# Príklady – Grafy a sítě, Teorie grafů

6. decembra 2020

## 1. Grafy, základné pojmy:

1.1. Koľko rôznych bipartitných grafov $G[A, B]$ existuje, ak $|A| = n$, $|B| = m$. Rozlišujeme označenie vrcholov.

1.2. Uveďte čo najmenší (vzhľadom na počet vrcholov) príklad grafu so šiestimi vrcholmi stupňa 3, ostatnými vrcholmi stupňa najviac 2 a s 12 hranami.

1.3. Nech graf $G$ má 9 vrcholov, pričom každý z nich je stupňa 5 alebo 6. Dokážte, že $G$ má aspoň 5 vrcholov stupňa 6 alebo aspoň 6 vrcholov stupňa 5.

1.4. Nájdite najmenší možný príklad (s minimálnym počtom vrcholov) dvoch neizomorfných súvislých grafov s rovnakou postupnosťou stupňov ich vrcholov.

1.5. Dokážte, že v každom grafe je počet vrcholov nepárneho stupňa párny.

1.6. Existuje graf s $n \geq 2$ vrcholmi, ktorých stupne sú navzájom rôzne? Svoju odpoveď odôvodnite.

1.7. Dokážte, že ak graf obsahuje práve dva vrcholy nepárneho stupňa, tak v grafe existuje cesta spájajúca tieto dva vrcholy.

1.8. Určte všetky dvojice prirodzených čísel $(r, n)$ takých, že existuje $r$-regulárny graf na $n$ vrcholoch.

1.9. Nech $G[X, Y]$ je $r$-regulárny bipartitný graf, $r \geq 1$. Aký je vzťah medzi mohutnosťami partícií $|X|$ a $|Y|$.

1.10. Dokážte, že ak $G$ je graf s $n$ vrcholmi, pričom $\delta(G) \geq \dfrac{n-1}{2}$, tak $G$ je súvislý.

1.11. Určte maximálny počet hrán grafu, ktorý má $n$ vrcholov a $k$ komponentov.

1.12. Rozhodnite, či daná postupnosť je grafová. Ak áno, nájdite príklad daného grafu.

a) $(1, 1, 1, 2, 2, 5)$
b) $(1, 0, 1, 0, 2, 3, 3, 2, 4, 4)$
c) $(1, 7, 3, 6, 3, 4, 3, 1)$
d) $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 5)$

e) $(4, 2, 3, 5, 3, 4, 2, 3)$

1.13. Dokážte, že každý graf $G$ je vrcholovo indukovaný podgraf $\Delta(G)$-regulárneho grafu.

1.14. Dokážte, že ľubovoľné dve najdlhšie cesty v súvislom grafe majú spoločný vrchol. Musia mať aj spoločnú hranu?

1.15. Nech $G$ je 3-regulárny graf. Dokážte, že $G$ má kružnicu párnej dĺžky.

1.16. Dokážte, že ak $\delta(G) \geq 2$, tak graf $G$ obsahuje kružnicu.

1.17. Dokážte, že každý graf $G$ obsahuje cestu dĺžky $\delta(G)$.

1.18. Rozhodnite o platnosti nasledujúceho tvrdenia: V ľubovoľnom súvislom grafe majú všetky najdlhšie cesty spoločný vrchol.

1.19. Dokážte, že pre každý graf $G$ platí $\delta(G) \leq \dfrac{2\,|E(G)|}{|V(G)|} \leq \Delta(G)$.

1.20. Dokážte, že ak graf $G$ neobsahuje $K_3$ ako podgraf, tak $|V(G)| \geq \delta(G) + \Delta(G)$.

1.21. Dokážte, že ak $G$ je bipartitný graf, tak $|E(G)| \leq \dfrac{|V(G)|^2}{4}$.

1.22. Nájdite všetky bipartitné grafy $G$, ktorých komplement $\overline{G}$ je tiež bipartitný.

1.23. Graf $G$ sa nazýva autokomplementárny, ak $G \cong \overline{G}$, t.j. $G$ je izomorfný so svojim komplementom $\overline{G}$. Dokážte, že ak $G$ je autokomplementárny graf s $n$ vrcholmi, tak $n \equiv 0 \pmod 4$ alebo $n \equiv 1 \pmod 4$.

