty. 20 %
- Náčrtek grafu s využitím asymptot a zjištěných průsečíků s osami. 25 %

Řešení:

$\boldsymbol{D}(f) = \boldsymbol{R} - \{2\}$; asymptota $x = 2$.

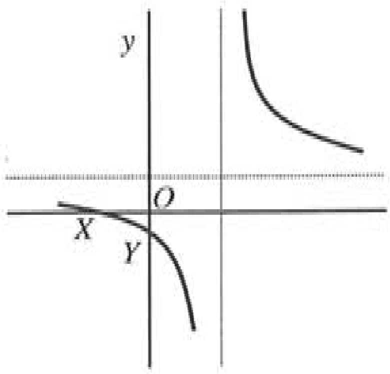
Průsečík s osou $x \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = -1$; je to bod $X[-1, 0]$.

Průsečík s osou $y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{1}{2}$; je to bod $Y[0, -\dfrac{1}{2}]$.

$$\frac{x+1}{x-2} = -2 \Rightarrow \frac{x+1}{x-2} + 2 = 0 \Rightarrow \frac{x+1+2x-4}{x-2} = 0 \Rightarrow \frac{3(x-1)}{x-2} = = 0 \Rightarrow x = 1.$$

$$y = \frac{x-2+3}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2}\text{; asymptota } y = 1.$$

Náčrtek: asymptoty jsou $x = 2$ a $y = 1$.



Obr. 3.8.1

Komentář k opravě:

Rovnice $f(x) = -2$ je vyřešena špatně. Graf Eva začala, část ho má dobře, ale pak si nevěřila a obrázek přeškrtala. Není jasné, jak získala asymptoty, zejména horizontální.

Učitel doporučuje opačné použití písmen X, Y. V textu zadání je chybně uvedeno „souřadnými osami" místo „souřadnicovými".

Při bodovém hodnocení jí lze započítat první dva kroky s plným počtem 35 %, v rovnici začala dobře, ale ztroskotala na násobení záporným číslem, což je zřejmě jen nahodilá chyba, můžeme započítat 10 %, za obrázek – i když přeškrtaný – též 10 % a snad i za asymptoty 10 %. Jsou-li hodnocené kroky provedené jen zčásti nebo s chybou, je vhodné uznat část bodů a pokusit se spravedlivě posoudit, co je jen nahodilé vybočení a co neznalost. Chceme-li být spravedliví, dá to chvíli přemýšlení.Celkem je to 65 %, což dává známku 2 (2–).

3.9. Martina Navrátilová, 1. A

Obsah rovnoramenného trojúhelníku ABC se základnou AB je 30 cm^2. Vypočtěte délku strany AB, je-li těžiště T vzdáleno 4 cm od strany AB.

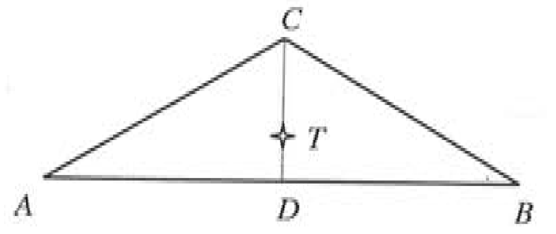
Kroky:

- Obrázek. 20 %
- Výpočet výšky. 40 %
- Výpočet strany. 40 %

Řešení:

CD je těžnice $\Rightarrow |TD| = \frac{1}{3}|CD| \Rightarrow |CD| = 3\,|TD| = 12$ cm.

CD je i výška na stranu AB.



Obr. 3.9.1.

$$P = \frac{1}{2}a \cdot v_a = \frac{1}{2}|AB| \cdot |CD| \Rightarrow |AB| = \frac{2P}{|CD|} = (P = 30\text{ cm}^2, |CD| = 12\text{ cm}) = \frac{60}{12} = 5\text{ cm}.$$

Komentář k opravě:

Někdy se stává, že si žák zvolí komplikovanější způsob řešení, jako učinila Martina v tomto případě. Patrně pod vlivem právě probírané látky (Heronův vzorec) si myslela, že je to příklad k této látce. Přitom „obvyklé" řešení je velmi jednoduché a úloze jde jen o to, aby si žáci uvědomili, že v rovnoramenném trojúhelníku je výška na základnu shodná s těžnicí a využili vlastnost těžiště (což Martina udělala). Řešení je správné, ale drobné formální chyby je třeba opravit.

Písemku lze hodnotit na plný počet 100 %, tj. s klasifikací 1, ale učitel správně do písemky dopsal „Proč tak složitě?", protože jednoduchá řešení považujeme za zdařilejší.

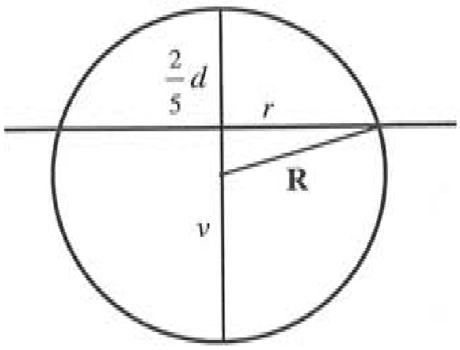
3.10. Jiří Kilián, 3. A

Určete hustotu dřevěné koule, která plove ve vodě ponořená do tří pětin svého průměru.

Kroky:

- Vhodný obrázek. 15 %
- Vhodná označení. 10 %
- Vzorec pro tíhu G_1 dřevěné koule. 10 %
- Vzorec pro tíhu G_2 vytlačené vody (a použitím objemu kulové úseče). 10 %
- Vyjádření poloměru podstavy kulové úseče pomocí poloměru koule. 10 %
- Výpočet tíhy G_2 vytlačené vody pomocí zadaných údajů a hustoty vody. 15 %
- Výpočet hustoty dřeva z porovnání $G_1 = G_2$ a odpověď. 20 %
- Správné zaokrouhlení a jednotky. 10 %

Řešení:



Obr. 3.10.1

Tíha dřevěné koule: $G_1 = V_1 \rho_1 g = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_1 g.$

Tíha vytlačené vody: $G_2 = V_2 \rho_2 g = \frac{\pi v}{6}(3r^2 + v^2)g.$ (g je gravitační zrychlení).

Podle Euklidovy věty o výšce je $r^2 = \frac{2}{5}d \cdot \frac{3}{5}d = \frac{6}{25}d^2 = \frac{24}{25}R^2$.

Položíme $\rho_2 = 1\,000$ kg/m^3.

$$G_2 = \frac{\pi}{6}\frac{3}{5}2R\left(3\frac{24}{25}R^2 + \left(\frac{3}{5}2R\right)^2\right)\cdot 1000\,g = \frac{\pi}{125}R \cdot 128\,R^2 \cdot 1000\,g.$$

$$G_1 = G_2 \Rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_1\, g = \frac{\pi}{125}128 \cdot 1000\,R^3 g \Rightarrow \rho_1 = \frac{3}{500}\cdot 128\,000 = 768\ [\mathrm{kg/m^3}].$$

Hustota dřeva v dřevěné kouli je 768 kg/m^3.

Komentář k opravě:

Jiří nectí fyzikální vyjadřování a píše „plave" místo „plove", „váha" místo „tíha". S příkladem, nijak jednoduchým, si však v podstatě věděl rady a postup jeho výpočtů je správný. Dopustil se však určitých chyb. Předně při výpočtu vzdálenosti středu koule od hladiny (zpaměti) si zaměnil správnou desetinu průměru za desetinu poloměru a výsledek výpočtu r^2 je proto chybný. Za výšku kulové úseče považoval nejprve mechanicky $\frac{2}{5}d$ a výpočet V_2 prováděl s touto hodnotou; pak si asi uvědomil chybu, výšku vypočetl správně (měl si ji vyznačit v obrázku!) a pokusil se dosadit tuto správnou hodnotu do rozpočítaného V_2, ale nepovedlo se mu to. Vidíme, že vzhledem k řešenému problému jde vlastně o chyby nižšího řádu. Učitel správně vytkl chybně psané řecké písmeno π.

Při bodovém hodnocení lze postupovat např. takto: Obrázek 10 %, označení 10 %, vzorce pro tíhu 20 %, poloměr r 5 % (věděl jak, ale spletl se), výpočet V_2 10 % (chybná výška), výpočet hustoty dřeva 15 %, zaokrouhlení a jednotky 5 %; celkem tedy 75 %, což dává klasifikaci 2.

3.11. Dušan Tříska, 2. C

Krychle $ABCD\ A'B'C'D'$ má hranu a. Vrchol krychle odřízneme tak, že vedeme rovinu v 1/3 každé hrany vycházející z vrcholu. Znázorněte výsledné těleso, odřízneme-li takto vrcholy A, B, A', B'. Jak se změní objem a povrch?

Kroky:

- Znázornění výsledného tělesa (popis, viditelnost). 25 %
- Výpočet, oč se zmenší objem. 20 %
- Výpočet, oč se zmenší povrch. 20 %
- Výpočet, oč se zvětší povrch. 20 %
- Výpočet celkové změny povrchu. 15 %

Řešení:

Odřezány jsou 4 jehlany, kde podstava je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník (polovina čtverce o straně $\frac{a}{3}$) a výška je $\frac{a}{3}$. Objem se tedy zmenší o $\Delta V = = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{9} \cdot \frac{a}{3} = \frac{2}{81} a^3$.

Povrch se zmenší o obsah 12 trojúhelníků (jako výše) tj. o $\Delta S_1 = 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{9} = \frac{2}{3} a^2$

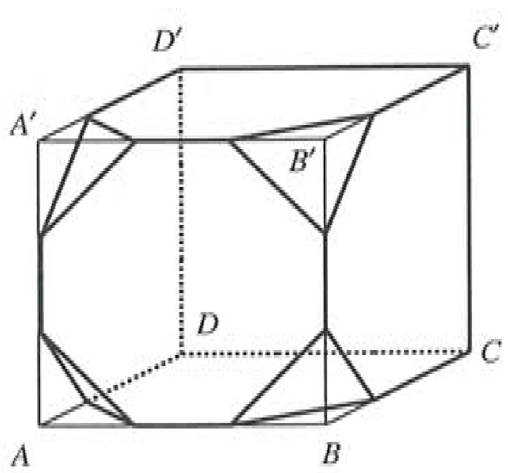
a zvětší se o obsah 4 rovnostranných trojúhelníků, jejichž strana s je rovna úhlopříčce čtverce o straně $\frac{a}{3}$:

$s = \frac{a}{3}\sqrt{2}$,

$\Delta S_2 = 4 \cdot \frac{s^2}{4}\sqrt{3} = \frac{a^2}{9} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{9} a^2$.

Ježto $\Delta S_1 > \Delta S_2$, povrch se zmenší

o $\Delta S = \Delta S_1 - \Delta S_2 = \left(\frac{2}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{9}\right) a^2$.



Obr. 3.11.1.

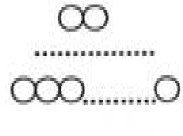
Komentář k opravě:

Dušan má své speciality ve vyjadřování – „hranolky“ (má být „jehlany“), „trojúhelníčky“ místo trojúhelníků. Obrázek je zčásti dobře, ale nepřesvědčuje, že Dušan výsledné těleso skutečně „vidí“. Celkový postup řešení je správný, ale všude je něco popleteno a řešení je nedokončeno. Při výpočtu objemu jehlanů Dušana spletlo jeho vlastní vyjádření a počítal objemy hranolů, chybí mu tam tedy součinitel $\frac{1}{3}$. Při výpočtu, oč se zmenší povrch, se nedopočítal správného počtu trojúhelníků, má jich být 12 a ne 8. Vypočtená strana rovnostranného trojúhelníku je jediný výsledek, který lze „odfajfkovat“. Pro výpočet obsahu má správný vzoreček, ale po dosazení mu vypadla $\frac{1}{4}$. Příklad zřejmě nestihl dopočítat.

Při bodovém hodnocení lze za obrázek dát 15 %, za 2. krok 10 %, za 3. krok 10 %, za 4. krok 15 % a poslední nemá. Celkem to je 50 %, klasifikace 3.

3.12. Jana Keprová, 4. B

Na hromadě je naskládáno 90 rour dle obrázku, přičemž v každé řadě směrem nahoru je o 1 rouru méně. V nejvyšší řadě jsou roury 2. Určete počet rour ve spodní řadě.



Kroky:

- Zápis zadání a potřebných vzorců. 15 %
- Vytvoření soustavy pro neznámé a_n a n. 20 %
- Řešení soustavy. 40 %
- Ověření a odpověď. 15 %

Řešení:

$a_1 = 2,\ s_n = 90;$

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot 1,\ s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$, tedy $a_n = (2 + n - 1 =)\ n + 1$,

$90 = \frac{n}{2}(a_n + 2) \Rightarrow 180 = (n(n + 1 + 2) =)\ n(n + 3) \Rightarrow n^2 + 3n - 180 = 0$,

$D = 729,\ \sqrt{D} = 27,\ n_{1,2} = \frac{-3 \pm 27}{2} = \left\langle \begin{matrix} 12 \\ -15 \end{matrix} \right.$. Kořen -15 nevyhovuje.

$n = 12,\ a_{12} = 13.$

Ověření: $s_{12} = 6\ (2 + 13) = 6\cdot 15 = 90$, vyhovuje. Ve spodní 12. řadě je 12 rour.

Vzhledem k tomu, že žáci mohou položit $a_n = 2$ (viz písemku Jany Keprové), je vhodné doplnit si analýzu o tuto možnost

$a_n = 2,\ s_n = 90;$

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot(-1),\ s_n = \frac{n}{2}\ (a_1 + a_n)$, tedy $2 = (a_1 - n + 1 =) \Rightarrow a_1 = n + 1$,

$90 = \frac{n}{2}\ (a_1 + 2) \Rightarrow 180 = (n(n + 1 + 2) =)\ n(n + 3) \Rightarrow n^2 + 3n - 180 = 0$,

dále viz hořejší řešení.

Komentář k opravě:

Počáteční určení známých a neznámých je správné, vzorečky také, postup je také správný, až pak ze vztahu $1 = a_1 - n$ „vypočítala" Jana $a_1 = 1 - n$ (s chybným znaménkem u n). Při řešení kvadratické rovnice udělala další chybu – diskriminant jí vyšel záporný, ale ona s „–" počítala jako s „+" a vyšly jí dva kořeny, i když nesprávné (správně vyloučila záporný kořen). Když pak počítala a_1, nepoužila svůj vzorec $a_1 = 1 - n$, protože by jí počet rour vyšel záporný, ale vzala n (?), což je však také špatně.

Při bodovém hodnocení je 1. krok za plných 15 %, soustava je vytvořena také správně (20 %). Za řešení soustavy lze snad dát 10 %, výsledek si neověřila, v odpovědi jsou údaje použity nesprávně, 5 %. Celkem tak získala 50 %, klasifikace 3.

3.13. Pavel Hnát, 1. B

Řešte rovnici $\sqrt{2x+1+2\sqrt{2x+3}} = 1$.

Kroky:

- Odstranění odmocnin. 25 %
- Řešení kvadratické rovnice. 25 %
- Zkouška kořenů. 40 %
- Závěr. 10 %

Řešení:

Umocníme: $2x + 1 + 2\sqrt{2x+3} = 1$, upravíme: $\sqrt{2x+3} = -x$,

umocníme: $2x + 3 = x^2$, tj.

$x^2 - 2x - 3 = 0$.

$D = 16$, $\sqrt{D} = 4 \ldots x_1 = 3, x_2 = -1$.

$L(3) = \sqrt{2\cdot3+1+2\sqrt{2\cdot3+3}} = \sqrt{7+2\sqrt{9}} = \sqrt{13} \neq 1 = P(3)$, nevyhovuje.

$L(-1) = \sqrt{2\cdot(-1)+1+2\sqrt{2\cdot(-1)+3}} = \sqrt{-1+2\sqrt{1}} = 1 = P(3)$, vyhovuje.

$\boldsymbol{X} = \{-1\}$.

Komentář k opravě:

Pavel dvojím umocněním dané rovnice dostal správnou kvadratickou rovnici a její dva kořeny. Zkouška pro kořen -1 je provedena správně, pro kořen 3 se mu nedopatřením objevilo nesprávné znaménko u 6 pod odmocninou, takže mu zkouška vyšla, i když 3 není řešením zadané rovnice. Jeho dlouhé výpočty definičního oboru není třeba zahrnout do hodnocení. Jednak se na definiční obor zadání neptalo a jednak to není dobře. Učitel by to měl vyjádřit při opravě písemky a potom zvlášť Pavlovi nebo celé třídě vysvětlit, že při řešení rovnice, u níž je zkouška součástí řešení, není třeba provádět zápisy definičního oboru, pokud nejsou vyžádány. Pak je ale třeba umět řešit nerovnice tohoto typu.

Při bodovém hodnocení se 10 % srazí za chybu ve zkoušce (je to však jen přepsání, nikoli nedostatek znalostí), a 7 % za chybějící závěr; výsledných 83 % znamená klasifikaci 2 (1–).

3.14. Jarmila Davidová, 3. C

Řešte rovnici $\binom{x}{x-2}+\binom{x}{x-1}=\frac{x^3+1}{2}$.

Kroky:

- Vyjádření kombinačních čísel. 20 %
- Úprava na kubickou rovnici. 20 %
- Vytknutí kořenového činitele. 20 %
- Řešení rovnice v součinovém tvaru. 20 %
- Zkouška a závěr. 20 %

Řešení:

$\binom{x}{x-2}=\binom{x}{2}=\frac{x(x-1)}{2}$, $\binom{x}{x-1}=\binom{x}{1}=\frac{x}{1}$, dosadíme do dané rovnice,

$\frac{x(x-1)}{2}+x=\frac{x^3+1}{2} \Rightarrow x^3-x^2-x+1=0 \Rightarrow x^2(x-1)-(x-1)=0 \Rightarrow (x-1)(x^2-1)=0,$

tedy $(x-1)^2(x+1)=0 \Rightarrow x_{1,2}=1, x_3=-1.$

Zkouška: $x=1$: $L=\binom{1}{-1}+\dots$ není definována;

$x=-1$: $L=\binom{-1}{-3}+\dots$ není definována.

Rovnice nemá řešení, $\boldsymbol{X}=\emptyset$.

Komentář k opravě:

V druhé části výpočtů při převádění členů spletla Jarmila znaménka, takže místo rozložitelného x^2-1 jí vyšlo nerozložitelné x^2+1 a proto dostala jen jeden kořen rovnice v součinovém tvaru. Poslední správnou rovnici před chybou „odfajfkujeme", u chybné rovnice napovíme nebo sdělíme chybu. Jarmila vynechala zkoušku, takže nepřišla na to, že její kořen rovnici nevyhovuje. Zlomková čára v jednom kombinačním čísle je jen omyl, který opravíme, ale nezahrnujeme do hodnocení.

Při bodovém hodnocení náleží za 1. krok 20 %, za 2. krok 10 %, za 3. pak 15 %, za 4. krok 10 % (protože její chybou se výpočet zjednodušil) a poslední krok je bez bodu. Celkem je to 55 %, tedy klasifikace 3.

3.15. Petr Pavelka, 4. A

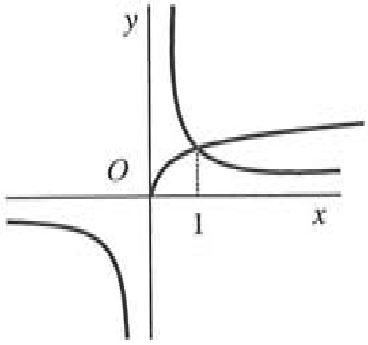
Pod jakým úhlem protíná parabola $y=\sqrt{x}$ hyperbolu $y=\frac{1}{x}$?

Kroky:

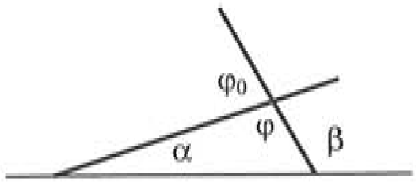
- Průsečík grafů (obrázek). 15 %

- Derivace funkcí. 20 %
- Derivace v daném bodě. 15 %
- Směrové úhly tečen. 20 %
- Odchylka tečen. 30 %

Řešení:



Obr. 1.15.1.



Obr. 1.15.2.

$\sqrt{x} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{x^2}, x^3 = 1, x_0 = 1.$

$y_1 = \sqrt{x} \Rightarrow y_1' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \ y_1'(1) = \frac{1}{2}.$

$y_2 = \frac{1}{x} \Rightarrow y_2' = -\frac{1}{x^2}, \ y_2'(1) = -1.$

$\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}5 \Rightarrow \alpha \doteq 26°34'$

$\mathrm{tg}\,\beta = -1 \Rightarrow \beta = 135°.$

$\alpha + \varphi = \beta \Rightarrow \varphi = \beta - \alpha \doteq 108°26', \varphi_0 \doteq 180° - 108°26' = 71°34'.$

Křivky se protínají pod úhlem 71°34′.

Komentář k opravě:

V úvodu spletl Petr pojmenování paraboly a hyperboly. Pak postupoval v podstatě správně, ale u derivací nejsou jeho stručné zápisy formálně v pořádku – derivace funkce se nerovná derivaci v bodě. Chybí určení velikostí úhlů α a β, úhel β na obrázku neodpovídá zápisu $\mathrm{tg}\,\beta = -1$. Výsledné γ dle obrázku lze proto považovat zčásti za nahodilé, navíc za odchylku dvou přímek bereme velikost menších úhlů, na něž dvě přímky rovinu rozdělují. Při výpočtu na kalkulačce zapomněl (?) Petr přepočítat části stupně na minuty. Vidíme, že při této opravě by se uplatnilo, jak učitel žáka zná – je možné, aby tento žák dovedl z hodnot funkcí tangens (bez zápisů hodnot a pomocí kalkulačky) vypočítat $180° - \alpha - \beta$?

Při bodovém hodnocení lze za první dva kroky započítat 35 %, za 3. krok 5 % (srážka za špatný zápis). Hodnoty úhlů nemá zapsány, ale asi počítá se správnými, 10 %, odchylka s chybou 15 %, celkem 65 %, klasifikace 2 (2–).

3.16. Tomáš Hanák, 2. B

Vypočtěte obsah a obvod rovnoramenného lichoběžníku, jsou-li délky jeho základen 22 cm a 12 cm a jeho výška je o 1 cm menší než délka jeho ramene.

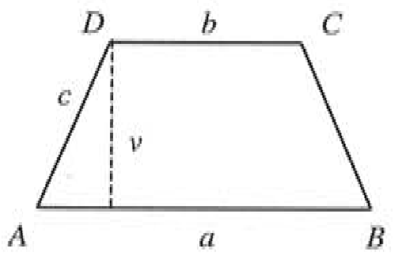
Kroky:

- Náčrtek. 20 %
- Výpočet výšky a ramene. 30 %
- Výpočet obsahu. 25 %
- Výpočet obvodu. 25 %

Řešení:

Z Pythagorovy věty plyne $\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + v^2 = c^2 \Rightarrow 25 + v^2 = (v+1)^2 \Rightarrow$

$2\,v = 25 - 1 \Rightarrow v = 12$ cm, $c = 13$ cm.



Obr. 3.16.1.

$P = \frac{1}{2}(a+b)\,v = 204\ \text{cm}^2, \quad o = a + b + 2\,c = 60$ cm.

Komentář k opravě:

Tomáš při výpočtu vychází ze správných vzorců a výšku i rameno lichoběžníku má zjištěno dobře, to vše lze „odfajfkovat“. Do výpočtu obvodu zahrnul však omylem jen jedno rameno a při výpočtu obsahu se mu přesmykly číslice 3 a 4, takže místo 34 napsal 43 a tím je výsledek chybný. Tomášovu práci s jednotkami (že je zapisuje až u výsledků) lze tolerovat, u obsahu je však jednou zapsáno špatně cm místo cm^2. Učitel opraví i četné chyby v textu zadání.

Při bodovém hodnocení lze plně započítat první dva kroky, tj. 50 %, chyby při výpočtu obsahu a obvodu jsou malé, ale na druhé straně žádný výsledek není správný. Obsah (2 chyby) 15 %, obvod 20 %, celkem 85 %, klasifikace 2 (1–).

3.17. Hana Ševčíková, 1. C

Máme 2 čísla. Jestliže první z nich zvětšíme o 8, dostaneme čtyřnásobek druhého. Jestliže druhé zvětšíme třikrát, dostaneme polovinu prvního zvětšenou o 9. Která jsou to čísla?

Kroky:

- Označení neznámých. 15 %
- Vyjádření podmínek rovnicemi. 30 %
- Řešení soustavy rovnic. 30 %
- Ověření výsledku a odpověď. 25 %

Řešení:

První číslo je x, druhé číslo y.

$x + 8 = 4y,$

$3y = \frac{1}{2}x + 9,$ tj.

$x - 4y = -8,$

$\frac{1}{2}x - 3y = -9, \quad |\cdot(-2)$

$2y = 10,\ y = 5;\ x = 4y - 8 = 12.$

Ověření:

a) $12 + 8 = 20 = 4 \cdot 5$, vyhovuje, b) $3 \cdot 5 = 15 = \frac{1}{2} \cdot 12 + 9$, vyhovuje.

První číslo je 12, druhé 5.

Komentář k opravě:

Hana si správně označila neznámé a sestavila první rovnici. Druhou rovnici však sestavila špatně, tj. tak, jako by úloha říkala „polovinu prvního zvětšeného o 9". S tímto výkladem pak vyřešila příklad dobře, včetně ověření výsledku.

Při bodovém hodnocení má za 1. krok 15 %, za druhý polovinu, tj. 15 %, 3. krok je správně, ale s jinými údaji, 15 % a za poslední rovněž 20 %, celkem 65 %, klasifikace 2 (2–). Při bodovém hodnocení by bylo možno postupovat i tak, že 2. rovnice je sestavena zcela špatně, ale my jsme se přiklonili k mírnějšímu posouzení ne zcela pochopené druhé podmínky pro hledaná čísla.

3.18. Eva Holubová, 2. B

Na ciferníku hodin stanovte velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku 479.

Kroky:

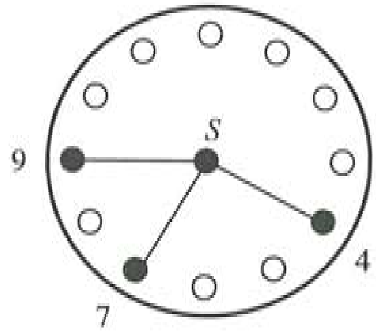
- Obrázek (ciferník hodin), znázornění trojúhelníku. 25 %
- Úhel středový a obvodový (4). 25 %
- Úhel středový a obvodový (7). 25%
- Úhel středový a obvodový (9). 25 %

Řešení:

$|\angle 9S7| = 60° \Rightarrow |\angle 947| = 30°$,

$|\angle 7S4| = 90° \Rightarrow |\angle 794| = 45°$,

$|\angle 4S9| = 210° \Rightarrow |\angle 479| = 105°$.



Obr. 3.18.1.

Komentář k opravě:

Eva vyřešila příklad správně, ale sedmkrát opakuje tutéž chybu – nesprávně označuje velikost úhlu, jde tedy patrně o neznalost, nikoli o nedopatření.

Pokud za to strhneme 10 %, dostaneme klasifikaci 1 (1–). Ještě poznámka: Zadavatel písemky možná chtěl zjistit i to, jak žáci zvládají případ, kdy středový úhel je nekonvexní, zde $\angle 4S9$. To však Eva obešla tím, že využila součtu úhlů v trojúhelníku. Zadavatel by tedy musel své zadání upřesnit.

3.19. Ema Kroupová, 3. B

Určete vzájemnou polohu kružnice k: $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 5$ a přímky p: $x - 2y - 1 = 0$.

Kroky:

- Dosazení za x, kvadratická rovnice. 35 %
- Řešení kvadratické rovnice, $D = 0$. 20 %
- Souřadnice bodu. 20 %
- Závěr (tečna, bod dotyku). 25 %

Řešení:

p: $x = 2y + 1$ dosadíme do rovnice k:

$(2y + 1 - 4)^2 + (y + 1)^2 = 5,$

$4y^2 - 12y + 9 + y^2 + 2y + 1 = 5,$

$5y^2 - 10y + 10 = 5,$

$y^2 - 2y + 1 = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow$ Přímka p je tečnou kružnice k.

Bod dotyku: $y = 1 \Rightarrow x = 3$, bod dotyku je [3; 1].

Komentář k opravě:

Při výpočtu Ema dobře dosadila, ale ve snaze provést dvě operace najednou špatně umocnila dvojčlen, má $2y^2 - 6y$ místo $4y^2 - 12y$. Pak jí ovšem vychází záporný diskriminant a nesečna místo tečny. Tím se jí usnadnila práce (nemusela počítat bod dotyku, který sice nebyl zadán, ale jehož výpočet se předpokládal).

Za 1. krok lze počítat 20 %, za druhý 10 % (počítala správný diskriminant své nesprávné rovnice), za 3. krok 0 % a za 4. krok 15 %, celkem 45 %, klasifikace 3.

3.20. Milan Lukeš, 4. A

Pomocí matematické indukce dokažte, že pro všechna $n \in \boldsymbol{N}$ platí:

$$\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{2(n+2)}.$$

Kroky:

- Důkaz $V(1)$. 35 %
- Důkaz $V(n) \Rightarrow V(n + 1)$. 55 %
- Závěr. 10 %

Řešení:

$V(n)$: $L(n) = P(n)$.

