UNIVERZITA PALACKÉHO v OLOMOUCI

Přírodovědecká fakulta, Katedra algebry a geometrie

Grafy a Sítě
Teorie Grafů

30. decembra 2020

Jozef Pócs

Obsah

1 Úvodné pojmy **5**
- 1.1 Grafy – základné definície . . . 5
- 1.2 Sledy, ťahy, cesty a súvislosť . . . 8
- 1.3 Postupnosti stupňov v grafoch . . . 10

2 Stromy **13**
- 2.1 Charakterizácia stromov . . . 13
- 2.2 Kostra grafu a problém minimálnej kostry . . . 14

3 Súvislosť v grafoch **17**
- 3.1 Mosty, artikulácie a 2-súvislé grafy . . . 17
- 3.2 Mengerove vety . . . 19

4 Eulerovké a Hamiltonovské grafy **21**
- 4.1 Eulerovské grafy a ich charakterizácia . . . 21
- 4.2 Hamiltonovské grafy . . . 22

5 Spárenia a faktorové podgrafy **27**
- 5.1 Spárenia v bipartitných grafoch . . . 28
- 5.2 Spárenia vo všeobecných grafoch . . . 33

6 Farbenia grafov **37**
- 6.1 Vrcholové farbenie . . . 37
- 6.2 Hranové farbenie . . . 45
- 6.3 Zovšeobecnené farbenia . . . 47
  - 6.3.1 Zoznamové farbenie . . . 47
  - 6.3.2 Totálne farbenie . . . 49

7 Planárne grafy **51**
- 7.1 Eulerov vzorec a jeho dôsledky . . . 52
- 7.2 Charakterizácia planárnych grafov . . . 55
- 7.3 Farbenie planárnych grafov . . . 55
- 7.4 Miery neplanarity . . . 56
  - 7.4.1 Hrúbka grafu . . . 56
  - 7.4.2 Priesečníkové číslo . . . 57
  - 7.4.3 Rod grafu, vnorenia na orientovateľné plochy . . . 61

Kapitola 1

Úvodné pojmy

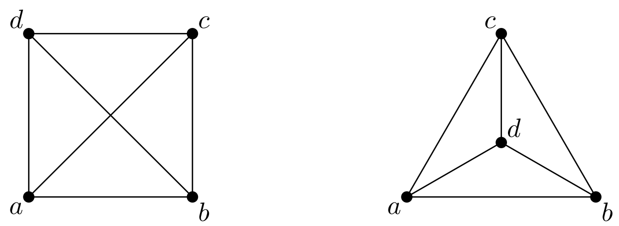
1.1 Grafy – základné definície

Nech V je množina. Pre prirodzené číslo $k \in \mathbb{N}$ označme symbolom $\binom{V}{k}$ množinu všetkých k-prvkových podmnožín množiny V. Pozn. toto označenie je analógiou k označeniu kombinačných čísel $\binom{n}{k}$.

Grafom rozumieme usporiadanú dvojicu $G = (V, E)$, kde V je množina a $E \subseteq \binom{V}{2}$. V ďalšom budeme uvažovať iba konečné grafy (s konečnou množinou V). Ak $|V| = n$ hovoríme, že graf G je rádu n. Prvky množiny V sa nazývajú vrcholy a prvky množiny E sa nazývajú hrany grafu G. Budeme taktiež používať označenie $V(G)$, $E(G)$ pre množinu vrcholov, respektíve pre množinu hrán grafu G. Hranu $e \in E$ tvorenú vrcholmi x a y budeme značiť $e = \{x, y\}$ alebo $e = xy$. Vrcholy x, y sa nazývajú koncové vrcholy hrany e, v tomto prípade sa x, y nazývajú *susedné* a hovoríme, že vrcholy x, y *incidujú* s hranou e. Dve hrany sú susedné, ak majú spoločný vrchol.

Nakreslenie (diagram) grafu $G = (V, E)$ je reprezentácia G v rovine taká, že každému vrcholu $v_i \in V$ je priradený bod B_i roviny a každej hrane $e = v_i v_j \in E$ oblúk $o(e) = \widetilde{B_i B_j}$ spájajúci body B_i a B_j, pričom body priradené rôznym vrcholom sú rôzne, oblúky sami seba nepretínajú a až na koncové body neobsahujú žiaden ďalší bod prislúchajúci niektorému z vrcholov.

Pozn. v nakreslení grafu je dovolené, aby sa dva rôzne oblúky pretínali (t.j. mali spoločný vnútorný bod).



Obr. 1.1: Dve rôzne nakreslenia grafu $G = (\{a, b, c, d\}, \{ab, ac, ad, bc, bd, cd\})$.

Ak v definícii grafu pripustíme, aby sa určité dvojprvkové podmnožiny vrcholov vyskytli v množine E viackrát, tak dostaneme štruktúru, ktorá sa nazýva multigraf (hrany s násobným výskytom sa nazývajú multihrany). *Multigraf* je usporiadaná dvojica (V, E), kde V je množina a E je multimnožina, ktorej prvky sú z $\binom{V}{2}$.

Hrana $\{u, v\}$ pre ktorú $u = v$ sa nazýva slučka. Štruktúra pripúšťajúca multihrany a slučky sa nazýva pseudograf. *Pseudograf* je usporiadaná dvojica (V, E), kde V je množina a E je multimnožina, ktorej prvky sú z $\binom{V}{2} \cup V$.

V definícii grafu sú hrany uvažované ako neusporiadané dvojice vrcholov. Je možné uvažovať, že hrana má smer, t.j. smeruje z nejakého vrcholu do iného. V tomto prípade sú orientované hrany reprezentované ako usporiadané dvojice vrcholov, čím dostávame štruktúru nazývanú orientovaný graf resp. digraf. *Digraf* je usporiadaná dvojica (V, A), kde V je množina a A je podmnožina množiny usporiadaných dvojíc rôznych prvkov z V, t.j. $A \subseteq V \times V \setminus \{(v, v) : v \in V\}$.

Je tiež možné uvažovať hrany, ktoré sú simultánne orientované i neorientované, čím dostávame pojem *zmiešaného grafu*;

Stupeň vrchola v v grafe G je počet hrán incidentných s v, označuje sa $\deg_G(v)$ alebo $\deg(v)$. Množina $N(v) = \{u : uv \in E\}$ sa nazýva *množina susedov* vrchola v a teda $\deg_G(v) = |N(v)|$. Vrchol stupňa 0 sa nazýva izolovaný, vrchol stupňa 1 sa nazýva visiaci (resp. koncový, resp. list).

Symbol $\delta(G)$ označuje *minimálny* a $\Delta(G)$ označuje *maximálny* spomedzi všetkých stupňov vrcholov grafu G.

Veta 1.1. *Pre všetky grafy $G = (V, E)$ platí:*

$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2\,|E|\,. \tag{1.1}$$

Dôkaz. Myšlienka dôkazu spočíva v pozorovaní, že ak vezmeme súčet všetkých stupňov vrcholov grafu, tak každá hrana je v tom súčte započítaná dvakrát.

Formálne budeme postupovať matematickou indukciou vzhľadom na počet hrán grafu. Je zrejmé, že rovnosť (1.1) platí pre všetky grafy s prázdnou množinou hrán.

Ďalej predpokladajme, že tvrdenie platí pre všetky grafy s m hranami. Nech $G = (V, E)$ je ľubovoľný $m+1$ hranový graf a $xy \in E$ jeho akákoľvek hrana. Po jej odobratí dostávame graf $G - e$, pre ktorý platí vzťah (1.1). V tomto prípade

$$\sum_{v \in V} \deg_{G-e}(v) = \sum_{v \in V \setminus \{x,y\}} \deg_G(v) + \big(\deg_G(x) - 1\big) + \big(\deg_G(y) - 1\big) = 2m,$$

z čoho dostávame

$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2m + 2,$$

teda tvrdenie platí aj pre graf G. $\square$

Nech $G' = (V', E')$ je graf. Hovoríme, že G' je *podgraf* grafu $G = (V, E)$ (G je nadgraf G'), ak $V' \subseteq V$ a $E' \subseteq E$. G' sa nazýva *vlastný podgraf* grafu G ak $V' \subsetneq V$ alebo $E' \subsetneq E$. G' je faktorový podgraf grafu G, ak $V' = V$.

Graf $G' = (V', E')$ je *(vrcholovo) indukovaný podgraf* grafu $G = (V, G)$ ak $V' \subseteq V$ a G' obsahuje všetky hrany, ktoré spájajú vrcholy z V' v grafe G, t.j. pre množinu E'

platí $E' = E \cap \binom{V'}{2}$. Podgraf grafu G indukovaný množinou $X \subseteq V$ budeme značiť symbolom $G[X]$.

Nech v je vrchol grafu $G = (V, E)$. Potom graf $G - v$ je podgraf získaný z grafu G odobratím vrchola v a všetkých hrán incidentných s vrcholom v, t.j. $G - v = G[V \setminus \{v\}]$ je podgraf indukovaný množinou $V \setminus \{v\}$. Podobným spôsobom je definovaný graf $G - S = G[V \setminus S]$, kde $S \subseteq V$ je ľubovoľná podmnožina vrcholov.

Nech e je hrana grafu $G = (V, E)$. Potom graf $G - e = (V, E \setminus \{e\})$ je podgraf grafu G, ktorý vznikne z G odobratím hrany e.

Graf $\overline{G} = (V, \overline{E})$ je komplementom grafu $G = (V, E)$ ak $\overline{E} = \binom{V}{2} \setminus E$, t.j. pre všetky vrcholy $u, v \in V$ platí $uv \notin E$ práve vtedy keď $uv \in \overline{E}$.

Grafy $G_1 = (V_1, E_1)$ a $G_2 = (V_2, E_2)$ sú *izomorfné*, ak existuje bijektívne zobrazenie $\varphi \colon V_1 \to V_2$ také, že pre všetky vrcholy $u, v \in V_1$ platí $uv \in E_1$ práve vtedy keď $\varphi(u)\varphi(v) \in E_2$. V tomto prípade sa bijekcia φ nazýva izomorfizmom.

Zobrazenie $f \colon V_1 \to V_2$, ktoré spĺňa podmienku $uv \in E_1$ implikuje $f(u)f(v) \in E_2$ pre všetky $u, v \in V$, sa nazýva *homomorfizmus*. Prostý homomorfizmus sa nazýva *vnorením* grafu G_1 do grafu G_2.

Operácie na triede grafov:

Nech $G_1 = (V_1, E_1)$ a $G_2 = (V_2, E_2)$ sú grafy. *Karteziánskym súčinom* grafov G_1 a G_2 rozumieme graf $G_1 \square G_2 = (V, E)$ taký, že $V = V_1 \times V_2$ a $E = \big\{(u_1, u_2)(v_1, v_2) : (u_1v_1 \in E_1 \text{ a } u_2 = v_2) \vee (u_1 = v_1 \text{ a } u_2v_2 \in E_2)\big\}$.

Tenzorovým (priamym) súčinom grafov G_1 a G_2 rozumieme graf $G_1 \times G_2 = (V, E)$ taký, že $V = V_1 \times V_2$ a $E = \big\{(u_1, u_2)(v_1, v_2) : u_1v_1 \in E_1 \text{ a } u_2v_2 \in E_2\big\}$.

Zjednotenie grafov $G_1 \cup G_2 = (V, E)$ je graf, pre ktorý platí $V = V_1 \cup V_2$ a $E = E_1 \cup E_2$. V prípade, že množiny vrcholov sú disjunktné, hovoríme o *disjunktnom zjednotení* grafov.

Nech $G = (V, E)$ je graf. *Hranový graf* (line graph) prislúchajúci ku grafu G je graf $L(G)$, ktorého množina vrcholov je tvorená množinou hrán pôvodného grafu G, t.j. $V\big(L(G)\big) = E$, pričom dve hrany sú susedné, ak v grafe G incidujú s rovnakým vrcholom, t.j. pre $e_1, e_2 \in E$ platí $e_1e_2 \in E\big(L(G)\big)$ práve vtedy, keď $e_1 = u_1v$ a $e_2 = u_2v$ pre nejaké vrcholy $u_1, u_2, v \in V$.

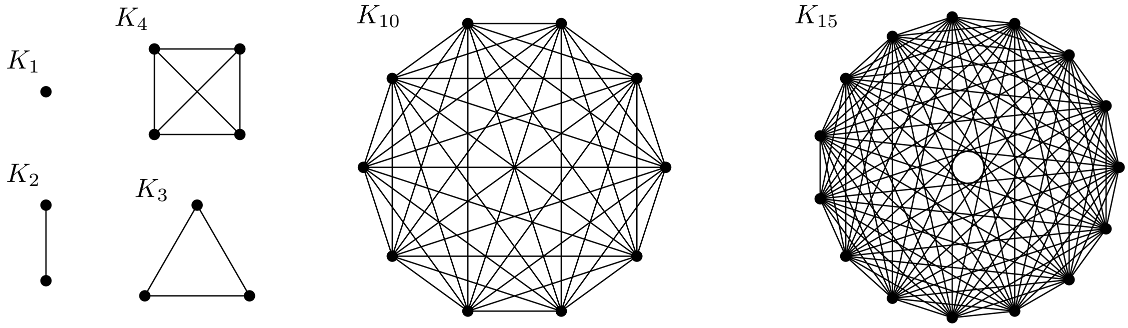
Nech $G = (V, E)$ je graf a $e = uv$ nejaká hrana tohto grafu. *Podrozdelenín* hrany e rozumieme operáciu, ktorá z G vymaže hranu e, pridá nový vrchol w a taktiež pridá hrany uw, vw spájajúce koncové vrcholy hrany e s novým vrcholom. Formálne, podrozdelením hrany $e = uv$ v grafe G rozumieme graf G', pričom $V(G') = V \cup \{w\}$, $w \notin V$ a $E(G') = (E \setminus \{uv\}) \cup \{uw, vw\}$. Neformálne, podrozdelenie hrany e vznikne „nakreslením" nového vrchola na hranu e, t.j. nahradením hrany e cestou dĺžky dva.