1.24. Je možné, aby autokomplementárny graf so 100 vrcholmi mal práve jeden vrchol stupňa 50?

1.25. Dokážte, že pre každý graf $G$ je buď $G$ alebo $\overline{G}$ súvislý.

1.26. Overte, že pre všetky grafy $G_1$, $G_2$ a $G_3$ platí $(G_1 \circ G_2) \circ G_3 \cong G_1 \circ (G_2 \circ G_3)$ a $G_1 \circ G_2 \cong G_2 \circ G_2$, pričom $\circ \in \{\Box, \times\}$. Existuje vzhľadom na dané operácie niečo ako jednotkový resp. inverzný prvok?

1.27. Dokážte, že Kartéziánsky súčin grafov $G_1 \Box G_2$ je súvislý práve vtedy, keď $G_1$ a $G_2$ sú súvislé. Platí podobné tvrdenie pre operáciu tenzorového súčinu?

1.28. Nech $G_1 = (V_1, E_1)$ a $G_2 = (V_2, E_2)$ sú grafy a $\pi_1 \colon V_1 \times V_2 \to V_1$ je projekcia na prvú zložku, t.j. $\pi_1(v_1, v_2) = v_1$. Rozhodnite, či zobrazenie $\pi_1$ je homomorfizmom z grafu $G_1 \Box G_2$ do $G_1$, resp z $G_1 \times G_2$ do $G_1$.

1.29. Zo šachovnice rozmeru $8 \times 8$ odstráňme dva protiľahlé štvorce. Dokážte, že takúto hraciu dosku nie je možné pokryť dominovými kockami rozmeru $2 \times 1$.

1.30. Ak $n$ vrcholový graf má $n-1$ vrcholov rôznych stupňov, ktorý zo stupňov sa opakuje?

1.31. Nech $G$ je graf a $L(G)$ príslušný hranový graf. Dokážte, že

a) pre počet hrán grafu $L(G)$ platí $|E(L(G))| = \sum_{v \in V(G)} \binom{\deg(v)}{2}$,

b) $L(G) \cong G$ práve vtedy, keď $G$ je 2-regulárny.

1.32. Popíšte všetky grafy pre ktoré $|E(L(G))| < |E(G)|$.

1.33. Dokážte alebo vyvráťte: Graf $G$ je súvislý práve vtedy, keď $L(G)$ je súvislý.

## 2. Stromy a kostry grafu:

2.1. Nájdite všetky stromy na množine vrcholov $\{a, b, c, d\}$, a všetky neizomorfné stromy na 5, resp. 6 vrcholoch.

2.2. Dokážte, že graf $G = (V, E)$ taký, že $|V| = |E| + 1$, a ktorý nemá kružnice, je strom.

2.3. Dokážte, že graf na $n$ vrcholoch s $l$ komponentami má aspoň $n - l$ hrán.

2.4. Nech strom $T$ obsahuje vrchol stupňa $k$. Dokážte, že $T$ obsahuje aspoň $k$ listov (vrcholov stupňa 1).

2.5. Les má 2020 vrcholov a celkovo 7 komponentov. Určte koľko má hrán.

2.6. Koľko komponentov má les s 5085 vrcholmi a 4998 hranami?

2.7. Nech $T$ je strom s $n$ vrcholmi, $n \geq 2$. Pre kladné celé číslo $i$ označme $p_i$ počet vrcholov, ktoré majú stupeň $i$. Dokážte, že

$$p_1 - \sum_{i=3}^{n-1}(i-2)p_i = p_1 - p_3 - 2p_4 - \ldots - (n-3)p_{n-1} = 2.$$

2.8. Nech $(d_1, \ldots, d_n)$ je postupnosť kladných celých čísel. Dokážte, že ak platí $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$, tak existuje strom $T$ taký, že $(d_1, \ldots, d_n)$ je grafová postupnosť prislúchajúca k $T$.

2.9. Dokážte, že graf $G$ je strom práve vtedy, keď pre každý jeho vrchol $v$ je počet komponentov grafu $G - v$ rovný stupňu vrchola $v$ v grafe $G$.

2.10. Nájdite príklad hranovo ohodnoteného grafu, v ktorom existuje jediná kostra minimálnej váhy.

2.11. Rozhodnite, či tvrdenie, že každá hrana súvislého grafu patrí do nejakej jeho kostry, je pravdivé. Svoju odpoveď odôvodnite.

2.12. Dokážte, že pre každé celé $n \geq 4$ existuje graf na $n$ vrcholoch, obsahujúci dve kostry, ktoré nemajú spoločnú hranu.

