Derivace

1. Užitím definice derivace vypočtěte derivaci funkce v daném bodě x_0.

a) $f(x) = 2x^2 - x + 5,\ x_0 = 3$ b) $f(x) = x^2 - 4x,\ x_0 = 1$

c) $f(x) = \sin x,\ x_0 = 0$ d) $f(x) = \cos x,\ x_0 = \dfrac{\pi}{6}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x},\ x_0 = 4$ f) $f(x) = \sqrt{x},\ x_0 = 1$

2. Najděte derivaci funkce v libovolném bodě definičního oboru.

a) $y = 4x^2 - x + 1$ b) $y = 2\sin x + 3\cos x$

c) $y = \sqrt{x} + x^{-2}$ d) $y = 6\sqrt[3]{x} - 5$

e) $y = 3\ln x - 9\log x$ f) $y = \mathrm{tg} x + 11\mathrm{cotg} x$

g) $y = 3^x + 2e^x$

3. Najděte derivaci funkce v libovolném bodě definičního oboru. (Nejprve upravte předpis funkce, pak teprve derivujte.)

a) $y = \dfrac{(x^2+2)^2}{4}$ b) $y = \dfrac{\sqrt{x} \cdot (\sqrt[3]{x} - 5\sqrt{x})}{x}$

c) $y = \dfrac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$ d) $y = \dfrac{\sin 2x + 1}{\sin x + \cos x}$

4. Derivujte funkce podle pravidel pro derivaci součinu a podílu.

a) $y = x \cdot \sin x$ b) $y = (x^2 + 1) \cdot \sin x$

c) $y = \sin x \cdot \cos x$ d) $y = e^x \cdot \ln x$

e) $y = \dfrac{2x - 1}{x + 3}$ f) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

g) $y = \dfrac{x^2 + 2x}{1 - x^3}$ h) $y = \dfrac{e^x \cdot \ln x}{x + 1}$

5. Vypočítejte derivace složených funkcí.

a) $y = (x^2+1)^2$

b) $y = (\sqrt{2x^3-1}+2)^8$

c) $y = \cos(2x+4)$

d) $y = \sqrt{\cos 2x}$

e) $y = \dfrac{1}{\cos 2x}$

f) $y = \sin^2 x$

g) $y = \sin x^2$

h) $y = \sqrt[3]{\cos 2x + 2x}$

i) $y = \mathrm{tg}(3x - \dfrac{\pi}{4})$

j) $y = \ln \sin x$

k) $y = \sqrt{x + \sqrt{5x}}$

l) $y = \ln(3\sin x - 8)$

m) $y = e^{\sin x}$

6. Najděte rovnice tečny t a normály n ke grafu funkce $f(x)$ v bodě x_0, jestliže:

a) $f(x) = -x^2 + 4x + 7$, $x_o = 4$

b) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$, $x_o = -1$

c) $f(x) = xe^x$, $x_o = 0$

d) $f(x) = (x-2)^{\frac{3}{4}}$, $x_o = 2$

e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$, $x_o = 2$

f) $f(x) = \dfrac{12}{x} + \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}$, $x_o = -1$

g) $f(x) = \dfrac{3x-4}{2x-5}$, $x_o = 1$

7. Najděte rovnici tečny ke grafu paraboly určené rovnicí $y = x^2 - 2x - 3$, pokud tečna

a) je rovnoběžná s přímkou $4x - y + 10 = 0$,
b) je kolmá na přímku $x + 2y = 5$,
c) svírá s přímkou $2x + y = 2$ úhel $45°$,
d) najděte všechny body, ve kterých je tečna k této funkci rovnoběžná s osou o_x.

8. Vypočtěte derivaci 4. řádu $f^{IV}(x)$, jestliže:

a) $f(x) = x^6 + 5x^4 + 2x^3 - x^3$

b) $f(x) = \dfrac{1}{2x-1}$

c) $f(x) = x \ln x$

d) $f(x) = x^3 \cdot x^{-x}$

e) $f(x) = \sqrt{x}$

f) $f(x) = \dfrac{3}{x^5}$

9. Znázorněte ve stejném souřadnicovém systému funkci $f(x)$ a její derivaci $f'(x)$.

a) $f(x) = 3x - 8$

b) $f(x) = x^2 + 1$

c) $f(x) = x^3$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

e) $f(x) = \sqrt{x+1}$

f) $f(x) = 2^x$

g) $f(x) = \ln x$

h) $f(x) = 1 + \sin x$

i) $f(x) = |x-1| + |x+1|$

10. Nechť $f(x) = x^2 - 4x - 7$. Zakreslete graf této funkce.
a) Napište rovnici tečny t ke grafu této funkce v bodě, v němž $x = -2$.
b) Na grafu funkce najděte všechny body, ve kterých je tečna t ke grafu rovnoběžná s osou o_x.
c) Na grafu funkce najděte všechny body, ve kterých má tečna t ke grafu směrnici rovnou 3.
d) Na grafu funkce najděte všechny body, ve kterých je tečna t rovnoběžná s přímkou $y = 7 - 2x$.