Povieme, že graf H je podrozdelením grafu G, ak $H = G$ alebo existuje postupnosť grafov $G = G_0, G_1, \ldots, G_k = H$ kde pre všetky indexy i, $0 \leq i \leq k - 1$, graf G_{i+1} vznikne podrozdelením nejakej hrany $e_i \in E(G_i)$. Neformálne, H je podrozdelením grafu G, ak H vznikne „nakreslením" niekoľkých vrcholov (aj žiadneho) na hrany grafu G.

Význačné triedy grafov:

Nrch r je nezáporné celé číslo. Graf $G = (V, E)$, ktorého všetky vrcholy majú rovnaký stupeň r, t.j. pre všetky $v \in V$ platí $\deg_G(v) = r$, sa nazýva r-regulárny alebo r-pravidelný.

Úplný graf alebo *kompletný graf* je graf, v ktorom je každý vrchol grafu spojený s každým iným vrcholom grafu. Kompletný graf s n vrcholmi sa zvykne označovať K_n.



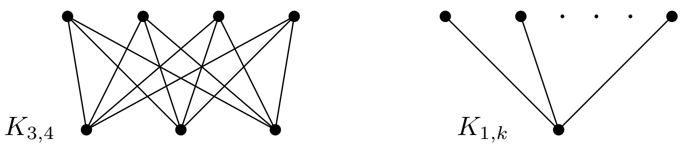
Obr. 1.2: Príklady kompletných grafov.

Cesta na n vrcholoch, je graf označovaný symbolom P_n, s množinou vrcholov $V(P_n) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ a množinou hrán $E(P_n) = \{v_i v_{i+1} : 0 \leq i \leq n-1\}$.

Kružnica alebo *cyklus* C_n je graf s vrcholovou množinou $V(C_n) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ a množinou hrán $E(C_n) = \{v_i v_{i+1} : 0 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_n v_1\}$.

Párny graf alebo *bipartitný graf* je graf $G = (V, E)$, ktorého množina vrcholov V môže byť rozdelená do dvoch disjunktných množín V_1 a V_2, pričom každá hrana má jeden vrchol vo V_1 a druhý vo V_2. Bipartitný graf s partíciami V_1 a V_2 budeme označovať $G(V_1, V_2, E)$ resp. $G[V_1, V_2]$.

Kompletný bipartitný graf $K_{m,n}$ je bipartitný graf pre ktorého partície V_1 a V_2 platí $|V_1| = m$, $|V_2| = n$, pričom množina hrán obsahuje všetky možné hrany medzi V_1 a V_2.



Obr. 1.3: Príklady kompletných bipartitných grafov $K_{3,4}$ a $K_{1,k}$.

Nech $n \in \mathbb{N}$ je prirodzené číslo. Pod *n-rozmernou Hyperkockou* Q_n rozumieme graf, ktorý je definovaný indukciou nasledovne: $Q_1 = K_2$ a $Q_{n+1} = Q_n \square K_2$, teda $n+1$-rozmerná hyperkocka Q_{n+1} vznikne Karteziánskym súčinom n-rozmernej hyperkocky Q_n a úplného grafu K_2 (cesty C_2).

1.2 Sledy, ťahy, cesty a súvislosť

Sledom v grafe $G = (V, E)$ rozumieme postupnosť $(v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k)$ vrcholov a hrán, pričom pre všetky $i = 1, \ldots, k$ platí $e_i = v_{k-1}v_k$. Číslo k sa nazýva dĺžka sledu. Sled sa nazýva uzavretý, ak $v_0 = v_k$, inak sa nazýva otvorený.

Sled v ktorom sa hrany neopakujú sa nazýva *ťah*. Sled $(v_0, e_1, v_1, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k)$, v ktorom $v_i \neq v_j$pre všetky $i, j = 0, \dots, k$, $i \neq j$, sa nazýva *cestou*.

Uzavretý ťah $(v_0, e_1, v_1, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k)$, v ktorom $v_i \neq v_j$ pre každé $i, j = 0, \dots, k-1$, $i \neq j$ sa nazýva *kružnica*.

Je vidieť, že graf G obsahuje cestu resp. kružnicu dĺžky n práve vtedy keď v grafe G existuje podgraf izomorfný s P_n resp. C_n.

Nech $G = (V, E)$ je graf. Vrcholy $u, v \in V$ *súvisia* v grafe G, ak v G existuje $u - v$ sled. Graf sa nazýva *súvislý*, ak ľubovoľné dva vrcholy v grafe G súvisia.

Lema 1.2. *Relácia súvislosti je reláciou ekvivalencie.*

Dôkaz. Je potrebné overiť, že relácia súvislosti je reflexívna, symetrická a tranzitívna. Reflexívnosť plynie z toho, že sled (v) dĺžky 0 je $v-v$ sledom pre všetky $v \in V$. Symetria vyplýva, z faktu, že ak $(v_0 = u, e_1, \dots, e_k, v_k = v)$ je $u - v$ sled, tak reverzný sled $(v_k = v, e_k, \dots, e_1, v_0 = u)$ je $v - u$ sledom v G. Na záver, ak $(v_0 = u, e_1, \dots, e_k, v_k = v)$ je $u - v$ sled a $(w_0 = v, f_1, \dots, f_l, w_l = w)$ je $v - w$ sled, tak zreťazenie $(v_0 = u, \dots, e_k, v, f_1, \dots, w_l = w)$ je $u-w$ sledom, čo dokazuje tranzitívnosť relácie súvislosti. $\square$

Relácia súvislosti vrcholov v grafe $G = (V, E)$ vytvára na množine vrcholov V rozklad V na disjunktné podmnožiny $V_1, V_2, \dots, V_k$ také, že pre všetky $i = 1, \dots, k$ sú indukované podgrafy $G[V_i]$ súvislé a pre $i \neq j$ žiaden vrchol $u \in V_i$ nesúvisý so žiadnym vrcholom $v \in V_j$. Grafy $G[V_i]$ sa nazývajú *komponenty súvislosti* grafu G. Z uvedeného vyplýva, že komponent je maximálny súvislý podgraf grafu G, t.j. v grafe G neexistuje súvislý podgraf, ktorý by bol vlastným nadgrafom daného komponentu. Vo všeobecnosti, každý graf je disjunktným zjednotením súvislých grafov, totiž svojich komponentov.

Nech $G = (V, E)$ je graf a $u, v \in V$ sú vrcholy. Vzdialenosť $d(u, v)$ vrcholov u a v je dĺžka najkratšej $u - v$ cesty, ak u, v nesúvisia, tak $d(u, v) := +\infty$.

Veta 1.3. *V každom súvislom grafe $G = (V, E)$ má zobrazenie $d \colon V \times V \to \mathbb{R}$ vlastnosť metriky, t.j.*

1. *pre všetky $u, v \in V$ platí $d(u, v) \geq 0$, pričom $d(u, v) = 0$ práve vtedy keď $u = v$,*
2. *$d(u, v) = d(v, u)$ pre všetky $u, v \in V$,*
3. *d spĺňa trojuholníkovú nerovnosť, t.j. $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$.*

Dôkaz. Prvé dve vlastnosti plynú priamo z definície. Tretia vlastnosť plynie z faktu, že ak P_1 je nejaká najkratšia $u - v$ cesta dĺžky l_1 a P_2 nejaká najkratšia $v - w$ cesta dĺžky l_2, tak zreťazením $P_1 P_2$ dostaneme $u - w$ sled, teda najkratšia $u - w$ cesta má dĺžku najviac $l_1 + l_2$. $\square$

Využitím pojmu vzdialenosti v grafe dokážeme nasledujúcu charakterizáciu bipartitných grafov.

Veta 1.4. *Graf G je bipartitný práve vtedy, keď G neobsahuje cyklus nepárnej dĺžky.*

Dôkaz. Je zrejmé, že graf je bipartitný práve vtedy, keď všetky jeho komponenty sú bipartitné. Stačí teda uvedené tvrdenie dokázať pre súvislé grafy.

Nech $G = (X, Y, E)$ je bipartitný graf s partíciami X a Y. Je zrejmé, že ak cesta začína a končí v X, tak musí mať párnu dĺžku. Teda, každá kružnica (uzavretá cesta) v grafe G je párnej dĺžky.

Naopak predpokladajme, že $G = (V, E)$ je súvislý graf bez nepárnych kružníc. Nech $u \in V$ je ľubovoľný vrchol. Rozdelme množinu vrcholov grafu G na podmnožiny V_0 a V_1 nasledovne:

$$V_0 = \{v \in V : d(u, v) \text{ párne}\},\ V_1 = \{v \in V : d(u, v) \text{ nepárne}\}.$$

Zo súvislosti je zrejmé, že $V_0 \cup V_1 = V$ a taktiež platí $V_0 \cap V_1 = \emptyset$. Ukážeme, že ak $xy \in E$ je hrana v G, tak $x \in V_0$ a $y \in V_1$ alebo $y \in V_0$ a $x \in V_1$. Sporom, bez ujmy na všeobecnosti, predpokladajme, že $x, y \in V_0$. Nech P_{ux} a P_{uy} sú najkratšie $u - x$ resp. $u - y$ cesty v G, pričom $z \in V$ je posledný vrchol patriaci súčasne do P_{ux} aj P_{uy}. Podcesty $P_{zx} \subseteq P_{ux}$ a $P_{zy} \subseteq P_{uy}$ majú dĺžku $d(u, x) - d(u, z)$ resp. $d(u, y) - d(u, z)$ a teda rovnakú paritu. V tomto prípade segmenty P_{zx}, P_{zy} spolu s hranou xy tvoria kružnicu nepárnej dĺžky, čo je v spore s predpokladom o grafe G. □

1.3 Postupnosti stupňov v grafoch

Nech $S = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ je postupnosť nezáporných celých čísel. Hovoríme, že postupnosť S je *grafová*, ak existuje graf $G = (V, E)$ s vrcholovov množinou $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, pričom $\deg_G(v_i) = d_i$ pre všetky $i = 1, \ldots, n$.

Veta 1.5 (**Havel, Hakimi**, 1955)**.** *Nech $S = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ je nerastúca postupnosť n celých čísel, t.j. $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$. Potom postupnosť S je grafová práve vtedy, keď postupnosť $S' = (d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1} - 1, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n)$ je grafová.*

Poznámka: Postupnosť S' vznikne z postupnosti S vynechaním prvého člena d_1 a následným znížením zostávajúcich prvých d_1 členov (t.j. členov d_2, d_3 až d_{d_1+1}) o jedna.

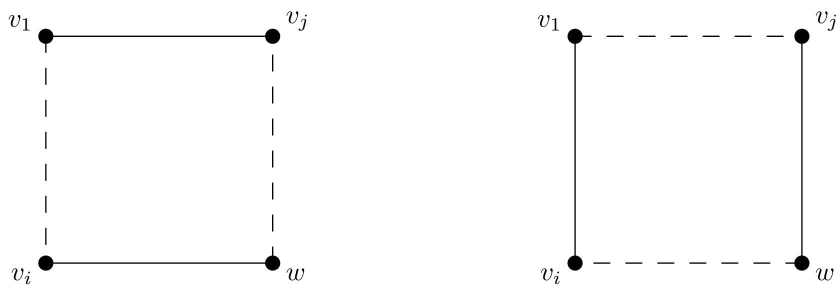
Dôkaz. Položme $k = d_1$ a predpokladajme, že postupnosť $S' = (d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_k - 1, d_{k+1} - 1, d_{k+2}, \ldots, d_n)$ je grafová, čo znamená, že existuje graf G', pričom S' je postupnosťou jeho stupňov. Teda v grafe G' sa nachádza k vrcholov $v_2, \ldots, v_{k+1}$, so stupňami $\deg_{G'}(v_2) = d_2 - 1, \ldots, \deg_{G'}(v_{k+1}) = d_{k+1} - 1$. Vytvorme nový graf G pridaním nového vrchola v_1, ktorý bude susedný so všetkými vrcholmi $v_2, \ldots, v_{k+1}$. Potom $\deg_G(v_1) = d_1$ a stupeň každého z vrcholov $v_2, \ldots, v_{k+1}$ bude väčší o 1, teda postupnosť $S = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ bude postupnosťou stupňov grafu G.

Naopak predpokladajme, že postupnosť $S = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ je grafová, pričom $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$. Nech G je jej prisluchajúci graf, v ktorom označme vrcholy $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tak, že $\deg_G(v_i) = d_i$ pre $i = 1, \ldots, n$. Špeciálne, v_1 je vrchol grafu G stupňa $k = d_1$.

Ak susedia vrchola v_1 sú vrcholy $v_2, \ldots, v_{k+1}$, tak graf G' získaný z grafu G odstránením vrchola v_1 (spolu s incidentnými hranami) má postupnosť stupňou S'. Ďalej predpokladajme, že v_1 nie je susedom jedného alebo viacerých vrcholov spomedzi $v_2, \ldots, v_{k+1}$. Ukážeme, ako modifikovať graf G na graf H s rovnakou postupnosťou stupňov S, pričom v grafe H bude mať vrchol v_1 viac susedov v množine vrcholov $\{v_2, \ldots, v_{k+1}\}$ ako tomu bolo v grafe G. Opakovaním tohto procesu je možné získať graf s postupnosťou stupňou S, naviac vrchol v_1 bude susedný práve s vrcholmi $v_2, \ldots, v_{k+1}$. Následným odstránením vrchola v_1 z tohto grafu dostaneme graf, ktorého postupnosť stupňou je S'.