2.13. Charakterizujte stromy, ktoré sú regulárne grafy.

2.14. Nájdite vzorec určujúci počet visiacich vrcholov stromu s $n$ vrcholmi, ktorého všetky nevisiace vrcholy majú rovnaký stupeň.

2.15. Existuje graf, ktorý by mal práve dva kostry?

2.16. Nech $T_1$ je kostra grafu $G_1$ a $T_2$ kostra grafu $G_2$. Je $T_1 \square T_2$ kostrou grafu $G_1 \square G_2$? Ako je to v prípade operácie tenzorového súčinu?

2.17. Určte všetky stromy $T$ také, že $\overline{T}$ je tiež strom.

2.18. Nech $T$ je strom na $n$ vrcholoch. Dokážte, že ak $G$ je graf s minimálnym stupňom $\delta(G) \geq n-1$, tak $T$ je izomorfný s nejakým podgrafom grafu $G$.

## 3. Súvislosť v grafoch:

3.1. Dokážte, že každý netriviálny súvislý graf obsahuje vrchol, ktorý nie je artikuláciou.

3.2. Dokážte, že každá kostra grafu obsahuje všetky jeho mosty.

3.3. Rozhodnite, či regulárny súvislý graf párneho stupňa je 2-súvislý.

3.4. Dokážte, že ak graf $G$ je hranovo $k$-súvislý, tak platí $|E(G)| \geq \dfrac{k\,|V(G)|}{2}$.

3.5. Nech $G$ je kubický (t.j. 3-regulárny) graf. Dokážte, že $\kappa(G) = \kappa'(G)$.

3.6. Nech vrchol $v$ je artikuláciou v grafe $G$. Dokážte, že $v$ nie je artikulácia v $\overline{G}$.

3.7. Dokážte, že 2-súvislý graf $G$ musí mať aspoň $|V(G)|$ hrán.

3.8. Nech $\mathrm{ar}(G)$ označuje počet artikulácií grafu $G$. Dokážte, že pre každý súvislý graf platí:

a) $\mathrm{ar}(G) \leq \mathrm{ar}(G-e)$, kde $e$ je hrana patriaca do cyklu grafu $G$,

b) $\mathrm{ar}(G) \leq \mathrm{ar}(T)$ pre ľubovoľnú kostru $T$ grafu $G$,

c) $\mathrm{ar}(G) \leq |V(G)| - 2$.

3.9. Nájdite nutné a postačujúce podmienky pre graf $G$ tak, aby hranový graf $L(G)$ obsahoval artikuláciu.

3.10. Nech $G$ je súvislý graf spĺňajúci $\delta(G) \geq 3$. Ukážte, že $L(G)$ neobsahuje most.

3.11. Nech $G$ je graf a $v \in V(G)$ vrchol incidentný s hranou $e \in E(G)$. Dokážte, že ak $v$ nie je artikuláciou v $G$, tak potom $v$ nie je artikuláciou ani v $G - e$.

3.12. Dokážte, že ak $G$ je $r$-regulárny graf s artikuláciou, tak $\kappa'(G) \leq \lfloor r/2 \rfloor$.

3.13. Nech $G$ je bipartitný graf. Dokážte, že ak $\delta(G) \geq \frac{|V(G)|}{4} + 1$, tak $\kappa'(G) = \delta(G)$.

3.14. Dokážte, že ak $G = (V, E)$ je graf spĺňajúci $\delta(G) \geq \frac{|V|+k-2}{2}$, tak $G$ je $k$-súvislý.

3.15. Dokážte, že pre graf $G$ platí: ak $\delta(G) \geq |V(G)|/2$ tak $\kappa'(G) = \delta(G)$.

3.16. Ukážte, že $k$-regulárny bipartitný graf, $k \geq 2$, neobsahuje most.

## 4. Eulerovské a Hamiltonovské grafy:

4.1. Dokážte, že ak graf obsahuje most, tak nie je Eulerovský.

4.2. Nech $G$ je súvislý graf. Dokážte, že existuje Eulerovský graf $H$ taký, že $|V(H)| \leq |V(G)| + 1$, pričom $G$ je indukovaným podgrafom grafu $H$.

4.3. Nech $G$ je súvislý graf. Dokážte, že v $G$ existuje uzavretý sled obsahujúci každú hranu dvakrát.

4.4. Nech $G$ je graf a $e \in E(G)$ je hrana taká, že v $G$ existujú dva rôzne kružnice obsahujúce hranu $e$. Dokážte, že potom v $G$ existuje kružnica, ktorá neobsahuje hranu $e$.

