Elementární funkce

1. Tlak p pod vodou podle zkušeností potápěčů závisí na hloubce, ve které je potápěč lineárně podle závislosti $p = kd + 1$, kde k je nějaká konstanta. Na hladině ($d = 0$ metrů) je tlak 1 atmosféra. Tlak v hloubce 100 metrů je přibližně 10,94 atmosfér. Určete tlak v hloubce 50 metrů pod hladinou.

2. Světelný paprsek se šíří po přímce $x + y = 1$ nad osou o_x a odráží se od osy o_x. Jak je známo, pro odraz platí zákon, že úhel odrazu je rovný úhlu dopadu paprsku. Napište rovnici přímky, po které se bude šířit odražený světelný paprsek.

3. Kus kolejnice z kovu se teplem roztahuje. Při běžných teplotních podmínkách délka s kolejnice závisí na teplotě t lineárně. Experiment s kusem kolejnice měl následující výsledky měření: při teplotě 24 °C měla kolejnice délku 7 m, při teplotě 36 °C délku 7,08 m . Najděte lineární závislost mezi s a t.

4. Ukažte, že stoupání (strmost) schodiště se stejnými schody se dá vypočítat jako podíl $\frac{R}{H}$ výšky stupně (schodu) R a hloubky stupně H. Stavební normy definují schodiště jako stupňovitou cestu, která má stoupání větší než $\frac{5}{16}$ nebo 31,25 % a menší než $\frac{9}{8}$ nebo 112,5 %. (Mimo tyto hranice jde o tzv. rampy nebo naopak žebříky.)
a) Jaký je minimální, resp. maximální normou přípustný úhel sklonu schodiště?
b) V domě mají všechny schodiště stoupání 40°. Jestliže je hloubka stupně 18 cm, jaká je jeho výška?

5. Je dán trojúhelník ABC, přičemž $A = [6, 4]$, $B[4, -3]$ a $C[-2, 3]$.
a) Vypočítejte délky stran $|a|, |b|, |c|$ trojúhelníku a zjistěte, zda trojúhelník je pravoúhlý.
b) Vypočítejte souřadnice středů S_a, S_b, S_c stran a, b, c a souřadnice těžiště T trojúhelníka ABC.

6. Rovnice přímky p je daná v obecném tvaru $ax + by = c$.
a) Určete směrnici této přímky a souřadnice průsečíků přímky se souřadni-

covými osami. Určete směrnici a tyto průsečíky pro přímku $3x + 4y = 12$.
b) Napište rovnici přímky, která prochází počátkem souřadnicového systému a je kolmá na přímku p.

7. Světelný bod se pohybuje v 1. kvadrantu po přímce $4x + 5y = 20$. Ve kterém bodě Q se bude nacházet nejblíže k pozorovateli umístěnému v bodě $P = [0, 0]$? Jaká je tato nejmenší vzdálenost?

8. Trajektorií, po které se pohybuje světelný bod, je část přímky $x + 2y = 10$ v 1. kvadrantu. Ve kterých bodech trajektorie se světelný bod nachází ve vzdálenosti 5 délkových jednotek od pozorovatele v bodu $P = [0, 0]$?

9. Je dán trojúhelník ABC, kde $A = [-2, 1]$, $B = [4, -2]$, $C = [2, 2]$. a) Napište rovnice přímek, na kterých se nacházejí jeho strany a vypočítejte jejich délky.
b) Zjistěte, zda je trojúhelník rovnostranný, rovnoramenný, pravoúhlý.
c) Určete rovnice výšek a souřadnice ortocentra v_a, v_b, v_c.
d) Určete rovnice těžnic t_a, t_b, t_c a souřadnice těžiště T.
e) Vypočítejte velikost plošného obsahu $P_{\triangle ABC}$ a velikost úhlu α při vrcholu A.

10. Je dán trojúhelník ABC, kde $A = [0, 0], B = [10, 0], C - [3, -4]$. Určete souřadnice bodu D, kterým doplníme daný trojúhelník na rovnoběžník.

11. Určete souřadnice středu $S = [x_0, y_0]$ a poloměr r kružnice k a napište její rovnici (ve tvaru $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$), jestliže:
a) její poloměr je 5 a prochází bodem $[0, 0]$ a její střed leží na ose o_x;
b) k prochází počátkem souřadnicového systému a vytíná na souřadnicových osách o_x, o_y po řadě úseky $p = 5$, $q = -3$;
c) k je opsaná trojúhelníku ABC, kde $A = [2, 1], B = [1, 4], C = [6, 9]$.