11. Načrtněte graf alespoň jedné funkce takové, že její derivace má všechny následující vlastnosti:

a) $f'(x) > 0 \,\text{pro}\, x < 1 \text{ a pro}\, x > 5$

b) $f'(x) < 0 \,\text{pro}\, 1 < x < 5$

c) $f'(x) = f'(x) = 0$

12. Určitý objekt se pohybuje po přímce tak, že po t minutách je jeho vzdálenost od výchozího bodu $D(t) = 10t + \dfrac{5}{x+1}$ metrů.

a) Jakou rychlostí se pohybuje objekt na konci 4. minuty?
b) Jakou vzdálenost projel objekt v průběhu 5. minuty?

13. Z jednoho místa vycházejí současně dvě auta: první přímo na sever, druhé přímo na západ. První auto se pohybuje rychlostí 30 km/h, druhé rychlostí 40 km/h. Zjistěte, jakou rychlostí se od sebe auta vzdalují.

14. Žebřík dlouhý 13 m se jedním koncem A opírá o zeď a druhým koncem B o podlahu. Žebřík začne padat tak, že bod B se vzdaluje ode zdi rychlostí 1,6 m/min. Zjistěte, jakou rychlostí se pohybuje bod A v okamžiku, kdy bod B je ode zdi vzdálen 5 m.
(Návod. Využijte vztah $x^2 + y^2 = 13^2$, dále znáte $x'(t) = 1,6\,\mathrm{m/min.}$ a na řešení úlohy potřebujete vypočítat $y'(t)$).

15. Osoba 1,80 m vysoká jde směrem k budově rychlostí 0,6 m/s budova má výšku 30 m a na jejím štítu je světlo. Jakou rychlostí se zkracuje délka stínu jdoucí osoby?
(Návod. Znázornění pohybu osoby a jejího stínu vede na podobnost dvou pravoúhlých trojúhelníků, v níž pro velikost stínu s a vzdálenost $x + s$ konce stínu od paty budovy platí vztah $30s = 1,8(x + s)$; potřebujete vypočítat $\frac{ds}{dt}$, jestliže víte, že $\frac{dx}{dt} = -0,6m/s$.)

16. Balón tvaru koule zmenšuje svůj průměr rovnoměrně rychlostí 2 cm/s. Vypočtěte, jakou rychlostí se zmenšuje objem balónu v okamžiku, kdy jeho poloměr je 1,6 m.

17. Přesvědčte se, že následující limity můžete vypočítat l'Hospitalovým pravidlem, a určete je:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x-4}{x^2-5x+6}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m-1}{x^n-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3)}{x^2-9x}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3+2x+5}{\ln x}$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^n}{e^x}$

f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$

g) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\cdot\frac{1}{x}}$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{x}$

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot \ln x$

j) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^3}{x^3-4x+3})$

k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x-1}{x}$

l) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1+\sqrt{x}}{\ln x})$

m) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{1+3^x}$

n) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{x^4-2x+3})$

o) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}(kx)}{x}$

Optimalizace

18. Který obdélník s plošným obsahem $16m^2$ má nejmenší obvod? Jaký je ten obvod?

19. Náklady výrobce na výrobu jednoho radiopřijímače jsou 5 €. Jestliže se rádia budou prodávat za cenu x €, pak se jich denně prodá $20 - x$ kusů. Jak stanovit cenu za jedno rádio, aby se dosáhl maximální denní zisk? Znázorněte graficky.

20. Obchod prodává skateboardy za 40 € a při této ceně se prodá 50 kusů za měsíc. Majitel obchodu chce zvýšit cenu a očekává, že každé € zvýšení ceny přinese snížení prodeje o 2 skateboardy za měsíc. Jestliže majitel nakupuje skateboardy za 25 €, při jaké ceně bude jeho zisk za měsíc maximální? Znázorněte graficky.

21. Na malé drůbeží farmě chová majitel 120 slepic, každá z nich snese za rok 250 vajec. Jestliže se do ohrady pro slepice umístí víc slepic, dojde k přílišnému zaplnění ohrady, což má za následek nižší nosnost slepic. Při každé slepici navíc se tak produkce vajec sníží vždy o jedno vejce na každou slepici za rok.
a) Určete maximální možnou produkci vajec a počet slepic, které zaručí tuto maximální produkci.
b) Řešte stejnou úlohu, přičemž předpokládejte snížení produkce o 2 vejce na každou slepici za rok.
c) Řešte pro předpokládané snížení produkce o 3 vejce na každou slepici za rok.