Nech v_1 nie je susedný s v_i, pre nejaké $i = 2, \ldots, k+1$. Keďže v_1 má k susedov, $v_1 v_j \in E(G)$ pre nejaké $j > k+1$. Nakoľko čísla v postupnosti S sa môžu opakovať, je možné, že $d_i = d_j$, t.j. vrcholy v_i a v_j majú rovnaké stupne. V tomto prípade vymeníme značenie vrcholov v_i a v_j (v_i sa stane j-tým vrcholom v poradí, v_j i-tým), čím zvýšime počet susedov v_1 spomedzi $v_2, \ldots, v_{k+1}$ o 1.

Ostáva posledný prípad, keď $\deg_G(v_j) \neq \deg_G(v_i)$. Keďže postupnosť S je nerastúca, musí platiť $\deg_G(v_j) < \deg_G(v_i)$. Teda nejaký sused w vrchola v_i nie je susedom vrchola v_j, pričom $w \neq v_1$, keďže $v_1 v_i \notin E(G)$. Táto situácia je ilustrovaná na Obrázku 1.4 vľavo.



Obr. 1.4: Originálna a modifikovaná konfigurácia v grafe G.

Modifikujme graf G odobraním hrán $v_1 v_j$ a $v_i w$ a následným pridaním hrán $v_1 v_i$ a $v_j w$ ako je znázornené na Obrázku 1.4 vpravo. Táto operácia nemení žiadny zo stupňou grafu G, avšak zvýši počet susedov vrchola v_1 spomedzi vrcholov $v_2, \ldots, v_{k+1}$. $\square$

Kapitola 2

Stromy

Strom je súvislý graf, ktorý neobsahuje kružnicu (tzv. acyklický graf). *Lesom* rozumieme graf, ktorého komponenty sú stromy.

2.1 Charakterizácia stromov

Lema 2.1. *Každý strom s aspoň dvoma vrcholmi obsahuje aspoň dva listy, t.j. vrcholy stupňa* 1.

Dôkaz. Nech $P = (v_0, v_1, \ldots, v_t)$ je cesta maximálnej možnej dĺžky v strome $T = (V, E)$. Je zrejmé, že dĺžka cesty P je aspoň 1. Tvrdíme, že v_0 a taktiež v_t sú listy v strome T. V prípade, ak by napr. v_0 nebol listom, existovala by v strome T hrana $e = v_0 v$, pričom $v \neq v_1$. Potom vrchol v je vrcholom cesty P, t.j. $v = v_i$ pre nejaké $i \geq 2$, alebo $v \notin \{v_0, \ldots, v_t\}$. V oboch prípadoch dostávame spor, v prvom T obsahuje kružnicu, v druhom cestu P je možné predĺžiť o vrchol v čo je v spore s maximalitou dĺžky cesty P.

□

Veta 2.2 (Charakterizácia stromov). *Pre graf $G = (V, E)$ sú nasledujúce podmienky ekvivalentné:*

(i) *G je strom.*

(ii) *(Jednoznačnosť cesty)*

Pre každé dva vrcholy $x, y \in V$ existuje práve jedna cesta z x do y.

(iii) *(Minimálna súvislosť)*

Graf G je súvislý a vynechaním ľubovoľnej hrany vznikne nesúvislý graf.

(iv) *(Maximálny graf bez kružníc)*

Graf G neobsahuje kružnicu, a každé pridanie hrany, t.j. graf $G + e$, kde $e \in \binom{V}{2} \setminus E$, už kružnicu obsahuje.

(v) *(Eulerov vzorec)*

G je súvislý a $|V| = |E| + 1$.

Dôkaz. Najprv dokážeme, že tvrdenie (i) implikuje tvrdenia (ii) až (v). Implikácia (i) $\Rightarrow$ (iv) sa dokáže nasledovne: graf $G = (V, E)$ je súvislý, preto pre každú dvojicu vrcholov $x, y \in V$ existuje v grafe G cesta P, ktorá ich spája. Ak $\{x, y\} \notin E$, potom hrana $e = xy$ spolu s cestou P tvoria kružnicu v grafe $G + e$.

Implikácie (i) $\Rightarrow$ (ii),(iii),(v) sa dokážu indukciou. Očividne, všetky tri podmienky platia pre strom s jedným vrcholom. Ďalej predpokladajme, že tieto podmienky platia pre všetky stromy na n vrcholoch. Nech G je strom s $n+1$ vrcholmi a $v \in V$ je list (viď. Lemma 2.1). Keďže $\deg_G(v) = 1$, graf $G - v$ je strom majúci n vrcholov (ľahko sa ukáže, že $G - v$ je súvislý a acyklický). Vzhľadom na indukčný predpoklad, tvrdenia (ii),(iii) a (v) platia pre graf $G - v$ a je pomerne ľahké overiť, že taktiež platia pre graf G.

V ďalšom ukážeme, že podmienky (ii) a (iii) implikujú (i). Pri podmienkach (ii), (iii) máme súvislosť grafu G, naviac graf spĺňajúci (ii) alebo (iii) je acyklický, pretože prítomnosť kružnice by porušovala akúkoľvek z týchto podmienok.

Pre platnosť (iv) $\Rightarrow$ (i) stačí overiť, že G je súvislý. Ak $x, y \in V$ sú dva vrcholy, tak buď sú spojené hranou, alebo graf $G + xy$ obsahuje kružnicu, a z tej po odobratí hrany xy vznikne cesta medzi x a y.

Implikácia (v) $\Rightarrow$ (i) sa dokáže indukciou vzhľadom na počet vrcholov grafu G. Ak G obsahuje jeden vrchol, vzťah (v) platí. Ďalej predpokladajme, že každý graf na n vrcholoch spĺňajúci (v) je strom a nech $G = (V, E)$ je súvislý graf s $|V| = n + 1$ vrcholmi spĺňajúci $|V(G)| = |E(G)| + 1$. Keďže G je súvislý, platí $\deg_G(v) \geq 1$ pre všetky vrcholy $v \in V$ a naviac máme

$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2\,|E| = 2\,|V| - 2.$$

Preto v grafe G musí existovať vrchol $v \in V$ stupňa práve 1. Graf $G' = G - v$ je taktiež súvislý a spĺňa rovnosť $|V(G')| = |E(G')| + 1$ (z grafu G sme odstránili jeden vrchol a jednu hranu). Podľa indukčného predpokladu graf G' je strom, a teda G je stromom tiež.

□

2.2 Kostra grafu a problém minimálnej kostry

Kostra grafu $G = (V, E)$ je faktorový podgraf $T \subseteq G$ grafu G, ktorý je stromom. Teda strom T je kostrou grafu G ak $T \subseteq G$ a zároveň $V(T) = V(G)$.

Veta 2.3. *Nech G je graf. Potom G má kostru práve vtedy, keď je súvislý.*

Dôkaz. Očividne, ak G má kostru, tak medzi ľubovoľnými vrcholmi existuje v grafe G cesta, t.j. graf G je súvislý.

Naopak, predpojkladajme, že G je súvislý. Ak G neobsahuje cyklus, je stromom a teda aj kostrou. V prípade, že G obsahuje kružnicu, odobratie ľubovoľnej hrany e patriacej nejakej kružnici nenaruší súvislosť novovzniknutého grafu $G - e$. Takýmto postupným „rušením“ kružníc dospejeme k acyklickému grafu, ktorý bude kostrou pôvodného grafu G. □

Pod *(hranovo) ohodnoteným grafom* rozumieme trojicu $G = (V, E, w)$, pričom $G = (V, E)$ je graf a $w\colon E \to \mathbb{R}$ je zobrazenie priraďujúce každej hrane jej váhu $w(e)$.

Problém minimálnej kostry: Pre daný ohodnotený graf $G = (V, E, w)$ nájdite kostru $T = (V, F)$ grafu G takú, že súčet

$$w(T) = \sum_{e \in F} w(e) \quad \to \quad \min,$$

t.j. súčet $w(T)$ (váha kostry) je minimálny spomedzi všetkých súčtov $w(T')$, kde T' prebieha množinu všetkých kostier grafu G.

Kruskalov „pažravý“ algoritmus na nájdenie kostry minimálnej váhy

1. Vstupom je súvislý hranovo ohodnetený graf $G = (V, E, w)$.

   Nech $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ pričom $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \cdots \leq w(e_m)$, t.j. v prvom kroku zoradíme hrany podľa príslušných váh.

2. Položme $T = (V, F)$ kde $F = \emptyset$.

3. Vyberme hranu $e \in E \smallsetminus F$ s najnižšou váhou. Ak $T + e$ netvorí cyklus, zväčšime množinu hrán F, t.j. $F := F \cup \{e\}$ a hranu e už nebudeme uvažovať, t.j. $E := E \smallsetminus \{e\}$.

4. Ak $|F| = |V| - 1$ alebo $E \smallsetminus F = \emptyset$ ukončíme algoritmus, inak pokračujeme krokom č. 3.

Veta 2.4. *Výstupom Kruskalovho algoritmu je kostra minimálnej váhy.*

Dôkaz. Nech $G = (V, E)$ je súvislý graf, pričom predpokladáme, že $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ a $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \cdots \leq w(e_m)$ a nech graf $T = (V, F)$ je výstupom algoritmu.

Ako prvé ukážeme, že T je strom. Je zrejmé, že T obsahuje všetky vrcholy grafu G a zároveň vzhľadom na podmienku v kroku č. 3 neobsahuje žiadnu kružnicu. Ak by T nebol súvislý, algoritmus by pridal hrany najmenšej váhy spájajúce ľubovoľné dva komponenty grafu T. Teda T je kostrou grafu G.

Na ukázanie minimality kostry T, sporom predpokladajme, že T nie je minimálnej váhy. Spomedzi všetkých minimálnych kostier vyberme kostru $T_1 = (V, F_1)$ takú, že T_1 má najväčší možný počet spoločných hrán s kostrou T. Nech e_i je hrana kostry T s najmenším indexom taká, že $e_i \notin F_1$. Potom graf $T_1 + e_i$ obsahuje kružnicu. Táto kružnica musí obsahovať hranu $f \in F_1 \smallsetminus F$, v opačnom prípade by všetky hrany boli v F a teda T by nebol acyklický. Graf $T_2 = (T_1 + e_i) - f$ bude súvislý (odobratie hrany z kružnice nenarušuje súvislosť grafu) a bude mať $|V| - 1$ hrán, následkom čoho bude taktiež kostrou grafu G. Nakoľko hrana e_i bola prvá, ktorá sa nenachádza v kostre T_1 a f nepatrí do T, dostávame $w(e_i) \leq w(f)$. Keby platilo $w(f) < w(e_i)$ hrana f by bola vybratá algoritmom pred hranou e_i, keďže hrany $e_1, \ldots e_{i-1}$ sú aj v kostre T_1 a teda množina hrán $\{e_1, \ldots, e_{i-1}, f\}$ netvorí cuklus. Z tohto pre váhu kostry T_2 plynie $w(T_2) = w(T_1) + w(e_1) - w(f) \leq w(T_1)$. Na druhej strane T_1 je kostra minimálnej váhy a teda musí platiť $w(T_2) = w(T_1)$, t.j. T_2 predstavuje takiež minimálnu kostru. Avšak T_2 má viac spoločných hrán s kostrou T, čo predstavuje spor s výberom kostry T_1. $\square$

Kapitola 3

Súvislosť v grafoch

Graf $G = (V, E)$ sa nazýva *vrcholovo k-súvislý*, ak $|V| \geq k + 1$ a odobraním ľubovoľnej, najviac $k - 1$ prvkovej podmnožiny vrcholov, dostaneme súvislý graf, t.j. graf $G - X$ je súvislý pre ľubovoľnú $X \subseteq V$, $|X| < k$. Podobne, graf nazveme *hranovo k-súvislým*, ak po odobraní ľubovoľných najviac $k - 1$ hrán zostane súvislý, t.j. graf $G - Y$ je súvislý pre ľubovoľnú $Y \subseteq E$, $|Y| < k$. *Stupňom vrcholovej súvislosti* grafu G rozumieme číslo

$$\kappa(G) = \max\{k \in \mathbb{N} : G \text{ je vrcholovo } k\text{-súvislý}\}$$

a *stupňom hranovej súvislosti* rozumieme číslo

$$\kappa'(G) = \max\{k \in \mathbb{N} : G \text{ je hranovo } k\text{-súvislý}\}.$$

Poznamenajme, že pre úplný graf K_n, $n \geq 2$ je $\kappa(K_n) = n - 1$ a $\kappa'(K_n) = n - 1$. Evidentne, graf s aspoň dvoma vrcholmi je 1-súvislý práve vtedy, keď je súvislý.

Veta 3.1. *Pre všetky grafy G platí $\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$.*

Dôsledok 3.2. *Ak G je n vrcholový graf s aspoň $m \geq n-1$ hranami, tak $\kappa(G) \leq \left\lfloor \frac{2m}{n} \right\rfloor$.*

3.1 Mosty, artikulácie a 2-súvislé grafy

Vrchol súvislého grafu $G = (V, E)$ sa nazýva *artikuláciou (rezovým vrcholom)* ak $G - v$ je nesúvislý. Vo všeobecnosti vrchol v grafu (aj nesúvislého) je artikuláciou ak pre počet komponentov grafu $G - v$ platí $k(G - v) > k(G)$, t.j. ak v je artikuláciou nejakého súvislého komponentu grafu G.

Mostom v súvislom grafe G rozumieme hranu $e = uv$ takú, že $G - e$ je nesúvislý. V tomto prípade $G - e$ nutne obsahuje dva komponenty súvislosti, jeden obsahujúci vrchol u a druhý obsahujúci vrchol v. V prípade nesúvislého grafu, mostom rozumieme hranu, ktorá je mostom nejakého jeho komponentu súvislosti. Teda hrana e grafu G je mostom práve vtedy, keď $k(G - e) = k(G) + 1$.