12. Studenti si v létě pronajali garáž a montují v ní laminátové kajaky. Nájem za garáž je 600 € za celé léto, náklady na postavení jednoho kajaku jsou 25 €. Kajaky prodávají po 175 € za kus.
a) Kolik kajaků musí vyrobit, aby se jejich příjem z prodeje právě vyrovnal nákladům? Znázorněte graficky.

b) Kolik kajaků musí vyrobit, aby jejich zisk byl právě 1050€?

13. Členství v soukromém tenisovém klubu stojí 3 000 Kč ročně a poplatek za každou hodinu hry je 50 Kč. Ve druhém tenisovém klubu je roční poplatek 1 500 Kč a za hodinu hry se platí 60 Kč. Jestliže uvažuje tenisový hráč jenom o finanční výhodnosti, podle čeho se rozhodne při výběru jednoho z klubů? Udělejte analýzu úlohy a znázorněte graficky.

14. Tělesa, které mají rozličné rychlosti v, probíhají tutéž dráhu délky s.
a) Vyjádřete závislost času na proměnné rychlosti, který je nutný pro zvládnutí dané dráhy.
b) Jak se změní doba nutná pro zvládnutí dráhy 480 km, jestliže se rychlost tělesa zvýší ze 40 km/h na 120 km/h, resp. na 240 km/h?

15. Dráhu 1 km projde chodec za 12 minut, běžec ji uběhne za 4 minuty, cyklista za 2,5 minuty, vlak při největší rychlosti za 30 sekund. Jaké jsou příslušné rychlosti v těchto případech?

16. Plech má tvar obdélníku se stranami a, b, kde $a > b$. Y jeho vnitřku je potřeba vystřihnout otvor tvaru obdélníku s polovičním plošným obsahem, než má původního plech, a to tak, aby okraje měly ve všech místech stejnou šířku.
a) Jaká bude šířka okraje? Znázorněte graficky a uveďte podmínky pro existenci řešení úlohy.
b) Řešte úlohu pro rozměry $a = 4$ m, $b = 3$ m.

17. Vodorovný trám určitého průřezu, který je upevněn na jednom konci, unese při délce $x = 4$ metry na volném konci $m = 200$ kg (nosnost je nepřímo úměrná délce trámu). Sestavte funkci určující nosnost trámu v závislosti na jeho délce a určete, jak maximálně dlouhý by mohl být trám, aby unesl 25; 50; 100; 250; 400; 500 kg? Výpočty zapište do přehledné tabulky tabulky.

18. Do ozubeného kola s 36 zuby zapadá druhé ozubené kolo, které má x zubů. Kolikrát se otočí druhé kolo, jestliže se první kolo otočí desetkrát? (Řešte pro $x = 20$, resp. $x = 24$ zubů.) Určete závislost počtu otáček y druhého kola na počtu jeho zubů. Znázorněte graficky.

19. Předpokládejme, že v celonárodním imunizačním programu očkování obyvatelstva proti chřipce se zjistilo, že náklady na očkování x procent obyvatelstva $N(x) = \frac{150x}{200-x}$ miliónů €.
a) Jaké byly náklady na očkování prvních 50% obyvatelstva, resp. zbývajících 50%?
b) Jaká část obyvatelstva byla očkována, jestliže se na očkování vynaložilo 37,5 miliónů €?
c) Načrtněte graf této funkce a určete, jaká část grafu odpovídá praktické situaci.

20. Teplota vzduchu v dole roste s hloubkou tak, že na každých 100 m hloubky se zvýší o 3°C. Jaká teplota bude v hloubce:
a) 1 200 m, jestli na povrchu je 16°C;
b) 600 m, jestli na povrchu je -5°C;
c) x metrů při povrchové teplotě t_0 °C?

21. Znázorněte graficky rovnoměrný pohyb chodce, který byl od výchozího bodu vzdálen po 4 hodinách 8 km a po 6 hodinách 20 km. Sestavte funkcionální model pro tento pohyb.