22. Pořadatel rockového koncertu může prodat na koncert 20 000 vstupenek za 10 € za jednu vstupenku. Předpokládá se, že za každé 2 € zvýšení ceny nad 10 € se prodá o 200 vstupenek méně. Jak má pořadatel stanovit cenu vstupenky, aby dosáhl maximální možný příjem? Jaký bude ten maximální příjem a kolik vstupenek se tehdy prodá?

23. Dopravní společnost pronajímá na určitou trasu autokary skupinám o nejmenším počtu 35 osob za těchto podmínek: jestliže je skupina přesně 35-členná, pak každý zaplatí 60 dolarů; pro větší skupinu se poplatek každého cestujícího snižuje tolikrát o půl dolaru, o kolik počet osob v skupině přesahuje 35. Určete příjem dopravní společnosti v závislosti na velikosti skupiny a vypočtěte, pro jakou skupinu bude příjem společnosti největší.

24. Chceme použít 450 metrů pletiva na oplocení dvou sousedních obdélníkových pozemků o stejném plošném obsahu (na straně, kde sousedí, povede jen jedno oplocení). Jak stanovit jejich rozměry, aby součet plošných obsahů pozemků byl co největší? Jaký bude ten největší součet plošných obsahů?

25. Město Bory je 10 km východně od města Akáty a město Cédry je 3 km jižně od Borů. Z A do C se má postavit spojení silnicí, a to tak, že se využije stavba dálnice z A do B, přičemž se do C odbočí v nějakém místě P na trase A $\rightarrow$ B. Náklady na dálnici jsou 4 miliony Kč na 1 km, zatímco cena na stavbu silnice kdekoli jinde je 5 milionů Kč na 1 km. Kam se má umístit bod P, aby se minimalizovaly náklady?

26. Z elektrárny na jedné straně řeky široké 1200 metrů je třeba vést kabel do továrny 2400 metrů níž po proudu řeky. Náklady na položení kabelu pod vodou jsou 25 € na jeden metr a po zemi 20 € na jeden metr. Jakou trasu zvolit pro položení kabelu, aby náklady na jeho vedení byly minimální? Jaké budou ty minimální náklady?

27. Na grafu paraboly $y^2 = 18x$ určete bod $P = [x_0; y_0]$, jehož vzdálenost od přímky $3x - 4y + 69 = 0$ je minimální. Vypočtěte tuto minimální vzdálenost.

28. Z válcovitého kmenu s kruhovým průřezem o poloměru r se má vytesat trám co největší nosnosti; nosnost trámu je určená vztahem $y = k \cdot s \cdot v^2$, kde k je materiálová konstanta, s je šířka a v je výška trámu. Jaké rozměry s a v má mít průřez trámu, aby jeho nosnost byla největší?

29. Určete obdélník největšího plošného obsahu se stranami rovnoběžnými se souřadnicovými osami, který je možné vepsat

a) do kruhu určeného kružnicí$x^2 + y^2 = r^2$;
b) do polokruhu určeného kružnicí$x^2 + y^2 = r^2 ay \geq 0$;
c) do elipsy$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

30. Z kartonu šířky 0,8 m a délky 1,5 m se má vyrobit otevřená pravoúhlá krabice tak, že v rozích kartonu se odříznou malé čtverce a okraje pak ohneme nahoru. Jak máme odřezat čtverce v rozích, aby objem vzniklé krabice byl největší? Jaký je ten největší možný objem?

31. Do zdi potřebujeme vysekat otvor pro okno tvaru obdélníku, na který je nahoru nasazen polokruh. Obvod celého okna dohromady s polokruhovou částí má být 8 m. Jaké mají být rozměry okna, aby propouštělo co nejvíc světla?