Dokážeme $V(1)$: $L(1) = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$; $P(1) = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$, tedy $L(1) = P(1)$.

Dokážeme $V(n) \Rightarrow V(n+1)$

Nechť platí $V(n)$, tedy $L(n) = P(n)$. K oběma stranám přičteme $\frac{1}{(n+2)(n+3)}$. Na levé straně je pak $L(n+1)$ a na pravé straně $\frac{n}{2(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{n(n+3)+2}{2(n+2)(n+3)} = \frac{n^2+3n+2}{2(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)(n+2)}{2(n+2)(n+3)} = \frac{n+1}{2(n+3)} = P(n+1)$, tedy $L(n+1) = P(n+1)$, takže platí $V(n+1)$.

Podle principu matematické indukce platí $\forall n : V(n)$.

Komentář k opravě:

Zásahy v textu zadání mají Milanovi připomenout, aby psal pořádně (i zlomkové čáry). Důkaz pro $n = 1$ je sice proveden, ale měl by být zřetelnější (L, P). V druhé části důkazu správně uvádí předpoklad a tvrzení, správně ukazuje, v čem spočívá důkaz, ale k takto prováděnému důkazu přece jen chybí nějaký komentář. Krácení $n+3$ proti $n+2$ je jen přepsání z nepozornosti.

Bodové hodnocení: Formulace řešení ukazuje na žáka, kterému je u matematické indukce všechno jasné, ale trochu podceňuje formální stránku matematiky. Hodnocení různých učitelů zde může být velmi rozdílné. Zde je provedeme takto: za 1. krok 30 %, za 2. krok 55 %, za 3. krok 5 %, celkem 90 %, klasifikace 1 (1–).

4. Analýza úloh, řešení a komentáře k písemkám

Každý z následujících dvaceti popisů písemek obsahuje zadání, hodnocené kroky jako výsledek jevové analýzy, řešení úlohy, jaké se čeká od žáků, komentář k písemce a k její opravě a návrh bodového hodnocení, včetně klasifikace dle 1. kapitoly.

4.1. Martin Lisický, 1. A

Řešte v $\boldsymbol{R}$ rovnici $\sqrt{10-x}+\sqrt{x-8}=2$.

Kroky:

- Umocnění, úprava, umocnění. 30 %
- Řešení kvadratické rovnice. 30 %
- Zkouška a zápis řešení. 40 %

Řešení:

$\sqrt{10-x}=2-\sqrt{x-8}$

$10-x=4-4\sqrt{x-8}+x-8$

$7-x=-2\sqrt{x-8}$

$49-14x+x^2=4(x-8)$

$x^2-18x+81=0 \Rightarrow (x-9)^2=0,\ x_{1,2}=9.$

Zkouška: $L(9)=\sqrt{10-9}+\sqrt{9-8}=2=P.$

$\boldsymbol{X}=\{9\}.$

Komentář k opravě:

Martin provedl dvojí umocnění rovnice, ale pak chtěl najednou zvládnout sloučení členů a změnu znaménka (násobení rovnice –1), což se mu nezdařilo a dostal v kvadratické rovnici jiný absolutní člen a samozřejmě i jiné kořeny. Neprovedl zkoušku, která je zde povinnou součástí řešení. Při opravě učitel vyznačí, že řešení není odděleno od zadání – např. slovem *Řešení:*, u dvou rovnic doplní symbol, že se rovnice umocňují, pak by měl odfajfkovat poslední správnou rovnici a vyznačit, že 80 je chybný člen a má být 81. Zbytek řešení je vhodné označit svislou vlnitou čarou a závěr škrtnout. Na vynechanou zkoušku musí učitel důrazně upozornit vynechávkou a zápisem „zkouška!".

Při bodovém hodnocení lze dát za 1. krok 25 %, za druhý krok 15 % (správné řešení nesprávné rovnice), celkem 40 %, což dává klasifikaci 3 (3–).

4.2. Ivan Raška, 3. A

Je dán trojúhelník ABC, $A[0; -3]$, $B[3; 3]$, $C[-3; 0]$, a bod $M[0; 2]$. Rozhodněte, zda bod M leží v trojúhelníku ABC.

Kroky:

- Správně zvolená strategie. 30 %
- Rovnice přímky AB, test bodů C a M. 20 – 30 %
- Totéž pro přímku BC a bod A. 20 – 30 %
- Totéž pro přímku CA a bod B, je-li třeba. 0 – 20 %
- Závěr. 10 %

Řešení:

Přímka AB: $y+3=\frac{3+3}{3-0}(x-0) \Rightarrow y+3=2x \Rightarrow (L(x,y)=)\ 2x-y-3=0.$

$L(C)=-9<0$, $L(M)=-5<0 \Rightarrow M$ leží v téže polorovině jako C.

Přímka BC: $y-3=\frac{0-3}{-3-3}(x-3) \Rightarrow y-3=\frac{1}{2}(x-3) \Rightarrow (L(x,y)=)\ x-2y+3=0.$

$L(A)=9>0$, $L(M)=-1<0 \Rightarrow M$ leží v opačné polorovině jako C.

Závěr: M neleží v téže polorovině jako C.

Přímka CA: $y-0=\frac{-3-0}{0+3}(x+3) \Rightarrow y=-x-3 \Rightarrow (L(x,y)=)\ x+y+3=0.$

$L(B)=9>0$, $L(M)=5 \Rightarrow M$ leží v téže polorovině jako B.

O závěru rozhoduje jen přímka BC, tj. po jejím použití lze vyslovit závěr, že M neleží v trojúhelníku ABC, aniž by se musel zjišťovat stav u jiných přímek.

Komentář k opravě:

Ivan řešil úlohu správně. Rovnici si neanuloval, takže učitel si musí jeho hodnoty levé a pravé strany ověřit přepočítáním. V 1. případě tak zjistí chybný výpočet $L(M)$, který náhodou neovlivnil výsledek (Ivan zapomněl při výpočtu přičíst 3.). Učitel doplní čárku v textu zadání, připíše slovo *Řešení* s vynechávkou, v polorovině ABC opraví $L(M)$ na správnou hodnotu 5, dále opraví označení polorovin a tečky v součinech $\frac{1}{2}\cdot 3$. Odfajfkuje rovnice přímek, dílčí tvrzení i závěr.

Bodově lze písemku hodnotit na 90 % (odebráno 10 % za chybný výpočet $L(M)$), tj. klasifikace 1 (1–).

4.3. Monika Daňková, 2. B

Trojúhelníkový pozemek je na plánu v měřítku 1 : 5 000 zakreslen jako trojúhelník o stranách délky 47,5 mm, 63,0 mm a 47,5 mm. Určete skutečné délky jeho stran a výměru pozemku.

Kroky:

- Určení skutečné velikosti stran. 40 %
- Výpočet výšky (obrázek). 30 %
- Výpočet výměry a odpověď. 30 %

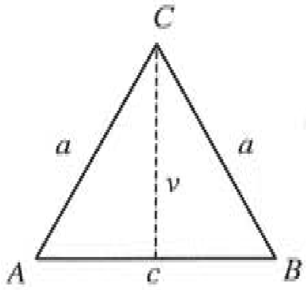
Řešení:

$c = 63 \cdot 5\,000$ mm $= 315\,000$ mm $= 315$ m

$a = 47{,}5 \cdot 5\,000$ mm $= 237\,500$ mm $= 237{,}5$ m.

$v = \sqrt{a^2 - (c/2)^2} = \sqrt{237{,}5^2 - 157{,}5^2} = 177{,}76... \doteq 178$ m.

$P \doteq 157{,}5 \cdot 178 = 28\,035\ \text{m}^2$.



Obr. 4.3.1.

Skutečné délky stran jsou přibližně rovny 238 m, 315 m a 238 m, výměra pozemku je asi 28 000 m^2 = 2,8 ha.

Komentář k opravě:

Monika správně vypočítala délky stran trojúhelníku, ale pro výpočet obsahu zvolila pro sebe nevyhovující strategii tím, že nejprve počítala obsah na plánu, ten je správně, ale pak jej nedovedla přepočítat do skutečnosti. Menší chyby se dopustila při zaokrouhlování v (mělo tu být jen 1 desetinné místo). Učitel odfajfkuje obrázek, vypočtené délky „čárkovaných" stran, v a P, ale u čísla 35,553 podtrhne poslední dvě desetinná místa (jsou v rozporu se zadáním), škrtne závěr výpočtu i s odpovědí. Může napovědět, že v posledním řádku se mělo násobit číslem 5 000^2, nikoli jen 5 000.

Bodově lze hodnotit první dva kroky naplno a 3. krok z jedné poloviny, což dává 85 % a známku 2 (1–).

4.4. Dana Pilařová, 4. B

Určete limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 + 5n^2 - 2}{2n^3 - n}$.

Kroky:

- Převedení na nulové posloupnosti. 35 %
- Limita podílu je podíl limit. 65 %

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+5n^2-2}{2n^3-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1+\frac{5}{n}-\frac{2}{n^3}\right)}{n^3\left(2-\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}-\frac{2}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{1+0-0}{2-0}=\frac{1}{2}.$$

Komentář k opravě:

Dana nejprve vykonala dva kroky najednou, vytkla v čitateli i ve jmenovateli n^3 a zkrátila je (to se začátečníkům nedoporučuje), ale pak si neporadila s nulovými posloupnostmi. Zdá se, že výpočet limit zná zatím jen formálně a nulové posloupnosti navíc chybně. Učitel opraví formální chyby (chybějící pokračovací rovnítko, škrtne symbol limity před zlomkem s limitami) a škrtne špatný nebo i napoví správný výsledek.

Při bodovém hodnocení nelze v 1. kroku nic vytknout, tedy 35 %, za druhý krok 10 %, celkem 45 %, klasifikace 3.

4.5. Renáta Panchártková, 1. B

Zjednodušte následující výraz a uveďte, za jakých podmínek má smysl:

$$V=\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{a-b}:\frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Kroky:

- Převedení dělení na násobení. 20 %
- Rozklad výrazů a krácení, výsledek. 50 %
- Stanovení podmínek, kdy má výraz V smysl. 30 %

Řešení:

$$V=\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{a-b}\cdot\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{a}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a}.$$

Podmínky: $(a\neq 0)\wedge(a\geq 0)\Rightarrow a>0,\ b\geq 0,\ a\neq b.$

Komentář k opravě:

Při stanovení podmínek se Renata dopustila dvou základních chyb. Jednak podmínky tvoří konjunkci a ne disjunkci, to musí učitel opravit, jednak si neuvědomila, že se pracuje s odmocninami, tedy že pod odmocninou nemá být záporné číslo. Na tuto chybu musí učitel při opravě také výrazně upozornit (např. vynechávkou a zápisem Odmocniny!). Dále by měl vlnovitě podtrhnout a opatřit otazníkem „podmínku“ $\sqrt{a} \neq -\sqrt{b}$, kde je navíc místo nerovnosti napsána rovnost. V závěru definičního oboru lze odfajfkovat $a \neq b$, škrtnout slovo NEBO a vlnovitě podtrhnout podmínku $a \neq 0$ (to je pro a nepostačující). Při převádění dělení na násobení Renáta chybně převrátila první zlomek (podtrhnout s otazníkem), ale další úpravy už má dobře, takže dostala vlastně převrácenou hodnotu správného výsledku, který pak ještě usměrnila. Její výsledek ovšem učitel „neodfajfkuje“, ale např. vlnovitě podtrhne. Zadání „zjednodušte“ neříká přesně, na jaký tvar se má výraz zjednodušit, takže tam nelze nic opravovat.

Bodově lze zhodnotit za 2. krok 40 % (správné rozklady, správná krácení) a za 3. krok 10 %, což v klasifikaci dává 3.

4.6. Magda Mičulková, 2. A

Ze dvou míst A, B ve vodorovné rovině, vzdálených od sebe 3,1 km, byl pozorován mrak nad spojnicí obou míst ve svislé rovině ve výškových úhlech $\alpha = 78°40'$, $\beta = 63°50'$. Jak vysoko byl mrak?

Kroky:

- Obrázek. 15 %
- Úhel γ. 15 %
- Užití sinové věty k výpočtu a (b). 30 %
- Výpočet výšky. 20 %
- Zaokrouhlení a odpověď. 20 %

Řešení:

$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - (78°40' + 63°50') = 180° - 142°30' = 37°30'$.

$$\frac{a}{\sin 78°40'} = \frac{3{,}1}{\sin 37°30'} \Rightarrow a = 3{,}1 \cdot \frac{\sin 78°40'}{\sin 37°30'} = 4{,}993\ldots \doteq 5{,}0$$

resp.

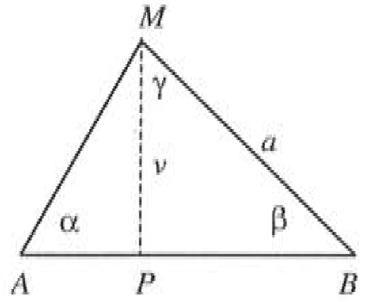
$$b = 3{,}1 \cdot \frac{\sin 63°50'}{\sin 37°30'} = 4{,}570\ldots \doteq 4{,}6$$

$$v = a \cdot \sin\beta = 5{,}0 \cdot \sin 63°50' = 4{,}487\ldots \doteq 4{,}5$$

resp.

$v = b \cdot \sin\alpha = 4{,}6 \cdot \sin 78°40' = 4{,}510\ldots \doteq 4{,}5$

Mrak byl přibližně ve výšce 4,5 km.



Obr. 4.6.1.

Komentář k opravě:

Úloha byla řešena správně, je možno odfajfkovat obrázek, výpočet úhlu γ i použití sinové věty. Jediné chybičky má Magda při zaokrouhlování – zadání je na 1 desetinné místo, takže i výsledek by měl být takto zaokrouhlen (navíc bylo na místě použití znaku $\doteq$). Proto před odfajfkováním výsledku výpočtů (b a v) na tuto chybu upozorníme, např. zápisem správných hodnot.

Za poslední krok tedy počítejme jen 10 %, celkem 90 %, známka 1 (1–).

4.7. Karel Kotek, 3. B

Vypočtěte $V = \left[(a+b)(\bar{a}-\bar{b})\right]^2$, kde $a = c - d$, $b = c + d$, $c = 2 - 3i$, $d = i\,c$.

Kroky:

- Vyjádření $a + b$. 20 %
- Vyjádření $\bar{a} - \bar{b}$. 30 %
- Součin. 35 %
- Druhá mocnina. 15 %

Řešení:

$a = c - d$, $b = c + d \Rightarrow a + b = 2\,c = 2 \cdot (2 - 3i)$

$\bar{a} - \bar{b} = -2\bar{d} = -2\,\bar{i}\,\bar{c} = 2i\,(2 + 3i) = 2 \cdot (-3 + 2i)$

$(a + b) \cdot (\bar{a} - \bar{b}) = 4 \cdot (2 - 3i) \cdot (-3 + 2i) = 4 \cdot (-6 + 9i + 4i + 6) = 52i.$

$V = (52i)^2 = -2\,704.$

Komentář k opravě:

Karel sice začal dobře, ale asi mu nejsou jasná komplexní čísla sdružená: k číslu 2i + 3 vytvořil sdružené komplexní číslo 2i – 3 ! Výpočty a úpravy v levém dolním rohu písemky jsou pak hodně chaotické, vynásobení komplexních čísel je tu chybné. Při opravě učitel doplní čárku v zadání, odfajfkuje výpočet $a + b$, $\overline{a} - \overline{b} = -2\overline{d}$ a d a vlnovkou podtrhne $-2(2i - 3)$. Učitel by měl dále podtrženími sledovat proměny $2i \pm 3$ a poslední řádek pak škrtnout. Ve druhém sloupci písemky je třeba doplnit závorky u čísla -144 a škrtnout výsledek.

Při bodovém hodnocení vidíme, že 1. krok je za 20 %, 2. krok je s podstatnou chybou jen za 10 %, třetí krok s chybou je za 5 %, umocňuje se jiný výraz a ještě s formální chybou za 5 %, celkem 40%, což je známka 3 (3–).

4.8. Milena Růžičková, 4. C

V geometrické posloupnosti je dáno: $a_1 = 81$, $q = \frac{1}{3}$ a $a_n = 1$. Vypočtěte n a s_n.

Kroky:

- Výpočet n. 50 %
- Výpočet s_n. 50 %

Řešení:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 1 = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{81} \Rightarrow 3^{n-1} = 3^4 \Rightarrow n - 1 = 4,\ n = 5.$$

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \Rightarrow$$

$$s_5 = 81 \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^5 - 1}{\frac{1}{3} - 1} = 81 \cdot \frac{\frac{1}{243} - 1}{-\frac{2}{3}} = 81 \cdot \frac{242}{243} \cdot \frac{3}{2} = 121.$$

Komentář k opravě:

Milena si zapsala chybně vzorec pro výpočet a_n, ale používala správný, takže šlo jen o přepsání. Došla ke správné úvaze $3^4 = 81$, a pak chtěla provést několik operací zpaměti najednou a neuvědomila si, že nezískala 4 jako n, ale jako $n - 1$. Výpočet s_n má správně, jen s jiným n, které mírně ale nepodstatně ulehčilo výpočet. Při opravě učitel doplní tečku do zadání, opraví vzorec pro a_n, k exponenciální rovnici připíše $n - 1 = 4$ a výsledek „$n =$" opraví na 5. Vypočtené s_4 podtrhne vlnovkou a odfajfkuje.

Výpočet n lze ohodnotit 40 %, výpočet s_n na 45 %, což dává 85 % a známku 2 (1–).

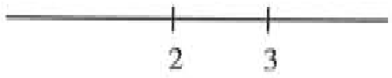
4.9. Jiří Duchoň, 1. b

Řešte nerovnici $2|x-2|-3<|3-x|$.

Kroky:

Číselná osa.	5 %
Případ $x<2$.	25 %
Případ $2\leq x<3$.	25 %
Případ $x\geq 3$.	25 %
Závěr.	20 %

Řešení:



Obr. 4.9.1.

a) $x<2 \Rightarrow |x-2|=-(x-2), |3-x| = 3-x \Rightarrow -2\cdot(x-2)-3<3-x \Rightarrow -x<2 \Rightarrow x>-2.$

$\boldsymbol{X}_1=(-2, 2).$

b) $2\leq x<3 \Rightarrow |x-2|=x-2, |3-x|=3-x \Rightarrow 2\cdot(x-2)-3<3-x \Rightarrow 3x<10 \Rightarrow x<\frac{10}{3}.$

$\boldsymbol{X}_2=\langle 2, 3).$

c) $x\geq 3 \Rightarrow |x-2|=x-2, |3-x|=-(3-x) \Rightarrow 2\cdot(x-2)-3<-3+x \Rightarrow x<4.$

$\boldsymbol{X}_3=\langle 3, 4).$

Závěr: $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X_1}\cup \boldsymbol{X_2}\cup \boldsymbol{X_3}=(-2, 4)$

Komentář k opravě:

Jiří si správně vyznačil body na číselné ose a ví, že se řešení nerovnice rozpadá na tři případy, přičemž výsledné řešení je sjednocením částečných řešení v jednotlivých případech. K velké chybě však došlo tím, že Jiří vynechal z úvah body 2 a 3. Další chyby mají společný původ, a to nezvládnutí absolutní hodnoty s „opačným" zápisem, tj. $|3-x|$, Jiří si neuvědomil, že $|3-x| = |x-3|$. Při opravě části a) přeškrtneme na + záporné znaménko na pravé straně nerovnice a zbytek výpočtu označíme po levé straně svislou vlnovkou. Ve výsledku škrtneme x–ovou složku. Při opravě části b) doplníme rovnítko u levého znaménka nerovnosti, na pravé straně nerovnice opět přepíšeme „–" na „+" a levou závorku výsledku upravíme na ostrou. Analogické opravy provedeme v případě c) a celkový výsledek škrtneme.

Při bodovém hodnocení dáme za 1. krok 5 %, za 2. krok 10 %, za 3. a 4. krok po 8 % a za závěr 10 %, celkem 41 %, což je známka 3 (3–).

4.10. Lea Holínková, 3. C

Zjistěte počet prvků množiny, z nichž lze vytvořit o 49 kombinací 3. třídy s opakováním více než bez opakování.

Kroky:

- Sestavení rovnice. 25 %
- Výpočet kořenů. 50 %
- Zkouška. 25 %

Řešení:

$$K'(3, n) = K(3, n) + 49 \Rightarrow \binom{n+3-1}{3} = \binom{n}{3} + 49$$

$$\frac{(n+2)(n+1)n}{6} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + 49 \quad | \cdot 6$$

$$(n+2)(n+1)n = n(n-1)(n-2) + 294$$

$$n^3 + 3n^2 + 2n = n^3 - 3n^2 + 2n + 294$$

$6n^2 = 294 \Rightarrow n^2 = 49 \Rightarrow n = 7$ (kořen -7 nevyhovuje).

Zkouška:

$$K(3, n) = \binom{7}{3} = 35, \quad K'(3, n) = \binom{9}{3} = 84 = 35 + 49.$$

Komentář k opravě:

Lea sestavila chybně rovnici – protože kombinací s opakováním je více, mělo být 49 odečteno, ne přičteno. Chybnými úpravami chybné rovnice však došla ke správné rovnici $n^2 = 49$ pro určení n. Lea ví, že kořen -7 není použitelný. Zkoušku pro kořen 7 však provádí ledabyle, tedy chybně, takže jí zkouška „vychází", i když 7 není kořenem rovnice, kterou sestavila. Učitel při opravě doplní do zadání chybějící háček a čárku, vynechávkou a čarou naznačí, že řešení není odděleno od zadání, u sestavené rovnice udělá znak hrubé chyby a může i naznačit správný tvar rovnice (např. zakroužkováním čísla 49 a jeho přesunem šipkou na pravou stranu). Pak svislou vlnovkou po levé straně textu naznačí, že všechno je jinak, ale řešení chybné rovnice sleduje dále i v něm vyznačí chyby. U prováděné zkoušky může učitel reagovat např. tak, že rovnost $84 - 35 = 49$ vlnovitě podtrhne, udělá znak hrubé chyby a třeba ještě připíše „provedeno chybně!". Při pravém okraji písemky může také připsat pokračovací rovnítka.

Při sestavení rovnice lze započítat 15 %, další výpočty jsou bezchybné, 50 %, a za zkoušku (i pro kořen -7) 10 %. Celkem 75 %, známka 2.

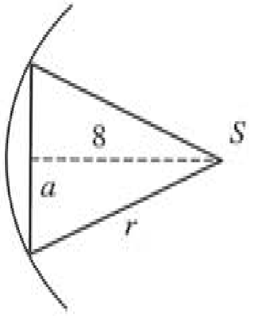
4.11. Miloš Přidal, 2. C

Poloměr kružnice vepsané pravidelnému desetiúhelníku je 8,0 cm. Vypočítejte délku jeho strany, poloměr kružnice opsané, obsah a obvod.

Kroky:

- Obrázek. 10 %
- Úhel v trojúhelníku. 10 %
- Poloměr kružnice opsané. 25 %
- Strana. 25 %
- Obvod. 10 %
- Obsah. 10 %
- Odpověď. 10 %

Řešení:



Obr. 4.11.1.

Středový úhel nad stranou a desetiúhelníku je $\frac{360°}{10} = 36°$.

Označme $x = \frac{a}{2}$ (počítáme v cm).

V pravoúhlém trojúhelníku je $\frac{x}{8} = \operatorname{tg} 18° \Rightarrow x = 8 \cdot \operatorname{tg} 18° \doteq$

$\doteq 2{,}6 \Rightarrow a \doteq 5{,}2$. cm.

Obvod desetiúhelníku je $o \doteq 10 \cdot 5{,}2 = 52$ cm.

Desetiúhelník se skládá z deseti trojúhelníků, obsah jednoho je $\frac{1}{2} \cdot 5{,}2 \cdot 8 = 20{,}8$ a obsah desetiúhelníku je 208 cm^2.

$\frac{2{,}6}{r} = \sin 18° \Rightarrow r = \frac{2{,}6}{\sin 18°} \doteq 8{,}4$.

Závěr: Délka strany daného pravidelného desetiúhelníku je 5,2 cm, poloměr kružnice opsané je 8,4 cm, obsah je 208 cm^2 a obvod je 52 cm (všechny hodnoty jsou přibližné).

Komentář k opravě:

Miloš hned ve druhém řádku ve velmi prosté situaci vypočítal chybně úhel 62° místo 72° a pak sice postupuje správně (zbytečně však k výpočtům v pravoúhlém trojúhelníku užívá sinovou větu), ale všechny výsledky má špatně. Při opravě učitel předně opraví trojnásobné použití slova „desetiůhelník" a v zadání upraví „8 cm" na „8,0 cm" – tímto zadáním učitel naznačil, že se má zaokrouhlovat na 1 desetinné místo, což si Miloš neuvědomil; viz (*Volfová* 2001), (*Běhounek* 2006). Učitel opraví chybně vypočtený úhel a ostatní výsledky buď škrtne nebo podtrhne vlnovkou a připíše správnou hodnotu. Ve všech výpočtech může chybné údaje vlnitě podtrhnout, odpověď škrtne.

Při bodovém hodnocení odebereme ve 2. bodě 10 % za chybně vypočtený úhel a také ještě 10 % ve 3. bodě za nedokončené zaokrouhlení a jeho nedůsledné označování. Celkem tak získal 80 %, což je známka 2.

4.12. Jana Palečková, 4. B

Je dána funkce $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2}{x^2-5}$. Vyjádřete funkci $f(x)$ jako součet nebo rozdíl mnohočlenu a zlomku, v němž čitatel má nižší stupeň než jmenovatel. Rozhodněte výpočtem derivace, zda $f'(0) = 0$. Určete algebraický tvar $f(z_0)$ v bodě $z_0 = -2 + \mathrm{i}$.

Kroky:

- Dělení čitatele jmenovatelem, zápis výsledku. 30 %
- Výpočet derivace, dosazení. 30 %
- Úprava zlomku s komplexními čísly. 40 %

Řešení:

1) $(x^3 + 2x^2) : (x^2 - 5) = x + 2$

$$\begin{array}{l} \underline{-(x^3 \qquad -5x)} \\ \quad 2x^2 + 5x \\ \quad \underline{-(2x^2 \qquad -10)} \\ \qquad 5x + 10 \end{array}$$

Závěr: $f(x) = x + 2 + 5\dfrac{x+2}{x^2-5}$.

2) $$f'(x) = \frac{(3x^2+4x)(x^2-5)-(x^3+2x^2)\cdot 2x}{\left(x^2-5\right)^2} = \frac{x^4-15x^2-20x}{\left(x^2-5\right)^2},$$

takže $f'(0) = 0$.

3) $$f(z_0) = \frac{(-2+\mathrm{i})^3+2(-2+\mathrm{i})^2}{(-2+\mathrm{i})^2-5} = \frac{4+3\mathrm{i}}{-2-4\mathrm{i}}\cdot\frac{-2+4\mathrm{i}}{-2+4\mathrm{i}} = -1 + \frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

Komentář k opravě:

Jana při opisování zadání spletla znaménko ve jmenovateli, ale při výpočtu už začala používat správné, i když se znovu dvakrát spletla. Asi se střídavě dívala na originál zadání a na svou verzi. Na 1. část úkolu šla šikovně, ale nedokončila ji, v čitateli jí zůstala ještě 2. mocnina x. Derivace je vypočtena dobře, upravovat ji nemusela, tento úkol tu nebyl, takže správně dosadila nulu ihned bez úprav derivace. Ve třetí části úlohy postupovala dobře a úlohu nestačila dokončit těsně před získáním výsledku. Při opravě učitel opraví v zadání čárku, ve slově *Řešení* háček a lze reagovat i na špatně napsanou nulu. V zadání chybně napsané $x^2 + 5$ opraví na $x^2 - 5$, ostatní $x^2 + 5$ podtrhne vlnovkou a může přidat otazníky; za posledním zlomkem v 1. řádku řešení připíše rovnítko a vynechávku. Vypočtenou derivaci i derivaci v bodě odfajfkuje. U posledního kompletního zlomku v posledním řádku udělá fajfku a za nedokončeným posledním zlomkem vynechávku.

Při bodovém hodnocení lze za 1. krok dát 15 %, za 2. krok 30 % a za 3. krok též 30 %, celkem 75 %, což je známka 2.

4.13. Michal Šedík, 1. A

Řešte v $\mathbb{R}$ soustavu algebraických rovnic

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5$$

$$\frac{3}{x}-\frac{5}{y}=-9.$$

Kroky:

- Substituce. 20 %
- Řešení soustavy. 30 %
- Návrat k neznámým x, y. 25 %
- Zkouška. 25 %

Řešení:

Pro $x \neq 0, y \neq 0$ provedeme substituci $\frac{1}{x}=u$, $\frac{1}{y}=v$ a dostaneme soustavu

$$u+v=5,$$

$$\underline{3u-5v=-9.}$$

$v=5-u \Rightarrow 3u-5(5-u)=-9 \Rightarrow 8u=16,\ u=2;$

$v=5-u=5-2=3.$

$x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{3}.$

Zkouška: $L_1 = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{\frac{1}{3}} = 2 + 3 = 5 = P_1$, $L_2 = \dfrac{3}{\frac{1}{2}} - \dfrac{5}{\frac{1}{3}} = 6 - 15 = -9 = P_2$.