22. Určete definiční obor D_f funkce $f(x)$:

a) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2-1}$ b) $f(x) = 2\sqrt{x+1}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$ d) $f(x) = \sqrt{x^3 - x}$

e) $f(x) = \sqrt{(x^2-1)(x^2-9)}$ f) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

g) $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$ h) $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$

i) $f(x) = \ln \dfrac{x+1}{2-x}$ j) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$

23. Určete definiční obor D_f funkce $f(x)$:

a) $f(x) = \ln(\ln x)$

b) $f(x) = \ln \sin x$

c) $f(x) = \sqrt{x} + 2\sqrt[4]{1-x}$

d) $f(x) = \sqrt{4 - \sqrt{x}}$

e) $f(x) = \dfrac{\ln(2-x)}{\ln(3+x)}$

f) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+3x}{1-3x}}$

g) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x+3}}{x-2}$

h) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x - \cos x}$

24. Zakreslete graf funkce $f(x) = x^2$ a pomocí tohoto grafu znázorněte grafy funkcí:

a) $f(x) = x^2 + 1$

b) $f(x) = x^2 - 4$

c) $f(x) = 9 - x^2$

d) $f(x) = (x-3)^2$

e) $f(x) = (x+1)^2$

f) $f(x) = 5 - (x+1)^2$

g) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

25. Zakreslete graf funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ a pomocí tohoto grafu znázorněte grafy funkcí:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 1$

b) $f(x) = -\dfrac{1}{x}$

c) $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

e) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$

f) $f(x) = \dfrac{x+4}{x-2}$

g) $f(x) = \dfrac{3x+1}{2-5x}$

26. Zakreslete graf funkce $f(x) = |x|$ a pomocí tohoto grafu znázorněte grafy funkcí:

a) $f(x) = 2 + |x|$

b) $f(x) = |x| - 1$

c) $f(x) = 2|x|$

d) $f(x) = |2x+3|$

e) $f(x) = |1-x|$

f) $f(x) = 1 + |1-x|$

27. Pomocí vhodných funkcí načrtněte grafy následující funkcí: (Využijte znalosti transformací funkcí a jděte krok po kroku)

a) $f(x) = |2^{|x+1|} - 4|$ b) $f(x) = |2\cos(-x)| - 1$
c) $f(x) = |ln(-x)|$ d) $f(x) = |\cos(2x)|$
e) $f(x) = e^{-x}$ f) $f(x) = ||||x| - 1| - 1| - 1| - 1$

28. Funkce $f(x)$ je definovaná tabulkou takto:

x	-1	0	1	2
f(x)	2	1	0	1

Vytvořte složené funkce $f(f(x))$, $f(f(f(x)))$ a zapište je tabulkou.

29. Je dána funkce $h(x) = 1 + \frac{5}{x}$. Napište funkční předpisy složených funkcí v co nejjednodušším tvaru:

a) $h(5x)$ b) $h(-x)$ c) $h(1-x)$ d) $h(1/x)$ e) $h(x^2)$

30. Jsou dány funkce $f(x)$, $g(x)$. Vytvořte složené funkce $f(g(x))$, $g(f(x))$, $f(f(x))$, $g(g(x))$ a určete definiční obory těchto složených funkcí:

a) $f(x) = \sqrt{x-1}, \quad g(x) = 3 - x$
b) $f(x) = \ln x, \quad g(x) = x^2 - 4$
c) $f(x) = x(x-4), \quad g(x) = 1/x^2$

31. Složená funkce, definiční obor. Jsou dány funkce $f(x), g(x)$. Vytvořte složené funkce $f(g(x)), g(f(x)), f(f(x)), g(g(x))$; určete definiční obory těchto složených funkcí:

a) $f(x) = x + 5, \quad g(x) = x^2 - 3$
b) $f(x) = \sqrt{x-1}, \quad g(x) = 3 - x$
c) $f(x) = 1 - x^2, \quad g(x) = \sqrt{x}$
d) $f(x) = \ln x, \quad q(x) = x^2 - 4$
e) $f(x) = 1 - \ln x, \quad g(x) = \ln(1-x)$