Veta 3.3. *Hrana e grafu G je mostom práve vtedy, keď e neleží na žiadnom cykle grafu G.*

Dôkaz. Najprv predpokladajme, že hrana $e = uv$ nie je mostom a leží v nejakom komponente G_1 grafu G. Potom graf $G_1 - e$ je súvislý a teda v G_1 existuje cesta P spájajúca vrcholy u a v. Avšak P spolu s hranou e tvorí cyklus v G_1, následkom čoho v G existuje cyklus obsahujúci hranu e.

Naopak, nech hrana $e = uv$ leží na nejakom cykle C patriacemu komponentu $G_1 \subseteq G$. Potom v G_1 existuje $u - v$ cesta P' neobsahujúca hranu e. Nakoľko G_1 je súvislý, pre ľubovoľné dva vrcholy x, y v G_1 existuje cesta Q, ktorá ich spája. Ak Q neobsahuje hranu e, tak Q je aj $x - y$ cestou v grafe $G_1 - e$. Na druhej strane, ak e leží na Q, tak nahradením hrany e cestou P' v ceste Q dostaneme $x - y$ ťah v grafe $G_1 - e$. Toto dokazuje, že $G_1 - e$ je súvislý graf. $\square$

Lema 3.4. *Nech vrchol $v \in V$ je incidentný s mostom súvislého grafu G. Potom v je artikuláciou práve vtedy, keď* $\deg(v) \geq 2$.

Dôkaz. Nech uv je most grafu G, následkom čoho $\deg(v) \geq 1$. Ak by platilo $\deg(v) = 1$, v by bol koncovým vrcholom, $G - v$ súvislým grafom a teda v by nebol artikuláciou.

Naopak, predpokladajme $\deg(v) \geq 2$. Potom existuje vrchol w rôzny od u, pričom vw tvorí hranu. Sporom predpokladajme, že vrchol v nie je artikuláciou. Potom $G - v$ je súvislý a teda obsahuje $u - w$ cestu P. Avšak cesta P spolu s vrcholom v a hranami uv, vw tvorí cyklus v G obsahujúci most uv, čo odporuje Leme 3.3. $\square$

Veta 3.5. *Vrchol $v \in V$ súvislého grafu G je artikuláciou práve vtedy, keď v grafe G existujú vrcholy $u, w \in V$ rôzne od v také, že vrchol v leží na každej $u - w$ ceste v G.*

Dôkaz. Nech vrchol v je artikuláciou v grafe G. Potom $G - v$ je nesúvislý. Nech u a w sú vrcholy patriace do rôznych komponentov grafu $G - v$. Ak by existovala v grafe G cesta spájajúca vrcholy u a w neobsahujúca vrchol v, bola by aj $u - w$ cestou v grafe $G - v$. To je spor s predpokladom, že vrcholy u a w patria do rôznych komponentov grafu $G - v$.

Na druhej strane, ak G obsahuje dva vrcholy u a w také, že vrchol v leží na každej $u - w$ ceste, tak v grafe $G - v$ nexistuje cesta spájajúca vrcholy u a w. To znamená, že graf $G - v$ je nesúvislý a vrchol v je artikuláciou. $\square$

Lema 3.6. *Každý súvislý netriviálny graf obsahuje vrchol, ktorý nie je artikuláciou.*

Pripomeňme, že graf je vrcholovo 2-súvislý (v ďalšom len 2-súvislý) ak má aspoň 3 vrcholy a odstránením ľubovoľného vrchola získame súvislý graf. Teda graf je 2-súvislý práve vtedy, keď neobsahuje artikulácie.

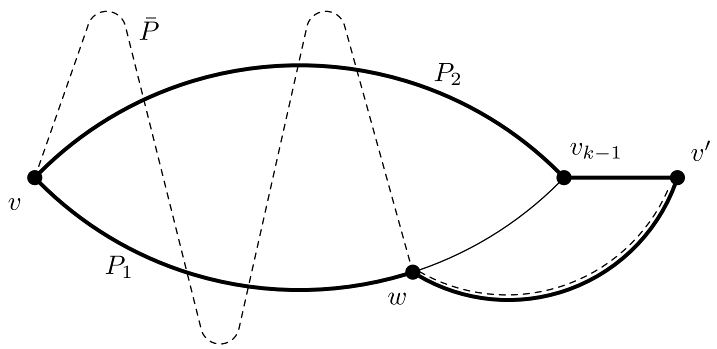
Veta 3.7. *Graf G je 2-súvislý práve vtedy, keď pre každé jeho dva vrcholy existuje kružnica v grafe G, ktorá ich obsahuje.*

Dôkaz. Uvedená podmienka je zrejme postačujúca, pretože ak ležia dva vrcholy $u, v \in V$ na spoločnej kružnici, potom medzi nimi existujú aspoň dve, až na koncové vrcholy, disjunktné cesty. Avšak, aj po odobratí ľubovoľného vrchola, bude vždy existovať cesta spájajúca vrcholy u a v. To ukazuje, že graf G je 2-súvislý.

Opačnú implikáciu, existenciu spoločnej kružnice pre vrcholy v, v' ukážeme indukciou podľa vzdialenosti vrcholov $d_G(v, v')$.

Ako prvé nech $d_G(v, v') = 1$, to znamená, že $vv' = e \in E(G)$. Vďaka 2-súvislosti G je graf $G - e$ taktiež súvislý (ak by bol $G - e$ nesúvislý, bol by aspoň jeden z grafov $G - v$, $G - v'$ tiež nesúvislý). Preto existuje v grafe $G - e$ cesta z v do v', a tá spolu s hranou e tvorí kružnicu obsahujúcu vrcholy v a v'.

V ďalšom pre nejaké $k \geq 2$ predpokladajme, že každá dvojica vrcholov vo vzdialenosti menšej ako k leží na spoločnej kružnici, a uvažujme dva vrcholy $v, v' \in V$ vo vzdialenosti k. Nech $P = (v = v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k = v')$ je cesta najkratšej dĺžky z v do v'. Keďže $d_G(v, v_{k-1}) = k - 1$, podľa indukčného predpokladu existuje kružnica obsahujúca v aj v_{k-1}. Táto kružnica je tvorená dvoma cestami, P_1 a P_2 z v do v_{k-1}. Uvažujme graf $G - v_{k-1}$. Ten je súvislý a teda v ňom existuje cesta $\bar{P}$ z vrcholu v do vrcholu v', ktorá neobsahuje vrchol v_{k-1}. Uvažujme posledný vrchol na ceste $\bar{P}$ (smerom od vrcholu v) patriaci nejakej z ciest P_1, P_2 a označme ho w (viac Obr. 3.1).



Obr. 3.1: Pozícia vrchola w na jednej z ciest P_1 alebo P_2.

Predpokladajme (bez ujmy na všeobecnosti), že w je vrcholom cesty P_1. Potom hľadaná kružnica obsahujúca vrcholy v a v' bude tvorená cestou P_2, úsekom cesty P_1 medzi v a w, a úsekom cesty $\bar{P}$ medzi w a v'.

$\square$

Block graf

3.2 Mengerove vety

Veta 3.8 (Mengerova)**.** *Netriviálny graf G je vrcholovo k-súvislý práve vtedy, keď pre ľubovoľnú dvojicu rôznych vrcholov u a v grafu G existuje aspoň k interne vrcholovo disjunktných $u - v$ ciest.*

Veta 3.9 (Mengerova - hranová verzia)**.** *Netriviálny graf G je hranovo k-súvislý práve vtedy, keď pre ľubovoľnú dvojicu rôznych vrcholov u a v grafu G existuje aspoň k po dvojiciach hranovo disjunktných $u - v$ ciest.*

Kapitola 4

Eulerovké a Hamiltonovské grafy

4.1 Eulerovské grafy a ich charakterizácia

Nech $G = (V, E)$ je graf. Uzavretý ťah tohto grafu sa nazýva *Eulerovský*, ak obsahuje všetky vrcholy a všetky hrany grafu G. Pripomíname, že v danom ťahu sa hrana môže vyskytnúť nanajvýš jedenkrát, t.j. Eulerovský ťah obsahuje všetky vrcholy a každá hrana sa v ňom vyskytuje práve raz. Graf, v ktorom existuje Eulerovský ťah sa nazýva *Eulerovským grafom.* Nasledujúca veta dáva charakterizáciu Eulerovských grafov pomocou podmienky na stupne vrcholov.

Veta 4.1. *Graf G je Eulerovský práve vtedy, keď je súvislý a každý vrchol grafu G má párny stupeň.*

Dôkaz. Je zrejmé, že ak graf G je Eulerovský, tak musí byť súvislý. Ďalej predpokladajme, že $(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_i, v_i, e_{i+1}, \ldots, e_k, v_0)$ je uzavretý ťah obsahujúci všetky vrcholy a hrany. Je vidieť, že každý výskyt vrchola viaže dve hrany (okrem prvého a posledného výskytu vrchola v_0). Následkom toho je stupeň $\deg_G(v)$ každého vrchola v v grafe G párny.

Naopak, nech súvislý graf G má všetky vrcholy párneho stupňa. Uvažujme ťah $T = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_m, v_m)$ v grafe G, ktorý má maximálnu možnú dĺžku, m. Najprv ukážeme, že $v_0 = v_m$. Ak by to neplatilo, do vrchola v_0 by zasahoval nepárny počet hrán ťahu T. Keďže stupeň $\deg_G(v_0)$ je párny, existovala by hrana $e \in E(G)$, ktorá sa nenachádza v T, a o túto hranu by bolo možné ťah T predĺžiť, čo je spor.

Predpokladajme teda $v_0 = v_m$, a dokážeme, že $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\} = E$. Definujme graf $G' = (V', E')$, kde V' je množina všetkých vrcholov ťahu T a E' je množina všetkých jeho hrán.

Najprv predpokladajme $V' \neq V$. Vďaka súvislosti grafu G musí existovať hrana $e = \{v_k, v'\}$ taká, že $v_k \in V'$ a zároveň $v' \notin V'$. V tomto prípade ťah

$$(v_k, e_{k+1}, v_{k+1}, \ldots, v_{m-1}, e_m, v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k, e, v')$$

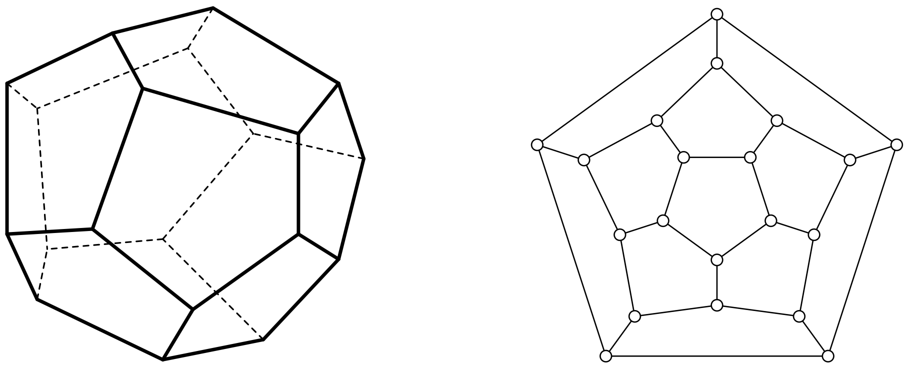
má dĺžku $m + 1$, čo vedie ku sporu.

Ak $V' = V$ a $E' \neq E$, tak uvažujme hranu $e \in E \setminus E'$, kde $e = \{v_k, v_l\}$, Podobne ako v predchádzajúcom prípade vedie ťah

$$(v_k, e_{k+1}, v_{k+1}, \ldots, v_{m-1}, e_m, v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k, e, v_l)$$

ku sporu. □

4.2 Hamiltonovské grafy



Obr. 4.1: Pravidelný dvanásťsten a jeho graf.

Kružnica C grafu G sa nazýva *Hamiltonovská*, ak $V(C) = V(G)$, t.j. kružnica C obsahuje všetky vrcholy grafu G. Graf, ktorý obsahuje Hamiltonovskú kružnicu sa nazýva *Hamiltonovský*. Cesta v grafe, ktorá obsahuje všetky vrcholy sa nazýva *Hamiltonovská*.

Lema 4.2. *Ak G je Hamiltonovský graf, tak $k(G - S) \leq |S|$ pre všetky neprázdne vlastné podmnožiny S množiny vrcholov grafu G.*

Dôkaz. Nech $\emptyset \neq S \subset V(G)$ je ľubovoľná podmnožina. Predpokladajme, že $k(G-S) = k$ a že $G_1, G_2, \ldots, G_k$ sú komponenty grafu $G-S$. Keďže G je Hamiltonovský, obsahuje Hamiltonovskú kružnicu C. Akonáhle C obsahuje vrchol z komponentu G_i, $1 \leq i \leq k$ posledný krát, nasledujúci vrchol musí patriť do množiny S. To znamená, že množina S musí obsahovať aspoň k vrcholov, teda $k = k(G - S) \leq |S|$. □

Obrátená implikácia, dáva postačujúcu podmienku aby graf nebol Hamiltonovský. *Ak G je graf, pričom $k(G - S) > |S|$ pre nejakú neprázdnu vlastnú podmnožinu S množiny $V(G)$, tak G nie je Hamiltonovský.*

Definícia 4.1. Graf $G = (V, E)$ sa nazýva *(Hamiltonovsko) uzavretý*, ak pre všetky dvojice rôznych vrcholov $u, v \in V$ platí, že $\deg(u) + \deg(v) \geq |V|$ implikuje $uv \in E$.

Graf $G' = (V, E')$ je *(Hamiltonovským) uzáverom* grafu $G = (V, E)$, ak spĺňa:

(i) $E \subseteq E'$
(ii) $G' = (V, E')$ je uzavretý,
(iii) ak $G'' = (V, E'')$ je uzavretý graf spĺňajúci $E \subseteq E''$, tak $E' \subseteq E''$.