Komentář k opravě:

Michal provedl správně substituci, ale vzniklou soustavu řešil chybně (mělo být $a = 5 - b$), nevrátil se k původním neznámým a neprovedl zkoušku. Zadání si trochu přeformuloval, ale při opravě stačí škrtnout tečku a připsat ji na konci zadání. Substituce se může odfajfkovat. V Michalově $a = 5 + b$ opraví učitel znaménko na „–“, zbývající části výpočtu doprovodí svislou vlnovkou a výsledek škrtne. Do volného místa vedle substituce je vhodné dopsat vynechávku a zápis „návrat k x, y“ a ještě jednu vynechávku s upozorněním „zkouška“.

Při bodovém hodnocení mu tedy lze započítat jen 20 % za 1. krok, což dává známku 4.

4.14. Jana Sichertová, 2. B

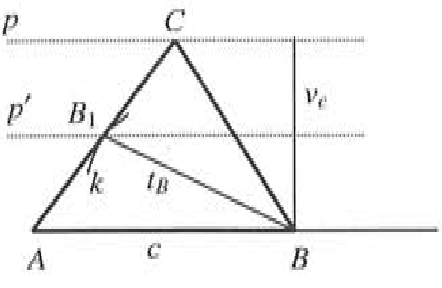
Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, je-li dáno: $|BB_1| = 6$ cm, kde B_1 je střed strany AC, $v_c = 5$ cm, $c = 5$ cm.

Kroky:

- Rozbor (obrázek, zápis vztahů). 20 %
- Popis konstrukce. 30 %
- Konstrukce. 35 %
- Diskuse (počet řešení). 15 %

Řešení:

Rozbor:



Obr. 4.14.1.

Popis konstrukce:

1. AB; $|AB| = 6$ cm.
2. p'; $p' \parallel AB$, $|p'\,AB| = 2{,}5$ cm.
3. $k\,(B;\,5\text{cm})$.
4. $B_1 \in p' \cap k$ (2 průsečíky).
5. p; $p \parallel AB$, $|p\,AB| = 5$ cm..
6. $\leftrightarrow AB_1$.
7. C; $C \in \leftrightarrow AB_1 \cap p$.
8. ΔABC.

Úloha má 2 řešení.

Komentář k opravě:

Jana ví, jak se řeší konstrukční úlohy, jaké části má řešení, jak zapisovat popis konstrukce, objevila i dvě potřebná geometrická místa (p a k), ale nevyřešila klíčový (a trochu netypický) problém, na čem ještě leží bod B_1. Při opravě doplní učitel v textu zadání čárku a tečku. V obrázku pro rozbor popíše přímku p a pak může poradit tak, že vede bodem B_1 rovnoběžku s p a připíše k ní vynechávku. V popisu konstrukce podtrhne 4. bod a přidá k němu značku hrubé chyby. V obrázku konstrukce udělá vynechávku.

Při bodovém hodnocení lze za rozbor dát 10 %, za popis konstrukce 15 %, za konstrukci 10 % a za diskusi 5 %, celkem 40 %, což je známka 3 (3–).

4.15. Václav Knotek, 4. A

Je dána kvadratická funkce $y = 2px^2 + (1 - p)x - \frac{4p^2 - 9}{16}$ s parametrem p. Pro kterou hodnotu parametru prochází graf této funkce počátkem ? Pod jakým úhlem pak v počátku protíná osu x (s přesností na minuty)?

Kroky:

Řešení kvadratické rovnice (2 kořeny).	25 %
Derivace funkce.	15 %
Derivace funkce v bodě 0 a úhel pro 1. kořen.	35 %
Derivace funkce v bodě 0 a úhel pro 2. kořen.	25 %

Řešení:

Pro $x = 0$, $y = 0$ máme podmínku pro p: $\frac{4p^2 - 9}{16} = 0$; tato rovnice má 2 kořeny: $p_{1,2} = \pm\frac{3}{2}$.

Pro $p_1 = \frac{3}{2}$ je $y' = 6x - \frac{1}{2}$, $y'(0) = \operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{1}{2}$, $\varphi_1 = 153°\ 26'$;

pro $p_2 = -\frac{3}{2}$ je $y' = -6x + \frac{5}{2}$, $y'(0) = \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{5}{2}$, $\varphi_2 = 68°\ 12'$.

Komentář k opravě:

První úkol zvládl Václav dobře, má správně i derivaci. Pak si však popletl parametr s nezávisle proměnnou o došel k nesprávným výsledkům, což si pak uvědomil a přeškrtal je. Nakonec zřejmě v rychlosti se pokusil něco zachránit a pro hodnotu parametru $-\frac{3}{2}$ (viz šipka) provedl správný výpočet derivace a správně určil úhel, ovšem nemá uveden počet minut. Pro druhou hodnotu parametru výpočet chybí. Při opravě učitel odfajfkuje 1. řádek a výpočet derivace, ve výsledku β dá 20 do kroužku (není to špatně) a napíše nad něj 12′. Vedle prvních dvou přeškrtaných řádků napíše učitel vynechávku a připíše „pro $p = \frac{3}{2}$“.

Při bodovém hodnocení započteme 40 % za první dva kroky a 25 % za třetí krok, celkem 65 %, což je známka 2 (2–).

4.16. Martin Soner, 3. C

V lavici sedí 5 žáků: A, B, C, D, E. Kolika způsoby je může učitel přesadit? Při kolika způsobech usazení a) A není uprostřed, b) A, B sedí vedle sebe, c) A sedí na okraji.

Kroky:

- Počet přesazení. 25 %
- Otázka a). 25 %
- Otázka b). 25 %
- Otázka c). 25 %

Řešení:

1. otázka: Jde o permutace z pěti prvků, kterých je 5! = 120. Jedním způsobem už žáci sedí, takže přesazeni mohou být 119 způsoby. Zde však můžeme hodnotit jako správný výsledek jak počet 119, tak i 120.

a) Je–li A již někde usazen, mají ostatní k usazení 4! možností, a protože A může sedět na 4 různých místech, dává to celkem $4 \cdot 4! = 96$ možností.

Lze postupovat i takto: Kdyby A seděl uprostřed, měli by ostatní 4! = 24 možností k usazení. Tento případ nemá nastat, takže ode všech 120 možností odebereme 24 nedovolených a dostaneme 120 – 24 = 96 možností.

b) Permutace čtyř prvků AB, C, D, E dává 4! = 24 možností, stejně i permutace čtyř prvků BA, C, D, E. Celkem je to 48 možností.

c) Jestliže A sedí na jednom kraji, mohou se ostatní usadit 4! = 24 způsoby, podobně když A sedí na druhém kraji, celkem opět 48 možností.

Komentář k opravě:

Úvodní otázka je tak trochu žert. Samozřejmě uznáme výsledek 120, ale můžeme ocenit, když někdo přijde na výsledek 119. Učitel může (po písemce) upozornit žáky, jak je důležité pozorně číst text zadání. Při opravě to můžeme napovědět (např. poznámkou „119 ?“). Případy a) a c) jsou řešeny správně, v případě b) si však Martin neuvědomil, že žáci mohou sedět nejen v pořadí AB, ale také BA. Martin nezná pravopis slova „způsob", což dokazuje celkem čtyřikrát (opravíme to). Při řešení se zřejmě soustředil na věcnou stránku a nehleděl na to, jestli mu tu a tam chybí čárka (připíšeme je) nebo je ukončena věta. Na konci části a) může učitel připsat „způsobů.", na konci části b) napíše vynechávku a písmena BA a za svorkou napíše 48. Výsledek c) odfajfkuje.

Při bodovém hodnocení dáme za b) jen 10 %, celkem je to 85 %, což je známka 2 (1–).

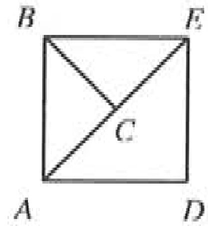
4.17. Světlana Žižková, 1. C

V grafu na obrázku vyhledejte a zapište

(1) všechny cesty z A do E

a dále všechny ty z nich, pro něž platí (X znamená výrok „cesta prochází bodem X")

(2) $\neg$C, (3) B $\wedge$ C, (4) C $\vee$ D, (5) C $\Rightarrow$ B, (6) B $\Leftrightarrow$ C.



Obr. 4.17.1.

Kroky:

- Úkol (1). 15 %
- Úkol (2). 15 %
- Úkol (3). 15 %
- Úkol (4). 15 %
- Úkol (5). 20 %
- Úkol (6). 20 %

Řešení:

(1) (odleva) $ABE, ABCE, ACBE, ACE, ADE$.

(2) ABE, ADE.

(3) $ABCE, ACBE$.

(4) $ABCE, ACBE, ACE, ADE$.

(5) $ABE, ABCE, ACBE, ADE$.

(6) $ABCE, ACBE, ADE$.

Komentář k opravě:

Světlana si nezvolila nějaký systém, v jakém pořadí bude hledat cesty a tak se jí do případu (1) dostala cesta ABE dvakrát. Případy (2), (3), (4) jsou řešeny správně. Ukazuje se, že implikaci Světlana dobře nerozumí, protože zadání chápe tak, jakoby cesta musela jít oběma místy C, B, a to v tomto pořadí. Stejně tak dobře nerozumí ekvivalenci, kde uvažovala jen případy, kdy cesta jde oběma místy B a C. Při opravě učitel oddělí řešení od zadání vynechávkou a nápisem *Řešení:*. V části 1 škrtne poslední ABE a může šipkou naznačit, že už naznačit, že už to jednou v seznamu je. Další tři případy odfajfkuje a u dvou posledních napíše vynechávku.

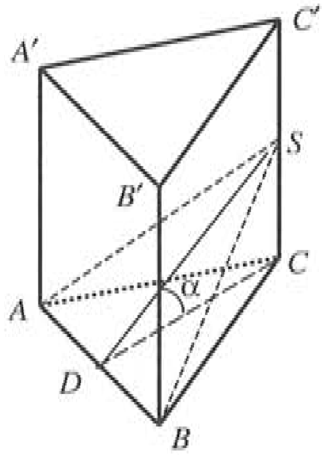
Při bodovém hodnocení dáme za úkol (1) 10 %, za (2) až (4) celkem 45 %, za (5) a (6) po 5 %, celkem 65 %, což je známka 2 (2–).

4.18. Lucie Palátová, 4. C

Je dán pravidelný trojboký hranol $ABCA'B'C'$, jehož podstavná hrana je 5,0 cm. Vypočtěte jeho objem V, jestliže rovina ABS svírá s rovinou podstavy úhel $\alpha = 30°$; S je střed hrany CC'. Výsledek zaokrouhlete na 1 desetinné místo.

Kroky:

- Obrázek. 15 %
- Obsah podstavy. 15 %
- Výška podstavy. 15 %
- Výška kvádru. 35 %
- Objem kvádru. 20 %



Obr. 4.18.1.

Řešení:

Obsah podstavy $P = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$.

Výška podstavy $|CD| = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.

$|SC| = |CD| \cdot \text{tg}\,\alpha = \frac{a}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{2} \Rightarrow$ výška hranolu $v = 2 \cdot \frac{a}{2} = a$.

Objem hranolu $V = P \cdot v = \frac{a^3}{4}\sqrt{3} \doteq 54{,}1 \text{ cm}^3$

Komentář k opravě:

Obrázek k rozboru úlohy je vyhovující, ale Lucie se ho ke své škodě při výpočtech úplně nedržela. Vypočetla numericky výšku podstavy a obsah podstavy, ale pak bez ohledu na zadaný úhel α vykouzlila pravoúhlý trojúhelník, kde délka přepony je rovna délce jedné odvěsny a při výpočtu výšky tělesa navíc chybně použila Pythagorovu větu. I když zná vzorec pro výpočet objemu hranolu, s chybnou výškou dostala chybný výsledek. Při opravě učitel zjistí, že si Lucie přetvořila text podle svého, vynechala v něm slovo „trojboký" (opravit) i tvar údaje 5,0 cm, kterým se naznačuje zaokrouhlení na 1 desetinné místo; viz (*Volfová* 2001), (*Běhounek* 2006). Dále se opraví slovo „oběm" (!). Řešení není odděleno od zadání, učitel připíše k vynechávce slovo *Řešení*. Výpočet v_a se může odfajfkovat, S_p

také, ale snad by se mělo už teď dát najevo, že se zaokrouhluje (≠) a počítá jen na jedno desetinné místo. Učitel by měl zvlášť zvýraznit místo první chyby v řešení (např. onen trojúhelník s přeponou v_a v levém dolním rohu dát do kroužku a v_a na přeponě také a udělat u něj znak hrubé chyby). Ostatní výpočty – kromě vzorce pro objem hranolu – už lze škrtnout.

Při bodovém hodnocení lze za obrázek dát 15 %, za v_a a obsah podstavy po 12 % (měla znát vzorce), a za znalost vzorce pro objem 3 %, celkem 42 %, což je známka 3 (3–).

4.19. Jan Nohýl, 3. A

Ve třídě je 30 žáků, 3 z nich nejsou na vyučování připraveni. V hodině matematiky má být vyzkoušeno 5 žáků. Vypočtěte pravděpodobnost, že mezi zkoušenými bude
a) právě jeden nepřipravený žák,
b) nejvýše dva nepřipravení žáci,
c) alespoň dva nepřipravení žáci.

Kroky:

- Počet případů možných. 15 %
- Počet případů příznivých jevu A. 15 %
- Výpočet $P(A)$. 10 %
- Počet případů příznivých jevu B. 20 %
- Výpočet $P(B)$. 10 %
- Počet případů příznivých jevu C. 20 %
- Výpočet $P(C)$. 10 %

Řešení:

Celkový počet pětic (možné případy): $n = \binom{30}{5} = \dfrac{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = 142\,506.$

a) Počet případů příznivých jevu A: $m = \binom{3}{1}\cdot\binom{27}{4} = \dfrac{3\cdot 27\cdot 26\cdot 25\cdot 24}{4\cdot 3\cdot 2} = 52\,650.$

$P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{52\,650}{142\,506} = 0{,}36945\ldots \doteq 36{,}9\%.$

b) Počet případů příznivých jevu B: $m = \binom{3}{2}\cdot\binom{27}{3} + \binom{3}{1}\cdot\binom{27}{4} + \binom{27}{5} =$

$$\frac{3\cdot 27\cdot 26\cdot 25}{3\cdot 2} + \frac{3\cdot 27\cdot 26\cdot 25\cdot 24}{4\cdot 3\cdot 2} + \frac{27\cdot 26\cdot 25\cdot 24\cdot 23}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = 8\,775 + 52\,650 + 80\,730 = 142\,155.$$

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{142\,155}{142\,506} = 0{,}99753\ldots \approx 99{,}8\%.$$

c) Počet případů příznivých jevu C: $m = \binom{3}{2}\cdot\binom{27}{3} + \binom{3}{3}\cdot\binom{27}{2} = \frac{3\cdot 27\cdot 26\cdot 25}{3\cdot 2} + \frac{27\cdot 26}{2} =$

$8\,775 + 351 = 9\,126.$

$$P(C) = \frac{m}{n} = \frac{9126}{142\,506} = 0{,}06403\ldots \approx 6{,}4\%.$$

Komentář k opravě:

Při výpočtu pravděpodobností nepočítá Jan zvlášť počet případů možných a počet případů příznivých danému jevu, ale počítá hned pravděpodobnost. Jevy A a B má vyřízeny správně, u jevu C si přidal jakési dva nesmyslné členy, které mu sice neovlivnily správný výsledek, ale jsou chybné. Při opravě učitel v textu zadání doplní několik čárek a tečku. Odfajfkuje výsledky výpočtu v 1. i ve 2. řádku, v dalších řádcích učitel poškrtá vadné členy a výsledek může též odfajfkovat. Opraví se i další menší formální chyby: v případě a) chybí ve jmenovateli závorka, v případě b) se do kombinačních čísel dostaly zlomkové čáry a poslední rovnost je jen přibližná, v případě c) předposlední rovnost zase přibližná není.

Při bodovém hodnocení získá Jan za prvních pět kroků 70 %, za 6. a 7. krok 15 %, tedy celkem 85 %, což je známka 2 (1–).

4.20. Jiří Ort, 2. A

Řešte v $\boldsymbol{R}$ rovnici $\log(x^3 + 1) - \log 7 - \log x = \log(x + 1) - \log 6.$

Kroky:

- Úprava na rovnost logaritmů. 15 %
- Rovnost argumentů. 5 %
- Úprava rovnice na součinový tvar, $x_1 = -1$. 25 %
- Řešení kvadratické rovnice. 20 %
- Zkouška a odpověď. 35 %

Řešení:

Upravíme (za předpokladu, že výrazy jsou definovány):

$$\log\frac{x^3+1}{7x} = \log\frac{x+1}{6} \Rightarrow \frac{x^3+1}{7x} = \frac{x+1}{6} \Rightarrow 6x^3 + 6 = 7x^2 + 7x.$$

Má se tedy řešit rovnice $6(x^3 + 1) - 7x(x + 1) = 0$. Rozložíme:

$(x + 1)(6x^2 - 6x + 6 - 7x) = 0 \Rightarrow x_1 = -1;$

$6x^2 - 6x + 6 - 7x = 0 \Rightarrow 6x^2 - 13x + 6 = 0$

$D = 169 - 144 = 25, \sqrt{D} = 5,$

$x_{2,3} = \frac{13 \pm 5}{12};\ x_2 = \frac{3}{2},\ x_3 = \frac{2}{3}.$

Zkouška:

$x_1 = -1$: $\log(x^3 + 1)$ není definován, x_1 nevyhovuje.

$x_2 = \frac{3}{2}$: $L = \log\left(\frac{27}{8} + 1\right) - \log 7 - \log\frac{3}{2} = \log\left(\frac{35}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{3}\right) = \log\frac{5}{12},$

$P = \log\left(\frac{3}{2} + 1\right) - \log 6 = \log\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{6} = \log\frac{5}{12} \Rightarrow L = P$, x_2 vyhovuje.

$x_3 = \frac{2}{3}$: $L = \log\left(\frac{8}{27} + 1\right) - \log 7 - \log\frac{2}{3} = \log\left(\frac{35}{27} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{2}\right) = \log\frac{5}{18},$

$P = \log\left(\frac{2}{3} + 1\right) - \log 6 = \log\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{6} = \log\frac{5}{18} \Rightarrow L = P$, x_3 vyhovuje.

$\boldsymbol{X} = \left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right\}.$

Komentář k opravě:

Jiří se pokusil přepsat najednou zadání na rovnost logaritmů, ale nepodařilo se mu to – ve jmenovateli zlomku na levé straně napsal $7 + x$ místo $7x$. Učitel to opraví a vlevo od dalších výpočtů udělá svislou vlnovku. Sleduje však i další postup, aby se přesvědčil, jak si žák povede dál. Jiří upravil rovnici na rovnici kubickou, našel jeden její kořen a pomocí dělení mnohočlenů pak dostal kvadratický trojčlen. Ale při řešení kvadratické rovnice udělal další chybu (znaménko pod odmocninou označíme hrubou chybou), takže zbytek řešení lze škrtnout. Škrtneme i sdělené výsledky a připíšeme, že chybí zkouška.

Při bodovém hodnocení lze za první dva kroky dát po 5 %, za 3. krok 15 % (dělal správně ekvivalentní operace), za 4. krok snad 5 % a pak už nic, celkem tedy 30 %, což je známka 4. Přesto však Jiří nemusí být špatný žák, v průběhu celého řešení v podstatě věděl, co dělat dál; možná, že se dvakrát jen spletl a na zkoušku zapomněl.

5. Analýza úloh, výsledky a komentáře k písemkám

Každá z následujících dvaceti popisů písemek obsahuje zadání, hodnocené kroky jako výsledek jevové analýzy, konečné výsledky i dílčí výsledky, pro potřeby opravy, komentář k písemce a k její opravě a návrh bodového hodnocení, včetně klasifikace dle 1. kapitoly.

5.1. Julie Martinová, 1. A

Na číselné ose jsou dány body $O[0]$, $A[3]$, $B[5]$, $C[-2]$. Zapište výsledné množiny, vyznačte je na číselné ose a vyjádřete je též pomocí intervalů:

$\overrightarrow{AC} \cup OB, OB \cup CO, \overrightarrow{AO} \cap \overrightarrow{CB}, AB \cap \overrightarrow{OC}$.

Kroky v každém z těchto případů:

- Obrázek. 5 %
- Zápis výsledné množiny. 10 %
- Zápis pomocí intervalu. 10 %

Dílčí výsledky:

$\overrightarrow{AC} \cup OB = \overrightarrow{BC}$, polopřímka

$(-\infty, 5\rangle$

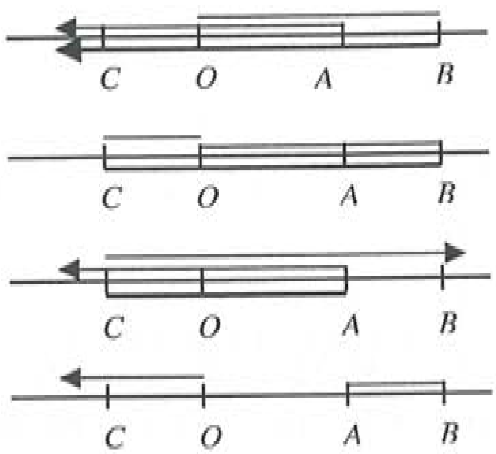
$OB \cup CO = CB$, úsečka

$\langle -2, 5\rangle$

$\overrightarrow{AO} \cap \overrightarrow{CB} = CA$, úsečka

$\langle -2, 3\rangle$

$AB \cap \overrightarrow{OC} = \emptyset$, prázdná množina



Obr. 5.1.1.

Komentář k písemce:

Julie si zřejmě nejprve na číselnou osu vynesla souřadnice zadaných bodů, ale pak ji pořadí zápisu bodů v zadání úlohy svedlo k jejich nesprávnému označení; výsledkem je nesprávná poloha bodu C (body C podtrhneme a k 1. řádku připíšeme např. *„bod C je chybně!“*. Učitel pokračuje v opravě na základě znázorněné pozice bodů. Zadané množiny má Julie podle svého znázornění číselné osy až na polopřímku $\overrightarrow{OC}$ ve 4. obrázku. V prvních dvou příkladech si Julie popletla průnik a sjednocení (kdyby šlo o průnik, měla by výsledné množiny dobře, i vyjádření intervaly), vhodným zápisem ji upozorníme, že bylo zadáno sjednocení; ve třetím případě je dobře výsledná množina, ale ne interval, ve čtvrtém případě napsala Julie špatně zadání, má jít o *úsečku AB*, ale v každém případě je 4. část špatně. Julie toho sice možná dost ví, ale velmi nešťastně se zapletla.

Při bodovém hodnocení je možno za znázornění množin dát 15 %, za zápis výsledných množin 10 % (1/4 ze 40) a za vyjádření pomocí intervalů rovněž 10 %, celkem 35 %, což dává klasifikaci 4 (3–).

5.2. Petr Musil, 3. B

a) Užitím binomické věty vypočtěte $\frac{1}{6}\left(3x^3-\frac{2}{x^2}\right)^4$.

b) V binomickém rozvoji tohoto výrazu je třetí člen 9. Vypočtěte x.

Kroky:

- Binomický rozvoj daného výrazu. 35 %
- Výpočet koeficientů a úprava. 35 %
- Sestavení vztahu pro 3. člen. 15 %
- Výpočet x. 15 %

Dílčí výsledky:

a) $\frac{1}{6}\left(3x^3-\frac{2}{x^2}\right)^4=\frac{27}{2}x^{12}-36x^7+36x^2-\frac{16}{x^3}+\frac{8}{3x^8}$;

b) $36x^2=9 \Leftrightarrow x_{1,2}=\pm\frac{1}{2}$.

Komentář k písemce:

Binomický rozvoj je formálně proveden dobře až na dvě nesprávná znaménka (u 2. a 4. členu má být „–" , opravíme). Při úpravě posledních dvou členů zapomněl Petr umocňovat i jmenovatele, takže koeficienty jsou dobře, ale mocniny x špatně (exponenty opravíme na správné hodnoty). Chybí pak roznásobení jednou šestinou (zapíšeme vynechávku). Vztah pro 3. člen je sestaven s chybnými hodnotami dobře (dopíšeme $\frac{1}{6}$ a opravíme exponent), výpočet x je špatně (poslední dva řádky škrtneme).

Při bodovém hodnocení je možno za 1. krok dát 25 %, za 2. krok 10 % a pak ještě za 3. krok 5 %, celkem 40 %, což je klasifikace 3 (3–).

5.3. Magdalena Šimků, 2. A

Řešte v $\boldsymbol{R}$ rovnici: $4^{\sqrt{3x^2-2x}+1}+2=9\cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}$.

Kroky:

- Převedení rovnice na rovnici kvadratickou (substituce). 25 %
- Řešení kvadratické rovnice. 10 %
- Řešení 1. exponenciální rovnice. 20 %
- Řešení 2. exponenciální rovnice. 15 %
- Zkouška a zápis řešení. 30 %

Dílčí výsledky:

$4^{\sqrt{3x^2-2x}+1}=4\left(2^{\sqrt{3x^2-2x}}\right)^2$, substituce: $2^{\sqrt{3x^2-2x}}=y \Rightarrow 4y^2-9y+2=0;\ D=49$,

$y_{1,2}=\left\langle\begin{array}{l}2\\ \frac{1}{4}\end{array}\right.$.

$y_1=2$: $2^{\sqrt{3x^2-2x}}=2^1 \Rightarrow 3x^2-2x-1=0,\ D=16,\ x_{1,2}=\left\langle\begin{array}{l}1\\ -\frac{1}{3}\end{array}\right.$.

$y_2=\frac{1}{4}$: $2^{\sqrt{3x^2-2x}}=2^{-2}$, $\sqrt{3x^2-2x}=-2$ nemá řešení.

Zkouška: $L(1)=18=P(1)$, $L\left(-\frac{1}{3}\right)=18=P\left(-\frac{1}{3}\right)$.

Výsledek: $\boldsymbol{X}=\{-\frac{1}{3};1\}$.

Komentář k písemce:

Chybí označení začátku řešení (slovo *Řešení*). Další úpravy jsou provedeny dobře, jen trochu zdlouhavě. V zápisu substituce si žákyně spletla znaménko, ale kvadratickou rovnici pro m sestavila dobře. Učitel může upozornit na defektní devítky a na to, proč nebyla substituce provedena najednou, a může opravit krátkou odmocninu ve 4. řádku. Při řešení kvadratické rovnice pro m použila Magdalena ve vzorci pro kořeny nesprávně koeficient a místo $2a$ (učitel to opraví), takže návraty k původní proměnné už jsou dvojnásobně špatně – chybný substituční vztah a chybné m. Učitel je však ještě neškrtá, ale sleduje další postup. Ten vede na kvadratické rovnice pro neznámou x, kde ve vzorci (pro m_1) jsou dvě chyby – jedna stejná jako u předchozího vzorce a dále chybně stanovený diskriminant, vzorec se opraví a výsledek lze škrtnout. Ve případě pro m_2 lze Magdalenu upozornit na to, že levá strana druhé rovnice je nezáporná a pravá strana je záporná, takže rovnice nemá řešení. Navíc je při řešení kvadratické rovnice opět stejná chyba se jmenovatelem (opravíme), takže výsledky škrtneme. Chybí zkouška řešení.

Při bodovém hodnocení lze za 1. krok započítat 20 %, za 2. krok 5 %, za 3. krok 10 % a 4. krok také není myšlen špatně, přidáme 5 %. Celkem tedy 40 % a to je klasifikace 3 (3–).

5.4. Ivana Fryčerová, 4. C

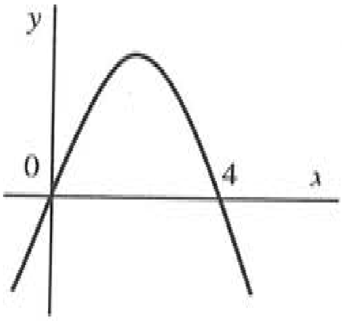
a) Vypočtěte obsah oblasti ***M*** ohraničené grafem funkce f: $y = 4x - x^2$ a osou x.

b) Vypočtěte obsah oblasti ohraničené grafy funkcí f: $y = x^2 - 2x$, g : $y = 4x - x^2$.

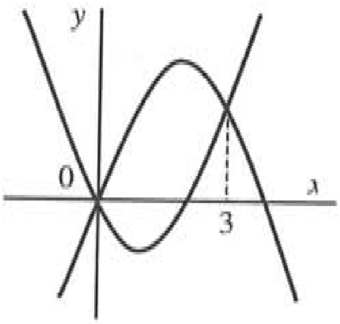
Kroky:

- a) Obrázek a meze integrování. 15 %
- a) Výpočet integrálu. 20 %
- b) Obrázek a meze integrování. 30 %
- b) Výpočet integrálu. 35 %

Dílčí výsledky: a)



Obr. 5.4.1.