32. Inverzní funkce. Zjistěte, zda funkce $f(x)$ je prostá na svém definičním oboru; pokud ano, určete k ní inverzní funkci $f^{-1}(x)$, najděte její definiční obor $D_q f^{-1}$ a ověřte, zda složené funkce $f(f^{-1}(x)), f^{-1}(f(x))$ jsou identická přiřazení (případně také načrtněte grafy dvojice funkcí $f(x), f^{-1}(x)$ v jednom souřadnicovém systému); $f(x)$ je:

a) $2x+1$ b) $1+\dfrac{1}{x}$ c) $\dfrac{4x}{x-4}$

d) $x(x-4)$ e) $\sqrt{x^2-1}$ f) $\dfrac{x-1}{x+1}$

33. Inverzní funkce. Zjistěte, zda funkce $f(x)$ je prostá na svém dGefiničním oboru; pokud ano, určete k ní inverzní funkci $f^{-1}(x)$, najděte její definiční obor $D_{f^{-1}}$ a ověřte, zda složené funkce $f(f^{-1}(x)), f^{-1}(f(x))$ jsou identická přiřazení (případně také načrtněte grafy dvojice funkcí $f(x), f^{-1}(x)$ v jednom souřadnicovém systému); $f(x)$ je:

a) $2-3x$ b) $\dfrac{1+x}{x-2}$ c) $|1-2x|$

d) $1+\sqrt{x-4}$ e) $\dfrac{1}{4x^2-9}$ f) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

34. Inverzní funkce. Váš automobil má spotřebu 6,4 litrů na 100 km.
a) Jaká je spotřeba na 250 km? Na x km?
b) Kolik km ujede auto na 1 litr, resp. na 20 litrů?
c) Kolik km ujede na x litrů?

35. Knihkupectví získalo určitou knihu od vydavatele jako dar za 3 dolary za kus a prodává ji za cenu 15 dolarů za kus. Při této ceně se prodá 200 kusů za měsíc. Aby se podpořil prodej, knihkupectví chce snížit cenu a odhaduje, že za každý 1 dolar snížení ceny z 15 dolarů se prodá měsíčně o 20 knih víc. Vyjádřete měsíční zisk knihkupectví z prodeje knihy jako funkci ceny, za kterou se prodává, znázorněte funkci zisku graficky a odhadněte, při jaké ceně je zisk z prodeje maximální.

36. Uzavřená krabice se čtvercovým dnem má mít objem $250/\mathrm{m}^2$. Materiál na horní a spodní část krabice stojí 2 €/m^2, na boční stěny 1 € /m^2. Vyjádřete náklady na konstrukci krabice jako funkci délky její podstavné hrany.

37. Chodba šířky a metrů se v jednom místě láme do pravého úhlu. Pomocí vhodné funkce (vhodného argumentu) zjistěte, jaký nejdelší žebřík lze tímto místem ve vodorovné poloze pronést?

38. Tlak pod vodou. Tlak p pod vodou podle zkušeností potápěčů závisí od hloubky v metrech, ve které je potápěč, lineárně podle závislosti $p = kd + 1$, kde k je nějaká konstanta. Na hladině ($d = 0$ metrů) je tlak 1 atmosféra. Tlak v hloubce 100 metrů je přibližně 10,94 atmosfér. Určete tlak v hloubce 50 metrů pod hladinou.

39. Lineární závislost. Rovnice přímky ve směrnicovém tvaru je $y = kx + q$.
a) Popište (slovně, geometricky), jaké útvary jsou určeny rovnicí $y = kx + q$, jestliže je koeficient k pevný a q je libovolné reálné číslo. (Graficky znázorněte například pro $y = 2x + q$.)
b) Popište (slovně, geometricky), jaké útvary jsou určeny rovnicí $y = kx + q$, jestliže je koeficient q pevný a k je libovolné reálné číslo. (Graficky znázorněte například pro $y = kx - 3$.)

40. Vzdálenost bodů v rovině. Je daný trojúhelník ABC, přičemž $A[6; 4]$, $B[4; -3]$, $C[-2; 3]$.
a) Vypočítejte délky $d(a), d(b), d(c)$ stran a, b, c trojúhelníka a zjistěte, zda trojúhelník je pravoúhlý.
b) Zjistěte, zda trojúhelník ABC je rovnoramenný, rovnostranný.
c) Vypočítejte souřadnice středů S_a, S_b, S_c stran a, b, c a souřadnice těžiště T trojúhelníka ABC. (Pro souřadnice x_T, y_T těžiště T trojúhelníka s vrcholy $A[x_1; y_1], B[x_2; y_2], C[x_3; y_3]$ platí vztahy $x_T = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $y_T = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$

41. Vzdálenost bodů v rovině. Světelný bod se pohybuje v 1. kvadrantu po přímce $4x + 5y = 20$. Ve kterém bodu Q se bude nacházet nejblíže k pozorovateli umístěnému v bodě $[0; 0]$? Jaká je ta nejmenší vzdálenost?