Podmienky tejto definície charakterizujú uzáver grafu ako najmenší uzavretý nadgraf grafu G, ktorý je definovaný na rovnakej množine vrcholov.

Lema 4.3. *Pre kazdý graf existuje práve jeden jeho uzáver.*

Dôkaz. Nech $G = (V, E)$ je n vrcholový graf. Najprv dokážeme, že ak $G_1 = (V, E_1)$ a $G_2 = (V, E_2)$ sú uzavreté grafy, tak $G' = (V, E_1 \cap E_2)$ je tiež uzavretý. Nech $u, v \in V$ je dvojica rôznych vrcholov taká, že $\deg(u)+\deg(v) \geq n$. Keďže G_1 je uzavretý, dostávame $uv \in E_1$ a podobne uzavretosť G_2 implikuje $uv \in E_2$. V sumári, $uv \in E_1 \cap E_2$, čo dokazuje, že $G' = (V, E_1 \cap E_2)$ je uzavretý.

Ďalej, označme symbolom $\mathcal{S}$ množinu všetkých uzavretých grafov $G'' = (V, E'')$, ktoré spĺňajú $E \subseteq E''$. Množina $\mathcal{S}$ je neprázdna, keďže $K_n \in \mathcal{S}$. Podľa predchádzajúcej časti, graf $G' = (V, \bigcap\{E'' : (V, E'') \in \mathcal{S}\})$ je uzavretý ($\bigcap\{E'' : (V, E'') \in \mathcal{S}\}$) označuje množinu hrán, ktorá je prienikom všetkých množín hrán E'' takých, že graf (V, E'') patrí do systému $\mathcal{S}$). Naviac $E \subseteq \bigcap\{E'' : (V, E'') \in \mathcal{S}\}$, kedže $\mathcal{S}$ obsahuje iba grafy, ktorých množina hrán obsahuje E ako svoju podmnožinu. Taktiež, ak $G'' = (V, E'')$ je uzavretý graf spĺňajúci $E \subseteq E''$, tak $G'' \in \mathcal{S}$, následkom čoho $\bigcap\{E'' : (V, E'') \in \mathcal{S}\} \subseteq E''$. To dokazuje, že graf G' je uzáverom grafu G. Jednoznačnosť uzáveru vyplýva znovu z dokázaného tvrdenia o prieniku uzavretých grafov. Ak by $G_1 = (V, E_1)$ a $G_2 = (V, E_2)$ boli rôzne uzávery grafu G, tak pre uzavretý graf $(V, E_1 \cap E_2)$ by nebola splnená tretia podmienka definície uzáveru grafu. □

Uzáver grafu G budeme v ďalšom označovať symbolom$\mathsf{Cl}(G)$.

Poznámka 4.1. Uzáver ľubovoľného n vrcholového grafu $G = (V, E)$ možno nájsť pomocou jednoduchého algortimu.

1. $E' := E$ (E' označuje množinu hrán, ktorá bude inkrementovaná v priebehu algoritmu).

2. Nájdi rôzne $u, v \in V$ také, že $\deg_{G'}(u) + \deg_{G'}(v) \geq n$ a $uv \notin E'$, pričom $\deg_{G'}$ označuje stupeň v grafe $G' = (V, E')$. Ak taká dvojica neexistuje, výstupom algoritmu je graf $G' = (V, E')$.

3. $E' := E' \cup \{uv\}$ a pokračuj krokom 2.

Ukážeme, že výsledný graf $G' = (V, E')$, ktorý je výstupom algoritmu, je uzáverom grafu G. Mimo iného, toto dokazuje, že výsledný graf je nezávislý od poradia výberu hrán, ktoré spĺňajú podmienku v kroku 2 prezentovaného algoritmu.

Lema 4.4. *Nech graf $G' = (V, E')$ je výstupom algoritmu pre vstupný graf $G = (V, E)$, potom $\mathsf{Cl}(G) = G'$.*

Dôkaz. Ukážeme, že graf G' spĺňa podmienky uzáveru grafu G.

Keďže počas priebehu algoritmu sa ku grafu G postupne pridávajú nové hrany (ak vôbec je možné nejakú hranu pridať), je jasné, že $E \subseteq E'$.

Ak by graf G' nebol uzavretý, existovala by v ňom dvojica nesusedných vrcholov u a v, spĺňajúca $\deg_{G'}(u)+\deg_{G'}(v) \geq n$. To by ovšem bolo v rozpore s krokom 2 algoritmu, pretože v tomto prípade nemal byť algoritmus ukončený, ale mal pokračovať krokom číslo 3.

Na záver predpokladajme neplatnosť podmienky (iii) Definície 4.1, t.j. nech existuje uzavretý graf $G'' = (V, E'')$ spĺňajúci $E \subseteq E''$ a zároveň $E' \nsubseteq E''$. Nech $e_1, e_2, \ldots, e_k$ označuje poradie hrán množiny $E' \setminus E$ v akom boli pridávané počas priebehu algoritmu a nech $e_i = uv$ je hrana s najmenším indexom nepatriaca do množiny E''. Nakoľko hrana e_i bola vybraná v kroku 2, vrcholy u a v museli spĺňať podmienku $\deg_{G^{i-1}}(u) + \deg_{G^{i-1}}(v) \geq n$, kde $G^{i-1} = (V, E \cup \{e_1, \ldots, e_{i-1}\})$ je graf vytvorený algoritmom po pridaní prvých $i-1$ hrán. Keďže hrany $E \cup \{e_1, \ldots, e_{i-1}\} \subseteq E''$, dostávame $\deg_{G''}(u) + \deg_{G''}(v) \geq n$ a $uv \notin E''$. To je v spore s tým, že graf G'' je uzavretý. □

Veta 4.5 (**Bondy, Chvátal**, 1976)**.** *Graf G je Hamiltonovský práve vtedy, keď jeho uzáver $\mathsf{Cl}(G)$ je Hamiltonovský.*

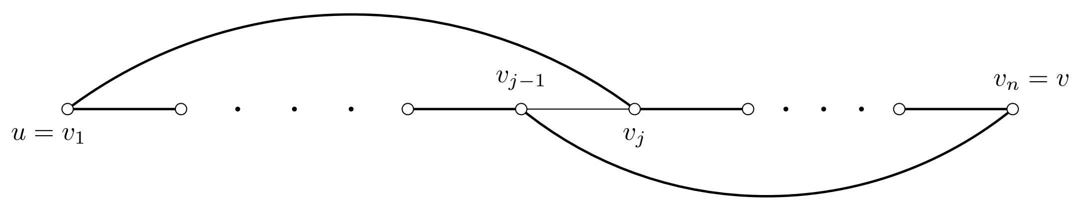
Dôkaz. Ak C je Hamiltonovská kružnica v grafe G, tak C je aj Hamiltonovskou v grafe $\mathsf{Cl}(G)$, keďže $\mathsf{Cl}(G)$ obsahuje všetky hrany grafu G.

Naopak, sporom predpokladajme, že existuje n vrcholový graf, ktorého uzáver je Hamiltonovský, pričom on sám nie je Hamiltonovský. Za týchto podmienok, nech $G = (V, E)$ je n vrcholový graf, taký, že v ňom existuje dvojica rôznych vrcholov $u, v \in V$ spĺňajúca $\deg(u) + \deg(v) \geq n$, pričom G nie je Hamiltonovský, avšak $G + uv$ už Hamiltonovským je. Existencia grafu s takouto vlastnosťou vyplýva z faktu, že východzí graf nie je Hamiltonovský a jeho uzáver už je. Naviac uzáver je možné konštruovať postupným pridávaním hrán uv spĺňajúcich $\deg(u) + \deg(v) \geq n$, takže v istom okamihu musí nastať situácia, kedy pridanie hrany vedie z nie Hamiltonovského grafu na Hamiltonovský.

V uvažovanom grafe $G + uv$ musia všetky Hamiltonovské kružnice obsahovať hranu uv, v opačnom prípade by bol aj graf G Hamiltonovský. Keďže pridanie hrany uv vytvára Hamiltonovskú kružnicu, v pôvodnom grafe G musí existovať $u - v$ cesta obsahujúca všetky vrcholy grafu G. Nech $u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v$ je postupnosť vrcholov takejto cesty. Označme symbolmi P a Q nasledovné množiny vrcholov

$$P = \{v_i : 2 \leq i \leq n,\ v_i \text{ susedí s } v_1\} \quad \text{a} \quad Q = \{v_i : 2 \leq i \leq n,\ v_{i-1} \text{ susedí s } v_n\}.$$

Potom $|P| + |Q| = \deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n$. Avšak $P \cup Q \subseteq \{v_2, \ldots, v_n\}$, a teda v grafe G musí existovať vrchol v_j, $2 \leq j \leq n$, spĺňajúci $v_j \in P \cap Q$. Nakoľko $uv \notin E(G)$, pripomíname, že nutne $v_j \neq v_n$ a taktiež $v_j \neq v_2$. Záverom, v grafe G existujú hrany $e = v_1 v_j$ a $e' = v_{j-1} v_n$, použitím ktorých je možné v grafe G zostrojiť Hamiltonvskú kružnicu (Obr. 4.2). □



Obr. 4.2: Vytvorenie Hamiltonovskej kružnice v dôkaze Vety 4.5.

Dôsledok 4.6 (**Ore**, 1960)**.** *Nech G je graf rádu $n \geq 3$. Ak $\deg(u) + \deg(v) \geq n$ pre všetky dvojice u, v nesusedných vrcholov, tak graf G je Hamiltonovský.*

Dôsledok 4.7 (**Dirac**, 1952)**.** *Nech G je graf rádu $n \geq 3$. Ak $\deg(v) \geq \frac{n}{2}$ platí pre všetky vrcholy $v \in V$, tak graf G je Hamiltonovský.*

Dôkaz. V oboch prípadoch platí, že ak graf G spĺňa podmienky uvedené v predpokladoch, tak $\mathsf{Cl}(G) = K_n$, čo je Hamiltonovský graf. □

Dôsledok 4.8 (**Pósa**, 1962)**.** *Nech G je graf rádu $n \geq 3$. Ak pre všetky prirodzené čísla i spĺňajúce $1 \leq i < \frac{n}{2}$ platí, že počet vrcholov grafu G, ktorých stupeň nepresahuje i je menší ako i, tak graf G je Hamiltonovský.*

Poznamenajme, že ak graf spĺňa predpoklady uvedené v tomto dôsledku, tak neobsahuje vrchol stupňa 1; obsahuje najviac 1 vrchol stupňa 2; najviac 2 vrcholy, ktorých stupeň je najviac 3; atď. ..., obsahuje najviac k vrcholov, ktorých stupeň nepresahuje k, pričom k je najväčšie prirodzené číslo, pre ktoré platí $k < \frac{n}{2}$.

Dôkaz. Ukážeme, že $\mathsf{Cl}(G) = K_n$. Sporom predpokladajme, že to neplatí. Spomedzi všetkých dvojíc nesusedných vrcholov grafu $\mathsf{Cl}(G)$, nech u a w označuje dvojicu, pre ktorú platí, že súčet $\deg_{\mathsf{Cl}(G)}(u) + \deg_{\mathsf{Cl}(G)}(w)$ je maximálny. Potom nutne $\deg_{\mathsf{Cl}(G)}(u) + \deg_{\mathsf{Cl}(G)}(w) \leq n - 1$, inak by uw bola hranou v grafe $\mathsf{Cl}(G)$. Bez ujmy na všeobecnosti môžme predpokladať, že $\deg_{\mathsf{Cl}(G)}(u) \leq \deg_{\mathsf{Cl}(G)}(w)$. Označme $\deg_{\mathsf{Cl}(G)}(u) = k$ a teda $k \leq \frac{n-1}{2} < \frac{n}{2}$, pričom taktiež dostávame

$$\deg_{\mathsf{Cl}(G)}(w) \leq n - 1 - k. \tag{4.1}$$

Nech W je množina všetkých vrcholov rôznych od w, ktoré nie sú susedné s vrcholom w v grafe $\mathsf{Cl}(G)$, t.j. $W = \{v \in V : vw \notin E(\mathsf{Cl}(G))\}$. Očividne $u \in W$. Všimnime si, že ak $v \in W$, tak $\deg_{\mathsf{Cl}(G)}(v) \leq k$, pretože ináč

$$\deg_{\mathsf{Cl}(G)}(v) + \deg_{\mathsf{Cl}(G)}(w) > \deg_{\mathsf{Cl}(G)}(u) + \deg_{\mathsf{Cl}(G)}(w),$$

čo by bolo v rozpore s výberom dvojice vrcholov u a w. Z tohto dôvodu, stupeň žiadneho z vrcholov množiny W nepresahuje v grafe $\mathsf{Cl}(G)$ číslo k a to isté platí aj v grafe G, nakoľko $\deg_G(v) \leq \deg_{\mathsf{Cl}(G)}(v)$ pre všetky $v \in V$. Vzhľadom na predpoklady, ktoré spĺňa graf G a fakt, že množina vrcholov nesusediacich s vrcholom w v grafe G je nadmnožinou množiny W, dostávame nerovnosť $|W| \leq k - 1$. Následne

$$\deg_{\mathsf{Cl}(G)}(w) = n - 1 - |W| \geq n - 1 - (k - 1) = n - k,$$

čo je v rozpore s nerovnosťou (4.1). □

Kapitola 5

Spárenia a faktorové podgrafy

Spárením v grafe G rozumieme podmnožinu hrán $M \subseteq E(G)$ takú, že žiadne dve hrany z M nemajú spoločný vrchol. Spárenie M nazývame *maximálnym*, ak neexistuje spárenie M' spĺňajúce $M \subsetneq M'$ a nazývame *najpočetnejším*, ak neexistuje spárenie M'' spĺňajúce $|M| < |M''|$. Hovoríme, že spárenie M *pokrýva* množinu vrcholov $X \subseteq V$, ak pre každý vrchol $v \in X$ existuje hrana $e \in M$ incidentná s vrcholom v. Spárenie sa nazýva *perfektné*, ak pokrýva všetky vrcholy grafu.