Obr. 5.4.2.

$$P_1 = \int_0^4 (4x - x^2)\,dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}.$$

b) $f(x) = g(x) \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3;$

$$P_2 = \int_0^3 \left(4x - x^2 - x^2 + 2x\right)dx = \left[3x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^3 = 27 - 18 = 9.$$

Komentář k písemce:

V zadání je ne zcela korektně táž funkce označena jednou jako f a podruhé jako g, ale toto Ivanu nepopletlo. V případě a) v integrálu zapomněla na závorky a součinitel dx, primitivní funkci určila dobře, ale při psaní horní meze se spletla a napsala 3; obojí učitel opraví. V případě b) správně určila meze integrování (odfajfkujeme), ale pak (z neznalosti) nepoužila jednoduchý vzorec s integrálem rozdílu $g - f$, ale snažila se „naskládat" obsah z jednotlivých částí, což se jí nepodařilo. První dva integrály lze přijmout, ale třetí učitel škrtne nebo mu změní znaménko, přičemž u druhého by pak měla být horní mez rovna 3. Učitel pak nemusí přepočítávat navrženou verzi, stačí, že na ni žáka upozorní a pak zbytek ošetří škrtnutím nebo vlnovitým podtržením nesprávných částí výpočtu.

Při bodovém hodnocení lze za 1. krok dát 15 %, za 2. též 15 %, za 3. krok 20 % (meze byly použity chybně) a za poslední 15 % (první dva členy jsou počítány správně), celkem 65 %, což je klasifikace 2 (2–).

5.5. Radim Literák, 1. B

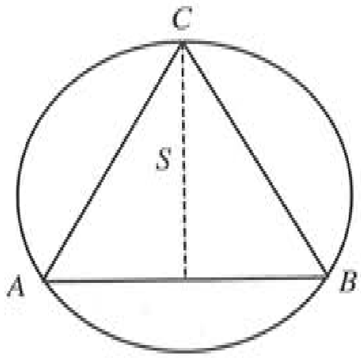
Vypočtěte délku strany rovnostranného trojúhelníku vepsaného do kružnice o poloměru 5.

Kroky:

• Střed S kružnice je těžiště, výška je těžnice.	15 %
• Poloměr r je roven 2/3 výšky, z toho $v = \ldots$	15 %
• Výška v rovnostranném trojúhelníku $v = \ldots$	20 %
• Porovnání obou předchozích vyjádření výšky.	20 %
• Výpočet strany.	30 %

Dílčí výsledky:

$r = \frac{2}{3}v$, z toho $v = \frac{3}{2}r$. V rovnostranném trojúhelníku platí: $v = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Porovnáním obou vzorců dostáváme $a = r\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$.



Obr. 5.5.1.

Komentář k písemce:

Zadání je zapsáno téměř nerozluštitelně (vlnovitě je podtrhneme s otazníkem, můžeme dopsat *Piš čitelně!*), chybí zahájení (dopíšeme slovo *Řešení*). Úloha je vyřešena téměř správně (i když úhly stanovuje zbytečně komplikovaně; můžeme dopsat: *Proč tak složitě?*).

Z věcných chyb Radim jen přehlédl, že „přilehlá" není a, ale $\frac{a}{2}$ (předposlední řádek, použito v posledním, opravíme). Je tu několik formálních závad v zápisech, např. rovnosti $\alpha = \beta$, v dalších řádcích má být $120° - \alpha$, resp. β v závorce (výsledek $\alpha = 30°$ odfajfkujeme), v předposledním řádku má být $|AS|$, v posledním řádku má být $30°$. Zápis pod obrázkem, že ΔASP je pravoúhlý, podtrhneme vlnovkou na znamení nesouhlasu s takovým druhem vyjadřování.

Při bodovém hodnocení vidíme, že Radim postupoval jinak, než se předpokládalo při jevové analýze, takže pro něj upravíme kroky:

- Zjištění úhlů v ΔASP. 30 %
- Zápis $\cos \alpha$. 30 %
- Výpočet strany a. 40 %

Pak za 1. krok můžeme dát 20 % (srážka za formální chyby – chybějící závorky), za 2. krok 20 % a za 3. krok 30 %, celkem 70 %, což dává klasifikaci 2.

5.6. Jaroslav Štefl, 4. A

Pro které hodnoty reálného parametru c má rovnice

$$(2c-1)x^2 + 4cx + 2c + 2 = 0$$

imaginární kořeny? Řešte rovnici pro $c = 3$.

Kroky:

- Výpočet diskriminantu. 25 %
- Řešení nerovnice $D < 0$, závěr. 25 %
- Dosazení $c = 3$. 20 %
- Výpočet kořenů. 30 %

Dílčí výsledky:

$D = -8c + 8$, $D < 0$ pro $c \in (1, +\infty)$.

Pro $c = 3$ je rovnice $5x^2 + 12x + 8 = 0$, $D = -16$ a kořeny jsou $-\frac{6}{5} \pm \frac{2}{5}\mathrm{i}$.

Komentář k písemce:

Diskriminant kvadratické rovnice je nastaven dobře, ale při poslední úpravě zapomněl Jaroslav vynásobit číslem –8; předposlední (správné) vyjádření odfajfkujeme, poslední opravíme. Odvození $c = 1$ vlnovitě podtrhneme (správný postup s nesprávnými čísly). Při dosazování $c = 3$ přehlédl Jaroslav znaménko a vyšel mu tak chybný koeficient 7 u kvadratického členu místo správného 5; opravíme to. Dále je tu opět správný postup s nesprávnými čísly (podtržení vlnovkou). Opravíme i příliš krátkou odmocninu.

Při bodovém hodnocení můžeme za 1. krok dát 15 %, za 2. 20 %, za 3. jen 5 % a za 4. pak 20 %, celkem 60 %, což je známka 3 (2–).

5.7. Kamil Indrák, 3. C

Jsou dány body $A[1; 3]$, $B[-2; 4]$, $C[-2; -3]$.

a) Dokažte, že body A, B, C jsou vrcholy trojúhelníku.

b) Napište parametrické vyjádření 1) těžnice t_a, 2) výšky v_b.

c) Vypočtěte délku v_b.

Kroky:

- Porovnání vektorů dvou stran. 25 %
- Výpočet středu BC a parametrické vyjádření t_a. 25 %
- Výpočet vektoru kolmého k AC a parametrické vyjádření v_b. 25 %
- Výpočet velikosti výšky v_b. 25 %

Dílčí výsledky:

a) $\boldsymbol{u} = B - A = (-3; 1)$, $\boldsymbol{v} = C - A = (-3; -6)$; vektory nejsou kolineární, ABC je trojúhelník.

b1) Střed BC je $D = \frac{1}{2}(B + C) = [-2; 0{,}5]$.

Těžnice t_a : $w = A - D = (3; 2{,}5)$, parametrické vyjádření t_a : $X = D + t\,\boldsymbol{w}$, v souřadnicích je to

$$x = -2 + 3t,$$
$$y = 0{,}5 + 2{,}5t;\ t \in \langle 0; 1\rangle \text{ nebo } \boldsymbol{R}.$$

b2) Vektor kolmý k AC je $(6; -3)$, vezmeme $v' = (2; -1)$.

Vyjádření výšky v_b : $X = B + t\,v'$, v souřadnicích je to

$$x = -2 + 2t,$$
$$y = 4 - t,\ t \in \boldsymbol{R}.$$

c) Strana AC:

$$x = 1 - 3s$$
$$y = 3 - 6s,$$

průsečík s výškou v_b dostaneme pro $t = \frac{7}{5}$, $s = \frac{1}{15}$;

pata výšky je $E = \left[\frac{4}{5}; \frac{13}{5}\right] = [0{,}8;\, 2{,}6]$, $|BD| = 1{,}4\,\sqrt{5} \doteq 3{,}13$.

Komentář k písemce:

Zadání je napsáno s formálními nedostatky a zejména Kamil zapomněl na úkol c). V případě a) jsou špatně odečtena čísla –3 a 3 (opravíme), závěry jsou vyjádřeny správně (můžeme odfajfkovat). Těžnice je odvozena špatně, deklarovanou kolmost označíme jako hrubou chybu a také v obrázku ji dáme do kroužku a doprovodíme jej znakem hrubé chyby. Vyjádření výšky probíhá správně, ale navazuje na nesprávný vektor v případě a). Vektor i výsledek můžeme podtrhnout vlnovkou. Nakonec do volného místa napíšeme „c)" s vynechávkou.

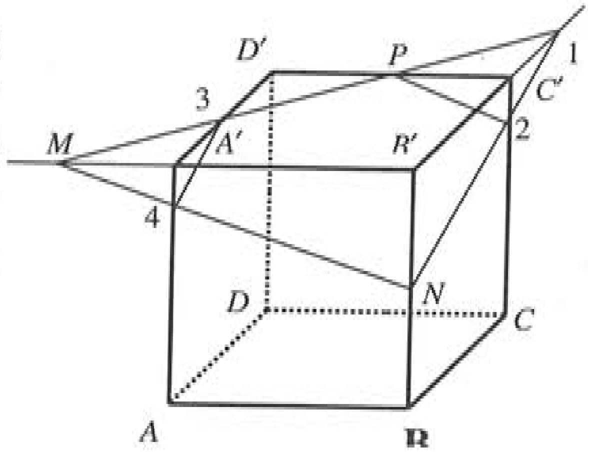
Při bodovém hodnocení můžeme za 1. krok dát 15 % (věděl, co má dělat), za 2. krok nic, 3. krok započteme jako 15 % a 4. chybí, celkem tedy 30 %, což je známka 4.

5.8. Michaela Rozkošná, 2. A

Sestrojte řez krychle $ABCDA'B'C'D'$ o hraně délky $a = 5$ cm rovinou MNP, kde M leží mimo krychli na přímce $A'B'$, $|MA'| = \frac{1}{2}a$, N je středem hrany BB' a P středem hrany $C'D'$.

Kroky:

• Zadání.	5 %
• Přední stěna a horní stěna.	20 %
• Bod 1.	30 %
• Zbývající strany řezu.	30 %
• Popis.	15 %



Obr. 5.8.1.

Výsledek:

Řezem je pětiúhelník $4N2P3$.

Komentář k písemce:

Chybí slovo *Řešení*, dopíšeme je. Při řešení Michaela nezvládla situaci na hraně $B'C'$. Kolem bodu 1 můžeme udělat kroužek doprovozený znakem hrubé chyby, v jejím obrázku můžeme škrtnout lomenou čáru *NYP* a můžeme dokreslit správný postup.

Při bodovém hodnocení lze první dva kroky ocenit naplno, tj. 25 %, 3. krok je za 0 %, 4. krok (správná levá stěna) 10 % a popis 10 %, celkem 45 %, což je známka 3.

5.9. Radka Beštová, 1. C

Vzdálenost dvou železničních stanic je 4 000 m. Stoupání železniční tratě je 8 ‰. Vypočtěte výškový rozdíl těchto stanic a úhel stoupání.

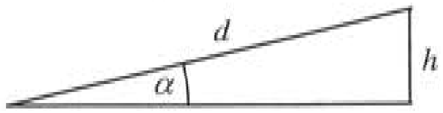
Kroky:

- Obrázek. 15 %
- Správný zápis stoupání. 10 %
- Výpočet výškového rozdílu. 35 %
- Výpočet úhlu stoupání. 40 %

Dílčí výsledky:

$\frac{h}{d} = 0{,}008 \Rightarrow h = 4\,000 \cdot 0{,}008 = 32$ m

$\sin\alpha = \frac{h}{d} = 0{,}008 \Rightarrow \alpha = 27{,}5'$.



Obr. 5.9.1.

Komentář k písemce:

Radka neví, co je to promile, ani si neuvědomila, co je to stoupání železniční trati, a s příkladem si vůbec neporadila. Nevadil jí ani výškový rozdíl stanic 5,5 km. Nechceme-li opravu odbýt škrtnutím celého příkladu, pak si všimneme: v textu zadání chybí háček a čárka, chybí slovo *Řešení*, je nesprávně psáno písmeno α (lze zapsat *piš lépe α*). Zápis v obrázku $\alpha = 8\,‰$ dáme do kroužku nebo podtrhneme a označíme jako hrubou chybu, podobně 1. řádek s chybnou informací $8\,‰ = 0{,}008\,\%$, k podtrženému řádku 0,055 m = 5,5 km přidáme zase třeba otazník a odpověď škrtneme. Radka třeba nezná pojem „stoupání železniční trati“, což bychom mohli částečně odpustit, ale v její práci se nedá skoro nic kladně vyhodnotit.

Při bodovém hodnocení lze dát 5 % za obrázek, výsledná klasifikace je 5.

5.10. Irena Průšová, 4. B

Určete rovnice tečen ke křivce $y = x^3 + x^2 - 2x$ v průsečících křivky s osou x.

Kroky:

- Průsečíky s osou x. 20 %
- Derivace funkce. 20 %
- 3 × směrnice tečny a rovnice tečny. 3 × 20 %

Dílčí výsledky:

$y = 0 \Rightarrow$ průsečíky $P_1[-2; 0]$, $P_2[0; 0]$, $P_3[1; 0]$.

$y' = 3x^2 + 2x - 2$

$k_1 = y'(P_1) = 6$, $y = 6(x + 2)$, $k_2 = y'(P_2) = -2$, $y = -2x$, $k_3 = y'(P_3) = 3$, $y = 3(x - 1)$.

Komentář k písemce:

Irena učivo zná, jen jednou se spletla ve znaménku nikoli z nevědomosti, ale z přepsání. Zjištěné průsečíky učitel odfajfkuje (stačí jednou na konci), u derivaci upraví 2. člen na $+2x_0$ a znaménko může zvýraznit dvojitým podtržením. Na základě své nesprávné derivace má Irena správně vypočteny směrnice a určeny rovnice tečen, můžeme odfajfkovat tu první, kterou neovlivnilo nesprávné znaménko.

Při bodovém hodnocení je za 1. krok 20 %, za spletení znaménka ve druhém kroku ubereme jen 5 % (nepramení z neznalosti), a v posledním kroku ubereme po 3 % za správné akce s nesprávnými čísly. Celkem tak máme 89 %, což je 1 (1–).

5.11. Klára Ruberová, 2. B

V lichoběžníku $ABCD$ je dáno: $|AB| = a = 8$ cm, $|BC| = b = 5$ cm, $\beta = 60°$, $\delta = 105°$. Vypočítej délky zbývajících stran lichoběžníku.

Kroky:

- Obrázek. 15 %
- Výpočet výšky v. 15 %
- Výpočet úhlu α. 15 %
- Výpočet strany d. 15 %
- Výpočet úseků x, y. 30 %
- Výpočet strany c. 10 %

Dílčí výsledky:

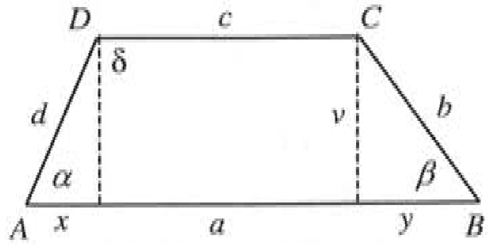
$v = b \sin \beta = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$;

$\alpha = 180° - \delta = 75°$;

$d = \dfrac{v}{\sin \alpha} \doteq 4{,}5$ cm

$x = v \cdot \operatorname{cotg} \alpha \doteq 1{,}2$, $y = b \cdot \cos \beta = 2{,}5$,

$c = a - (x + y) \doteq 4{,}3$ cm.



Obr. 5.11.1.

Komentář k písemce:

Jedinou a dvakrát opakovanou hrubou matematickou chybou Kláry je její představa, že pro goniometrické funkce g platí $g\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{g(\alpha)}{2}$. Při opravě neopomine učitel češtinářskou hrubku ve slově „zbívajících". Čára oddělující řešení od zadání by měla být buď delší nebo by mělo být uvedeno slovo *Řešení*. Učitel odfajfkuje obrázek, výpočet y a výpočet v. Při výpočtu d odfajfkuje 1. výraz, druhý podtrhne a Klářino krácení odmění znakem hrubé chyby. Zbývající dva výrazy škrtne. Při výpočtu x jsou dobře první tři výrazy, ale učitel odfajfkuje druhý, protože ve třetím se už Klára připravovala na chybný krok, takže 4. výraz učitel podtrhne a označí znakem hrubé chyby. Navazující dva výrazy se pak mohou škrtnout. Při výpočtu c škrtneme pět čtvrtin a výsledek, v odpovědi škrtneme výsledky. Všimneme si, že se Klára nikde nevrátila k cm, můžeme jí to vytknout v odpovědi zápisem „cm" a vynechávkou.

Při bodovém hodnocení dostane Klára po 15 % za první tři kroky (i když úhel počítala jinak), za 4. krok dejme 5 %, za úseky 20 % (jeden je dobře, jeden s chybou) a za poslední krok 5 % (počítáno dobře s chybným údajem); celkem je to 75 %, což dává klasifikaci 2.

5.12. Zuzana Andělová, 3. A

Určete parametr, souřadnice vrcholu, souřadnice ohniska a rovnici řídicí přímky paraboly p: $y^2 - 4x - 4y + 16 = 0$. Parabolu načrtněte. Určete vzájemnou polohu paraboly a přímky q: $x = 1$.

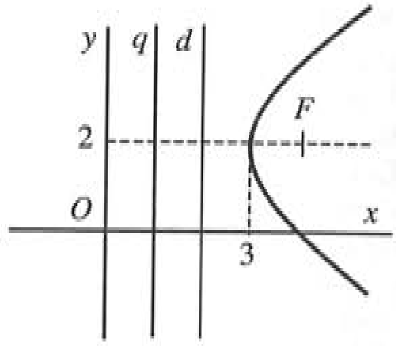
Kroky:

- Úprava rovnice na kanonický tvar. 15 %
- Parametr. 10 %
- Vrchol. 10 %
- Ohnisko. 20 %

- Řídicí přímka. 20 %
- Obrázek. 15 %
- Informace o přímce q. 10 %

Dílčí výsledky:

$(y-2)^2 = 4(x-3)$; $p = 2$; $V[3; 2]$;
$F[3+1; 2]$; d: $x = 3-1$.



Obr. 5.12.1.

Komentář k písemce:

Zuzana postupovala správně, ale jedno početní opomenutí způsobilo, že výsledky správné nemá. Text zadání je napsán poněkud nepořádně, učitel nemusí souhlasit se zkratkou „rci" a doplní několik teček, nejzávažnější závada je ve slově „řidicí", které by žáci měli umět napsat správně. Při úpravách rovnice ve 3. řádku zapomněla Zuzana přičíst na pravé straně číslo 4 (stejně jako je přičetla na levé) a tím se jí pokazily údaje o parabole. Učitel opraví $x-4$ na $x-3$, p odfajfkuje, ve V přepíše souřadnici 4 na 3, v F 5 na 4 a d má rovnici $x = 2$. V obrázku chybí přímka q, učitel může k obrázku napsat q s vynechávkou.

Při bodovém hodnocení dáme za 1. krok 5 %, za 2. pak 10 %, každý z dalších 4 kroků snížíme o 3 % a poslední je za 10 %. Celkem je to 78 %, což je klasifikace 2.

5.13. Eva Nádvorníková, 1. A

Zjednodušte dané výrazy, kde a, b, c, d jsou různé od nuly, a výsledek zapište pomocí mocnin s přirozeným exponentem:

$$V_1 = \frac{7a^3b^{-2}c}{8a^2d^3} : \frac{28a^{-3}b^4d^{-5}}{64ab^6c^{-2}},\ V_2 = \left(\frac{4a^2b}{c^{-3}d^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{2a^5b^{-2}}{c^{-4}d^3}\right)^{-2}.$$

Kroky pro oba výrazy:

- Odstranění záporných mocnitelů. 15 %
- Převedení dělení na násobení, resp. provést umocnění. 15 %
- Krácení. 20 %

Výsledky:

$$V_1 = \frac{2a^5d^2}{c},\ V_2 = \frac{16b^7c}{a^4}.$$

Komentář k písemce:

V zadání chybí háček, čárka a tečka. Ve výrazu V_1 napsala Eva omylem nebo nepozorností d^{-3} místo zadaného d^{-5}, což učitel připomene, ale dál opravuje písemku tak, jakoby bylo zadáno to, co napsala Eva. Ve jmenovateli výrazu V_2 má být ve jmenovateli 1. zlomku c^{-3} (ale Eva pak pracovala se správně zadanou hodnotou), ve jmenovateli 2. zlomku je v c^{-4} napsáno znaménko velmi nezřetelně. To vše učitel opraví. Ukazuje se, že závažným nedostatkem žákyně je to, že píše d velice podobné písmenu a. Tento formální nedostatek se při řešení proměnil ve věcnou chybu. Ve 4. zlomku na 1. řádku řešení má být $64a$... a je s tím dále počítáno, jako by tu bylo $64d$... Ve jmenovateli 5. zlomku je pak $8a^3$..., ale má být $8d^3$.... To vše učitel opraví a výsledek škrtne. Navíc totiž počítá Eva, že 64 : 4 = 18, což uplatnila v obou upravovaných výrazech. V předposledním zlomku na posledním řádku místo posledního d^6 (Eva je použila dvakrát) má být b^4 (na které zapomněla). Ve výsledku učitel opraví 3 nesprávné výrazy.

Při bodovém hodnocení uvážíme, že Eva umí odstranit záporné mocnitele, což je 30 %, správně převedla dělení na násobení a správně umocnila, což dává dalších 30 %, ale do krácení s chybou započteme i další chyby plynoucí z nedbalého psaní a správné krácení oceníme na 5 %. Celkem je to 65 %, což je známka 2 (2–).

5.14. Jiří Kvapil, 3. A

a) Kolik mohu sestavit čtyřciferných čísel dělitelných pěti z množiny číslic
$\boldsymbol{M} = \{0, 2, 3, 4, 5, 6\}$?

b) Kolik je možných tipů ve Sportce ?

Kroky:

- Čísla xxx0. 20 %
- Čísla xxx5. 20 %
- Čísla 0xx5 a výsledek. 30 %
- Počet tipů v Sportce. 30 %

Dílčí výsledky:

xxx0: $V(3, 5) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$; xxx5: $V(3, 5) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$; 0xx5: $V(2, 4) = 4 \cdot 3 = 12$;

celkem: $60 + 60 - 12 = 108$.

Sportka: $K(6, 49) = 49 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 3 \cdot 44 = 13\,983\,816$.

Komentář k písemce:

V zadání a) chybí otazník, v obou případech není řešení odděleno od zadání. Jiří vypočítal, kolik čísel končí nulou nebo pětkou (120), ale nezvládl případ s nulou na začátku a s pětkou na konci (učitel může napovědět, ale výsledek se škrtne). V případě b) má být „tipů"; Jiří věděl, který vzorec má použít, ale výpočet vůbec nezvládl.

Při bodovém hodnocení je za první dva kroky 35 % (chybí text, že jde o tyto dva případy), za 4. krok 5 % (jen vzorec), celkem 40 %, což dává klasifikaci 3 (3–).

5.15. Stanislav Sedlák, 4. A

Každý rok ztrácí stroj p procent své hodnoty z předchozího roku. Za jak dlouho klesne jeho hodnota na polovinu ? Řešte obecně a pak pro $p = 12$.

Kroky:

- Sestavení rovnice. 25 %
- Výpočet n (obecné řešení). 50 %
- Zvláštní případ. 25 %

Dílčí výsledky:

$$z\left(1-\frac{p}{100}\right)^n = \frac{1}{2}z, \quad n = \frac{\log 0{,}5}{\log\left(1-\frac{p}{100}\right)} \approx 5{,}42 \text{ (5 let a 5 měsíců).}$$

Komentář k písemce:

V zadání opraví učitel ve slově „ztrácí" a vynechávkou označí, že chybí část zadání. Stanislav si celkem úspěšně odvozuje vzorec a správně sestavuje rovnici, učitel to odfajfkuje i odvozený vzorec pro n. U tohoto vzorce prodlouží zlomkovou čáru. Žák počítá i zvláštní případ, přestože si ho do zadání neopsal a jediná chyba spočívá v chybném odečtení $1 - 0{,}12$. To učitel opraví a výsledky škrtne.

Při bodovém hodnocení dáme za první dva kroky 75 % a za třetí krok 15 %, celkem 90 % a to je klasifikace 1 (1–).

5.16. Blanka Trojková, 2. B

Dokažte, že platí rovnost $\frac{1+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}.\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$. Pro které hodnoty α je tato rovnost definována? Ověřte ji pro $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

Kroky:

- Převedení levé strany na jednoduchý úhel. 20 %
- Převedení na poloviční úhel, rovnost. 25 %
- Definiční obor. 15 %
- Převedení α na stupně. 5 %
- Dosazení do levé strany a její úprava. 25 %
- Rovnost. 10 %

Dílčí výsledky:

$$L = \frac{2\cos^2\alpha\,(1+\cos\alpha)}{2\sin\alpha\,\cos^2\alpha} = \frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = P;\ \alpha \neq k.\frac{\pi}{2};$$

$$L\left(\frac{2\pi}{3}\right) = L(120°) = \frac{1-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = \ldots = \frac{\sqrt{3}}{3} = P\left(\frac{2\pi}{3}\right).$$

Komentář k písemce:

Blanka vynechala část zadání o definičním oboru (uděláme vynechávku) a tuto část ani neřešila. Správně upravila levou stranu na jednoduché úhly (odfajfkujeme a doplníme chybějící závorku), ovšem její úpravu pravé strany nelze provést obecně, je platná jen pro úhly z intervalu (0°, 180°), učitel na to upozorní (podtržení a zápis „neplatí obecně!"). Může dále připsat i vynechávku s poznámkou „definiční obor". Úhly ve stupních i příslušné hodnoty goniometrických funkcí si zjistila dobře, ale při dosazování do levé strany vynechala druhý výraz, pak v čitateli napsala chybné znaménko a tím náhodou dostala rovnost s pravou stranou.

Při bodovém hodnocení je 1. krok za 20 %, 2. krok nahradíme úpravou pravé strany a můžeme dát 15 %, 3. krok nemá, za čtvrtý krok 5 %, a za další dva kroky pak lze dát 10 % a 5 %. Celkem je to 55 %, což je klasifikace 3.

5.17. Marta Hanáková, 1. C

Řešte danou soustavu početně třemi způsoby a také graficky:

$$x - 4y + 8 = 0,$$
$$x + 2y - 1 = 0.$$

Kroky:

- 1. početní řešení. 20 %
- 2. početní řešení. 20 %
- 3. početní řešení. 20 %
- Úprava rovnic pro grafy. 10 %
- Sestrojení přímek. 20 %
- Zápis výsledku. 10 %

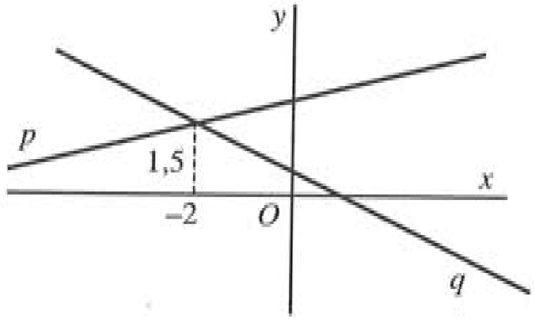
Dílčí výsledky:

Řešením je dvojice [–2; 1,5].

Přímky:

$p\colon\ y = \frac{1}{4}x + 2,$

$q\colon\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$



Obr. 5.17.1.

Komentář k písemce:

Řešení soustavy dosazením a porovnáním je provedeno dobře, ale v zápisu výsledku je přehozeno x a y (upozorníme na to dvojitými šipkami). Chybí použití sčítací metody, což učitel vyznačí vynechávkou a zápisem „sčítací metoda". Při přípravě grafického znázornění se u přímky p Marta spletla a napsala úsek –2 místo +2. Tím se jí přímka p dostala do nesprávné polohy; přímka q je v pořádku, ovšem v obrázku je označení omylem přehozeno – opravíme. Průsečík samozřejmě neodpovídá řešení soustavy a Marta se ani nepokusila zjistit jeho souřadnice – možná, že se jí zdály přibližně rovny jejím chybně zapsaným. Odfajfkovat můžeme výpočty a poslední řádek.

Při bodovém hodnocení lze za první tři kroky započítat 36 % (chybný zápis výsledku), za 4. krok 5 %, za grafy 15 % a zápis výsledku chybí. Celkem 56 %, což je klasifikace 3.

5.18. Jan Hruška, 2. A

Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $a = 4$ cm, $v_a = 3$ cm, $\alpha = 60°$.

Kroky:

- Rozbor (obrázek, zápis vztahů). 20 %
- Popis konstrukce. 30 %
- Konstrukce. 35 %
- Diskuse (počet řešení). 15 %

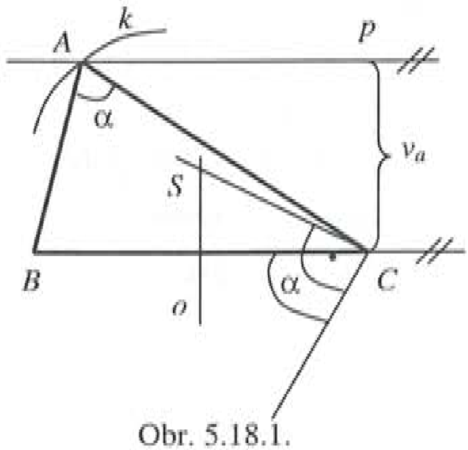
Dílčí výsledky:

Popis konstrukce:

1. Strana BC; $|BC| = 4$ cm;
2. přímka o; osa úsečky AB;
3. přímka p; $p \parallel BC$ ve vzdálenosti 3 cm;
4. bod S; $|\angle BCS| = 30°$, $S \in o$;
5. oblouk kružnice k; $k(S; |SB|)$;
6. A, A'; $k \cap p = \{A, A'\}$;
7. ΔABC, $\Delta A'BC$.