42. Úloha o rovnoběžníku. Daný je trojúhelník ABC. Určete souřadnice bodu D, kterým doplníme daný trojúhelník na rovnoběžník. Řešte pro ABC, kde:
a) $A[0; 0], B[5; 0], C[0; 4]$;
b) $A[0; 0], B[10; 0], C[3; -4]$;
c) $A[1; 1], B[5; 3], C[3; 5]$.

43. Analýza zlomového bodu. Výrobce prodává svůj výrobek za cenu 110 dolarů za kus. Celkové náklady výrobce na výrobu tohoto výrobku sestávají

z pevných nákladů 7 500 dolarů a výrobních nákladů 60 dolarů na 1 kus výrobku.
a) Zjistěte, jak závisí příjem $R(x)$ a náklady $C(x)$ výrobce na počtu vyráběných výrobků x a znázorněte příjem a náklady graficky.
b) Kolik výrobků musí výrobce prodat, aby se jeho příjem vyrovnal právě nákladům? Interpretujte.
c) Jaký je zisk anebo ztráta výrobce při prodeji 100 kusů výrobku? (Sestavte funkci zisku $P(x)$ v závislosti na počtu vyráběných výrobků x.)
d) Kolik výrobků musí výrobce prodat, aby jeho zisk byl právě 1 250 dolarů?

44. Vzdálenost bodů v rovině. Bod P je umístěný na ose o_x ve vzdálenosti 52 cm od počátku souřadnicového systému, bod Q se nachází na ose o_y v téže vzdálenosti 52 cm od začátku souřadnicového systému $[0; 0]$. Bod P se bude pohybovat rychlostí 4 cm/s směrem k začátku a bod Q rychlostí 8 cm/s také směrem k začátku.
a) Vypočítejte vzdálenosti bodů P, Q v čase $t = 0$, po uplynutí 1 sekundy, resp. 13 sekund a znázorněte graficky.
b) Kdy při tomto pohybu bude vzdálenost bodů P, Q rovna přesně 26 cm? Jaká je tehdy poloha bodů P, Q?
c) Do jaké nejmenší vzdálenosti se dostanou body P, Q a ve kterém čase to nastane?

45. Funkcionální model. Tělesa, které mají rozličné rychlosti c, probíhají tutéž dráhu délky s.
a) Vyjádřete závislost času, který je nutný na projetí dané dráhy, na proměnné rychlosti.
b) Jak se změní doba nutná na projetí dráhy 480 km, resp. s km, jestliže se rychlost tělesa zvýší ze 40 km/hod. na 120 km/hod., resp. na 240 km/hod.?

46. Funkcionální model. Dráhu 1 km projde chodec za 12 minut, běžec ji proběhne za 4 minuty, cyklista za 2,2 minuty, rychlovlak při největší rychlosti za 30 sekund.
a) Jaké jsou příslušné rychlosti v těchto případech?
b) Jak závisí rychlost c na čase t, který je nutný na překonání této dráhy?

47. Funkcionální model - lineární závislost. Znázorněte graficky rovnoměrný pohyb chodce, který byl od výchozího bodu vzdálen po 4 hodinách 8 km a pak po 6 hodinách 20 km. Sestavte funkcionální model pro tento pohyb.

48. Funkcionální model - lineární závislost. Vodní nádrž nějakého města se od začátku měsíce listopadu rovnoměrně vyprazdňuje. 11. listopadu je v ní 200 miliónů litrů vody, 20. listopadu obsahuje už jenom 164 miliónů litrů vody.
a) Vyjádřete objem nádrže v miliónech litrů jako funkci času. Znázorněte graficky.
b) Vypočítejte, kolik vody bylo v nádrži 7. listopadu, resp. 17. listopadu.

49. Funkcionální model - náklady na konstrukci. Z elektrárny na jednom břehu řeky 900 metrů široké je třeba vést elektrický kabel do továrny na druhém břehu řeky, 3000 metrů níž po proudu řeky. Náklady na uložení kabelu pod vodou jsou 10 dolarů za jeden metr, po zemi 8 dolarů za jeden metr. Znázorněte graficky, vhodným způsobem zaveďte souřadnicový systém a označení proměnných; vyjádřete náklady na uložení kabelu z elektrárny do továrny jako funkci vhodné proměnné.