32. Jakou rychlostí se mění poloměr bubliny tvaru koule, jestliže se do ní vhání vzduch rychlostí 10 cm^3/s?

1 Výsledky

1. a) 11 **b)** -2 **c)** 1 **d)** $-\frac{1}{2}$ **e)** $-\frac{1}{16}$ **f)** $\frac{1}{2}$
2. a) $y' = 8x - 1$ **b)** $y' = 2\cos x - 3\sin x$ **c)** $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2x^{-3}$ **d)** $y' = 2\sqrt[3]{x^{-2}}$ **e)** $y' = \frac{3}{x} - \frac{9}{x \ln 10}$ **f)** $y' = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{11}{sin^2 x}$ **g)** $y' = 3^x \cdot \ln 3 + 2e^x$
3. a) $y' = x^3 + 2x$ **b)** $y' = -\frac{1}{6 \cdot \sqrt[6]{x^7}}$ **c)** $y' = -\sin x + \cos x$ **d)** $y' = -\sin x + \cos x$
4. a) $y' = \sin x + x\cos x$ **b)** $y' = 2x \cdot \sin x + (x^2+1) \cdot \cos x$ **c)** $y' = \cos 2x$ **d)** $y' = e^x \cdot \ln x + \frac{e^x}{x}$ **e)** $y' = \frac{7}{(x+3)^2}$ **f)** $y' = \frac{-2}{1-\sin 2x}$ **g)** $y' = \frac{x^4+4x^3+2x+2}{(1-x^3)^2}$ **h)** $y' = \frac{1}{(x+1)^2} \cdot (e^x \cdot x \cdot \ln x + e^x + \frac{e^x}{x})$
5. a) $y' = 4x \cdot (x^2+1)$ **b)** $y' = \frac{24x^2 \cdot (\sqrt{2x^3-1}+2)^7}{\sqrt{2x^3-1}}$ **c)** $y' = -2\sin(2x+1)$ **d)** $y' = -\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$ **e)** $y' = \frac{2 \sin 2x}{\cos^2 2x}$ **f)** $y' = \sin 2x$ **g)** $y' = 2x \cdot \cos x^2$ **h)** $y' = \frac{2-2\sin 2x}{3 \cdot \sqrt[3]{(\cos 2x + 2x)^2}}$ **i)** $y' = \frac{3}{\cos^2(3x-\frac{\pi}{4})}$ **j)** $y' = \mathrm{cotg} x$ **k)** $y' = \frac{2 \cdot \sqrt{5x}+5}{4 \cdot \sqrt{5x^2+5x \cdot \sqrt{5x}}}$ **l)** $y' = \frac{3\cos x}{3\sin x - 8}$ **m)** $y' = e^{\sin x} \cdot \cos x$
6. a) $t:\ y = -4x+23; n:\ y = \frac{x}{4} + 6$ **b)** $t:\ 2y+3=0; n:\ x=-1$ **c)** $t:\ y = x; n:\ y=-x$ **d)** derivace zde není definována **e)** $t:\ y - \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}(x-2); n:\ y = \frac{19\sqrt{2}}{2} - 4\sqrt{2}x$ **f)** $t:\ y = -3(x+1) - 8; n:\ y = \frac{x-23}{3}$ **g)** $t:\ y = -\frac{7x-10}{9}; n:\ y = \frac{27x-20}{21}$
7. a) $y = 4(x-3)$ **b)** $y+3 = 2(x-2)$ **c)** $y + \frac{143}{36} = -\frac{6x-5}{18}$ **d)** $[-1;0]$
8. a) $360x^2 + 120$ **b)** $\frac{384}{(2x-1)^5}$ **c)** $\frac{2}{x^3}$ **d)** $e^{-x}(x^3 - 12x^2 + 36x - 24)$ **e)** $\frac{-15}{16x^{\frac{7}{2}}}$ **f)** $5040x^{-9}$
9.
10. a) t: 8x+y+11=0 **b)** [2,-11] **c)** [7/2,-35/4] **d)** [1,-10]
11.
12. a) $9,8\,\mathrm{m/min.}$ **b)** $9,83\,\mathrm{m}$
13. $50\,\mathrm{km/h}$
14. $-\frac{2}{3}$
15. $-0,03829\,\mathrm{m/s}$
16. $-100 \cdot 2^{10}\,\mathrm{cm^3/s}$
17. a) -2 **b)** $\frac{m}{n}$ **c)** $\frac{1}{54}$ **d)** $+\infty$ **e)** 0 **f)** 1 **g)** $+\infty$ **h)** 4 **i)** 0 **j)** 0 **k)** $\ln 2$ **l)** $+\infty$ **m)** 0 **n)** $+\infty$ **o)** k
18. čtverec o straně 4 m
19. 12,5 €
20. 45 €
21. a) 185 slepic s produkcí 34 225 vajec za rok; **b)** 122 nebo 123 slepic se stejnou produkcí 30 012 vajec za rok; **c)** přibližně 102 slepic s produkcí 31 008

vajec za rok;
22. zisk bude 1 102 500 € při ceně 105 € za vstupenku
23. 77 nebo 78 osob s příjmem 2 886 dolarů
24. $a = \frac{225}{4}m, b = 75m, S = 8437,5m^2$
25. 4 km od města Bory
26. pod vodou 2 000 metrů a pak 800 metrů po souši s náklady 66 000 €
27. $P = [8, 12]$, vzdálenost je 63/4 metrů
28. $s = \frac{2\sqrt{3}r}{3}, v = \frac{2\sqrt{6}r}{3}$
29. **a)** $2r^2$ **b)** r^2 **c)** $2ab$
30. čtverce o straně $\frac{1}{6}$ m, objem je $\frac{49}{540}m^3$
31. $\frac{16}{4+\pi}; \frac{8}{4+\pi}$
32. $\frac{5}{2\pi r^2}$ cm/s