Úloha má 2 řešení.

Rozbor:



Obr. 5.18.1.

Komentář k písemce:

V zadání chybí čárka, řešení není odděleno od zadání. Obrázek rozboru je postačující. Jan neví (nebo se spletl), jak sestrojit geometrické místo bodů, z nichž je danou úsečku vidět pod daným úhlem. To má chybně provedeno v konstrukci a popsáno v popisu konstrukce. Obrázek, který by jinak byl docela dobrý, opraví učitel např. tak, že bod S dá do kroužku a přidá znak hrubé chyby, v popisu konstrukce vlnovkou podtrhneme 4. bod a dále podtrhneme 5. bod a označíme hrubou chybou.

Při bodovém hodnocení můžeme dát za 1. krok 20 %, za 2. krok 15 %, za konstrukci ve 3. kroku 20 % a za poslední krok 15 %, celkem 70 %, což je známka 2.

5.19. Michal Pavlík, 3. B

Rozhodněte, zda na přímce, případně na úsečce AB leží těžiště ΔPQR ($A[1; 1; -1]$, $B[4; -5; 8]$, $P[2; -3; 3]$, $Q[3; -2; 5]$, $R[4; -4; 7]$).

Kroky:

- Vyjádření úsečky AB. 30 %.
- Těžiště ΔPQR. 30 %
- Výpočet parametru. 30 %
- Odpověď. 10 %

Dílčí výsledky:

úsečka AB: $x = 1 + 3t$

$y = 1 - 6t$

$z = -1 + 9t,\ t \in \langle 0, 1\rangle.$

Těžiště $T\,[3; -3; 5]$,

$t = \dfrac{2}{3} \Rightarrow$ těžiště T leží na úsečce AB.

Komentář k písemce:

V zadání doplníme čárku a tečku, v zápisu těžiště vlnovitě podtrhneme nezřetelně napsaná písmena a dopíšeme rovnítko. Michal postupoval pěkně a racionálně, ale neuvědomil si, že když redukuje souřadnice směrového vektoru, změní se mu i interval pro parametr t. Učitel může podtrhnout interval $\langle 0, 1\rangle$ a dopsat $\langle 0, 3\rangle$. Možná, že pro většinu žáků je lepší (názornější), když u úseček a polopřímek redukci souřadnic neprovádějí. V odpovědi se škrtne, že T neleží na úsečce, protože na ní leží.

Při bodovém hodnocení dáme za 1. krok 17 %, za další dva po 30 % a za poslední 8 % (pro jeho $t \in \langle 0, 1\rangle$ jde o správné vyjádření), celkem 85 %, což je známka 2 (1–).

5.20. Jiří Fajt, 4. C

Řešte soustavu nerovnic $|2x - 3| \geq 5 \ \wedge\ x^2 - 5x - 24 < 0$.

Kroky:

- 1. nerovnice – rozdělení na dva případy. 5 %
- Řešení 1. případu. 15 %
- Řešení 2. případu. 15 %
- Řešení 1. nerovnice. 15 %
- 2. nerovnice – rozklad kvadratického trojčlenu. 15 %
- Řešení 2. nerovnice. 20 %
- Závěr – množina všech řešení soustavy. 15 %

Dílčí výsledky:

1. nerovnice, případ a) $x \geq \dfrac{3}{2} \Rightarrow 2x - 3 \geq 5 \Leftrightarrow x \geq 4;\ \boldsymbol{X}_a = \langle 4, +\infty);$

případ b) $x < \dfrac{3}{2} \Rightarrow -2x + 3 \geq 5 \Leftrightarrow x \leq -1;\ \boldsymbol{X}_b = (-\infty, -1\rangle;$

Řešení 1. nerovnice: $\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{X}_a \cup \boldsymbol{X}_b = (-\infty, -1\rangle \cup \langle 4, +\infty)$.

2. nerovnice: $D = 121$, $\sqrt{D} = 11$,

$x_{1,2} = \Big\langle {8 \atop -3} \Rightarrow (x-8)(x+3) < 0$, řešení 2. nerovnice: $\boldsymbol{X}_2 = (-3, 8)$.

Řešení soustavy: $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_1 \cap \boldsymbol{X}_2 = (-3, -1\rangle \cup \langle 4, 8)$.

Komentář k písemce:

První nerovnici s absolutní hodnotou chtěl Jiří vyřešit elegantně, ale spletl si (zaměnil) význam $\frac{3}{2}$ a $\frac{5}{2}$. Učitel škrtne obrázek a vedle něj může naznačit, jak to má být správně. Kořeny kvadratického trojčlenu lze odfajfkovat, ale na obrázku je vhodné vyznačit, že body −3 a 8 do intervalu nepatří (podobně ani 1. obrázek není v tomto smyslu úplný, což může učitel také naznačit). Závěr je možno ocenit svislou vlnovkou (tak nějak velmi přibližně to je) a u výsledné množiny lze ještě opravit příslušnost bodů „1" a „4" do množiny všech řešení.

Při bodovém hodnocení připadá na 1. nerovnici 50 %, snad jde započítat 25 %, na 2. nerovnici připadá 35 %, ale řešení není zapsáno a nejsou specifikovány krajní body, takže lze vzít také 25 %, závěr sice není správný, ale je správně tvořený, takže snad 10 %, což je celkem 60 %, a to je známka 3 (2–).

Soutěžní úlohy z třídních nebo školních olympiád

Na závěr následují 4 ukázky soutěžních úloh. Každá obsahuje zadání, hodnocené kroky, podrobné dílčí výsledky nebo i řešení, komentář k předloženému řešení, k jeho opravě a vyhodnocení. Opravené soutěžní úlohy už obyčejně soutěžící do ruky nedostanou, a proto se učitel opravující písemku svými poznámkami zpravidla na soutěžícího žáka neobrací. Je tu odlišnost i v tom, že úkolem řešení úlohy není prokázat matematické znalosti, jako u běžných písemek, ale vyřešit úlohu.

5.21. František Šíp, 1. A

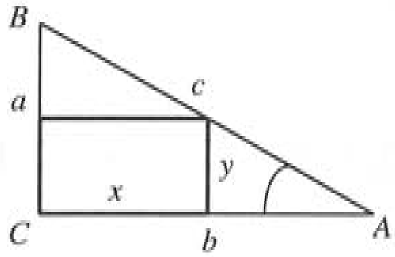
Na rohovém pozemku tvaru pravoúhlého trojúhelníku s přeponou 10 m a s vnitřním úhlem 30° má být postavena chata s obdélníkovým půdorysem. Určete její rozměry tak, aby rozloha chaty v m^2 byla co největší. Určete tuto rozlohu.

Kroky:

- a) Chata je při odvěsnách, nalezení vztahu mezi rozměry x, y. 5 %
- Vytvoření funkce, jejíž extrém hledáme. 15 %

- Nalezení extrému, výpočet rozměrů a rozlohy. 25 %
- b) Chata je při přeponě, nalezení vztahu mezi rozměry x, y. 5 %
- Vytvoření funkce, jejíž extrém hledáme. 15 %
- Nalezení extrému, výpočet rozměrů a rozlohy. 25 %
- Závěr, textové komentáře. 10 %

Dílčí výsledky:



Obr. 5.21.1.

a) $\dfrac{y}{b-x} = \operatorname{tg} 30° \Rightarrow y = (b-x)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

$b = 10 \cdot \cos 30° = 5\sqrt{3}$,

Hledáme extrém (maximum) funkce $P = xy =$

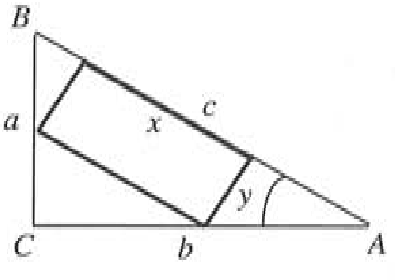
$= x\,(b-x)\,\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x\,(5\sqrt{3}-x)$.

Kořeny jsou $x_1 = 0$, $x_2 = 5\sqrt{3}$; extrém nastává v bodě $x_0 = 2{,}5\sqrt{3} \doteq 4{,}3$ a jde o maximum (koeficient při x^2 je záporný).

$P_{\max} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot 2{,}5\sqrt{3}\cdot 2{,}5\sqrt{3} = 6{,}25\cdot\sqrt{3} \doteq 11$. Pak $y_0 = \dfrac{P_{\max}}{x_0} = \dfrac{6{,}25\cdot\sqrt{3}}{2{,}5\cdot\sqrt{3}} = 2{,}5$.

Rozměry chaty budou 4,3 m × 2,5 m a její rozloha asi 11 m^2.

b) Přepona je součtem tří úseků (od bodu A):



Obr.5.21.2

$c = y\cdot\operatorname{cotg} 30° + x + y\cdot\operatorname{tg} 30° \Rightarrow y = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(10-x)$.

$P = xy = \dfrac{\sqrt{3}}{4}x(10-x)$, maximum nastává pro $x_0 = 5$.

$P_{\max} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot 5\cdot 5 = 6{,}25\cdot\sqrt{3} \doteq 11$ m^2.

Pak $y_0 = \dfrac{P_{\max}}{x_0} = \dfrac{6{,}25\cdot\sqrt{3}}{5} = 1{,}25\cdot\sqrt{3} \doteq 2{,}2$ m.

Rozměry chaty budou 5 m × 2,2 m a její rozloha asi 11 m^2.

V obou případech je rozloha stejná, tedy úloha má 2 řešení.

Komentář k předloženému řešení:

František objevil polohu chaty při odvěsnách a úlohu vyřešil v podstatě dobře. Při opravě můžeme odfajfkovat obrázek, vztah mezi x a y, vyjádření P a získaný rozměr $y_0 = 2{,}5$ m; rozměr $x_0 = 4{,}3$ m můžeme odfajfkovat po jeho doplnění a rovněž výměru 11 m^2. V práci jsou různé drobné chyby, které u soutěžních úloh můžeme a nemusíme opravit, pokud je nezapočítáváme do výsledného počtu bodů. Např. chybějící čárka v textu, chybějící počátek řešení, zbytečný výpočet 8,66, dvojí použití označení x_1, dvojnásobné podtržení výsledků.

Za první tři kroky tak František získá plný počet 45 % a ještě 2 % za poslední krok (jeho část řešení je srozumitelná, ale nedořešil zaokrouhlení a v odpovědi chybí uvedení rozměrů). Celkem 47 %.

5.22. Emilie Žáčková, 2. B

Určete velikost $\alpha + \beta$, aniž počítáte samostatně velikosti úhlů α, β, je–li dáno: $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = \frac{5}{13}$.

Kroky:

Jsou tu celkem 4 případy: $(\alpha \in \mathrm{I} \vee \mathrm{II}) \wedge (\beta \in \mathrm{I} \vee \mathrm{II})$, pro každý z nich:

- Stanovení hodnot kosinů. 6 %
- Stanovení $\sin(\alpha + \beta)$. 6 %
- Stanovení kvadrantu výsledku. 6 %
- Určení hodnoty $\alpha + \beta$. 7 %

Dílčí výsledky:

1) $\alpha \in \mathrm{I}, \beta \in \mathrm{I} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5}, \cos\beta = \frac{12}{13}, \sin(\alpha + \beta) = \frac{56}{65}, \cos(\alpha + \beta) > 0 \Rightarrow (\alpha + \beta) \in \mathrm{I}$,

$\alpha + \beta = 59° \, 30' + k \cdot 360°$.

2) $\alpha \in \mathrm{I}, \beta \in \mathrm{II} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5}, \cos\beta = -\frac{12}{13}, \sin(\alpha + \beta) = -\frac{16}{65} \Rightarrow (\alpha + \beta) \in \mathrm{III}$,

$\alpha + \beta \approx 194° \, 15' + k \cdot 360°$.

3) $\alpha \in \mathrm{II}, \beta \in \mathrm{I} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{4}{5}, \cos\beta = \frac{12}{13}, \sin(\alpha + \beta) = \frac{16}{65} \Rightarrow (\alpha + \beta) \in \mathrm{II}$,

$\alpha + \beta \approx 165° \, 45' + k \cdot 360°$.

4) $\alpha \in$ II, $\beta \in$ II $\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\cos\beta = -\frac{12}{13}$, $\sin(\alpha+\beta) = -\frac{56}{65}$, $\cos(\alpha+\beta) > 0 \Rightarrow$

$(\alpha+\beta) \in$ IV, $\alpha+\beta = 300° \, 30' + k \cdot 360°$.

Komentář k předloženému řešení:

Emilie řeší nejprve případ, že oba úhly jsou v I. kvadrantu, a vyřešila ho správně. Můžeme odfajfkovat vypočtené hodnoty kosinů i $\sin(\alpha+\beta)$, v posledním řádku též velikost úhlu $59° \, 30'$ s vynechávkou pro periodičnost. V případě, že oba úhly jsou ve II. kvadrantu, by se hodnoty kosinů měly zdůvodnit, ale Emilie tyto hodnoty považovala patrně za samozřejmé. Doplníme fajfky a vynechávku stejně jako v prvním případě. Opět není nutno opravovat např. vynechanou čárku v textu a pro chybějící dva případy můžeme a nemusíme napsat vynechávku.

Jsou tedy vyřešeny dva případy ze čtyř, ale u výsledku chybí vždy $+ k \cdot 360°$, takže celkově lze hodnotit práci na 44 %.

5.23. Eduard Chyška, 3. A

Z kvádru $4 \times 6 \times 8$ jsou odříznuty vrcholy řezy ve tvaru shodných rovnostranných trojúhelníků. Tím se povrch kvádru zmenšil o 9 %. Vypočtěte stranu řezu a proveďte diskusi.

Kroky:

- Povrch kvádru. 5 %
- 9 % povrchu. 5 %
- Odřezaná část povrchu, část y hrany. 20 %
- Obsah řezů, strana x. 20 %
- Vztah mez x, y. 5 %
- Rovnice, výpočet strany x řezu. 20 %
- Zda se řezy vejdou na nejkratší hranu. 20 %
- Texty a odpověď. 5 %

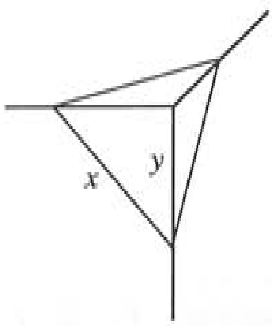
Dílčí výsledky:

Povrch $P = 208$; 9 % $P = 0{,}09\,P = 18{,}72$;

odřezáno $24 \cdot \frac{1}{2} y^2 = 12y^2$; obsah řezů $8 \cdot \frac{x^2}{4}\sqrt{3} = 2x^2\sqrt{3}$; $x = y\sqrt{2}$, $y^2 = \frac{x^2}{2}$;

$12y^2 - 2x^2\sqrt{3} = 0{,}09\,P \Rightarrow x^2(6 - 2\sqrt{3}) = 18{,}72 \Rightarrow x^2 \doteq 7{,}382 \Rightarrow x \doteq 2{,}717$;

$y \approx 1{,}921$; $2y \approx 3{,}842 < 4 \Rightarrow$ řezy lze takto provést, strana řezu je $x \approx 2{,}717$.



Obr. 5.23.1.

Komentář k předloženému řešení:

Eduard postupoval správně, můžeme odfajfkovat všechny řádky až po předposlední, v posledním ještě a^2 vyjádřené zlomkem. Pak se však dopustil numerické chyby, takže a^2 ani a není vypočteno dobře, oba údaje škrtneme. Dále chybí úvaha, zda se řezy vejdou na nejkratší hranu. Gramatickou chybu v zadání započítávat nebudeme.

Při bodovém hodnocení dáme za prvních pět kroků plných 55 %, u dalšího kroku strhneme za numerickou chybu 5 %, takže dáme 15 % a ještě za poslední krok 3 %, takže celkem je to 73 %.

5.24. Vlastimil Kryštof, 4. C

Dokažte: Jsou-li a, b délky odvěsen a c délka přepony v pravoúhlém trojúhelníku, pak platí $a + b \le c\sqrt{2}$.

Kroky:

- Počítání s druhou mocninou. 20 %
- Využití nerovnosti $a^2 + b^2 \ge 2ab$. 20 %
- Důkaz dokončen. 60 %

Řešení:

$(a - b)^2 \ge 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \ge 2ab,$

$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \le a^2 + b^2 + a^2 + b^2 = 2c^2 \Rightarrow$

$a + b \le c\sqrt{2}$.

Komentář k předloženému řešení:

Vlastimil postupoval jinak, než jak předpokládala analýza, ale správně. Odfajfkujeme např. 3. a 5. řádek, výpočet x a výsledek. Chybějící čárku v zadání, háček ve slově Řešení a nepořádně psaná π započítávat nebudeme.

Bodové hodnocení si zaslouží 100 %.

6. Žákovské písemky

V této kapitole uvádíme žákovské písemky analyzované v kapitolách 3, 4 a 5.

V prvních dvaceti ukázkách (ad 3.1 – ad 3.20) jsou opravené písemky. Oprava je založena na jevové analýze úloh provedené v kapitole 3. Tam čtenář najde komentář k výkonu žáků, k opravě a vyhodnocení písemky, včetně klasifikace (způsobem dle 1. kapitoly). Váhy jednotlivých kroků – a tím i hodnocení písemky a klasifikace – však závisejí na záměru učitele, který může dle konkrétní situace ve třídě některé kroky zdůraznit (a přiřadit jim více bodů) nebo i některé další kroky zařadit – např. když žáci na písemkách dělají příliš mnoho formálních chyb, může zařadit krok „Formální správnost". V našich písemkách jsou formální chyby důsledně opravovány a bylo k nim při hodnocení částečně přihlíženo, ale jen v závažnějších případech. Když učitel důsledně opravuje i formální chyby, učí tím žáky, jak správně matematiku zapisovat, a vychovává je tak k větší pečlivosti zápisů.

Dalších dvacet písemek (ad 4.1 – ad 4.20) není opraveno a očekává se jejich oprava a vyhodnocení od čtenáře. Kapitola 4 k tomu obsahuje zadání všech těchto úloh, hodnocené kroky jako výsledek jevové analýzy, očekávané řešení úloh, komentář k písemkám a k jejich opravě i návrh bodového hodnocení, včetně návrhu klasifikace. V rámci tohoto učebního textu by měl čtenář vždy provést kompletní opravu (ve stylu předchozích dvaceti písemek), i když později ve školní praxi lze u některých méně závažných písemek postup mírně zjednodušit.

Dále následuje 20 neopravených písemek (ad 5.1 – ad 5.20) pro aktivní práci čtenáře. V kapitole 5 je ke každé písemce uvedeno zadání, hodnocené kroky jako výsledek jevové analýzy, konečné výsledky i dílčí výsledky, ale také komentář k žákově výkonu a k opravě písemky, návrh bodového hodnocení, včetně návrhu klasifikace.

V posledních čtyřech úlohách (ad 5.21 – ad 5.24) jsou ukázky ze školních nebo třídních soutěží. Řešení úloh, jejich analýza a komentář k žákovským výkonům a k bodování je na konci kapitoly 5.

Při opravě písemky je třeba vidět za písemkou živého chlapce či dívku (i když zde známe jen křestní jméno a příjmení) a uvědomovat si jeho (její) přednosti a nedostatky; někdy jsou z písemky vidět i prvky jeho (její) povahy. Při vyhodnocení písemky uvažte, co byste žákovi řekli k jeho výkonu, co byste mu poradili nebo uložili. Pak si představte, že by ve třídě podalo více žáků podobný výkon – jak byste reagovali výukou? Co by se mělo zopakovat, procvičovat nebo dokonce znovu probrat?

Z praktických důvodů se doporučuje nevpisovat první pokusy o opravy písemek přímo do této 6. kapitoly, ale opravy provádět do kopie písemek. Při návazném studiu analýz v kapitolách 4 a 5 pak má čtenář svou opravenou písemku pěkně při ruce. Navíc pokažená 6. kapitola by mohla majitele skript později mrzet. Opravy si do této kapitoly doplňte až po jejich promyšlení a porovnání s autorovou analýzou a hodnocením.

ad 3.1. Pavel Kovář

Pavel Kovář 1.a

Zjednodušte výraz a uveďte, kdy má smysl: $V = \frac{2x^2-x-6}{2x^2-3x-9} : \frac{x-1}{x-3}$.

Řešení:

$V = \frac{2x^2-x-6}{2x^2-3x-9} \cdot \frac{x-3}{x-1}$ rozložíme

$2x^2-x-6: \; x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8 \cdot 6}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4} = \left\langle \begin{matrix} 2 \\ -\frac{3}{2} \end{matrix} \right. \Rightarrow 2x^2-x-6 = 2(x-2)(x+\frac{3}{2})$

$2x^2-3x-9: \; x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+8 \cdot 9}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{3 \pm 9}{4} = \left\langle \begin{matrix} 3 \\ -\frac{3}{2} \end{matrix} \right. \Rightarrow 2x^2-3x-9 = 2(x-3)(x+\frac{3}{2})$

$V = \frac{2(x-2)(x+\frac{3}{2})(x-3)}{2(x-3)(x+\frac{3}{2})(x-1)} = \frac{x-2}{x-1}$ $\quad \forall x \neq -\frac{3}{2}, x \neq 3$

$x \neq 1, \cancel{x \neq 2}$

3A

ad 3.2. Vlasta Vaněrková

Vlasta Vaněrková IV. B

Pro členy GP platí $a_5 - a_2 = \frac{70}{9}$, $a_3 - a_4 = \frac{20}{3}$. Určete 1. člen a kvocient této posloupnosti.

$a_5 - a_2 = \frac{70}{9}$

$a_1 q^4 - a_1 q = \frac{70}{9}$

$a_1 q (q^3 - 1) = \frac{70}{9}$

$a_3 - a_4 = \frac{20}{3}$

$a_1 q^2 - a_1 q^3 = \frac{20}{3}$

$a_1 q^2 (q - 1) = -\frac{20}{3}$

$\frac{a_1 q (q^3-1)}{a_1 q^2 (q-1)} = \frac{\frac{70}{9}}{-\frac{20}{3}} = -\frac{70}{9} \cdot \frac{3}{20} = -\frac{7}{6}$

$\frac{q^2+q+1}{q} = -\frac{7}{6}$

$q^2+q+1 = -\frac{7}{6} q$

$6q^2+6q+6 = -7q$

$6q^2+13q+6 = 0$

$q_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{169-4 \cdot 36}}{12} = \frac{-13 \pm 5}{12}$

$q_{1,2} = \left\langle \begin{matrix} -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3} \\ -\frac{18}{12} = -\frac{3}{2} \end{matrix} \right.$

$q_1 = -\frac{2}{3}$ $\qquad q_2 = -\frac{3}{2}$

$a_1 \cdot \frac{4}{9}\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{20}{3}$

$a_1 = -\frac{20}{3} \cdot \frac{(-27)}{20}$

$a_1 = +9$

$a_1 \cdot \frac{9}{4}\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{20}{3}$

$a_1 = -\frac{20}{3} \cdot \frac{(-8)}{45}$

$a_1 = \frac{32}{27}$

Zadání vyhovují 2 řešení

1) $a_1 = +9$, $q = -\frac{2}{3}$

2) $a_1 = \frac{32}{27}$, $q = -\frac{3}{2}$

2A

ad 3.3. Vladimír Martinák

VLADIMÍR MARTINÁK
2. A

ŘEŠTE ROVNICI: $\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x = 1$.

+ Řešení:

$\frac{1}{2}\sin 2x = 1 - \sin^2 x$

$\frac{1}{2}\sin 2x = \cos^2 x$

$\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\sin x \cancel{\cos x} = \cancel{\cos x}\cdot\cos x$

+ případ $\cos x = 0$

$\sin x = \cos x$

$\sin x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ ⊥ ? kvadrant ?

$\sin^2 x = 1 - \sin^2 x$

$2\sin^2 x = 1$

4 A

$\sin^2 x = \frac{1}{2}$

$\cancel{\pm}\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

takto nelze!

$x_0 = 45°$

$\cancel{\sin x > 0 \quad \mathrm{I}, \mathrm{II}}$

zde jen I. kvadrant!

$x_1 = 45° + k\cdot 360°$

$\cancel{x_2 = 180° - 45° = 135° + k\cdot 360°}$

ad 3.4. Luděk Souček

Luděk Souček III. B

Rozhodněte, zda se protínají úsečky AB, CD; A[-2,3], B[2,-1], C[-4,-1], D[-1,1]. +

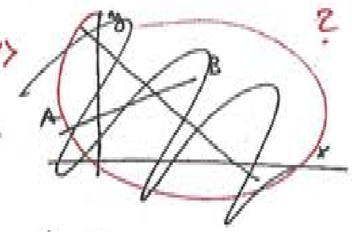
Řešení:

vektor AB ... $\vec{u}(4,-4)$ .. rovnice $x = -2 + 4s$ + $s \in \langle 0;1\rangle$

$y = 3 - 4s$

vektor CD ... $\vec{v}(3,2)$ .. rovnice $x = -4 + 3t$ + $t \in \ldots$

$y = -1 + 2t$

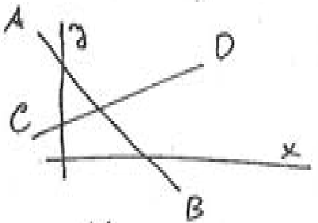


?

$\left.\begin{aligned} -2 + 4s &= -4 + 3t \\ 3 - 4s &= -1 + 2t \end{aligned}\right\}$

?

$\cancel{-3t = -2 - 4s = -2 + 0{,}16 = -1{,}84}$



$4s - 3t = -2 \quad |\cdot 2$

$+\ 4s + 2t = +4 \quad |\cdot 3$

$8s - 6t = -4$

$12s + 6t = 12$

+ $t =$

$20s = 8 \Rightarrow s = \frac{8}{20} = 0{,}4$ ✓

$x_0 = -2 + 4\cdot 0{,}4 = -2 + \overset{1{,}6}{\cancel{0{,}16}} = \cancel{-1{,}84}\ -0{,}4$

$y_0 = 3 - 4\cdot 0{,}4 = 3 - \underset{1{,}6}{\cancel{0{,}16}} = \cancel{2{,}84}\ 1{,}4$

protínají se

a kolik to ještě neplyne!

2 A

Průsečík [1,4 ; -0,4]

3.5. Jaroslav Hubáček

Jaroslav Hubáček 1.b

Řešte ne rovnici $|x^2-x|>6$.

V D:

a) $|x^2-x| \geq 0$

$x(x-1) \geq 0$

$x \geq 0 \quad x \geq 1$ ✓ < <

$x^2-x>6$

$x^2-x-6>0$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$

$x>3$

$-2 \quad 1 \quad 3$

b) $|x^2-x|<0$

$x(x-1)<0$

$x<0, \; x<1$

$0 \quad 1$

$-(x^2-x) > 6$

$x^2-x<-6$

$x^2-x+6<0$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$

$x<-2$

$-2 \quad 0 \quad 3$

způsob řešení není chybný!

Výsledek $X=(-\infty,-2)\cup(3,\infty)$

5A

3.6. Jana Mikošková

Jana Mikošková 3.B

Řešte v oboru C kvadratickou rovnici $9z^2-6z+10=0$ dvěma způsoby.

Řešení:

$D=$

a) $z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{D}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{36-4\cdot 90}\, i}{18} = \frac{6 \pm i\sqrt{+324}}{18} = \frac{6 \pm i\, 6\cdot 18}{18} =$

$= \begin{cases} \frac{1}{3}+i \\ \frac{1}{3}-i \end{cases}$ ✓

b) $z_1+z_2 = -\frac{b}{a} = \frac{2}{3}$ ✓, $z_1\cdot z_2 = \frac{c}{a} = \frac{10}{9}$ ✓

$(z_1-z_2)^2 = (z_1+z_2)^2 - 4z_1z_2 = \frac{4}{9} - \frac{20}{9} = -\frac{16}{9} = -\frac{4}{3}$

$z_1-z_2 = \pm\frac{4}{3}i \quad 2i$ odkud?

$2z_{1,2} = \frac{2}{3} \pm 2i \Rightarrow z_{1,2} = \frac{1}{3} \pm i$

2A

ad 3.7. Adéla Racková

Adéla Racková 4.c

Posloupnost je dána rekurentním vzorcem $a_{n+1} = (n+1)a_n - n\cdot a_{n-1}$, přičemž hodnoty členů a_1, a_2 udávají kořeny rovnice $\frac{x+3}{x-2} - \frac{x-2}{x+3} = \frac{5}{6}$. Určete a_4.

Řešení:

$\frac{x+3}{x-2} - \frac{x-2}{x+3} = \frac{5}{6} \mid \cdot (x+2)(x+3)\cdot 6$

$6(x+3)^2 - 6(x-2)^2 = 5(x+2)(x+3)$

$6(\cancel{x^2}+6x+9-\cancel{x^2}+4x-4) = 5(x^2+x-6)$

$6(10x+5) = 5(x^2+x-6)$

$6(2x+1) = (x^2+x-6)$ + ad. + 2. řešení $a_1=-1, a_2=12$

$12x+6 = x^2+x-6$

$x^2+x-6-12x-6=0$

$x^2-11x-12=0$ ✓

3A

$x^2-11x-12=0$

$D = 121+48 = 169, \sqrt{D}=13$

$x_{1,2} = \frac{11\pm13}{2} = \begin{cases}12\\-1\end{cases}$ ✓

$a_1 = 12,\ a_2 = -1$

$a_{n+1} = (n+1)a_n - n a_{n-1}$

$n=2:\ a_3 = 3\cdot(-1) - 2\cdot 12 = -3-24 = -27$

$n=3\ \ a_4 = 4\cdot(-27) - 3\cdot(-1) = -108+3 = \underline{\underline{-105}}$ ✓

ad 3.8. Eva Sokalová

Eva Sokalová 2a

Je dána funkce $f: y = \frac{x+1}{x-2}$. Určete definiční obor, průsečíky grafu se souřadnými osami, řešte rovnici $f(x)=-2$ a načrtněte graf této funkce.