Nech M je spárenie v grafe $G = (V, E)$. *M-alternujúca cesta* alebo *kružnica* v grafe G je cesta alebo kružnica, ktorej hrany sú striedavo z množiny M, respektíve z množiny $E \setminus M$. Ak oba koncové vrcholy M-alternujúcej cesty nie sú pokryté spárením M (myslí sa v celom grafe G, nielen v rámci spomínanej cesty), tak túto cestu nazveme *M-rozširujúcou*.

Veta 5.1 (**Berge**, 1957)**.** *Spárenie M v grafe G je najpočetnejšie práve vtedy, keď v grafe G neexistuje žiadna M-rozširujúca cesta.*

Dôkaz. Nech M je spárenie v grafe G, a P je M-rozširujúcou cestou v tomto grafe. Potom zámenou hrán pozdĺž cesty P získame spárenie M' ktoré má väčší počet hrán ako spárenie M. Podrobnejšie, definujme M' ako symetrický rozdiel $M \triangle E(P)$, t.j. $M' = (M \setminus E(P)) \cup (E(P) \setminus M)$. V tomto prípade M' obsahuje, až na hrany patriace ceste P, všetky hrany spárenia M spolu s hranami cesty P, ktoré pôvodne neboli v M. Keďže P je M-rozširujúcou cestou v G, M' tvorí spárenie, naviac $|M'| = |M| + 1$, čo znamená, že M nie je najpočetnejším spárením.

Naopak, predpokladajme, že M nie je najpočetnejšie spárenie a M^* je nejaké spárenie, pre ktoré platí $|M^*| > |M|$. Nech H je podgraf grafu G, ktorý je hranovo indukovaný množinou hrán $M \triangle M^*$, t.j. $H = G[M \triangle M^*]$. Každý vrchol grafu H je stupňa 1 alebo 2. To vyplýva z toho, že každý vrchol $v \in V(H)$ je incidentný s aspoň jednou hranou množiny $M \triangle M^*$ a teda $\deg_H(v) \geq 1$, zatiaľ čo $\deg_H(v) \geq 3$ by znamenalo existenciu aspoň dvoch hrán patriacich do niektorého zo sparení M alebo M^*, pričom tieto dve hrany by mali spoločný vrchol v, čo je v spore s definíciou spárenia.

Následkom toho je každý komponent podgrafu H buď kružnicou s párnym počtom hrán striedavo patriacich do M a M^*, alebo cestou s hranami striedavo v množine M a M^*. Pretože $|M^*| > |M|$, podgraf H obsahuje viac hrán spárenia M^* ako hrán spárenia M, teda nejaký komponent P podgrafu H, ktorý je cestou, musí začínať aj končiť hranou z M^*. Začiatočný, ako aj koncový vrchol cesty P, ktoré sú incidentné s hranami z M^*, nemôžu byť pokryté žiadnou hranou spárenia M. Z tohto dôvodu je cesta P M-rozširujúcou v grafe G.

□

5.1 Spárenia v bipartitných grafoch

Uvedieme dva dôkazy, prvý autorov R. Halmos, H. Vaughan (1950) a druhý pochádzajúci od R. Rada (1967). Pripomíname, že množina susedov $N_G(S)$ v grafe $G = (V, E)$ pre $S \subseteq V$ je definovaná ako

$$N_G(S) = \{v \in V : uv \in E \text{ pre nejaké } u \in S\} = \bigcup_{u \in S} N_G(u).$$

V prípade, že z kontextu je jasné o aký graf sa jedná, používame symbol $N(S)$.

Veta 5.2 (**Hall**, 1935). *Bipartitný graf $G[X, Y] = (X \cup Y, E)$ má spárenie, ktoré pokrýva každý vrchol z množiny X práve vtedy, keď*

$$|S| \leq |N(S)|\,, \text{ pre všetky } S \subseteq X. \tag{5.1}$$

Dôkaz č. 1. Nech $G[X, Y]$ je bipartitný graf, ktorý má spárenie M pokrývajúce každý vrchol z množiny X. Nech $S \subseteq X$ je ľubovoľná podmnožina. Nakoľko vrcholy z množiny S sú prostredníctvom spárenia M spojené s rôznymi vrcholmi z množiny $N(S)$, dostávame $|S| \leq |N(S)|$, čo ukazuje platnosť (5.1).

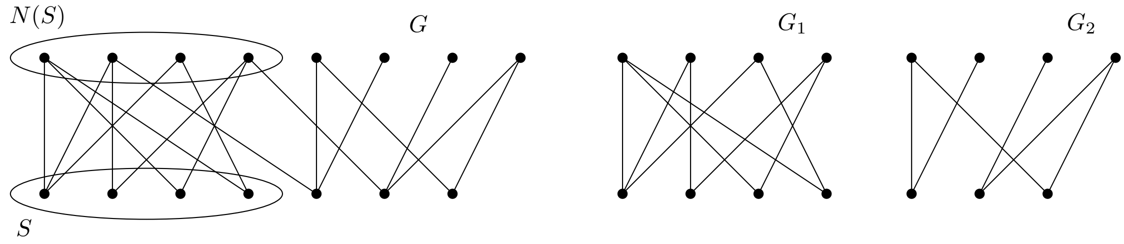
Naopak budeme postupovať matematickou indukciou vzhľadom na počet prvkov množiny X. Ak $|X| = 1$ a bipartitný graf $G[X, Y]$ spĺňa (5.1), je zrejmé, že G má spárenie pokrývajúce množinu X. Ďalej predpokladajme $|X| \geq 2$ a taktiež, že podmienka (5.1) je postačujúca pre existenciu spárenia vo všetkých bipartitných grafoch $G[X', Y']$ s $|X'| \leq |X|$. Rozlišujme dva prípady.

Prípad 1: Predpokladajme, že pre každú vlastnú podmnožinu $S \subsetneq X$ platí podmienka $|N(S)| \geq |S| + 1$. Vyberme ľubovoľnú hranu $xy \in E$, $x \in X$, $y \in Y$ a uvažujme graf $G' = G - \{x, y\}$, t.j. graf G' vznikne odstránením dvojice vrcholov x a y. Bipartitný graf G' spĺňa podmienku (5.1). Ak $S' \subseteq X \setminus \{x\}$ je podmnožina, pre jej množinu susedov $N_{G'}(S')$ platí

$$|N_{G'}(S')| \geq |N_G(S')| - 1 \geq (|S'| + 1) - 1 = |S'|\,.$$

Vzhľadom na indukčný predpoklad, v grafe G' existuje spárenie M pokrývajúce množinu $X' = X \setminus \{x\}$ a toto spárenie spolu s hranou xy tvorí hľadané spárenie v grafe $G[X, Y]$.

Prípad 2: Nech existuje vlastná podmnožina $S \subsetneq X$ taká, že $|N(S)| = |S|$. Označme $T = X \setminus S$ a $Z = Y \setminus N(S)$ a uvažujme dva podgrafy $G_1 = G[S, N(S)]$ a $G_2 = G[T, Z]$, t.j. G_1, G_2 sú podgrafy, vrcholovo indukované množinami $S, N(S)$ resp. T, Z (Obr. 5.1). Je jasné, že G_1 spĺňa podmienku (5.1) a ukážeme, že tá taktiež platí v G_2. Ak by existovala podmnožina $S' \subseteq T$ s vlastnosťou $|N_{G_2}(S')| < |S'|$, tak pre množinu



Obr. 5.1: Graf G a príslušné indukované podgrafy G_1 a G_2.

$S \cup S'$ by v G platilo $N_G(S \cup S') = N_G(S) \cup N_{G_2}(S')$, následkom čoho $|N(S \cup S')| < |S| + |S'| = |S \cup S'|$.

Vzhľadom na indukčný predpoklad v grafoch G_1, G_2 existujú spárenia M_1, M_2, pričom ich zjednotenie $M = M_1 \cup M_2$ je spárenie, ktoré v G pokrýva množinu $X = S \cup T$. □

Dôkaz č. 2. Dokážeme len postačujúcu podmienku existencie spárenia. Uvažujme bipartitný graf $G[X,Y]$ spĺňajúci podmienku (5.1). Ukážeme, že ak $uv_1 \in E$ a $uv_2 \in E$ sú rôzne hrany, pričom $u \in X$ a $v_1, v_2 \in Y$, tak aspoň jeden z grafov $G_1 = G - uv_1$, prípadne $G_2 = G - uv_2$ spĺňa podmienku (5.1).

Sporom predpokladajme, že ani jeden z grafov G_1 a G_2 nespĺňa podmienku (5.1). Potom existujú podmnožiny $A, B \subseteq X$ neobsahujúce vrchol u, pre ktoré platí

$$|N_1(A \cup \{u\})| < |A \cup \{u\}| \quad \text{a} \quad |N_2(B \cup \{u\})| < |B \cup \{u\}|,$$

kde symboly N_1 a N_2 označujú množiny susedov v grafe G_1, respektíve v grafe G_2.

Keďže graf G_1 vznikol z grafu G odobratím iba jednej hrany incidentnej s vrcholom u, susedia množiny A v G_1 sú rovnaký ako v grafe G, t.j. platí $N_1(A) = N(A)$. Využitím nášho predpokladu o množine A dostávame

$$|A| \leq |N(A)| = |N_1(A)| \leq |N_1(A \cup \{u\})| < |A \cup \{u\}| = |A| + 1,$$

pričom prvá nerovnosť plynie z podmienky (5.1) pre graf G, druhá nerovnosť plynie z faktu $N_1(A) \subseteq N_1(A \cup \{u\})$ a $|A \cup \{u\}| = |A| + 1$ pretože $u \notin A$. Ako dôsledok dostaneme

$$|A| = |N(A)| = |N_1(A \cup \{u\})| \quad \text{a} \quad N_1(u) \subseteq N(A)$$

a podobným spôsobom je možné ukázať, že pre množinu B taktiež musí platiť

$$|B| = |N(B)| = |N_2(B \cup \{u\})| \quad \text{a} \quad N_2(u) \subseteq N(B).$$

Použitím týchto dvoch rovností máme

$$\begin{aligned} |A| + |B| &= |N_1(A \cup \{u\})| + |N_2(B \cup \{u\})| \\ &\overset{(1)}{=} |N_1(A \cup \{u\}) \cup N_2(B \cup \{u\})| + |N_1(A \cup \{u\}) \cap N_2(B \cup \{u\})| \\ &\overset{(2)}{=} |N(A \cup B \cup \{u\})| + |N(A) \cap N(B)| \\ &\overset{(3)}{\geq} |N(A \cup B \cup \{u\})| + |N(A \cap B)| \\ &\overset{(4)}{\geq} |A \cup B \cup \{u\}| + |A \cap B| = |A \cup B| + 1 + |A \cap B| = |A| + |B| + 1, \end{aligned}$$

čo predstavuje spor. Poznamenávame, že

(1) vyplýva z princípu inklúzie a exklúzie,
(2) prvá časť plynie z $N_1(A\cup\{u\})\cup N_2(B\cup\{u\}) = (N_1(A)\cup N_1(u))\cup(N_2(B)\cup N_2(u)) = N(A)\cup N(B)\cup(N_1(u)\cup N_2(u)) = N(A)\cup N(B)\cup N(u) = N(A\cup B\cup\{u\})$, keďže $N_1(u)\cup N_2(u) = (N(u)\smallsetminus\{v_1\})\cup(N(u)\smallsetminus\{v_2\}) = N(u)$.
Druhá časť vyplýva z $N(A) = N_1(A\cup\{u\})$ a $N(B) = N_2(B\cup\{u\})$,
(3) je dôsledkom faktu $N(A\cap B)\subseteq N(A)\cap N(B)$,
(4) vyplýva z podmienky (5.1) platnej pre graf G.

Spárenie pokrývajúuce všetky prvky množiny X je možné nájsť postupným odoberaním hrán z grafu G dovtedy, kým všetky vrcholy z X nebudú stupňa 1. Keďže redukovaný graf taktiež spĺňa podmienku (5.1), žiadne dve hrany tohto grafu nemôžu byť susedné, t.j. tvoria spárenie pokrývajúce množinu vrcholov X. □

Dôsledok 5.3. *V bipartitnom grafe $G[X,Y]$ existuje perfektné spárenie práve vtedy, keď $|X| = |Y|$ a graf $G[X,Y]$ spĺňa podmienku* (5.1).

Dôkaz. Ak graf $G[X,Y]$ má perfektné spárenie, tak nutne $|X| = |Y|$ a musí byť splnená podmienka (5.1).

Naopak, z podmienky (5.1) plynie existencia spárenia pokrývajúceho množinu X a nakoľko $|X| = |Y|$, toto spárenie taktiež pokrýva množinu Y, t.j. je perfektným spárením. □

Dôsledok 5.4. *Každý neprázdny regulárny bipartitný graf má perfektné spárenie.*

Dôkaz. Nech $G[X,Y]$ je k-regulárny bipartitný graf, kde $k\geq 1$. Potom $|X| = |Y|$. Pre ľubovoľnú podmnožinu vrcholov $S\subseteq X$, nech E_1 označuje množinu hrán incidentných s nejakým vrcholom z množiny S a E_2 označuje množinu hrán incidentných s nejakým vrcholom z množiny $N(S)$. Očividne, ak $e = uv\in E_1$ kde $u\in S$, tak $v\in N(S)$ a $e\in E_2$, teda $E_1\subseteq E_2$. Nakoľko každý vrchol v grafe G je incidentný s práve k hranami, dostávame

$$k\,|N(S)| = |E_2| \geq |E_1| = k\,|S|\,.$$

Keďže $k\geq 1$, platí $|N(S)|\geq|S|$ a podľa predchádzajúcej vety v grafe G existuje spárenie pokrývajúce množinu X, ktoré je aj perfektným.