4.5. Zostrojte Eulerovský graf s párnym počtom vrcholov a nepárnym počtom hrán, alebo dokážte, že taký graf neexistuje.

4.6. Nech $G$ je súvislý graf. Za akých podmienok je graf $G \square G$ Eulerovský?

4.7. Dokážte alebo vyvráťte: Každý Eulerovský bipartitný graf má párny počet vrcholov.

4.8. Nech $G$ je súvislý graf rôzny od $K_2$. Za akých podmienok je hranový graf $L(G)$ Eulerovský?

4.9. Dokážte, že Eulerovský graf má párny počet hrán práve vtedy, keď $G$ má párny počet vrcholov $v$, spĺňajúcich $\deg(v) \equiv 2 \pmod 4$.

4.10. Určte, pre ktoré $n$ je graf $n$-rozmernej kocky $Q_n$ Eulerovský a pre ktoré Hamiltonovský.

4.11. Určte, pre ktoré $n$ existuje $n$ vrcholový Hamiltonovský graf $G$ taký, že jeho komplement $\overline{G}$ je tiež Hamiltonovský.

4.12. Nech $G$ je graf s aspoň 4 vrcholmi, pričom pre každú trojicu $x, y, z \in V(G)$ rôznych vrcholov platí, že indukovaný podgraf $G[\{x, y, z\}]$ obsahuje aspoň 2 hrany. Dokážte, že potom $G$ je Hamiltonovský.

4.13. Dokážte alebo vyvráťte: ak $G$ a $H$ sú Hamiltonovské grafy, tak $G \Box H$ je Hamiltonovský.

4.14. Nech $G$ je súvislý graf. Dokážte, že $G$ je Eulerovský práve vtedy, keď množinu hrán $E(G)$ je možné rozdeliť na podmnožiny $E_i$, $1 \leq i \leq k$ tak, že každý z podgrafov $G[E_i]$ indukovaný množinou hrán $E_i$ je cyklom.

**Definícia:** Nech $G = (V, E)$ je graf a $k \in \mathbb{N}$ je prirodzené číslo. Unárnu operáciu *„zdvih grafu $G$ do $k$-tej mocniny“* $G^k$ definujeme nasledovne: $V(G^k) = V$ a pre vrcholy $u, v \in V(G^k)$ platí $uv \in E(G^k)$ práve vtedy keď $d_G(u, v) \leq k$ (t.j. vzdialenosť vrcholov $u, v$ v $G$ je najviac $k$).

4.15. Nech $G$ je strom. Za akých podmienok je graf $G^2$ Eulerovský?

## 5. Spárenia faktorové podgrafy:

5.1. Nájdite príklad maximálneho spárenia, ktoré nie je najpočetnejšie.

5.2. Dokážte, že strom $T$ má perfektné spárenie práve vtedy, keď pre všetky vrcholy $v \in V(T)$ platí, že $T - v$ má práve jeden nepárny komponent.

5.3. Dokážte, že každý strom má najviac jedno perfektné spárenie.

5.4. Nech $M$ je akékoľvek maximálne spárenie v grafe $G$. Dokážte, že platí $\lfloor \delta(G)/2 \rfloor \leq |M|$.

5.5. Nech $M$ je spárenie v súvislom grafe $G$. Dokážte, že existuje kostra $T$ grafu $G$, pre ktorú platí $M \subseteq E(T)$.

5.6. Dokážte, že v bipartitnom grafe existuje spárenie pokrývajúce všetky vrcholy maximálneho stupňa.

5.7. Ukážte, že množina hrán bipartitného grafu $G$ sa dá rozložiť na $\Delta(G)$ spárení.

5.8. Matica obsahujúca len čísla 0 a 1 sa nazýva binárna. Dokážte, že každú štvorcovú binárnu maticu, ktorá obsahuje v každom riadku a taktiež v každom stĺpci presne $k$ jednotiek, je možné vyjadriť ako súčet $k$ štvorcových binárnych matíc, obsahujúcich práve jednu jednotku v každom z jej riadkov a stĺpcov.

5.9. Nech $G$ je graf s $2n$ vrcholmi taký, že $\delta(G) \geq n$. Dokážte, že v $G$ existuje perfektné spárenie.

5.10. Nech $M$ je perfektné spárenie v $r$-regulárnom grafe $G$, $r$ nepárne. Dokážte, že $M$ musí obsahovať všetky mosty grafu $G$.

