

Limity

1. Vypočtěte následující jednostranné limity:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x^2-4}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3-2}{x^3-3x^2+2x}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4}}$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\ln x}$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x}$$

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{\sqrt{x}}$$

2. Vypočtěte následující limity:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4-16}{x^2-4}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x+2}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-2x-3}{2x^2-2x-4}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+2x-15}{x^2-8x+15}$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow 6} \frac{5x+6-x^2}{7x-6-x^2}$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^4+x^2-12}{x^4-2x^2-3}$$

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x-2}$$

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2+6x-9}{x^3-1}$$

$$\text{j) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-1}$$

3. Vypočtěte následující limity:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 3x^2 - 4}{x^3 - 4x}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - x^2}{2x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 2x^2}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} \right)$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 10x + 25}{x^3 - 3x^2 - 9x - 5}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 + x + 2}{x^2 + 3x + 2}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 2x^2}{x^6 + 3x^4 - 2x^2}$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{2+x} - \frac{12}{8+x^3} \right)$$

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right)$$

4. Vypočítejte:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \operatorname{tg} x}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}(x-1)}{\operatorname{cotg}(x-1)}$$

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{1 - \cos 2x}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos^2 x - 2 \cos x - 3}{\cos^2 x - 4 \cos x - 5}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x}$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cdot \cos x}{1 + \cos 2x}$$

5. Vypočítejte:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{9 - x}}{3x}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x + 3}}{\sqrt{x} - 1}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x + 1} - 2}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 2}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 - \sqrt{6 + x}}{x + 2}$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 - \sqrt{x + 3}}{\sqrt{x} - 1}$$

6. Vypočítejte:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg}^2 x}{1 - \sqrt{\cos 2x}}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{3} - \sqrt{2 + \cos x}}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg} x}{\sqrt{1 - \sin x} - \sqrt{1 + \sin x}}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x}}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sqrt{\cos x + 2}}{\sin^2 2x}$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x - \cos 2x}{\sqrt{2 \sin x} - 1}$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x - 1}$$

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x}{1 - \sin x}$$

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{arctg} x}{\pi - 4 \text{arctg} x}$$

7. Vypočítejte:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{4x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + x}{10x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1 + \sin 2x}{x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin 2x}{x}$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 3x}{x}$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x + \sin 8x}{4x}$

j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1} - 1}$

k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

8. Vypočítejte:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - 4}{1 - 5x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 7x - 2}{6x^3 - 4x + 3}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 - 2x)^2(x - 3)}{x^2 - 7x + 10}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x+3} + 4}{2^{x-1} + 1}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+2} + 3\sqrt{x^2-6}}{2x+1}$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 1}$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x + 18}{2 \log x - 17}$

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{x+1}$

j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 5x})$

k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{4x^2 + 3x})$

l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+2} - \sqrt{x})$

9. Vypočítejte:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{1+n} \right)^{5n}$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{2+n} \right)^{3n}$

e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{2+n} \right)^{n+1}$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+2}{1+n} \right)^n$

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{3n+2}$

f) $\lim_{n \rightarrow 0} (1+n)^{\frac{2}{n}}$

Spojitosť funkce

10. Určete body nespojitosti funkce a klasifikujte je.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f_1 = \frac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{b) } f_2 = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 2x} \\ \text{c) } f_3 = \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^3 - 2x^2 - 3x} & \text{d) } f_5 = e^{\frac{1}{x}} \\ \text{e) } f_4 = 2^x + 2^{-x} & \text{f) } f_6 = \frac{1}{e^{\frac{1}{x}} + 1} \\ \text{g) } f_7 = \begin{cases} \frac{x}{|x|^{-x}}, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases} & \\ \text{h) } f_8 = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1}, & x < -1 \\ x^2 - 3, & x \geq -1 \end{cases} & \text{i) } f_9 = \operatorname{sgn}(\sin x) \\ \text{j) } f_{10} = \operatorname{sgn}(x^2 - 4) & \text{k) } f_{11} = \frac{2}{\ln x - 1} \end{array}$$