□

Majme neprázdny systém $\mathcal{S} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ (nie nutne rôznych) konečných podmnožín množiny X. *Systémom rozličných reprezentantov* systému $\mathcal{S}$ rozumieme usporiadanú n-ticu $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ navzájom rôznych prvkov, spĺňajúcich pre všetky indexy $i\in\{1,\ldots,n\}$ podmienku $a_i\in X_i$.

Veta 5.5. *Nech $\mathcal{S} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ je systém konečných podmnožín množiny X. Množinový systém $\mathcal{S}$ má systém rozličných reprezentantov práve vtedy, keď pre všetky podmnožiny $A\subseteq\{1,2,\ldots n\}$ platí*

$$\Big|\bigcup_{i\in A} X_i\Big| \geq |A|\,,$$

t.j. zjednotenie ľubovoľných k množín patriacich do systému $\mathcal{S}$ má aspoň k prvkov.

Dôkaz. Definujme bipartitný graf G, ktorého vrcholová množina je tvorená množinou $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ a množinou X, pričom vrcholy $i \in [n]$ a $x \in X$ sú susedné ak $x \in X_i$. Je ľahké vidieť, že $\mathcal{S}$ má systém rozličných reprezentantov práve vtedy, keď v grafe G existuje spárenie pokrývajúce množinu $[n]$. Naviac, ak $A \subseteq [n]$ je množina indexov, tak $N_G(A) = \bigcup_{i \in A} X_i$. Použitím Vety 5.2 dostávame, že v grafe G existuje spárenie pokrývajúce množinu $[n]$ práve vtedy, keď pre všetky podmnožiny $A \subseteq [n]$ platí

$$\Big| \bigcup_{i \in A} X_i \Big| = |N_G(A)| \geq |A| \,.$$

□

Matica $D = (d_{ij})$ sa nazýva *dvojito stochastická*, ak jej prvky sú nezáporné reálne čísla, pričom suma všetkých prvkov v ľubovoľnom riadku a taktiež v ľubovoľnom stĺpci je rovná 1. Ak matica $D = (d_{ij})$ typu $n \times m$ je dvojito stochastická, potom nutne D je štvorcovou maticou. To vyplýva z faktu, že

$$n = \sum_{i=1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} d_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} d_{ij} = \sum_{j=1}^{m} 1 = m,$$

t.j. súčet všetkých prvkov v matici D je rovný celkovému počtu riadkov a zároveň celkovému počtu stĺpcov matice D.

Je pomerne ľahké vidieť, že štvorcová matica D je dvojito stochastická práve vtedy, keď $D\mathbf{e} = \mathbf{e}$ a $D^\top \mathbf{e} = \mathbf{e}$ kde $\mathbf{e}$ je stĺpcový vektor pozostávajúci zo samých jednotiek. Využitím tohto faktu je možné ukázať, že množina všetkých dvojito stochastických matíc je uzatvorená vzhľadom na maticové násobenie a konvexné kombinácie, t.j. ak D a E sú dvojito stochastické matice, tak pre $\lambda, \mu \in \langle 0, 1 \rangle$, $\lambda + \mu = 1$ je matica $\lambda D + \mu E$ taktiež dvojito stochastickou.

Špeciálnym prípadom dvojito stochastických matíc sú tzv. permutačné matice. Nech π je nejaká permutácia množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Maticu $P_\pi = (p_{ij})$ rádu $n \times n$ nazývame *permutačnou maticou* (prislúchajúcou permutácii π) ak

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ak } i = \pi(j) \\ 0, & \text{inak.} \end{cases}$$

Ako jedno z možných využití Vety 5.2, dokážeme tzv. Birkhoff–von Neumannovu vetu o reprezentácii dvojito stochastických matíc.

Veta 5.6. *Každá dvojito stochastická matica sa dá vyjadriť v tvare konvexnej kombinácie permutačných matíc, t.j. ak D je dvojito stochastická matica, tak*

$$D = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_k P_k,$$

kde $P_1, \ldots, P_k$ sú permutačné matice a $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}_0^+$ spĺňajú podmienku $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$.

Dôkaz. Budeme postupovať indukciou vzhľadom na počet nenulových čísel nachádzajúcich sa v matici. Ak D je dvojito stochastická matica typu $n \times n$, tak D má aspoň

n nenulových prvkov, keďže každý riadok (resp. stĺpec) musí obsahovať nejaký nenulový prvok. V prípade, že D obsahuje presne n nenulových prvkov, je táto matica permutačnou maticou a tvrdenie vety platí.

V ďalšom predpokladajme, že $D = (d_{ij})$ má viac ako n nenulových prvkov. Uvažujme bipartitný graf $G = (V, E)$ s dvoma n prvkovými partíciami $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ a $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, pričom $a_i b_j \in E$ akonáhle $d_{ij} \neq 0$. Overíme, že takto definovaný graf spĺňa Hallovu podmienku (5.1). Nech $S \subseteq A$ je ľubovoľná podmnožina. Potom

$$\begin{aligned} |S| &\overset{(1)}{=} \sum_{i:a_i \in S} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} = \sum_{i:a_i \in S} \Big(\sum_{j:b_j \in N(S)} d_{ij} + \sum_{j:b_j \notin N(S)} d_{ij} \Big) \overset{(2)}{=} \sum_{i:a_i \in S} \sum_{j:b_j \in N(S)} d_{ij} \\ &\overset{(3)}{=} \sum_{j:b_j \in N(S)} \sum_{i:a_i \in S} d_{ij} \overset{(4)}{\leq} \sum_{j:b_j \in N(S)} 1 = |N(S)|, \end{aligned}$$

pričom

(1) plynie z faktu, že súčet všetkých čísel nachádzajúcich sa v ľubovoľných $|S|$ riadkoch je rovný číslu $|S|$,
(2) je dôsledkom toho, že ak $a_i \in S$ a $b_j \notin N(S)$, tak $a_i b_j \notin E$ a teda $d_{ij} = 0$. Následne, pre všetky indexy i také, že $a_i \in S$ dostávame $\sum\limits_{j:b_j \notin N(S)} d_{ij} = 0$,
(3) reprezentuje klasickú zámenu sumácie,
(4) vyplýva z toho, že suma všetkých prvkov v ľubovoľnom stĺpci je rovná 1, teda pre sumu niektorých prvkov v j-tom stĺpci platí $\sum\limits_{i:a_i \in S} d_{ij} \leq 1$.

Na základe Dôsledku 5.3, v grafe G existuje perfektné spárenie M. Nech $P = (p_{ij})$ je permutačná matica, ktorá je definovaná predpisom $p_{ij} = 1$ ak $a_i b_j \in M$ a $p_{ij} = 0$ inak. Ďalej, položme $\lambda = \min\{d_{ij} : a_i b_j \in M\}$, t.j. λ reprezentuje najmenšie číslo spomedzi tých, ktoré sa nachádzajú v matici D na pozíciách odpovedajúcim nenulovým prvkom permutačnej matice P. Matica

$$D' = \frac{1}{1-\lambda}\big(D - \lambda P\big)$$

je konvexnou kombináciou dvojito stochastických matíc a teda je opäť dvojito stochastickou maticou, pričom obsahuje aspoň o jeden nenulový prvok menej ako matica D. Podľa indukčného predpokladu maticu D' je možné vyjadriť v tvare konvexnej kombinácie permutačných matíc, t.j. $D' = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_k P_k$, pre nejaké permutačné matice P_i a $\lambda_i \in \mathbb{R}_0^+$ spĺňajúce $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$. Následne

$$D = (1-\lambda)D' + \lambda P = (1-\lambda)\big(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_k P_k\big) + \lambda P,$$

čo dokazuje, že matica D je tiež konvexnou kombináciou permutačných matíc.

□

5.2 Spárenia vo všeobecných grafoch

Komponent grafu G sa nazýva *párny* (*nepárny*) ak má párny (nepárny) počet prvkov. Počet nepárnych komponentov grafu G budeme označovať symbolom $k_o(G)$.

Veta 5.7 (**Tutte**, 1947). *V grafe $G = (V, E)$ existuje perfektné spárenie práve vtedy, keď*

$$k_o(G - S) \leq |S|\,, \text{ pre všetky } S \subseteq V. \tag{5.2}$$

Dôkaz. Predpokladajme, že v grafe G existuje perfektné spárenie M. Keďže každá z hrán spárenia M pokrýva rôzne dvojice vrcholov, každý komponent grafu G má párny počet vrcholov. Teda podmienka (5.2) je splnená pre $S = \emptyset$. V ďalšom, nech S je neprázdna podmnožina V. Ak $G-S$ nemá nepárny komponent, tak $k_o(G-S) = 0 \leq |S|$. Predpokladajme, že $k_o(G - S) = k$, $k \geq 1$ a nepárne komponenty grafu $G - S$ sú $G_1, G_2, \ldots, G_k$ (pozn. v $G - S$ ešte môžu byť ďalšie párne komponenty). Nakoľko M je perfektným spárením v G a každý z komponentov G_i, $1 \leq i \leq k$, má nepárny počet vrcholov, v G_i existuje vrchol u_i, pričom hrana $u_iv_i \in M$, ktorá ho pokrýva, má nutne druhý koniec v_i v množine S. Naviac, ak $i \neq j$ a $u_iv_i \in M$, $u_jv_j \in M$, tak $v_i \neq v_j$, pretože M je spárenie. Týmto spôsobom je možné každému nepárnemu komponentu injektívne priradiť vrchol z množiny S, teda $k_o(G - S) \leq |S|$.

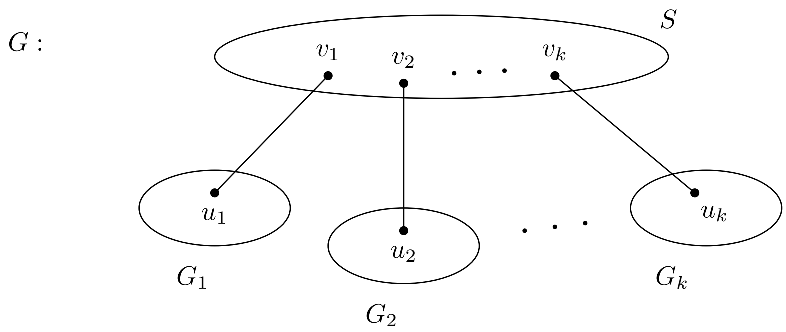
Naopak, ak pre všetky podmnožiny $S \subseteq V$ grafu G platí $k_o(G - S) \leq |S|$, tak v prípade $S = \emptyset$ dostávame $k_o(G) = 0$, t.j. každý komponent grafu G je párny, následkom čoho graf G má tiež párny počet prvkov. Indukciou ukážeme, že každý graf s párnym počtom prvkov spĺňajúci podmienku (5.2) má perfektné spárenie. Existuje práve jeden dvojvrcholový graf majúci iba párne komponenty, menovite K_2, ktorý očividne má perfektné spárenie. Nech $n \geq 4$ je párne prirodzené číslo. Predpokladajme, že v každom grafe H s párnym počtom vrcholov menším ako n, ktorý pre všetky podmnožiny $S \subseteq V(H)$ spĺňa podmienku $k_o(H - S) \leq |S|$, existuje perfektné spárenie.

Nech $G = (V, E)$ je n vrcholový graf, pre ktorý platí podmienka (5.2). Potom každý z komponentov grafu G je párny. Keďže podľa Lemy 3.6 každý netriviálny komponent grafu G obsahuje vrchol, ktorý nie je artikuláciou, existujú podmnožiny $R \subseteq V$ spĺňajúce $k_o(G - R) = |R|$ (napr. $R = \{v\}$, kde v je vrchol, ktorý nie je artikuláciou nejakého komponentu grafu G, reprezentuje takú podmnožinu). Nech S je podmnožina maximálnej mohutnosti spomedzi všetkých takýchto podmnožín a $G_1, G_2, \ldots, G_k$, kde $k = |S| \geq 1$, sú všetky nepárne komponenty grafu $G-S$. Všimnime si, že $G_1, G_2, \ldots, G_k$ sú jediné komponenty grafu $G - S$, pretože v opačnom prípade by $G - S$ mal nejaký párny komponent G_0 obsahujúci vrchol u_0, ktorý nie je artikuláciou. Potom $G_0 - u_0$ by bol nepárny komponent grafu G, pričom pre množinu $S_0 = S \cup \{u_0\}$ mohutnosti $k + 1$ by platilo

$$k_o(G - S_0) = |S_0| + 1 = k + 1,$$

čo je v spore vzhľadom na definíciu množiny S. Z tohto dôvodu, nepárne komponenty $G_1, G_2, \ldots, G_k$ sú jedinými komponentami grafu $G - S$.

Ďalej, pre každé prirodzené číslo i, kde $1 \leq i \leq k$, nech $S_i \subseteq S$ označuje množinu vrcholov z S, ktoré v grafe G susedia s aspoň jedným vrcholov komponentu G_i. Potom



Obr. 5.2: Spárenie v grafe G pokrývajúce množinu S (krok v dôkaze Vety 5.7).

každá z množín S_i je neprázdna. V opačnom prípade, ak by pre nejaké i platilo $S_i = \emptyset$, tak medzi množinami vrcholov S a $V(G_i)$ by v grafe G nebola žiadna hrana, následkom čoho nepárny komponent G_i grafu $G - S$ by bol tiež komponentom grafu G.