Řešení:

$x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

$D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$ ✓

průsečík funkce s osami;

s osou x: $0 = \frac{x+1}{x-2} \Rightarrow x+1=0$, $\underline{\underline{x=-1}}$

$X\ (Y) = [-1, 0]$

s osou y: $y = \frac{0+1}{0-2} = -\frac{1}{2}$

$Y\ (X) = [0, -\frac{1}{2}]$ ✓

$f(x) = -2$:

$-2 = \frac{x+1}{x-2} \mid \cdot (x-2)$

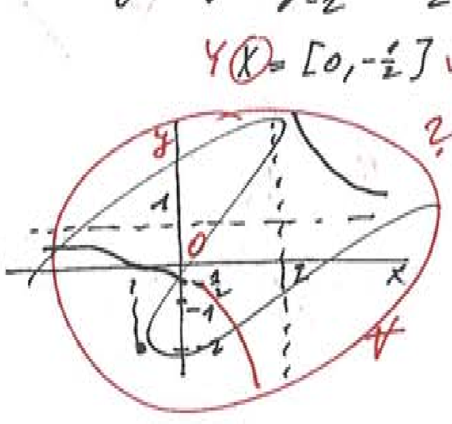
$-2x+4 = x+1$

$+3 = 3x$

$+1 = x$

$\underline{\underline{P = [+1, -2]}}$

2A

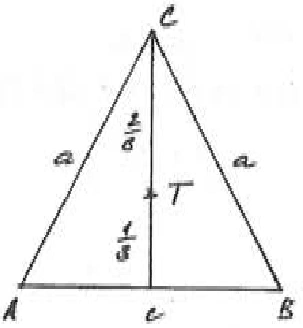


ad 3.9. Martina Navrátilová

Martina Navrátilová 1.a

Obsah rovnoramenného trojúhelníka ABC se základnou AB je 30 cm². Vypočtěte délku strany AB, je-li těžiště T vzdáleno od strany AB 4 cm.

Řešení:



vzorec: $S=\sqrt{s\cdot(s-a)^2(s-c)}$, $s=\frac{a+a+c}{2}=a+\frac{c}{2}$

$$S=\sqrt{\left(a+\frac{c}{2}\right)\left(\frac{c}{2}\right)^2\left(a-\frac{c}{2}\right)}=\frac{c}{2}\sqrt{a^2-\frac{c^2}{4}}=$$

$$=\frac{c}{4}\sqrt{4a^2-c^2}$$

$$S=\frac{c}{4}\sqrt{4\left(\frac{c^2}{4}+12^2\right)-c^2}=\frac{c}{4}\sqrt{c^2+4\cdot144-c^2}=$$

$S=30$ cm²

$t_c=v_c=4+8=12$ cm ✓

$a^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2+12^2$

Proč tak složitě?

$$S=\frac{c}{4}\sqrt{576}\Rightarrow 30=\frac{c}{4}\sqrt{576}$$

$$120=c\cdot 24$$

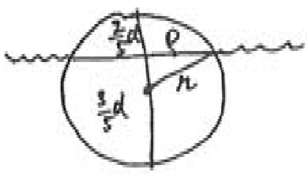
1A $\quad c=5$ cm ✓

ad 3.10. Jiří Kilián

Jiří Kilián 3.a

Určete hustotu dřevěné koule, která plave ve vodě ponořená do 3/5 svého průměru.

Řeš:



~~Váha~~ Tíha dřevěné koule $G_1=V_1\rho_1 g$, $\rho_1=?$

Chybný přepis π !

$G_1=\frac{4}{3}\pi r^3\rho_1 g$ ✓

Váha vytlačené vody $G_2=V_2\rho_2 g$, $\rho_2=1000$ kg/m³

$$V_2=\frac{\pi v}{6}(3\rho^2+v^2)=\frac{\pi}{6}\cdot\frac{4}{5}d\left(3\cdot\frac{99}{100}r^2+\left(\frac{2\cdot 2r}{5}\right)^2\right)=\frac{\pi}{6}\frac{4r}{5}\left(\frac{297}{100}+\frac{16}{25}\right)r^2$$

$$\rho^2=r^2-\left(\frac{r}{10}\right)^2=\frac{99}{100}r^2$$

5 $\quad \frac{24}{25}$

$$=\frac{\pi}{6}\frac{4r}{5}\left(\frac{361}{100}r^2\right)=\frac{2\pi r^3}{15}\cdot\frac{361}{100}=0{,}4813$$

$$=\frac{\pi}{6}\cdot\frac{6r^3}{5}\cdot\frac{361}{100}=\frac{361}{500}\pi r^3$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3\rho_1 g=\frac{361}{500}\pi r^3\,1000g\Rightarrow\rho_1=\frac{3}{4}\cdot 722=541{,}5$$

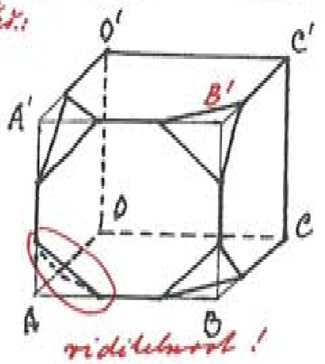
Hustota dřeva je 541,5 kg/m³ $\quad$ 2A

ad 3.11. Dušan Tříska

Dušan Tříska 2.C

Krychle ABCDA'B'C'D' má hranu a. Vrchol krychle odřízneme tak, že vedeme rovinu v 1/3 každé hrany vycházející z vrcholu. Znázorněte výsledné těleso, odřízneme-li tyto vrcholy A, B, A', B'. Jak se změní objem a povrch?

Řeš.:



viditelnost!

Ř: Objem se zmenší o 4 ~~hranolky~~ jehlany

$$o\ 4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{3} = \frac{2}{27}a^3 \quad \frac{2}{81}$$

Povrch se zmenší o 8 (12) trojúhelníčků

$$o\ 8\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{3} = \frac{4a^2}{9} \quad (12)$$

a zvětší se o 4 rovnostr. Δ o straně

$$s = \sqrt{\frac{a^2}{3}+\frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{2a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

Obsah je podle vzorečku $P = \frac{s^2}{4}\sqrt{3} = \frac{1}{4}\left(\frac{a}{3}\sqrt{2}\right)^2\cdot\sqrt{3} =$

3A

ad 3.12. Jana Keprová

Jana Keprová 9.B

Na hromadě je naskládáno 90 rour tak, že počínaje v každé řadě směrem nahoru je o 1 rouru méně. V nejvyšší řadě jsou roury 2. Kolik přidáme ve spodní řadě.

Ř: $d = -1$, $a_n = 2$, $s_n = 90$, $a_1 = ?$

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n), \quad a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$90 = \frac{n}{2}(a_1 + 2) \quad | \cdot 2$$

$$2 = a_1 + (n-1)\cdot(-1)$$

$$180 = n a_1 + 2n$$

$$1 = a_1 - n \quad \ldots\ldots \quad a_1 = 1 + n$$

$$180 = n(1+n) + 2n$$

$$180 = n + n^2 + 2n$$

$$n^2 + 3n + 180 = 0$$

$$n^2 - 3n + 180 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4\cdot 180}}{2}$$

$$= \frac{3 \pm 27}{2} = \begin{cases} 15 \\ -12 \ldots \notin N \end{cases}$$

Roury budou ve 14 řadách, v poslední spodní bude 15 rour.

3A

ad 3.13. Pavel Hnát

Pavel Hnát 1.b

Řešte rovnici $\sqrt{2x+1+2\sqrt{2x+3}}=1$.

Řešení:

$2x+3 \geqq 0$

$2x \geqq -3$

$x \geqq -\frac{3}{2}$

$2x+1+2\sqrt{2x+3} \geqq 0$

$2x+1 \geqq -2\sqrt{2x+3} \quad |^2$

$4x^2+4x+1 \geqq 8x+12$

$4x^2-4x-11 \geqq 0$

$D = 4^2+11\cdot 16 = 12\cdot 16 = 192$

$\sqrt{D} = \sqrt{4\cdot 4\cdot \underbrace{12}_{4\cdot 3}} = 8\sqrt{3}$

$x_{1,2} = \frac{4\pm 8\sqrt{3}}{8} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{1}{2}+\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}-\sqrt{3} \end{array}\right.$

$x=0:\ 1 \geqq 0$

$x \in \left\langle \frac{1}{2}-\sqrt{3}, \frac{1}{2}+\sqrt{3} \right\rangle$

zbytečné!

$\sqrt{2x+1+2\sqrt{2x+3}} = 1 \quad |^2$

$\cancel{2}x+\cancel{1}+\cancel{2}\sqrt{2x+3} = \cancel{1}$

$\sqrt{2x+3} = -x \quad |^2$

$2x+3 = x^2$

$x^2-2x-3 = 0$ ✓

$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2 = -p = 2 \\ x_1\cdot x_2 = q = -3 \end{array}\right\}\ \begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{array}$ ✓

Zk: $\left.\begin{array}{l} L(-1) = \sqrt{-2+1+2\sqrt{-2+3}} = 1 \\ P(-1) = 1 \end{array}\right\}\ L(-1) = P(-1)$

$\left.\begin{array}{l} L(3) = \sqrt{6+1+2\sqrt{6+3}} = \sqrt{\cancel{-6+1+2}3} = 1 \\ P(3) = 1 \end{array}\right\}\ \cancel{L(3) = P(3)}$

$\mathcal{X} = \{\cancel{3}; -1\}$

2A

ad 3.14. Jarmila Davidová

Jarmila Davidová 3.c

Řeš rovnici $\binom{x}{x-2}+\binom{x}{x-1} = \frac{x^3+1}{2}$.

Řešení:

$\binom{x}{x-2}+\binom{x}{x-1} = \frac{x^3+1}{2}$

$\frac{x!}{2!\,(x-2)!}+\frac{x!}{1!\,(x-1)!} = \frac{x^3+1}{2}$

$\frac{x\cdot(x-1)}{2}+\frac{x}{1} = \frac{x^3+1}{2} \quad |\cdot 2$

$x^2-x+2x = x^3+1$ ✓

$x^3-x^2\mp x\pm 1 = 0$

$x^2(x-1)\mp(x-1) = 0$

$(x^2\mp 1)\cdot(x-1) = 0$

$\underbrace{(x^2\mp 1 = 0)}_{\text{to nejde}} \vee (x-1) = 0$

$\forall\ x_2 = -1$

$x_1 = 1$ [illegible]!

$\cancel{P = \{1\}}$ $\emptyset$

3A

ad 3.15. Petr Pavelka

Petr Pavelka 4.a

Pod jakým úhlem protíná hyperbola $y=\sqrt{x}$ parabolu $y=\frac{1}{x}$?

Řešení:

$\sqrt{x}=\frac{1}{x} \;\Big|\cdot x$

$x\sqrt{x}=1$

$x^{\frac{3}{2}}=1$

$x=1$

$y=1 \qquad P[1,1]$ ✓

~~Tečna ke $y=\sqrt{x}$ v bodě [1,1]~~:

$y'=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}=\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{1}{2}$

$y'=-\frac{1}{x^2}=\mathrm{tg}\,\beta=-1$

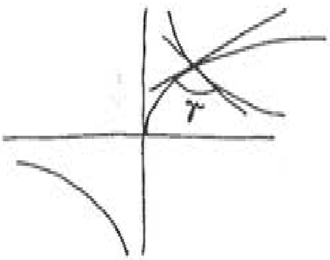
?

$\alpha \doteq 26^\circ\,\cancel{56'}\,34'$ $\qquad 0{,}56^\circ \neq 56'$!!

$\beta = 45^\circ$

$\gamma \doteq \cancel{108^\circ 4'}$

$\gamma' \doteq 71^\circ 34'$



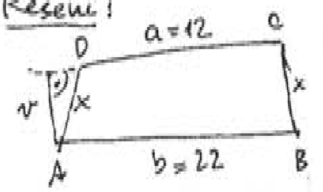
2A

ad 3.16. Tomáš Hanák

Tomáš Hanák 2.b

Vypočítejte obsah a obvod rovnoramenného lichoběžníku, jsou-li délky základen 22cm a 12cm a jeho výška je o 1cm menší než délka jeho ramene.

Řešení:



o = ?

O = ?

$o=a+b+2x$

$O=\frac{(a+b)\cdot v}{2}$ ✓

$22-12:2=5=d$ ✓

$v^2+d^2=x^2$

$v^2+d^2=(v+1)^2$

$v^2+d^2=v^2+2v+1$

$d^2-1=2v$

$d=5$ ✓

$2v=24$

$v=12$ ✓ … $x=v+1=13$ ✓

$o=12+22\overset{2\cdot}{+}13=\cancel{47}\ 60\ \text{cm}$

$O=\frac{(12+22)\cdot 12}{2}=\cancel{45}\,34\cdot 6=\cancel{258}\ \text{cm}^2$

Obvod lichoběžníku je ~~47~~ cm obsah ~~258~~ cm².

2A

ad 3.17. Hana Ševčíková

Hana Ševčíková 1.C

Máme 2 čísla. Jestliže první z nich zvětšíme o 8, dostaneme čtyřnásobek druhého. Jestliže druhé násobíme třikrát, dostaneme polovinu prvního zvětšenou o 9. Která to jsou čísla?

Řešení: 1. číslo je x, druhé je y

$$x + 8 = 4y$$
$$3y = \frac{x+9}{2} \quad \frac{x}{2}+9 \Rightarrow 6y = x + \cancel{9}\,18$$

$$x - 4y = -8$$
$$x - 6y = -\cancel{9}\,18$$

$$-4y - (-6y) = -8 - (-9)$$
$$2y = 1$$
$$y = \frac{1}{2}$$
$$x = 4y - 8 = 2 - 8 = -6$$

2A

Ověření:

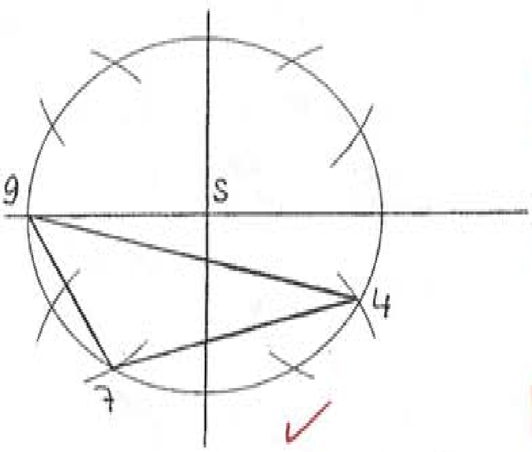
$$-6 + 8 = 2$$
$$4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 2$$
$$3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$
$$\frac{-6+9}{2} = \frac{3}{2}$$

Jsou to čísla -6 a $\frac{1}{2}$

ad 3.18. Eva Holubová

Eva Holubová 2.B

Na ciferníku hodin stanovte velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku 479.



$$|\sphericalangle 794| = \frac{1}{2}|\sphericalangle 7S4| = 30° + 30° + 30° = 90°$$
$$\Rightarrow |\sphericalangle 794| = 45°$$ ✓

$$|\sphericalangle 749| = \frac{1}{2}|\sphericalangle 7S9| = 30° + 30° = 60°$$
$$\Rightarrow |\sphericalangle 749| = 30°$$ ✓

$$|\sphericalangle 479| = 180° - (45° + 30°) = 180° - 75° =$$
$$= 105°$$ ✓

1A

ad 3.19. Ema Kroupová

Ema Kroupová 3.B

Určete vzájemnou polohu kružnice $k: (x-4)^2+(y+1)^2=5$ a přímky p: $x-2y-1=0$.

Řešení: $p: x-2y-1=0 \Rightarrow x=2y+1$

$(2y+1-4)^2+(y+1)^2=5$ ✓

$4y^2-12y+9+y^2+2y+1=5$

$3y^2-4y+5=0$ $\qquad D=\sqrt{16-4\cdot 15}=\sqrt{-44}$

$D<0$

$\Rightarrow$ přímka a kružnice nemají žádné společné body $\Rightarrow$ přímka p je vnější přímka kružnice k. 3A

ad 3.20. Milan Lukeš

Milan Lukeš IV.A

Pomocí mat. indukce dokažte, že pro všechna $n\in N$ platí $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{2(n+2)}$

Dokázat 1. $n=1$ ... platí

2. předpoklad $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{2(n+2)}$

tvrzení $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}=\frac{n+1}{2(n+3)}$

dokázat: $\frac{n}{2(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}=\frac{n+1}{2(n+3)}$ ✓

Řešení: 1. $n=1$

$L=\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{6}=\frac{1}{2(1+2)}=P$ platí ✓

$\frac{n}{2(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}=\frac{n^2+3n+2}{2(n+2)(n+3)}=\frac{(n+2)(n+1)}{2(n+2)(n+3)}=\frac{n+1}{2(n+3)}$ c.b.d. ✓

1A

ad 4.1. Martin Lisický, 1. a

Martin Lisický 1. a

Řešte v R rovnici $\sqrt{10-x}+\sqrt{x-8}=2$.

$$\sqrt{10-x}+\sqrt{x-8}=2$$

$$10-x+2\sqrt{10-x}\,\sqrt{x-8}+x-8=4$$

$$\sqrt{10-x}\,\sqrt{x-8}=1$$

$$(10-x)(x-8)=1$$

$$x^2-18x+80=0$$

$$D=324-320=4 \qquad \sqrt{D}=2$$

$$x_{1,2}=\frac{18\pm 2}{2}$$

$$x_1=\underline{10}\ ;\ x_2=\underline{\underline{8}}$$

Množina všech kořenů dané rovnice $P=\{8,10\}$

ad 4.2. Ivan Raška, 3. a

Ivan Raška 3. a

Je dán $\triangle ABC$, $A[0,-3]$, $B[3,3]$, $C[-3,0]$ a bod $M[0,2]$. Rozhodněte zda bod M leží v $\triangle ABC$.

př. AB: $y+3=\frac{3+3}{3}(x-0)$, $\underline{y+3=2x}$

$\to ABC$: $L(C)=3$, $P(C)=-6$, $L(C)>P(C)$; $L(M)=2$, $P(M)=0$, $L(M)>P(M)$ $\Big\}$ $>$ $>$ $\Rightarrow M\in \to ABC$

př. BC: $y-0=\frac{3-0}{3+3}(x+3)$, $\underline{y=\frac{1}{2}(x+3)}$

$\to BCA$: $L(A)=-3$, $P(A)=\frac{1}{2}3$, $L(A)<P(A)$; $L(M)=2$, $P(M)=\frac{1}{2}3$, $L(M)>P(M)$ $\Big\}$ $<$ $>$ $\Rightarrow M\notin \to BCA$

$\to CAB$ již nemusíme

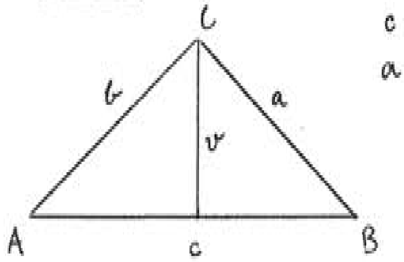
$\underline{\underline{M \text{ neleží v } \triangle ABC}}$

ad 4.3. Monika Daňková

Monika Daňková 2.B

Trojúhelníkový pozemek je na plánu v měřítku 1 : 5000 zakreslen jako trojúhelník o stranách délky 47,5 mm, 63,0 mm a 47,5 mm. Určete skutečné délky jeho stran a výměru pozemku.

Řešení:



$c = 63{,}0$ mm

$a = b = 47{,}5$ mm

$c' = 63{,}0 \cdot 5000 = 315\,000$ mm $= 315$ m

$a' = b' = 47{,}5 \cdot 5000 = 237\,500$ mm $= 237{,}5$ m

$$v = \sqrt{a^2 - \frac{c}{2}^2} = \sqrt{47{,}5^2 - 31{,}5^2} = \sqrt{1264} = 35{,}553 \text{ mm}$$

$$P = \frac{1}{2} c \cdot v = \frac{1}{2} \cdot 63{,}0 \cdot 35{,}553 = 1119{,}92 \text{ mm}^2 \doteq 1120 \text{ mm}^2$$

$$P' = 1120 \cdot 5000 = 5\,600\,000 \text{ mm}^2 = 5600 \text{ m}^2.$$

Výměra pozemku je 56 a.

ad 4.4. Dana Pilařová

Dana Pilařová 4.B

Určete limitu $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^3 + 5n^2 - 2}{2n^3 - n}$.

Řešení:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^3 + 5n^2 - 2}{2n^3 - n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 + \frac{5}{n} - \frac{2}{n^3}}{2 - \frac{1}{n^2}} =$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 + 5 \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} - 2 \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^3}}{\lim\limits_{n \to \infty} 2 - \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{1 + 5 - 2}{2} = 2$$

ad 4.5. Renáta Panchártková

RENÁTA PANCHÁRTKOVÁ 1.B

ZJEDNODUŠTE NÁSLEDUJÍCÍ VÝRAZ A UVEĎTE, ZA JAKÝCH PODMÍNEK MÁ SMYSL:

$$\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{a-b} : \frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

ŘEŠENÍ:

PODMÍNKY: $a-b \neq 0 \vee \sqrt{a}+\sqrt{b} \neq 0 \vee a \neq 0$

$a \neq b \vee \sqrt{a} \neq -\sqrt{b} \vee a \neq 0$

VÝRAZ MÁ SMYSL POKUD PLATÍ $\underline{\underline{a \neq b \text{ NEBO } a \neq 0}}$

ÚPRAVA: $$\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{a-b} : \frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{a-b}{a-2\sqrt{ab}+b} \cdot \frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} =$$

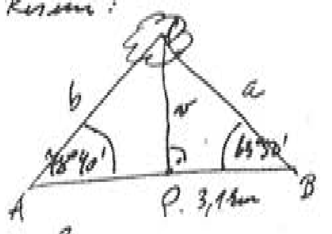
$$= \frac{(\cancel{\sqrt{a}-\sqrt{b}})(\cancel{\sqrt{a}+\sqrt{b}})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{\cancel{2}}} \cdot \frac{a}{\cancel{\sqrt{a}+\sqrt{b}}} = \underline{\underline{\frac{a}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}}} = \frac{a\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$$

ad 4.6. Magda Mičulková

Magda Mičulková 2.a

Ze dvou míst ve vodorovné rovině, vzdálených od sebe 3,1 km, byl pozorován mrak nad spojnicí obou míst ve stejné rovině ve výškových úhlech $\alpha = 78°40'$, $\beta = 63°50'$. Jak vysoko byl mrak?

Řešení:



$\triangle APC$ je pravoúhlý:

$v = b \cdot \sin 78°40'$

$v = 4,57 \cdot 0,98$

$\underline{\underline{v = 4,48 \text{ km}}}$

$v = ?$

$\underline{\gamma = 180° - (78°40' + 63°50') = 37°30'}$

$$\frac{b}{\sin 63°50'} = \frac{3,1}{\sin 37°30'}$$

$$b = \frac{3,1}{\sin 37°30'} \cdot \sin 63°50' = \frac{3,1}{0,608} \cdot 0,897 = \underline{4,57}$$

ad 4.7. Karel Kotek

Karel Kotek 3.b

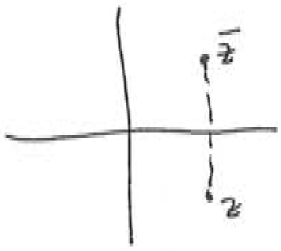
Vypočtěte $V = [(a+b)(\bar{a}-\bar{b})]^2$ kde $a = c-d$, $b = c+d$, $c = 2-3i$, $d = ic$.

Řešení:

$a = c-d$
$b = c+d$

$a+b = 2c$

$\bar{a}-\bar{b} = \bar{c}-\bar{d}-\bar{c}-\bar{d}$
$= -2\bar{d}$



$d = ic = 2i-3i^2$
$= 2i+3$

$\bar{a}-\bar{b} = -2(2i-3)$

$(a+b)(\bar{a}-\bar{b}) = \cancel{\ldots}\, 2(2-3i)(-2)(3-2i)$
$= -4(2-3i)(2i-3) = \cancel{4}\, -4(6-6i^2+12i)$
$= -4 \cdot 12i$

$V = -4 \cdot (12i)^2$

$\cancel{V = 48^2 i^2 = -2304 i^2 = 2304}$

$\cancel{V = (-4)^2 + (12i)^2 = 16}$

$V = (-4)^2 \cdot (12i)^2 = 16 \cdot -144$

$V = [(a+b)(\bar{a}-\bar{b})]^2 = \underline{\underline{-2304}}$

ad 4.8. Milena Růžičková

Milena RŮŽIČKOVÁ, 4.C

V geometrické posloupnosti je dáno: $a_1 = 81$, $q = \frac{1}{3}$, $a_n = 1$
Vypočítejte n a s_n.

Řešení:

$a_n = a_1 \cdot q^n - 1$

$1 = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\frac{1}{81} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

víme že $3^4 = 81$

$\Rightarrow \underline{\underline{n = 4}} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$

$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$

$s_4 = a_1 \frac{q^4 - 1}{q - 1}$

$s_4 = 81 \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^4 - 1}{\frac{1}{3} - 1}$

$s_4 = 81 \cdot \frac{\frac{1-81}{81}}{\frac{1-3}{3}} = 81 \cdot \frac{-80}{81} \cdot \frac{3}{-2}$

$s_4 = \frac{80 \cdot 3}{2}$

$\underline{\underline{s_4 = 120}}$

ad 4.9. Jiří Duchoň

Jiří Duchoň 1.b

Řešte nerovnici $2|x-2|-3<|3-x|$.

Řešení:

a) $x<2$

$-2(x-2)-3<-(3-x)$

$-2x+4-3<-3+x$

$-3x<-4$

$3x>4$

$x>\frac{4}{3}$

$X_1=(\frac{4}{3};2)$

b) $2\le x<3$

$2(x-2)-3<-(3-x)$

$2x-4-3<-3+x$

$x<4$

$X_2=\langle 2;\cancel{4}3)$

c) $x\ge 3$

$2(x-2)-3<3-x$

$2x-4-3<3-x$

$3x<10$

$x<\frac{10}{3}$

$X_3=\langle 3;\frac{10}{3})$

$X=X_1\cup X_2\cup X_3=(\frac{4}{3};\frac{10}{3})$

ad 4.10. Lea Holínková

LEA HOLÍNKOVÁ 3.C

Zjistěte počet prvků množiny, z nichž lze vytvořit o 49 kombinací 3. třídy s opakováním více než bez opakování.

n … počet prvků množiny

$C'_3(n)+49=C_3(n)$

$\binom{3+n-1}{3}+49=\binom{n}{3}$

$\binom{2+n}{3}+49=\binom{n}{3}$

$\frac{(2+n)!}{3!(n-1)!}+49=\frac{n!}{3!(n-3)!}$

$(n+2)(n+1)(n)+49\cdot 6=(n)(n-1)(n-2)$

$(n+2)(n^2+n)+294=(n^2-n)(n-2)$

$\cancel{n^3}+n^2-2n^2+2n+294=\cancel{n^3}-2n^2-n^2+2n$

$\cancel{6n^2=-294}$

$6n^2=294$

$n^2=49$

$n_1=-7$

$n_2=7$

zk $n_2=7$

$C'_3(7)=\binom{2+n}{3}=\binom{9}{3}=\frac{9!}{3!\,6!}=\frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2}=3\cdot 4\cdot 7=84$

$C_3(7)=\binom{n}{3}=\binom{7}{3}=\frac{7!}{3!\,4!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{6}=35$

$84-35=49$

$n_1=-7$

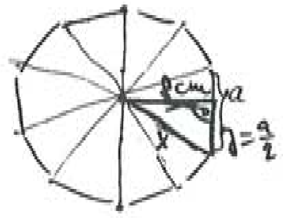
$C'_3(-7)=\binom{-5}{3}$ nelze

Řešení: $n=7$

ad 4.11. Miloš Přidal

Poloměr kružnice vepsané pravidelnému desetiúhelníku je 8 cm. Vypočítej délku jeho strany, poloměr kružnice opsané, obsah a obvod.