5.11. Určte, koľko perfektných spárení existuje v grafe $K_{n,n}$ a v grafe $K_{2m}$.

5.12. Nech $G[X,Y]$ je súvislý bipartitný graf s vlastnosťou $|X| = |Y| = k \geq 2$. Dokážte, že ak každé dva vrcholy z množiny $X$ majú rôzne stupne, tak $G$ má perfektné spárenie.

## 6. Farbenie grafov:

6.1. Pre každé $k \in \mathbb{N}$ nájdite graf $G$, spĺňajúci $\Delta(G) - \chi(G) \geq k$.

6.2. Dokážte, $\chi(G) \geq \frac{n}{n-r}$ pre každý $n$ vrcholový $r$-regulárny graf $G$.

6.3. Dokážte, že počet hrán grafu $G$ je aspoň $\chi(G)\big(\chi(G) - 1\big)/2$.

6.4. Dokážte, že $\chi(G_1 \Box G_2) = \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$.

6.5. Dokážte, že $\chi(G_1 \times G_2) \leq \min\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$.

6.6. Dokážte, že $\chi(G) \leq n$ práve vtedy, keď existuje homomorfizmus z grafu $G$ do $K_n$.

6.7. Je pravdou, že ak $\deg(v) < \chi(G) - 1$ pre nejaký vrchol grafu $G$, tak $\chi(G) = \chi(G - v)$?

6.8. Nech $G = (V, E)$ je graf. Dokážte, že existuje rozklad $V = V_1 \cup V_2$ taký, že pre indukované podgrafy $G[V_1]$ a $G[V_2]$ platí $\chi(G[V_1]) + \chi(G[V_2]) = \chi(G)$.

6.9. Dokážte, že $\chi(G) \leq l + 1$, kde $l$ je dĺžka najdlhšej cesty v grafe $G$.

6.10. Nech $\alpha(G) = \max\{|S| : S \text{ nezávislá}\}$ označuje číslo vrcholovej nezávislosti grafu $G$. Dokážte, že $\chi(G) + \alpha(G) \leq |V(G)| + 1$.

6.11. Nech $G$ je neprázdny graf s chromatickým číslom $\chi(G) = k$. Graf $H$ vznikne z $G$ podrozdelením každej hrany grafu $G$. Ak $\chi(G) = \chi(H)$, potom aká je hodnota $k$?

6.12. Dokážte, že každý graf na $n = 2k$ vrcholoch, majúci aspoň $k^2 + 1$ hrán, má chromatické číslo aspoň 3.

6.13. Nech $G$ je $n$ vrcholový graf, $n \geq 2$, spĺňajúci $\chi(G) = n - 1$. Dokážte, že pre klikové číslo grafu $G$ platí $\omega(G) = n - 1$.

6.14. Dokážte, že Reedova domnienka $\chi(G) \leq \left\lceil \frac{\omega(G)+\Delta(G)+1}{2} \right\rceil$ platí v prípade, ak $\omega(G) \in \{\Delta(G) - 1, \Delta(G), \Delta(G) + 1\}$.

6.15. Určte $\chi'(K_n)$ pre $n \geq 2$.

6.16. Popíšte všetky grafy $G$ spĺňajúce $\chi'(G) \leq 2$.

6.17. Je pravdivá rovnosť a) $\chi'(G) = \chi(L(G))$, b) $\chi(G) = \chi'(L(G))$?

6.18. Dokážte, že $\chi'(G) \leq 2\Delta(G) - 1$ pre všetky grafy. Nájdite konštruktívny dôkaz, t.j. popíšte algoritmus, ktorého výsledkom je príslušné hranové farbenie.

6.19. Graf $G$ sa nazýva *izochromatický* ak $\chi(G) = \chi'(G)$. Nájdite všetky izochromatické grafy spomedzi a) úplných grafov, b) bipartitných grafov.

6.20. Použitím Vizingovej vety dokážte, že $\chi'(G \square K_2) = \Delta(G \square K_2)$.

6.21. Nech $G$ je graf, ktorého vrcholy maximálneho stupňa $\Delta$ indukujú les. Dokážte, že $\chi'(G) = \Delta$.

6.22. Dokážte, že pre regulárny graf $G$ platí $\chi'(G) = \Delta(G)$ práve vtedy, keď množinu hrán grafu $G$ je možné rozložiť na $\Delta(G)$ perfektných spárení ($G$ je tzv. 1-faktorovateľný).