11. Najdte takové hodnoty konstanty C , pro které je daná funkce spojitá na celém definičním oboru.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } g_1 = \begin{cases} 2x + 4, & x < 1 \\ Cx - 1, & x \geq 1 \end{cases} & \text{b) } f_7 = \begin{cases} Cx, & x < 1 \\ 2 - \frac{x}{C}, & x \geq 1 \end{cases} \\ \text{c) } f_7 = \begin{cases} Cx - 3, & x < 2 \\ 3 - x + 2x^2, & x \geq 2 \end{cases} & \text{d) } f_7 = \begin{cases} e^{Cx}, & x < 0 \\ C - x, & x \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

12. Určete, zda rovnice mají v daném intervalu alespoň jeden kořen.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x^3 - 10x - 5 = 0, & (2, 4) \\ \text{b) } x^3 - 3x + 1 = 0, & (0, -1) \\ \text{c) } x^3 + 5x - 1 = 0, & (1, 2) \\ \text{d) } x^3 + 5x^2 - 1 = 0, & (-1, 1) \end{array}$$

13. Metodou bisekce určete v daných intervalech řešení rovnice s přesností 0,005.

a) $x^3 - x - 1 = 0, \quad \langle 1, 2 \rangle$

b) $x^3 + 5x^2 - 1 = 0, \quad \langle 0, 1 \rangle$

c) $x^4 + 5x^3 - 1 = 0, \quad \langle 0, 1 \rangle$

d) $\operatorname{tg} x - x = 0, \quad \langle \pi; 1,49\pi \rangle$

1 Výsledky

1. a) $-\infty$ b) $+\infty$ c) $+\infty$ d) $-\infty$ e) $\frac{1}{2}$ f) $-\infty$ g) 0 h) $+\infty$
2. a) 8 b) -4 c) $\frac{2}{3}$ d) -1 e) -4 f) $\frac{7}{5}$ g) $\frac{7}{4}$ h) 12 i) 4 j) 3
3. a) $\frac{3}{2}$ b) -5 c) $\frac{1}{2}$ d) 1 e) 1 f) $-\frac{1}{2}$ g) 0 h) $-\frac{1}{2}$
4. a) -1 b) $\frac{2}{3}$ c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) 2 f) 0 g) -1 h) 1 i) 2
5. a) $\frac{1}{18}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) 4 d) 32 e) $-\frac{1}{4}$ f) neexistuje
6. a) 1 b) $4\sqrt{3}$ c) -1 d) $-2\sqrt[4]{2}$ e) $-\frac{1}{16}$ f) 4 g) $-\infty$ h) $+\infty$ i) neexistuje
7. a) 2 b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{10}$ d) 2 e) 2 f) -1 g) $\frac{1}{2}$ h) 4 i) 3 j) 8 k) 1
8. a) $-\frac{1}{5}$ b) 0 c) $+\infty$ d) 16 e) $\frac{3}{2}$ f) $-\infty$ g) 5^{-5} h) $\frac{1}{2}$ i) 0 j) $-\frac{5}{2}$ k) $-\frac{3}{4}$ l) 1
9. a) e^{-5} b) e c) e^{-6} d) e^3 e) e^{-2} f) e^2
10. a) $x = -2$, odstranitelná b) $x = -2$, odstranitelná; $x = 0$, druhého druhu
c) $x = -1, x = 0$, odstranitelná; $x = 3$, druhého druhu d) $x = 0$, druhého druhu
e) spojitá na celém definičním oboru f) $x = 0$, prvního druhu, $s = 1$ g)
 $x = 0$, prvního druhu, $s = \frac{1}{2}$ h) spojitá na celém definičním oboru i) $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, prvního druhu, $s = 2$ j) $x = \pm 2$, prvního druhu, $s = 2$ k)
 $x = e$, druhého druhu
11. a) $C = 7$ b) $C = 1$ c) $C = 6$ d) $C = 1$
12. a) ano b) ano c) ne d) nelze to vyloučit
13. a) 1,325 b) 0,4258 c) 0,5664 d) 4,4916