MILOŠ PŘIDAL 2.C



$360° : 20 = 18°$

$180° - (90° + 18°) = 62°$

$$\frac{8}{\sin 62°} = \frac{x}{\sin 90°} \Rightarrow x = \frac{8 \cdot \sin 90°}{\sin 62°} \doteq \underline{9{,}06 \text{ cm}}$$

$$\frac{9{,}06}{\sin 90°} = \frac{y}{\sin 18°} \Rightarrow y = \frac{9{,}06 \cdot \sin 18°}{\sin 90°} \doteq 2{,}8 \text{ cm} \Rightarrow a = 2 \cdot 2{,}8 = \underline{5{,}6 \text{ cm}}$$

$$o = 10 \cdot a = \underline{56 \text{ cm}}$$

$$P = 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \frac{a}{2} = 40a = \underline{224 \text{ cm}^2}$$

Odpověď: Délka strany 10-tiúhelníka je 5,6 cm.
Poloměr kružnice opsané je 9,06 cm.
Obsah je 224 cm² a obvod desetiúhelníka je 56 cm.

ad 4.12. Jana Palečková

Jana Palečková, 4.b

Je dána funkce $f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2+5}$. Vyjádřete $f(x)$ jako součet nebo rozdíl mnohočlenu a zlomku v němž čitatel má nižší stupeň než jmenovatel. Rozhodněte výpočtem derivace, zda $f'(0) = 0$. Určete algebraický tvar $f(z_0)$ v bodě $z_0 = -2 + i$.

Řešení: $\frac{x^3+2x^2}{x^2-5} = \frac{x^3-5x+5x+2x^2}{x^2-5} = \frac{x(x^2-5)+2x^2+5x}{x^2+5} = x + \frac{2x^2+5x}{x^2+5}$

$$f'(x) = \frac{(3x^2+4x)(x^2-5)-(x^3+2x^2)\cdot 2x}{(x^2-5)^2} \Rightarrow f'(0) = \frac{0}{25} = 0$$

$$(-2+i)^2 = 4 - 4i - 1 = 3 - 4i$$

$$(-2+i)^3 = (3-4i)(-2+i) = -6 + 8i + 3i + 4 = -2 + 11i$$

$$z^2 - 5 = -2 - 4i$$

$$z^3 + 2z^2 = -2 + 11i - 6 - 8i = 4 + 3i$$

$$f(z_0) = \frac{4+3i}{-2-4i} \cdot \frac{-2+4i}{-2+4i} = \frac{-8-6i+16i-12}{4+16} = \frac{-20}{}$$

ad 4.13. Michal Šedík

MICHAL ŠEDÍK
1.A

Řešte soustavu alg. rovnic v R.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5$$

$$\frac{3}{x} - \frac{5}{y} = -9$$

Řešení:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5$$

$$\frac{3}{x} - \frac{5}{y} = -9$$

zavedeme substituci

$$\frac{1}{x} = a \; ; \; \frac{1}{y} = b$$

$$a + b = 5 \qquad \Rightarrow \qquad a = 5+b$$

$$3a - 5b = -9 \qquad 3(5+b) - 5b = -9$$

$$15 + 3b - 5b = -9$$

$$-2b = -24$$

$$b = 12$$

$$a = 5 + 12$$

$$a = 17$$

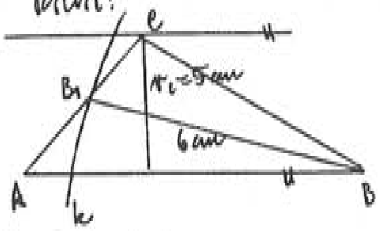
$$P[17;12]$$

ad 4.14. Jana Sichertová

Jana Sichertová 2.b

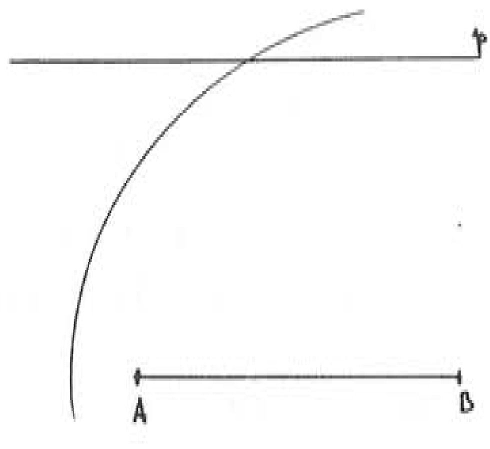
Sestrojte všechny trojúhelníky jestli dáno:
$|BB_1| = 6$ cm, B_1 je střed AC, $v_c = 5$ cm, $c = 5$ cm

Rozbor:



Popis konstrukce:
1. AB; $|AB| = 5$ cm
2. k; $k(B; 6$ cm$)$
3. p; $p \parallel \overleftrightarrow{AB}$, vzdálenost p od $\overleftrightarrow{AB}$ je 5 cm
4. B_1; $B_1 \in k$, $|AB_1| = |B_1 p|$
5. C; $C \in \overrightarrow{AB_1} \cap p$
6. ABC

Konstrukce:



Úloha má 2 řešení.

ad 4.15. Václav Knotek

Václav Knotek 4a

Je dána kvadratická funkce $y = 2px^2 + (1-p)x - \frac{4p^2-9}{16}$ s parametrem p. Pro které hodnoty parametru prochází graf této funkce počátkem? Pod jakým úhlem pak v počátku protíná osu x (s přesností na minuty)?

Ř:

Počátek je $[0,0] \Rightarrow x=0, y=0$: $0 = 0 + 0 - \frac{4p^2-9}{16} \Rightarrow p_{1,2} = \pm\frac{3}{2}$

Derivace

$y' = 4px + (1-p)$

$y'(\frac{3}{2}) = 4\cdot\frac{3}{2}x + 1 - \frac{3}{2} = 6x - \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 6 \Rightarrow \alpha = 80°32'$

$y'(-\frac{3}{2}) = 4\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)x + 1 + \frac{3}{2} = -6x + \frac{5}{2}$ $\longrightarrow$ $y'(0) = \frac{5}{2} = 2{,}5$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\beta = -6 \Rightarrow \beta = -80°32'$ $\qquad$ $\operatorname{tg}\beta = 2{,}5 \Rightarrow \beta = 68{,}20°$

ad 4.16. Martin Soner

Martin Soner 3.e

V lavici sedí 5 žáků ABCDE. Kolika způsoby je může učitel přesadit? Při kolika způsobech usazení
a) A není uprostřed b) A, B sedí vedle sebe c) A sedí na kraji ?

usazení ABCDE
ABCED
...
EDCBA

Je to permutace z pěti prvků a těch je $5! = 120$.

a) A není ~~uprostřed~~, tedy sedí buď ~~na 2.3. místě.~~
Kdyby byl A uprostřed, mohli bychom ostatní usadit $4! = 24$ způsoby tedy když není uprostřed je to $120 - 24 = 96$.

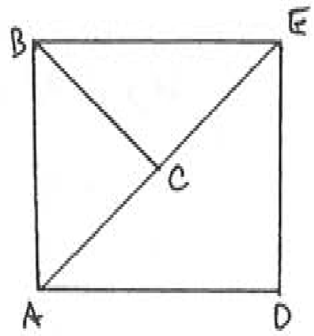
b) AB vedle sebe berou jakoby 1 prvek tedy jde o permutace ze 4 prvků a těch je $4! = 24$

c) A sedí na levém kraji a ostatní se mohou přesazovat $4! = 24$ způsoby nebo A sedí na pravém kraji a je to rovněž 24, tedy celkem 48.

ad 4.17. Světlana Žižková

Světlana Žižková, 1.c

V grafu na obrázku vyhledejte a zapište
(1) všechny cesty z A do E
a dále všechny ty, pro něž platí (X znamená výrok „cesta prochází bodem X“)
(2) $\neg C$, (3) $B \wedge C$, (4) $C \vee D$, (5) $C \Rightarrow B$, (6) $B \Leftrightarrow C$



(1) ADE, ACE, ABE, ACBE, ABCE, ABE

(2) ABE, ADE

(3) ABCE, ACBE

(4) ADE, ACE, ABCE, ACBE

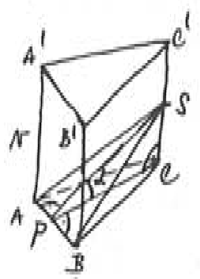
(5) ACBE

(6) ABCE, ACBE

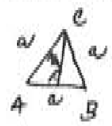
ad 4.18. Lucie Palátová

Lucie Palátová
4.c

Je dán pravidelný hranol $ABCA'B'C'$. Podstavná hrana $a = 5$ cm, Vypočtěte objem V, jestliže rovina ABS svírá s rovinou podstavy úhel $\alpha = 30°$, S… střed CC', výsledek zaokrouhli na 1 desetinné místo.



$V = S_p \cdot v$



$v_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$

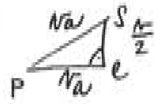
$v_a = \sqrt{25 - 6{,}25}$

$v_a = 4{,}3$ cm

$S_p = \dfrac{a \cdot v_a}{2}$

$S_p = \dfrac{5 \cdot 4{,}3}{2} = 10{,}75$ cm^2

v:



$\frac{v}{2} = \sqrt{v_a^2 + v_a^2}$

$\frac{v}{2} = \sqrt{36{,}98}$

$v = 12{,}16$ cm

$V = S_p \cdot v$

$V = 10{,}75 \cdot 12{,}16$

$V = 130{,}72$ cm^3 $\doteq$ $130{,}7$ cm^3

ad 4.19. Jan Nohýl

Jan Nohýl 3a

Př: Ve třídě je 30 žáků, 3 z nich nejsou na vyučování připraveni. V hodině matematiky má být vyzkoušeno 5 žáků. Vypočtěte pravděpodobnost že mezi zkoušenými bude

a) právě jeden nepřipravený žák

b) nejvýše dva nepřipravení žáci

c) alespoň dva nepřipravení žáci

$$a)\ p(A) = \frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{27}{4}}{\binom{30}{5}} = \frac{\frac{3!}{1!\cdot 2!}\cdot\frac{27!}{4!\cdot 23!}}{\frac{30!}{5!\cdot 25!}} = \frac{3\cdot 27\cdot 26\cdot 25}{142\ 506} \doteq 0{,}369$$

$$b)\ p(B) = \frac{\binom{3}{2}\binom{27}{3}+\binom{3}{1}\binom{27}{4}+\binom{27}{5}}{\binom{30}{5}} = \frac{8775+52650+80730}{142\ 506} = 0{,}998$$

$$c)\ p(C) = \frac{\binom{3}{2}\binom{27}{3}+\overbrace{\binom{3}{3}}^{1}\binom{27}{2}+\binom{3}{4}\overbrace{\binom{27}{1}}^{27}+\binom{3}{5}\overbrace{\binom{27}{0}}^{1}}{\binom{30}{5}} \doteq$$

$$\doteq \frac{8775+351 - \frac{27}{4} - \frac{1}{40}}{142\ 506} \doteq 0{,}064$$

ad 4.20. Jiří Ort

JIŘÍ ORT
2.A

Řešte v R rovnici: $\lg(x^3+1) - \lg 7 - \lg x = \lg(x+1) - \lg 6$

řešení:

$$\lg\frac{x^3+1}{(\cancel{7}+x)} = \lg\frac{(x+1)}{6}$$

$$\frac{x^3+1}{(7+x)} = \frac{x+1}{6} \quad /\cdot 6(7+x)$$

$$6(x^3+1) = (7+x)\cdot(x+1)$$

$$6x^3+6 = 7x+7+x^2+x$$

$$6x^3-x^2-8x-1=0$$

$x=1$: $6-1-8-1 \neq 0$ není kořen

$x=-1$: $-6-1+8-1=0$ je kořen

$$(6x^3-x^2-8x-1):(x+1) = 6x^2-7x-1$$
$$\underline{-(6x^3+6x^2)}$$
$$-7x^2-8x-1$$
$$\underline{-(-7x^2-7x)}$$
$$-x-1$$
$$\underline{-(-x-1)}$$
$$0$$

$$x_{1,2} = \frac{7\pm\sqrt{49-24}}{12} = \frac{7\pm 5}{12} = \begin{cases}\frac{12}{12}=1\\ \frac{11}{6}\end{cases}$$

řešení je $x_1 = -1$

$x_1 = 1$

$x_3 = \frac{11}{6}$

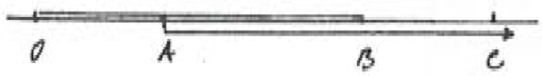
ad 5.1. Julie Martinová

Julie Martinová 1. a

Na číselné ose jsou dány body O[0], A[3], B[5], C[-2]. Zapište výsledné množiny, vyznačte je na číselné ose a vyjádřete je též pomocí intervalů:

$\overrightarrow{AC} \cup OB$, $OB \cup CO$, $\overrightarrow{AO} \cap \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{OC}$

Řešení:

1) 

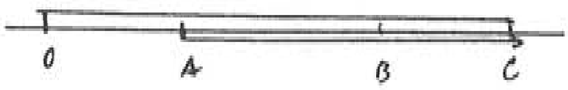
úsečka AB, $\langle 3,5 \rangle$

2) 

úsečka OB, $\langle 0,5 \rangle$

3) 

polopřímka $\overrightarrow{AO}$, $(-\infty, 0)$

4) 

úsečka AC, $\cancel{\langle 3,-2 \rangle}$ $\langle -2,3 \rangle$

ad 5.2. Petr Musil

a) Užitím binomické věty vypočítejte $\frac{1}{6}\left(3x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^4$ PETR MUSIL 3.B

b) V binomickém rozvoji výrazu $\frac{1}{6}\left(3x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^4$ je třetí člen 9. Vypočtěte x.

Řešení:

a) $$\frac{1}{6}\left(3x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^4 = \frac{1}{6}\left[(3x^3)^4 + \binom{4}{1}(3x^3)^3\frac{2}{x^2} + \binom{4}{2}(3x^3)^2\left(\frac{2}{x^2}\right)^2 + \binom{4}{3}3x^3\left(\frac{2}{x^2}\right)^3 + \left(\frac{2}{x^2}\right)^4\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[81x^{12} + 4\cdot 27\cdot x^9\cdot\frac{2}{x^2} + 6\cdot 9\cdot x^6\cdot\frac{4}{x^4} + 4\cdot 3x^3\,\frac{8}{x^6} + \frac{16}{x^8}\right.$$

$$= \frac{1}{6}\left[81x^{12} + 216x^7 + 216x^4 + 96x + \frac{16}{x^8}\right]$$

b) 3. člen

$$\binom{4}{2}(3x^3)^2\left(\frac{2}{x^2}\right)^2 = 9$$

$$216x^4 = 9$$

$$x^4 = \frac{9}{216} = \frac{1}{24}$$

$$x = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{24}}$$

ad 5.3. Magdalena Šimků

Šimků Magdalena
2.A

Řešte v R: $4^{\sqrt{3x^2-2x}+1}+2=9\cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}$

$4^{\sqrt{3x^2-2x}+1}+2=9\cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}$

$4^{\sqrt{3x^2-2x}}\cdot 4+2=9\cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}$

$2^{2\sqrt{3x^2-2x}}\cdot 2^2+2=9\cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}$ $\qquad 2^{\sqrt{3x^2+2x}}=m$

$m^2\cdot 2^2+2=9\cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}$

$2^2m^2+2=3^2m$

$4m^2+2=9m$

~~4...~~

$4m^2-9m+2=0$

$m_{1,2}=\dfrac{9\pm\sqrt{81-32}}{4}=\dfrac{9\pm 7}{4}=\begin{cases}4\\ \frac{1}{2}\end{cases}$

1) $2^{\sqrt{3x^2+2x}}=4=2^2$

$\sqrt{3x^2+2x}=2\ /^2$

$3x^2+2x=4$

$3x^2+2x-4=0$

$x_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+12}}{3}=\dfrac{-2\pm 4}{3}\begin{cases}-\frac{8}{3}\\ \frac{2}{3}\end{cases}$

2) $\sqrt{3x^2+2x}=\frac{1}{2}=2^{-1}$

$\sqrt{3x^2+2x}=-1$

$3x^2+2x=1$

$3x^2+2x-1=0$

$x_{12}=\dfrac{2\pm\sqrt{4+12}}{3}=$

$\dfrac{2\pm 4}{3}\begin{cases}2\\ -\frac{2}{3}\end{cases}$

ad 5.4. Ivana Fryčerová

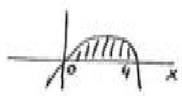
Ivana Fryčerová 4.C

a) Vypočtěte obsah oblasti M ohraničené grafem fce f a osou x, $f: y=4x-x^2$

b) Vypočtěte obsah množiny ohraničené grafy fcí $f: y=x^2-2x$, $g: y=4x-x^2$

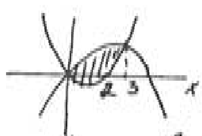
Řešení:

a) $f: y=0$
$f: y=4x-x^2$



$S(M)=\int_0^4 4x-x^2=\left[2x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^3=18-9=\underline{\underline{9j^2}}$

b) $f: y=x^2-2x$
$g: y=4x-x^2$



$x^2-2x=4x-x^2$
$2x^2-6x=0$
$x_1=3,\ x_2=0$

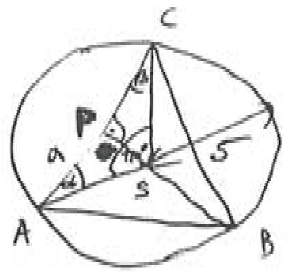
$S(F)=\left|\int_0^2(x^2-2x)\,dx\right|+\int_0^2(4x-x^2)\,dx+\int_2^3(x^2-2x)\,dx=\left|\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_0^2\right|+$

$+\left[2x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^2+\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_2^3=\left|\left(\frac{8}{3}-4\right)\right|+\left(8-\frac{8}{3}\right)+\left([9-9]-\left[\frac{8}{3}-4\right]\right)=$

$=\frac{4}{3}+\frac{16}{3}+\frac{4}{3}=\frac{24}{3}=\underline{\underline{8j^2}}$

ad 5.5. Radim Literák

Vypočtěte a stř. △ vepš. do k o $r = 5$ RADIM LITERÁK 1.B



△ ASC je rovnoram.

takže $\sphericalangle \alpha = \beta$

a tedy $\alpha = 180° - 120° + \beta$

$\alpha = 180° - 120° + \alpha$

$2\alpha = 180° - 120°$

$2\alpha = 60°$

$\alpha = 30°$

△ ASP je ◺

~~$\sin \alpha =$~~

$$\cos \alpha = \frac{\text{přilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{a}{|AS|}$$

a přitom $AS = r = 5$

$\cos 30 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ $\quad \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{5}$ $\quad a = \frac{5}{2}\sqrt{3}$

ad 5.6. Jaroslav Štefl

Jaroslav Štefl 4.A

Pro které hodnoty reálného parametru c má rovnice $(2c-1)x^2+4cx+2c+2=0$ imaginární kořeny? Řešte rovnici pro $c=3$.

Řešení: $(2c-1)x^2+4cx+2c+2=0$

$$D = (4c)^2 - 4\cdot(2c-1)(2c+2) = 16c^2 - 8(2c-1)(c+1) = 16c^2 - 16c^2 + c - 1$$

$$2c^2 - c + 2c - 1$$

$D < 0 \Rightarrow c - 1 < 0$, $c < 1$

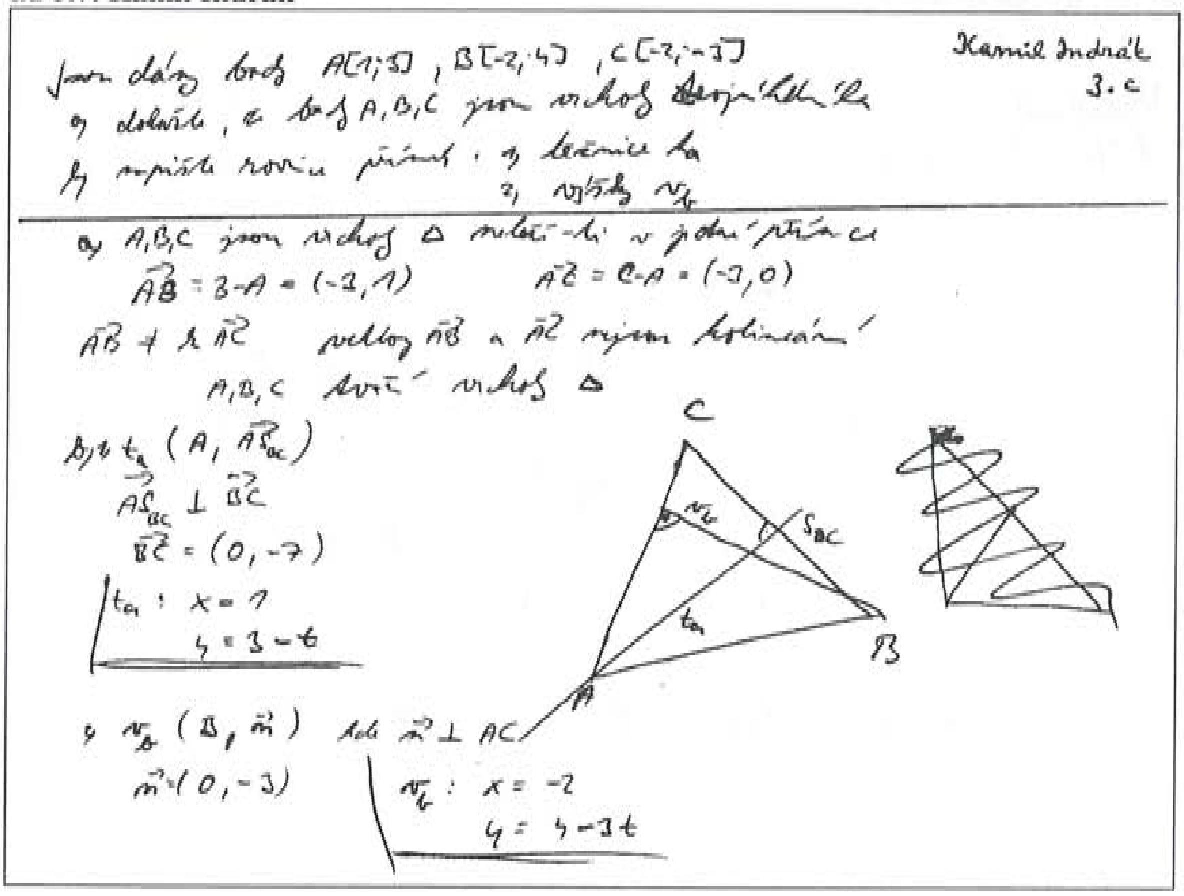
$c = 3$: $7x^2 + 12x + 8 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 4\cdot 7\cdot 8}}{14}$$

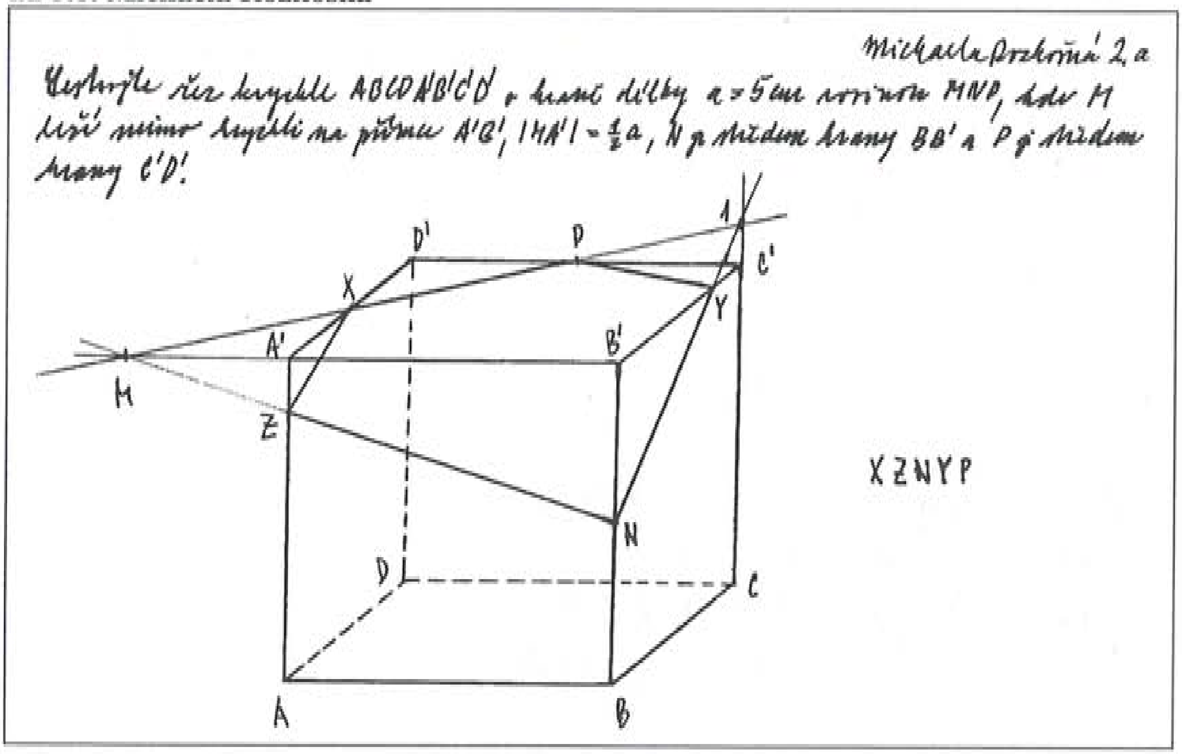
$28\cdot 8 = 224$, $224 - 144 = 80$

$$x_{1,2} = \frac{-12 \pm i\sqrt{80}}{14} = \frac{-6 \pm i\sqrt{20}}{7}$$

ad 5.7. Kamil Indrák



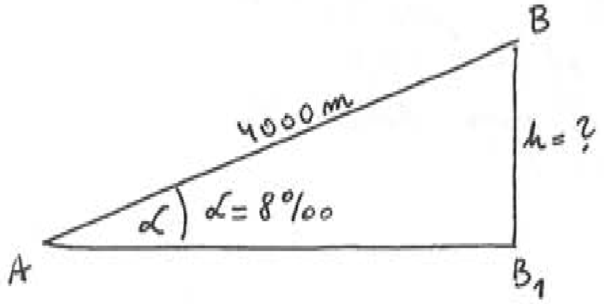
ad 5.8. Michaela Rozkošná



ad 5.9. Radka Beštová

RADKA BEŠTOVÁ 1.C

Vzdálenost 2 žel. stanic je 4000 m. Stoupání železniční trati je 8 ‰. Vypočítejte výškový rozdíl těchto stanic a úhel stoupání.



$8‰ = 0{,}008\ \%$

$\sin \alpha = \dfrac{h}{4000}$

$h = 4000 \cdot \sin \alpha =$

$h = 0{,}055\ m = 5{,}5\ km$

Výškový rozdíl stanic je 5,5 km a úhel stoupání je 0,008 %.

ad 5.10. Irena Průšová

Určete rovnice tečen ke křivce $y = x^3 + x^2 - 2x$ v průsečících křivky s osou x.