6.23. Dokážte, že $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ pre všetky neprázdne regulárne grafy s nepárnym počtom vrcholov.

6.24. Nech $G$ je regulárny graf, obsahujúci artikuláciu. Dokážte, že $\chi'(G) > \Delta(G)$.

6.25. Dokážte, že ak pre graf $G = (V, E)$ platí $|V| = 2m + 1$ a $|E| > m \cdot \Delta(G)$, tak $\chi'(G) > \Delta(G)$.

6.26. Nech $G$ je graf získaný vymazaním menej ako $k/2$ hrán z $k$-regulárneho grafu majúceho $2m + 1$ vrcholov. Dokážte, že $\chi'(G) > \Delta(G)$.

6.27. Dokážte, že ak $G$ je graf získaný podrozdelením nejakej hrany $k$-regulárneho grafu s $2m$ vrcholmi, $k \geq 2$, tak $\chi'(G) > \Delta(G)$.

6.28. Dokážte, že $\chi_\ell(T) = 2$ pre každý strom $T$ s aspoň dvoma vrcholmi.

6.29. Nech $G$ je neprázdny graf. Použitím pažravého algoritmu na farbenie hrán dokážte, že platí $\chi'_\ell(G) \leq 2\Delta(G) - 1$.

6.30. Určte hodnoty $\chi''(K_n)$ a $\chi''(C_n)$ pre každé $n \geq 3$.

6.31. Dokážte, že $\chi''(G) \leq \chi(G) + \chi'(G)$ pre všetky grafy $G$.

6.32. Nájdite príklad súvislého grafu $G$, pre ktorý platí $\chi''(G) = \chi(G) + \chi'(G)$.

## 7. Planárne grafy:

7.1. Určte $r, s$ také, že $K_{r,s}$ je planárny.

7.2. Dokážte, že neexistuje planárny 6-súvislý graf.

7.3. Súvislý $k$-regulárny rovinný graf má osem stien. Aká je hodnota $k$?

7.4. Dokážte, že každý planárny 5-súvislý graf má aspoň 12 vrcholov.

7.5. Pre aké $r$ existuje planárny $r$-regulárny graf?

7.6. Určte, pre ktoré $k$ je graf $k$-rozmernej kocky $Q_k$ planárny.

7.7. Dokážte, že ak $|V(G)| \geq 11$, tak $G$ alebo $\overline{G}$ je neplanárny.

7.8. Nech $G[X, Y]$ je planárny bipartitný graf, pričom $|X| \geq 2$, $|Y| \geq 2$. Dokážte, že $|E(G)| \leq 2(|X| + |Y| - 2)$.

7.9. Pre aké $n$ je graf $C_n^2$ planárny? $C_n^2$ označuje druhú mocninu kružnice $C_n$, viac definícia za príkladom 4.14.

7.10. Platí, že ak $G$ je planárny bipartitný graf, tak $\delta(G) \leq 3$?

7.11. Je pravdou, že ak $G$ je planárny, tak aj hranový graf $L(G)$ je planárny?

7.12. Nech $G$ je trianguláciou (každá stena je trojuholník) a $n_i$ je počet vrcholov stupňa $i$ v grafe $G$. Dokážte, že $\sum_{i=2}^{\Delta(G)} (6 - i)n_i = 12$.

7.13. Dokážte, že ak súvislý graf $G$ s $n \geq 6$ vrcholmi obsahuje tri kostry také, že každá z hrán grafu $G$ patrí práve do jednej z nich, tak $G$ nie je planárny.

7.14. Dokážte, alebo vyvráťte nasledujúce tvrdenia:

a) Ak $G$ je neplanárny graf, tak $G$ obsahuje vlastný neplanárny podgraf.

b) Ak $G$ neobsahuje $K_5$ alebo $K_{3,3}$ ako podgraf, tak $G$ je planárny.

c) Ak $G$ je graf s $n$ vrcholmi a $m$ hranami, pričom $m \leq 3n - 6$, potom $G$ je planárny.

d) Ak $G$ je graf s jedným alebo viacerými trojuholníkmi taký, že $G$ neobsahuje podrozdelenie $K_5$ ako svoj podgraf, tak $G$ je planárny.

7.15. Nech $G$ je rovinný graf a $f$ jeho ľubovoľná stena. Dokážte, že existuje vnorenie grafu $G$ do roviny, pričom $f$ tvorí vonkajšiu stenu (všetky vrcholy grafu $G$ sú na hranici $f$ alebo vo „vnútry“).