50. Funkcionální model. Nosný most přes řeku o šířce 24 metrů s břehy v stejné výšce má konstrukci tvaru oblouku paraboly. Vrchol oblouku mostu se nachází ve výšce 6 metrů nad hladinou řeky.
a) Zaveďte vhodným způsobem souřadnicový systém a určete rovnici oblouku mostní konstrukce.
b) Svislé nosné traverzy v oblouku konstrukce jsou rozmístěny vždy po 3 metrech. Vypočítejte jejich délky.

51. Funkcionální model - úloha s další podmínkou. Pletivem 8 metrů dlouhým máme ohradit pozemek tvaru obdélníku, kterého jednu stranu tvoří stěna (tam se pletivo už nepoužije).
a) Sestavte funkci určující plošný obsah pozemku v závislosti na délce jedné jeho strany.
b) Jaké rozměry má mít pozemek, aby jeho plošný obsah byl největší?

52. Funkcionální model - celočíselná proměnná. Pěstitel citrusových plodů chce získat co největší sklizeň; odhaduje, že pokud zasadí:
a) na určitém pozemku 60 grapefruitů, průměrná sklizeň z jednoho stromu bude 400 plodů, přičemž za každý další strom vysazený na tom samém pozemku se průměrná sklizeň sníží o 4 plody u každého stromu;
b) na jiném pozemku 60 pomerančovníků, průměrná sklizeň z jednoho stromu bude 475 plodů, ale teď za každý další strom vysazený na tom samém pozemku se průměrná sklizeň sníží o 5 plodů u každého stromu;
c) na jiném pozemku 75 citrónovníků, průměrná sklizeň z jednoho stromu bude 500 plodů, přičemž teď za každý další strom vysazený na tom samém pozemku se průměrná sklizeň sníží o 20 plodů u každého stromu.
Najděte funkci, která vyjadřuje pro každou z možností a), b), c) velikost sklizně v závislosti na počtu stromů vysazených nad počet původně vysazených a tuto funkci znázorněte graficky. Kolik dalších stromů by měl zasadit pěstitel, aby jeho sklizeň byla maximální?

1 Výsledky

1. 5,97
2. $y = x - 1$
3. $s = 0{,}015t + 6{,}84$
4. a) minimální úhel je $\alpha \doteq 17°35'$ a maximální úhel je $\alpha \doteq 48°37'$ **b)** $\mathrm{R} \doteq 15{,}1\,\mathrm{cm}$
5. a) $|a| = 6\sqrt{2}, |b| = \sqrt{65}, |c| = \sqrt{53}$, není pravoúhlý; **b)** $S_a = [1,0], S_b = [2, \frac{7}{2}], S_c = [5, \frac{1}{2}], T = [\frac{8}{3}, \frac{4}{3}]$
6. a) $k = \frac{-a}{b}, (b \neq 0)$, průsečíky s osami$[\frac{c}{a}, 0], [0, \frac{c}{b}], (a, b \neq 0); [4,0], [0,3]$ **b)** $y = \frac{b}{a}, (a \neq 0)$
7. $Q = [\frac{80}{41}; \frac{100}{41}], |PQ| = \frac{20\sqrt{41}}{41}$
8. v bodech $[0,5], [4,3]$
9. a) $a\colon 2x + y = 6, b\colon x - 4y = -6, c\colon x + 2y = 0, |a| = 2\sqrt{5}, |b| = \sqrt{17}, |c| = 3\sqrt{5}$ **b)** nemá žádnou z uvedených vlastností **c)** $v_a\colon 2y - x = 4, v_b\colon 4x + y = 14, v_c\colon y - 2x = -2, V = [\frac{8}{3}, \frac{10}{3}]$ **d)** $t_a\colon x + 5y = 3, t_b\colon 7x + 8y = 12, t_c\colon x = 2, T = [\frac{4}{3}, \frac{1}{3}]$ **e)** $P = 9, \alpha \doteq 40°$
10. $D_1 = [7,4]$, $D_2 = [13,-4]$, $D_3 = [-7,-4]$
11. a) $(x \pm 5)^2 + y^2 = 25$ **b)** $(x - 2,5)^2 + (y - 1,5)^2 = 8,25$ **c)** $(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 25$
12. a) 4 kajaky **b)** 11 kajaků
13. Pokud bude hráč hrát méně než 150 hodin ročně, vybere si druhý klub. V opačném případě první.
14. a) $t = \frac{s}{v}$ **b)** sníží se o 8 h, resp. o 10 h
15. chodec 5 km/h, běžec 15 km/h, cyklista 24 km/h, vlak 120 km/h
16. a) šířka okraje $x = \frac{1}{4}(a + b \pm \sqrt{a^2 + b^2})$, přičemž $x < \frac{b}{2} \wedge x < \frac{a}{2}$ **b)** $x = 0,5$ m
17. $m - \frac{800}{x}$,