Irena Průšová, 4.B

$x^3 + x^2 - 2x = 0$

$x(x^2 + x - 2) = 0$

$x(x-1)(x+2) = 0$

$T_1 = [0,0]$, $T_2 = [1,0]$, $T_3 = [-2,0]$

pro směrnici platí: $k = y'(x_0) = 3x_0^2 - 2x - 2 = 0$

$k_1 = -2$, $k_2 = -1$, $k_3 = 14$

rovnice tečny: $y - y_0 = k(x - x_0)$

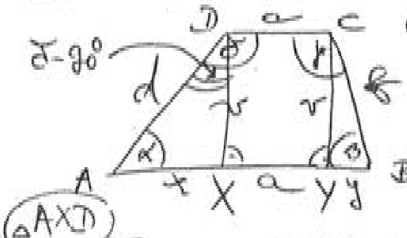
$t_1: y = -2x \Rightarrow \boxed{2x + y = 0}$

$t_2: y = -(x-1) \Rightarrow \boxed{x + y - 1 = 0}$

$t_3: y = 14(x+2) \Rightarrow \boxed{14x - y + 28 = 0}$

ad 5.11. Klára Ruberová

V lichoběžníku ABCD je dáno: $|AB| = a = 8$ cm, $|BC| = b = 5$ cm, $\beta = 60°$, $\delta = 105°$. Vypočítej délky zbývajících stran lichoběžníka. RUBEROVÁ KLÁRA 2.6



△YBC

$$\frac{y}{b} = \cos\beta \rightarrow y = 5\cdot\cos 60° = \frac{5}{2}$$

$$\frac{v}{b} = \sin\beta \rightarrow v = 5\cdot\sin 60° = \frac{5\cdot\sqrt{3}}{2}$$

△AXD

$$\frac{v}{d} = \cos(\delta - 90°) \rightarrow d = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{\cos 15°} = \frac{5\cdot\sqrt{3}}{2\cdot\cos\frac{30°}{2}} = \frac{5\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \boxed{10}$$

$$\cancel{d = v/\cos(\delta - 90°) =}$$

$$\frac{x}{d} = \sin 15° \rightarrow x = \frac{5\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sin 15°}{\cos 15°} = \frac{5\sqrt{3}}{2}\cdot \mathrm{tg}\, 15° =$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{2}\cdot \mathrm{tg}\,\frac{30°}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{tg}\, 30° =$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{5}{4}$$

$$c = a - x - y = \left(8 - \frac{5}{4} - \frac{5}{2}\right) = \boxed{\frac{17}{4}}$$

$$\frac{32 - 5 - 10}{4}$$

Délky stran (zbývajících): $c = \frac{17}{4}$, $d = 10$

ad 5.12. Zuzana Andělová

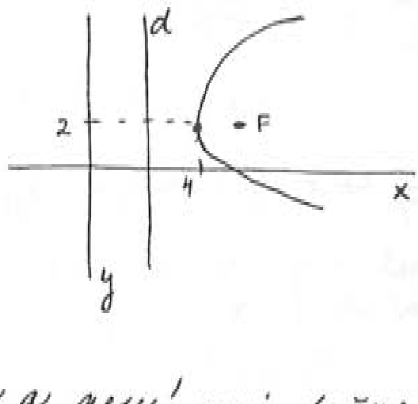
Zuzana Andělová 3.A

Určete parametr, souřadnice vrcholu, souřadnice ohniska a rovnici řídicí přímky paraboly. Parabolu načrtněte. $P: y^2 - 4x - 4y + 16 = 0$

Určete vzájemnou polohu paraboly a přímky $q: x = 1$

Řešení:

$$P: y^2 - 4x - 4y + 16 = 0$$
$$y^2 - 4y - 4x + 16 = 0$$
$$(y^2 - 2.2y + 4) = 4x - 16$$
$$(y-2)^2 = 4(x-4)$$
$$p = 2 \quad V = [4; 2]$$
$$F[5; 2] \quad d: x = 3$$



Přímka $x = 1$ neprotíná parabolu a není ani tečnou.

ad 5.13. Eva Nádvorníková

Eva Nádvorníková 1. A

Zjednodušte dané výrazy, kde a, b, c, d jsou $\neq 0$ a výsledek napište pomocí mocnin s přirozeným exponentem:

$$V_1 = \frac{7a^3b^{-2}c}{8a^2d^3} : \frac{28a^{-3}b^4d^{-3}}{64ab^6c^{-2}}, \quad V_2 = \left(\frac{4a^2b}{c^3a^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{2a^5b^{-2}}{c^4a^3}\right)^{-2}$$

Řešení:

$$V_1 = \frac{7a^3c}{8a^2d^3b^2} : \frac{28b^4c^2}{64ab^6a^3d^3} = \frac{7a^3c}{8a^2d^3b^2} \cdot \frac{\overset{18}{64}ab^6a^3d^3}{\underset{7}{28}b^4c^2} = \frac{\cancel{7}ac}{\underset{4}{\cancel{8}}a^3b^2} \cdot \frac{\overset{9}{\cancel{18}}b^2a^3d^4}{\cancel{7}c^2} =$$

$$\frac{9a^4b^2cd^4}{4a^3b^2c^2} = \frac{9ad^4}{c}$$

$$V_2 = \frac{\overset{18}{64}a^6b^3}{c^{-9}d^6} \cdot \frac{c^{-8}d^6}{64a^{10}b^{-4}} = \frac{18\cancel{a^6}b^3\cancel{d^6}c^9d^6}{\cancel{d^6}\underset{a^4}{\cancel{a^{10}}}\cancel{c^8}} = \frac{18b^3cd^6}{a^4}$$

ad 5.14. Jiří Kvapil

JIŘÍ KVAPIL, III.A

Př. 2 a) Kolik můžeme sestavit čtyřciferných čísel dělitelných 5 z množiny číslic $M = \{0, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ale jich je šest

$$V_4(6) = \cancel{\frac{6!}{2!}} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

$$\frac{360}{6} \cdot 2 = \frac{V_4(6)}{3} = 120$$

a číslo nesmí začínat 0

$$-V_3(5) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

takže $\frac{V_4(6)}{3} - V_3(5) = \frac{360}{3} - 60 = 60$

b) Kolik je možných tipů ve Sportce?

čísel – 49 … n
řadí se 6 … k } ⇒ kombinace

$$C_k(n) = \frac{n!}{k \cdot (n-k)!}$$

$$C_6(49) = \frac{\overset{48 \ldots 44}{49! \cdot 48!}}{49 \cdot 43!} = \frac{48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 44}{1} =$$

$$= 4\,566\,144$$

ad 4.15. Stanislav Sedlák

Stanislav Sedlák 4.A

Každý rok ztrácí stroj p % své hodnoty z předchozího roku. Za jak dlouho klesne jeho hodnota na polovinu?

Řeš.:

na počátku hodnota H

na konci hodnota $\frac{1}{2}H$

po jednom roce hodnota $H - \frac{p}{100}H = (1 - \frac{p}{100})H$

po dvou letech:

$$H(1-\frac{p}{100}) - \frac{p}{100}H(1-\frac{p}{100}) = H - \frac{2p}{100}H + (\frac{p}{100})^2 H = H(1 + \frac{2p}{100} + (\frac{p}{100})^2)$$

to je $H(1-\frac{p}{100})^2$ a tak to jde dále

po n letech

$$\cancel{H}(1-\frac{p}{100})^n = \frac{1}{2}\cancel{H} \Rightarrow (1-\frac{p}{100})^n = \frac{1}{2} \Rightarrow n \log(1-\frac{p}{100}) = \log\frac{1}{2} = \underbrace{\log 1}_{0} - \log 2 = -\log 2$$

$$n = \frac{-\log 2}{\log(1-\frac{p}{100})}$$

Pro $p = 12$: $1 - \frac{p}{100} = 1 - 0,12 = 0,82$

$$n = \frac{-\log 2}{\log 0,82} = 3,49\ldots \doteq \underline{\underline{3\text{ a půl roku}}}$$

ad 5.16. Blanka Trojková

Blanka Trojková 11.b

Dokažte, že platí vzorec $\frac{1+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \cdot \frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha} = \cot\frac{\alpha}{2}$. Ověřte ji pro $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

Ř:

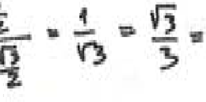
$$L = \frac{1+\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} \cdot \frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + 1 - \sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} \cdot \frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} \cdot \frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}$$

$$= \frac{\cancel{2}\cos^2\alpha(1+\cos\alpha)}{\cancel{2}\sin\alpha\cos^2\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$P = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{1+\cos\alpha}}{\sqrt{1-\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{1-\cos^2\alpha}{(1-\cos\alpha)^2}} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{1-\cos^2\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\underline{\underline{L = P}}$$

$\alpha = \frac{2\pi}{3} = \frac{360°}{3} = 120°$, $2\alpha = 240°$, $\frac{\alpha}{2} = 60°$ $\qquad \cot 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\cancel{\sin 240° = -\frac{1}{2}}$ $\cos 240° = -\frac{1}{2}$  $\cancel{L = \frac{1-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}}$

$\sin 240° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$L = \frac{1-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = P$$

ad 5.17. Marta Hanáková

Marta Hanáková 1.C

Řešte danou soustavu pomocí 3 způsoby a také graficky: $x - 4y + 8 = 0$
$x + 2y - 1 = 0$

Řešení:

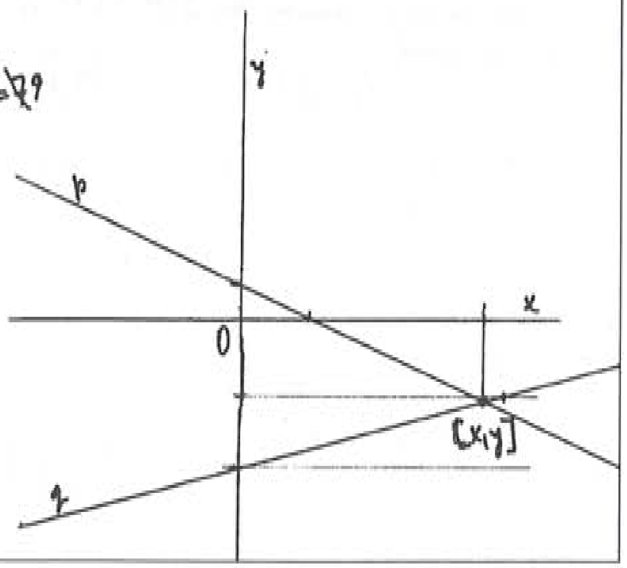
1) dosazení: $x = 4y - 8 \Rightarrow 4y - 8 + 2y - 1 = 0 \Rightarrow 6y = 9,\ y = \frac{9}{6} = \frac{3}{2},\ x = 4 \cdot \frac{3}{2} - 8 = -2$
$[\frac{3}{2}, -2]$

2) porovnání:
$x = 4y - 8$
$x = -2y + 1$ $\Rightarrow 4y - 8 = -2y + 1 \Rightarrow 6y = 9$
$\dots\ [\frac{3}{2}, -2]$

3) graficky

p: $-4y = -x - 8 \Rightarrow y = \frac{1}{4}x - 2$

q: $2y = -x + 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

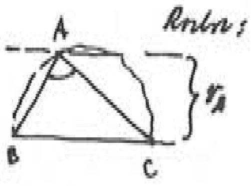


ad 5.18. Jan Hruška

Jan Hruška V.A

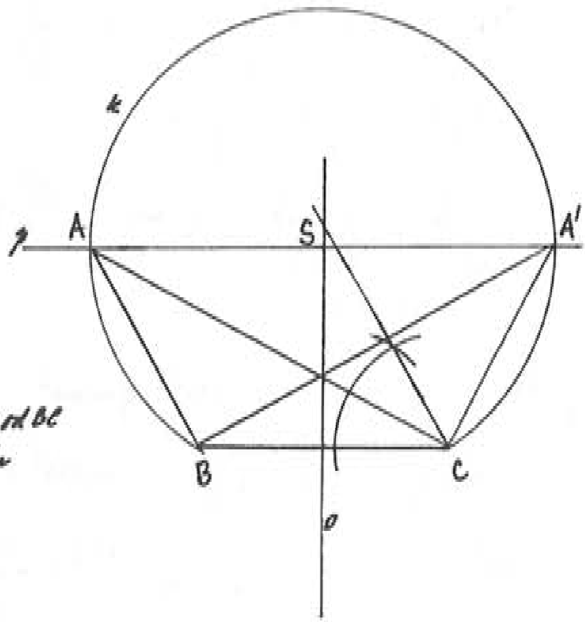
Sestrojte $\triangle ABC$ je-li dáno $a = 4$ cm, $v_a = 3$ cm, $\alpha = 60°$.

Rozbor:



Konstrukce:
1. BC; $|BC| = 4$ cm
2. p; $p \parallel BC$, $|pBC| = 3$ cm
3. o; osa BC
4. $60°$; do jedné poloroviny od BC
5. S; $S \in o \cap$ rameno úhlu
6. k; $k[S; |SB|]$
7. A; $A \in p \cap k$

A' = 2 řešení



ad 5.19. Michal Pavlík

Michal Pavlík 3.b

Rozhodněte, zda na přímce příslušné úsečce AB leží těžiště △PQR
(A[1;1;-1], B[4,-5,8], P[2;-3;3], Q[3,-2,5], R[4,-4,7])

Řešení:

$\vec{u} = B - A = (3,-6,9) \rightarrow (1,-2,3)$ $\qquad T = \frac{1}{3}(P+Q+R)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = [3,-3;5]$

$p: \left.\begin{array}{l} x = 1+t \\ y = 1-2t \\ z = -1+3t \end{array}\right\}$ kde $t \in \langle 0,1 \rangle$

$T \in p$?

$\left.\begin{array}{l} 3 = 1+t \Rightarrow t = 2 \\ -3 = 1-2t \Rightarrow t = 2 \\ 5 = -1+3t \Rightarrow t = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow T \in p$, ale neleží na úsečce AB.

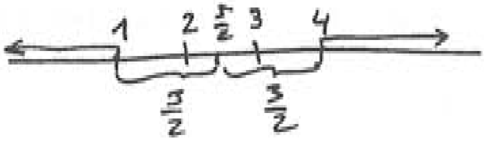
ad 5.20. Jiří Fajt

Jiří Fajt 4.c

Řešte soustavu nerovnic $|2x-3| \geqq 5$, $x^2 - 5x - 24 < 0$.

a) $|2x-3| \geqq 5 \;|:2$

$|x - \frac{3}{2}| \geqq \frac{5}{2}$



b) $x^2 - 5x - 24 < 0$

$D = 25 + 96 = 121, \quad \sqrt{D} = 11$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm 11}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 8 \\ -3 \end{array}\right.$

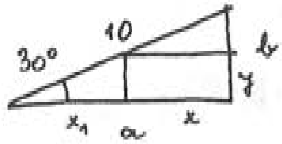
Závěr:

$\mathcal{K} = (-3,1) \cup (4,8)$

ad 5.21. František Šíp

Školní olympiáda — František Šíp, 1.A

1. Na rohovém pozemku tvaru pravoúhlého △ s přeponou 10m a s vnitřním ∡ 30° má být postavena chata s obdélníkovým půdorysem. Určete její rozměry tak aby rozloha chaty byla co největší. Určete tuto rozlohu.



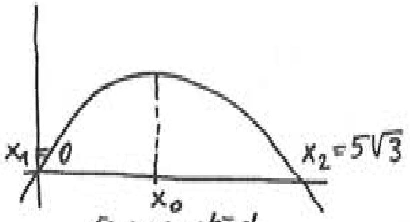
$a = 10 \cdot \cos 30° = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5 \cdot \sqrt{3} \doteq 8{,}66$

$b = 10 \cdot \sin 30° = 10 \cdot \frac{1}{2} \doteq 5$

$x_1 = a - x = 5 \cdot \sqrt{3} - x$

$\frac{y}{x_1} = \operatorname{tg} 30 = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}(5 \cdot \sqrt{3} - x)$

$\Rightarrow P = x \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}(5\sqrt{3} - x) = \frac{\sqrt{3}}{3} x (5\sqrt{3} - x)$



je uprostřed

$\Rightarrow y_0 = \frac{P}{x_0} = \frac{\sqrt{3}}{3}(5\sqrt{3} - x_0) = \frac{\sqrt{3}}{3}(5\sqrt{3} - \frac{5}{2}\sqrt{3}) \leftarrow x_0 = \frac{5}{2}\sqrt{3} \doteq 4{,}33$

$= \frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{3}} \cdot \frac{5}{2}\cancel{\sqrt{3}} = \frac{5}{2} \doteq 2{,}5\,m$

Výměra nejlepší chaty je $P = x_0 \cdot y_0 = \frac{5}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{4}\sqrt{3} \doteq 10{,}83\,m^2$

ad 5.22. Emilie Žáčková

Školní olympiáda — Emilie Žáčková, 2.b

Určete velikost $\alpha+\beta$ aniž počítáte samostatně velikost úhlů α, β, jestliže $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = \frac{5}{13}$.

Řešení:

1) Předpokládáme $\alpha, \beta \in I$.

$\sin\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$

$\sin\beta = \frac{5}{13} \Rightarrow \cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta} = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{169-25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} + \frac{4}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{13} = \frac{36}{65} + \frac{4}{13} = \frac{36+20}{65} = \underline{\underline{\frac{56}{65}}}$

2) $\alpha, \beta \in \underline{II}$ (tam jsou taky kladné)

$\cos\alpha < 0 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\cos\beta < 0 \Rightarrow \cos\beta = -\frac{12}{13}$

$\sin(\alpha+\beta) = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{5}{13} = -\frac{56}{65}$

3) $\sin(\alpha+\beta) = \frac{56}{65} \Rightarrow \alpha+\beta = \underline{\underline{59°30'}}$ 4) $\sin(\alpha+\beta) = -\frac{56}{65}$, $\underbrace{\alpha+\beta}_{\in IV} = -59°30' = \underline{\underline{300°30'}}$

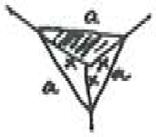
ad 5.23. Eduard Chyška

Třídní MO — Eduard Chyška 3.A

Z kvádru 4×6×8 jsou odříznuty rohy tak, že řezy procházejí středy sousedních vzájemně kolmých hran. Tím se povrch kvádru zmenšil o 9%. Vypočtěte stranu řezu a porovnejte délky.

Řešení:

$P_{kvádr} = 2\cdot 24 + 2\cdot 32 + 2\cdot 48 = 48+64+96 = 208$; 9% z 208 $= 18{,}72$



$P_\Delta = \frac{1}{2}x^2$ $\quad 24P_\Delta = 12x^2 = 12\frac{a^2}{2} = 6a^2$ o to se zmenší

$a = \sqrt{x^2+x^2} = \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$P_\Delta = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ (rovnostr.) $\Rightarrow 8P_\Delta = 2a^2\sqrt{3}$ o to se zvětší

Celkem se zmenší o $6a^2 - 2a^2\sqrt{3} = a^2(6-2\sqrt{3}) = 2a^2(3-\sqrt{3}) = 18{,}72 \Rightarrow$

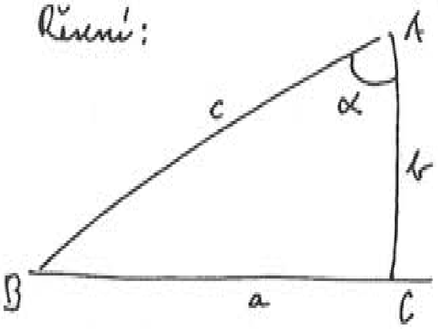
$a^2 = \frac{18{,}72}{2(3-\sqrt{3})} = \frac{9{,}36}{3-\sqrt{3}} = 5{,}4039985$, $\underline{a = 2{,}3246502}$

ad 5.24. Vlastimil Kryštof

Školní MO — Vlastimil Kryštof 4.C

Dokažte: Jsou-li a, b délky odvěsen a c délka přepony v pravoúhlém Δ, pak platí $a+b \leq c\sqrt{2}$.

Řešení:



$a = c\cdot\sin\alpha$

$b = c\cdot\cos\alpha$

$a+b = c(\underbrace{\cos\alpha+\sin\alpha}_{\leq\sqrt{2}\ ?})$

$y = \cos x + \sin x$, $x \in I$

$y' = \sin x + \cos x = 0$ extrém?

$\sin x = +\cos x$

$\operatorname{tg} x = +1$

$x = \frac{\pi}{4}$

$y(\frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \Rightarrow \cos\alpha+\sin\alpha \leq \sqrt{2}$

c.b.d.

Literatura

A. Knižní publikace, sborníky

Bradis, M. V.: Metodika vyučování matematice na střední škole. SPN, Praha 1953.

Burjan, V.: Hodnotenie vo vyučovaní matematiky, súčasné svetové trendy. Metodické centrum Prešov 1991.

Denig-Helmsová, K. – Konnertz, D.: Úspěšně obstát při písemce i ústním zkoušení. Portál, 1997.

Fischer, R. – Malle, G.: Človek a matematika. SPN, Bratislava 1992.

Gábor, O. – Kopanev, O. – Križalkovič, K.: Teória vyučovania matematiky 1. SPN, Bratislava 1989.

Gavora, P.: Úvod do pedagogického výzkumu. Paido, Brno 2000.

Hejný, M. a kol.: Teória vyučovania matematiky 2, Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava 1990.

Hejný, M.: Chyba jako prvek edukační strategie učitele. In: sborník Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky, 1. díl. Pedagogická fakulta UK Praha, 2004.

Hejný, M.: Zkušenosti a výhledy ve vyučování matematice mezi roky 1990 a 2005. In: sborník Obory ve škole: Metaanalýza empirických poznatků oborových didaktik. Pedagogická fakulta UK Praha, 2005.

Chráska, M.: Didaktické testy. Paido, Brno 1999.

Kalhous, Z. a kol.: Školní didaktika. Portál, Praha 2002.

Kulič, V.: Chyba a učení. SPN, Praha 1971.

Kyriacou, Ch.: Klíčové dovednosti učitele. Portál, Praha 1996.

Mikulčák, J.: Didaktika matematiky I. SPN, Praha 1982.

Mikulčák, J. – Hradecký, F. – Zedek, M.: Metodika vyučování matematice na školách druhého cyklu I. SPN, Praha 1964.

Muravin, K., S.: Samostojatelnyje i kontrolnyje raboty po algebre. Prosveščenije, Moskva 1971.

Novák, B.: Analýza příčin neúspěchu uchazečů o vysokoškolské studium učitelství v písemné části přijímací zkoušky z matematiky. UP Olomouc 1989.

Novák, B.: Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky 2. UP Olomouc, 2004.

Polya, G.: How to solve it (ruské vydání Kak rešať zadaču. GUPIMP RSFSR, Moskva 1961).

Polya, G.: Mathematical Discovery. John Wiley & Sons, INC., New York – London 1962, 1965.

Průcha, J.: Učitel. Současné poznatky o profesi. Portál s. r. o., Praha 2002.

Průcha, J.: Moderní pedagogika. Portál s. r. o., Praha 2005.

Slavík, J.: Hodnocení v současné škole. Východiska a nové metody pro praxi. Portál, Praha 1999.

Smida, J.: Hodnotenie a klasifikácia výsledkov vyučovania matematiky. In: sborník Problémy kontroly a hodnotenia učebných výsledkov v základných a stredných školách. SPN, Bratislava 1979.

Stoljar, A., A.: Pedagogika matematiky. Vysšaja škola, Minsk 1974.

Šedivý, J.: O modernizaci školské matematiky. SPN, Praha 1973.

Vláčilová, M.: Analýza súčasného stavu a úlohy kontroly a hodnotenia učebných výsledkov v základnách a stredných školách. In: sborník Problémy kontroly a hodnotenia učebných výsledkov v základných a stredných školách. SPN, Bratislava 1979.

B. Časopisecké články

Andrys, J. – Váňa, J.: Písemná prověrka vyučování matematice na středních školách v Severomoravském kraji. MvŠ, r. 15 (1964/65), č. 9, str. 523 – 524.

Barták, J.: Soubory úloh při vyučování matematice na gymnáziu. MFvŠ, r. 1 (1970/71), č. 3, str. 205 – 216.

Běhounek, M.: Jak mám zaokrouhlit výsledek? MFI r. 15 (2005/06), č. 9, str. 564 – 567.

Běloun, F. – Barták, J. – Šůla, V.: Písemné přijímací zkoušky na školy 2. cyklu v ČSR v roce 1977. MFvŠ, r. 8 (1977/78) č. 6, str. 412 – 422.

Běloun, F.: Více samostatné práce do vyučování matematice. MvŠ, r. 14 (1963/64), č. 1, str. 16 – 31.

Běloun, F.: Prověřování a hodnocení vědomostí žáků z matematiky. MvŠ, 17 (1966/67), č. 1 a 2, str. 27 – 36 a 80 – 89.

Beneš, J. – Valíšková, O.: Některé poznatky z přijímací zkoušky z matematiky na stavební fakultu VUT v Brně v roce 1983. MFvŠ, r. 15 (1984/85), č. 2, str. 104 – 107.

Černý, J.:Přijímací zkoušky z matematiky na technické vysoké školy v roce 1998. MFI 9 (1999/2000), č. 3, str. 142 – 148.

Franek, A.: Soubor barevně odlišných karet jako prostředek zpětné vazby při kontrole samostatné práce žáků v matematice. MFvŠ, r. 16 (1985/86), č. 3, str. 162 – 165.

Frantíková, L.: Pětiminutovka a kontrolní práce. MvŠ, 4 (1953/54), č. 3, str. 171 – 174.

Gottwald, K.: Lístková sbírka příkladů. MvŠ, r. 18 (1967/68), č. 6, str. 356 – 358.

Hanuliaková, D.: Logika žiackých chýb a pozitívny prístup k nim. MFvŠ, r. 11 (1980/81), č. 1, str. 7 – 13.

Horálek, J.: Hodnocení a klasifikace žáků v matematice v 6. až 9. ročníku ZŠ. MvŠ, r. 14 (1963/64), č. 2, str. 76 – 88.

Horáková, A. – Rakušan, K.: Poznámky k prověrkám vědomostí žáků z matematiky. MvŠ, r. 3 (1952/53), č. 6, str. 254 – 259.

Husar, P.: Přijímací zkoušky na nečisto. MFI, r. 12 (2002/03), č. 1, str. 13.

Jelínek, M. – Zelinka, R.: Opakování na začátku školního roku. MvŠ, r. 5 (1955), č. 6, str. 321 – 324.

Kabele, J.: K diagnostickým metodám ve vyučování matematice. MFvŠ, r. 9 (1978/79), č. 10, str. 783 – 786.

Kafková, M. – Tlustý, P.: Statistické aspekty testového zkoušení. MFI 13 (2003/04), č. 6, str. 332 – 335.

Kaleadisová, A.: Moje skúsenosti z uplatňovania javovej analýzy v matematike. MFvŠ, r. 15 (1984/85), č. 5, str. 384 – 386.

Kameníček, V.: Učíme i při písemném zkoušení. MvŠ, r. 16 (1965/66), č. 7, str. 419–423.

Krňan, F.: Grafické práce v matematice. MvŠ, r. 1 (1950/51), č. 2, str. 78 – 84.

Kuřina, F.: Porozumění matematice, matematické řemeslo a tvořivost. MFI, r. 12 (2002/03), č. 1, str. 1 – 16.

Kuřina, F.: Matematická gramotnost a kongres ICME 10. MFI, r. 15 (2005/06), č. 1, str. 1 – 10.

Lebeda, M.: O kontrole písemných prací z matematiky. MvŠ, r. 4 (1953/54), č. 2, str. 120 – 123.

Liška, S.: Písemné zkoušky v matematice. MvŠ, r. 12 (1961/62), č. 6, str. 333 – 338.

Lišková, H.: Zkoušení bez stresů. MFI, r. 3, (1993/94), č. 1, str. 12 – 15.

Machala, J.: Písemné prověrky v 6. až 9. ročníku ZDŠ. MvŠ r. 18 (1967/68), str. 474 – 479.

Maláč, J.: Samostatné práce žáků v matematice. MvŠ, r. 8 (1957/58), č. 8, str. 462 – 470.

Maláč, J.: Zkušenosti ze samostatné práce žáků v matematice. MvŠ, r. 9 (1959), č. 8, str. 481 – 490.

Maříková, O. – Tomanová, A.: Samostatné písemné práce z matematiky. MFvŠ, r. 10 (1979/80), č. 2, str. 119 – 120.

Müsiar, P.: Ako hodnotíme a klasifikujeme písomné práce. MFvŠ, r. 19 (1988/89), č. 8, str. 511 – 518.

Mašková, J.: Samostatná práce žáků ve vyučování matematice. MvŠ, r. 13 (1962/63), č. 2, str. 77 – 85.

Mikulčák, J.: O didaktických testech. MvŠ, r. 20 (1969/70), č. 6, str. 392 – 400.

Müllerová, J.: Poznámky k hodnocení a klasifikaci žáků v matematice na ZŠ. MFvŠ, r. 5 (1974/75), č. 9, str. 672 – 674.

Račková, M.: Hodnotenije bez známok. MFI, r. 10 (2000/2001), č. 4, str. 245 –248.

Simerský, J.: Na okraj problému samostatnosti žákovy práce v matematice. MvŠ, r. 12 (1961/62), č. 8, str. 515 – 519.

Sovíková, K.: Kontrolní práce. MFvŠ r. 11 (1980/81), č. 8, str. 587 – 589, r. 12 (1981/82), č. 3, 9, str. 167 – 169, 663 – 665, r. 13 (1982/83), č. 3, 5, 9, str. 158 – 161, 301 – 304, 524 – 527, ad.

Sovíková, K.: Vstupní prověrka pro 1. ročník středních škol. MFvŠ, r. 15 (1984/85), č. 8, str. 666 – 668.

Šedivý, J.: O matematických schopnostech a vyučovatelnosti žáků. MFvŠ, r. 6 (1977/78), č. 4, str. 245 – 248.

Šíma, Z.: Samostatná práce v matematice. MFvŠ, r. 3 (1972/73), č. 9, str. 673 – 674.

Šůla, V. – Běloun, F.: Písemné přijímací zkoušky z matematiky na střední školy v ČSR v roce 1983. MFvŠ, r. 15 (1984/85), č. 6, str. 453 – 460.

Trávníček, S.: Písemkové příklady na SŠ 1. MFI r. 3 (1993/94), č. 2.

Trávníček, S.: Matematické úlohy jako součást literárních textů. MFI, 6 (1996/97), č. 3, str. 113 – 120 a č. 4, str. 169 – 178 .

Trávníček, S.: Relační výrokové formy. MFI r. 9 (1999/2000), č. 4, str. 193 – 198.

Trávníček, S.: Písemkové příklady na SŠ 28. MFI r. 15 (2005/06), č. 10.

Urbanová, J.: Hodnocení žáků v matematice. MFvŠ, r. 10 (1979/80), č. 3, str. 187 – 191.

Volf, J.: O sjednocování klasifikačních hledisek v matematice. MFvŠ, r. 7 (1976/77), č. 3, str. 194 – 196.

Volfová, M.: Nedostatečný návyk provádění sebekontroly při řešení matematických úloh na ZDŠ. MFvŠ, r. 7 (1976/77), č. 7, str. 506 – 510.

Volfová, M.: Chyby v úlohách, kde je počítáno s čísly získanými měřením. MFI r. 10 (2000/2001), č. 9, str. 569 – 571.

Voříšek, J.: Kontrolní práce v matematice na ZDŠ. MFvŠ r. 4 (1973/74), č. 1, str. 19 – 26.

Vrána, V.: Diktáty v matematice. MvŠ, r. 11 (1960/61), č. 3, str. 137 – 142.

Wildhageová, E.: Jak zlepšit prospěch v matematice. MFvŠ, r. 6 (1977/78), č. 1, str. 32 – 35.

Zedek, M.: K problematice domácích úkolů v matematice. MvŠ, r. 11 (1960/61), č. 3, str. 137 – 142.

Židek, S.: Experimentální práce v matematice, pravidelné mnohostěny. MFI, r. 1 (1991/92), č. 4, 5, str. 145 – 149, 193 – 197.