m	25	50	100	250	400	500
x	32	16	8	3,2	2	1,6

18. $y = \frac{360}{x}$, pro $x = 20$ je počet otáček $y = 18$, resp. pro $x = 24$ je $y = 15$
19. a) 50 miliónů, resp. 100 miliónů **b)** 40%
20. a) 52°C **b)** 13°C **c)** $t(x) = 0,03x + t_0$
21. $y = 6x - 16$
22. a) $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$ **b)** $(-1, \infty\rangle$ **c)** $\mathbb{R}$ **d)** $< -1, 0 > \cup < 1, \infty)$ **e)** $(-\infty, -3 > \cup < -1, 1 > \cup < 3, \infty)$ **f)** $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ **g)** $(-\infty, 2) \cup (3, \infty)$ **h)** $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ **i)** $(-1, 2)$ **j)** $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$

23. a) $(1, \infty)$ **b)** $(2k\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$ **c)** $< 0, 1 >$ **d)** $< 0, 2 >$ **e)** $(-3, 2) \backslash \{-2\}$ **f)** $\langle -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ **g)** $\mathbb{R} \backslash \{2\}$ **h)** $\mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{4} + 2k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$
24.
25.
26.
27.
28.

x	-1	0	1	2
f(f(x))	1	0	1	0
f(f(f(x)))	0	1	0	1

29. a) $h(5x) = 1 + \frac{1}{x}$ **b)** $h(-x) = 1 - \frac{5}{x}$ **c)** $h(1-x) = \frac{6-x}{1-x}$ **d)** $h(1/x) = 1 + 5x$ **e)** $h(x^2) = 1 + \frac{5}{x^2}$
30. a) $f(g(x)) = \sqrt{2-x}, (-\infty, 2\rangle; g(f(x)) = 3 - \sqrt{x-1}, < 1, \infty), f(f(x)) = \sqrt{\sqrt{x-1} - 1}, < 2, \infty), g(g(x)) = x, \mathbb{R}$ **b)** $f(g(x)) = ln(x^2-4), (-\infty, -2) \cup (2, \infty); g(f(x)) = \ln^2 x - 4, (0, \infty); f(f(x)) = \ln \ln x, (1, \infty); g(g(x)) = x^4 - 8x^2 + 12, \mathbb{R}$ **c)** $f(g(x)) = \frac{1-4x^2}{x^2}, \mathbb{R} \backslash \{0\}; g(f(x)) = \frac{1}{x^2(x-4)^2}, \mathbb{R} \backslash \{0; 4\}; f(f(x)) = x(x-4)(x^2-4x-4), \mathbb{R}; g(g(x)) = x^4, \mathbb{R}$
31. a) $f(g(x))x^2+2, \mathbb{R}; g(f(x)) = (x+5)^2 - 3, \mathbb{R}; f(f(x)) = x+10, \mathbb{R}; g(g(x)) = (x^2-3)^2 - 3, \mathbb{R};$ **b)** $f(g(x)) = \sqrt{2-x}, (-\infty, 2\rangle; g(f(x)) = 3 - \sqrt{x-1}, \langle 1, \infty); f(f(x)) = \sqrt{\sqrt{x-1} - 1}, \langle 2, \infty); g(g(x)) = x, \mathbb{R};$ **c)** $f(g(x)) = 1 - x, \mathbb{R}; g(f(x)) = \sqrt{1-x^2}, \langle -1, 1\rangle; f(f(x)) = 2x^2 - x^4, \mathbb{R}; g(g(x)) = \sqrt[4]{x}, \langle 0, \infty)$ **d)** $f(g(x)) = \ln(x^2-4), (-\infty, -2) \cup (2, \infty); g(f(x)) = \ln^2 x - 4, (0, \infty); f(f(x)) = \ln(\ln x), (1, \infty); g(g(x)) = x^4 - 8x^2 + 12, \mathbb{R};$ **e)** $f(g(x)) = 1 - \ln(\ln(1-x)), (-\infty, 0); g(f(x)) = \ln(\ln x), (1, \infty); f(f(x)) = 1 - \ln(1 - \ln x), (0, e);, g(g(x)) = \ln(1 - \ln(1-x)), (1-e, 1)$
32. a) $f^{-1}(x) = (x-1)/2, D_f^{-1} = \mathbb{R};$ **b)** $f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}, D_f^{-1} = \mathbb{R} \backslash \{1\};$ **c)** $f^{-1}(x) = \frac{4x}{x-4}, D_f^{-1} = \mathbb{R} \backslash \{4\};$ **d)** není prostá **e)** není prostá **f)** $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}, D_f^{-1} = \mathbb{R} \backslash \{1\};$
33. a) $f^{-1}(x) = (2-x)/3, D_f^{-1} = \mathbb{R};$ **b)** $f^{-1}(x) = \frac{1+2x}{x-1}, D_f^{-1} = \mathbb{R} \backslash \{1\};$ **c)** není prostá **d)** $f^{-1}(x) = 4 + (x-1)^2, D_f^{-1} = \langle 1, \infty);$ **e)** není prostá **f)** $f^{-1}(x) = (\frac{x+1}{x-1})^2, D_f^{-1} = (-\infty, -1) \cup (1, \infty);$
34. a) $16\,\mathrm{l}, 0,064x\,\mathrm{l}$ **b)** 15,625 km, 312,5 km **c)** $15,625x$ km
35. $Z(x) = 20(25-x)(x-3)$, maximální zisk při ceně 14 dolarů
36. $C(x) = 4x^2 + 1000/x$ €
37. $d(a) = \frac{2a}{\cos\alpha}$, nejdelší při $\alpha = \frac{\pi}{4}, d = 2\sqrt{2} \cdot a$
38. $p = 0,0994d; p = 5,97\,\mathrm{atm}$
39.

40. a) $d(a) = 6\sqrt{2}$, $d(b) = \sqrt{65}$, $d(c) = \sqrt{53}$, není pravoúhlý **b)** není rovnostranný ani rovnoramenný **c)** $S_a[1,0]$, $S_b[2,7/2]$, $S_c[5,1/2]$, $T[8/3,4/3]$
41. $[\frac{80}{41}; \frac{100}{41}], v = \frac{20\sqrt{41}}{41}$
42. a) $D_1[-5,4]; D_2[5,-4]; D_3[5,4]$ **b)** $D_1[7,4]; D_2[13,-4]; D_3[-7,-4]$ **c)** $D_1[7,7]; D_2[3,-1]; D_3[-1,3]$
43. a) $R(x) = 110x, C(x) = 7500 + 60x$; **b)** 150 výrobků; **c)** $P(x) = 50x - 7500$; $P(100) = -2500$; **d)** 175
44. a) v čase $t = 0$ vzdálenost $d(PQ) = 52\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$; v $t = 1$ $d(PQ) = 4\sqrt{265}\,\mathrm{cm}$; v čase $t = 13$ $d(PQ) = 52\,\mathrm{cm}$; **b)** $t_1 = 6,5$; $t_2 = 9,1$; **c)** $23,255\,\mathrm{cm}$ v čase$7,8\,\mathrm{s}$
45. a) $t = \frac{s}{c}$ **b)** sníží se třikrát, resp. šestkrát
46. a) 5 km/hod., 15 km/hod., 27,3 km/hod., 120 km/hod. **b)** $v = \frac{s}{t}$
47. $y = 6x - 16$
48. a) $y = 244 - 4x$ **b)** $216 \cdot 10^6\,\mathrm{l}; 176 \cdot 10^6\,\mathrm{l}$
49. $f(x) = 10\sqrt{900^2 + x^2} + 8(3000 - x)$
50. a) $y = \frac{(12-x)(x+12)}{24}$, vrchol oblouku v bodě $[0,6]$ **b)** $2,625; 4,5; 5,625; 6\,\mathrm{m}$
51. a) $2x + y = 8$, tedy $P(x) = x()8 - 2x$; **b)** $x = 2\,\mathrm{m}$, $y = 4\,\mathrm{m}$
52. a) $P(x) = (60 + x)(400 - 4x)$ grafem je parabola; $x = 20$ **b)** $P(x) = (60 + x)(475 - 5x)$ grafem je parabola; $x = 17$ nebo $x = 18$ **c)** $P(x) = (75 + x)(500 - 20x)$ grafem je parabola; $x = -25$ (musí 25 stromů odstranit)