V ďalšom kroku dokážeme, že množinový systém $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ má systém rozličných reprezentantov. Vzhľadom na Vetu 5.5, sporom predpokladajme, že existuje j podmnožín $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_j}$ takých, že pre $T = S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup \cdots \cup S_{i_j}$ platí $|T| < j$. Je pomerne ľahko vidieť, že pre všetky i, graf $G - S_i$ obsahuje ako jeden z nepárnych komponentov komponent G_i. Teda špeciálne pre množinu T dostaneme

$$k_o(G - T) \geq j > |T|\,,$$

čo je odporuje podmienke (5.2).

Následne, pre množinový systém $\mathcal{S}$ existuje systém rozličných reprezentantov, t.j. množina $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ rôznych vrcholov s vlastnosťou $v_i \in S_i$ pre $1 \leq i \leq k$. Keďže každý komponent G_i obsahuje vrchol $u_i \in V(G_i)$ taký, že $u_i v_i \in E(G)$, množina hrán $\{u_i v_i : 1 \leq i \leq k\}$ tvorí spárenie v grafe G (Obr. 5.2).

Ako posledný krok ukážeme, že ak G_i, $1 \leq i \leq k$, je netriviálny komponent grafu G, tak v $G - u_i$ existuje perfektné spárenie. K tomuto účelu využijeme indukčný predpoklad, t.j. ukážeme, že

$$k_o(G_i - u_i - W) \leq |W|\,, \text{ pre všetky } W \subseteq V(G_i - u_i).$$

Znova sporom predpokladajme, že $k_o(G_i - u_i - W) > |W|$ pre nejakú podmnožinu $W \subseteq V(G_i - u_i)$. Pre počet vrcholov grafu $G_i - u_i$ dostávame

$$|V(G_i - u_i)| = |W| + \sum_{j=1}^{k_o(G_i - u_i - W)} |V(H_j)| + 2l,$$

pričom H_j pre $1 \leq j \leq k_o(G_i - u_i - W)$ označuje nepárne komponenty grafu $G_i - u_i - W$ a $2l$ predstavuje počet všetkých vrcholov grafu $G_i - u_i - W$, ktoré patria do nejakého párneho komponentu tohto grafu. Nakoľko $V(G_i - u_i)$ má párny počet vrcholov, prechodom ku kongruencii modulo 2 dostávame

$$0 \equiv |W| + \sum_{j=1}^{k_o(G_i - u_i - W)} 1 \pmod 2.$$

Teda $|W|$ a $k_o(G_i - u_i - W)$ majú rovnakú paritu, t.j. obe sú párne, respektíve nepárne, a musí platiť $k_o(G_i - u_i - W) \geq |W| + 2$. Položme $S' = S \cup W \cup \{u_i\}$. Potom

$$\begin{aligned} |S'| &\overset{(1)}{\geq} k_o(G - S') \overset{(2)}{=} k_o(G - S) + k_o(G_i - u_i - W) - 1 \\ &\geq |S| + (|W| + 2) - 1 = |S| + |W| + 1 = |S'| \,. \end{aligned}$$

pričom

(1) plynie z faktu, že graf G splňuje podmienku (5.2),

(2) vyplýva z toho, že vytvorenie grafu $G - S'$ je možné vidieť ako postupný proces, t.j. v prvom kroku sa odoberie množina S, následne vrchol u_i (to zníži počet nepárnych komponentov o 1) a nakoniec množina W.

To znamená, že $k_o(G - S') = |S'|$, avšak to je v rozpore z voľbou množiny S. Teda graf $G_i - u_i$ spĺňa podmienku (5.2) a podľa indukčného predpokladu, ak G_i je netriviálny graf, tak v grafe $G_i - u_i$ existuje perfektné spárenie. Konečne, zjednotenie spárenia $\{u_i v_i : 1 \leq i \leq k\}$ a perfektných spárení v grafoch $G_i - u_i$, kde G_i pre $1 \leq i \leq k$ sú netriviálne grafy, tvorí výsledné perfektné spárenie v grafe G.

$\square$

Kapitola 6

Farbenia grafov

6.1 Vrcholové farbenie

Vrcholovým farbením grafu $G = (V, E)$ rozumieme zobrazenie $c\colon V \to S$, pre ktoré platí $c(u) \neq c(v)$ v prípade, že vrcholy u a v sú susedné. Vrcholové farbenie spĺňajúce túto podmienku sa tiež zvykne nazývať vlastným. Prvky množiny S sa nazývajú prípustné farby. Ovšem jediná vec ktorá nás bude zaujímať ohľadom množiny S, je jej veľkosť. Jeden z typických problémov, ktorými sa budeme zaoberať, sa týka určenia najmenšieho prirodzeného čísla k, pre ktoré existuje k-vrcholové farbenie grafu G, t.j. vrcholové farbenie $c\colon V \to \{1, 2, \ldots, k\}$. Najmenšie také k, sa nazýva *chromatickým číslom* grafu G a onačuje sa symbolom $\chi(G)$. Graf sa nazýva *k-chromatický* ak $\chi(G) = k$ a *k-zafarbitelný* ak $\chi(G) \leq k$. Teda

$$\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{N} : G \text{ je } k\text{-zafarbitelný}\}.$$

Z iného uhlu pohľadu, k-farbenie grafu $G = (V, E)$ je možné vidieť ako rozklad $\{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ množiny vrcholov V, pričom každá z množín V_i, $1 \leq i \leq k$ je nezávislá, t.j. žiadne dva vrcholy tejto množiny nie sú susedné. Množiny $V_i = \{v \in V : c(v) = i\}$, kde $1 \leq i \leq k$ sa nazývajú farebné triedy prislúchajúce vrcholovému farbeniu $c\colon V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ a vzhľadom na definíciu vrcholového farbenia je ľahko vidieť, že každá z týchto množín je nezávislá. Z tohto dôvodu, sa občas k-farebné grafy zvyknú tiež nazývať ako k-partitné.

Tvrdenie 6.1. *Pre každý graf G s m hranami platí*

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}\ .$$

Dôkaz. Nech c je vrcholové farbenie grafu G využívajúce $k = \chi(G)$ farieb. Potom medzi ľubovoľnými dvoma farebými triedami musí existovať aspoň jedna hrana. V opačnom prípade by bolo možné použiť rovnakú farbu na ofarbenie vrcholov patriacich do oboch daných farebných tried. Následne $m \geq \frac{1}{2}k(k-1)$ a vyriešením tejto nerovnosti vzhľadom na neznámu k, dostaneme tvrdenie našej vety. $\square$

Tvrdenie 6.2. *Ak H je podgraf grafu G, tak $\chi(H) \leq \chi(G)$.*

Dôkaz. Očividne, ak H je podgraf grafu G, tak každé vrcholové farbenie grafu G, zúžené na množinu $V(H)$, je vrcholovým farbením H. $\square$

Tvrdenie 6.3. *Pre každý graf G platí $\chi(G) = \max\{\chi(C) : C$ je komponent grafu $G\}$.*

Dôkaz. Podľa Tvrdenia 6.2, pre všetky komponenty C grafu G platí $\chi(C) \leq \chi(G)$ a teda $k = \max\{\chi(C) : C \text{ je komponent grafu } G\} \leq \chi(G)$.

Na druhej strane, nech $C_1, C_2, \ldots, C_p$ sú komponety súvislosti grafu G. Potom pre každý komponent C_i, $1 \leq i \leq p$ existuje nejaké k-vrcholové farbenie $c_i \colon V(C_i) \to \{1, 2, \ldots, k\}$. Nakoľko medzi rôznymi komponentami nie sú žiadne hrany, zobrazenie $c \colon V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ definované pre všetky vrcholy $v \in V$ predpisom $c(v) = c_i(v)$ ak $v \in V(C_i)$ je k-vrcholovým farbením grafu G. Teda $k \geq \chi(G)$. $\square$

Je pomerne ľahko vidieť, že 1-zafarbiteľné grafy sú práve grafy neobsahujúce žiadne hrany. 2-zafarbiteľné grafy sú práve bipartitné grafy. Vo všeobecnosti, pre $k \geq 3$ je problém k-zafarbiteľnosti zložitý (patrí do tzv. triedy $\mathcal{NP}$-úplných problémov).

6.1.1 Dolné odhady pre $\chi(G)$

Je očividné, že $\chi(K_n) = n$. Spolu s Tvrdením 6.2 dostaneme

Tvrdenie 6.4. *$\chi(G) \geq \omega(G)$ pre všetky grafy G.*

Tento odhad pre isté typy grafov je tesný, t.j. existujú grafy spĺňajúce $\chi(G) = \omega(G)$, avšak existujú grafy pre ktoré platí ostrá nerovnosť v totmto vzťahu. Ako príklad uveďme kružnicu nepárnej dĺžky C_{2n+1}, pre ktorú platí $\chi(C_{2n+1}) = 3$ a $\omega(C_{2n+1}) = 2$.

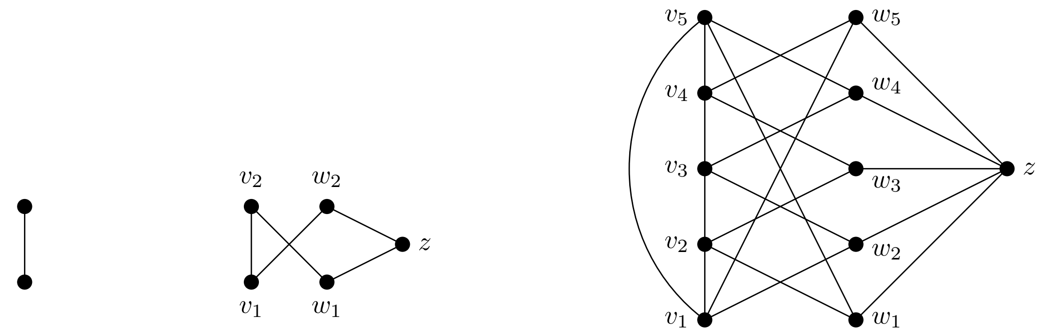
Ukážeme, že v skutočnosti rozdiel medzi chromatickým a klikovým číslom grafu môže byť ľubovoľne veľký. Popíšeme konštrukciu grafov M_k, $k \geq 1$, pochádzajúcu od J. Mycielskeho, pre ktoré platí $\omega(M_k) \leq 2$, t.j. grafy M_k neobsahujú trojuholníky ako svoje podgrafy, pričom $\chi(M_k) = k$.

Veta 6.5. *Pre každé $k \in \mathbb{N}$ existuje k-chromatický graf bez trojuholníkov.*

Dôkaz. Mycielskeho grafy M_k, $k \geq 1$ sú definované induktívne a to nasledujúcim spôsobom. $M_1 = K_1$ a $M_2 = K_2$. Pre $k \geq 2$, nech $V(M_k) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Graf M_{k+1} je definovaný na množine vrcholov $V(M_k) \cup \{w_1, w_2, \ldots, w_n, z\}$ a pre množinu hrán platí $E(M_{k+1}) = E(M_k) \cup \{w_i v_j : v_i v_j \in E(M_k)\} \cup \{w_i z : 1 \leq i \leq n\}$ (Obr. 6.1).

Indukciou vzhľadom na k ukážeme, že pre všetky $k \geq 1$, M_k je k-chromatický graf bez trojuholníkov. Toto triviálne platí pre $k = 1$, teda v ďalšom predpokladajme, že pre $k \geq 1$, Mycielskeho graf M_k spĺňa uvedené podmienky.

Najprv ukážeme, že M_{k+1} neobsahuje K_3 ako podgraf, t.j. je bez trojuholníkov. Z definície grafu M_{k+1} vidíme, že množina $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ je nezávislá (medzi vrcholmi množiny W nie je žiadna hrana) a vrchol z je susedný iba s vrchlomi množiny W, teda vrchol z nie je v žiadnom trojuholníku. Naviac, ak by v grafe M_{k+1} existoval trojuholník T, tak nutne dva z jeho troch vrcholov by museli patriť do množiny $V(M_k)$ a tretí z týchto vrcholov do množiny W. Bez ujmy na všeobecnosti, nech $V(T) = \{w_i, v_j, v_k\}$. Keďže w_i je susedný s vrcholom v_j ako aj s v_k, podľa definície



M_2 M_3 M_4

Obr. 6.1: Mycielskeho grafy M_2, M_3 a M_4.

grafu M_{k+1}, by museli v grafe M_k existovať hrany v_iv_j a v_iv_k. Avšak v tomto prípade, by vrcholy $\{v_i, v_j, v_k\}$ v grafe M_k indukovali trojuholník, čo je v rozpore s indukčným predpokladom.

Ďalej dokážeme, že $\chi(M_{k+1}) = k+1$. Keďže M_k je podgrafom grafu M_{k+1}, vzhľadom na Tvrdenie 6.2, platí $\chi(M_{k+1}) \geq k$. Nech $c\colon V(M_k) \to \{1, 2, \dots, k\}$ je nejaké k-vrcholové farbenie grafu M_k. Pre každé $1 \leq i \leq n$ priraďme vrcholu w_i farbu $c(v_i)$, t.j. vrcholy v_i a w_i budú v grafe M_{k+1} ofarbené rovnakou farbou. Vrcholu z priraďme farbu $k+1$. Takto rozšírené farbenie $\hat{c}$ bude $(k+1)$-vrcholovým farbením grafu M_{k+1}. Tento fakt ľahko overíme rozborom možností. Ak $xy \in E(M_{k+1})$, potom buď $x = v_i$, $y = v_j$ a $v_iv_j \in E(M_k)$, alebo $x = w_i$, $y = v_j$ $v_iv_j \in E(M_k)$, alebo $x = z$ a $y = w_i$. V prvých dvoch prípadoch $\hat{c}(x) = c(v_i) \neq c(v_j) = \hat{c}(y)$ a v treťom $\hat{c}(x) = k+1 \neq \hat{c}(y) \in \{1, 2, \dots, k\}$. Týmto sme ukázali, že $\chi(M_{k+1}) \leq k+1$.

Ak by platilo $\chi(M_{k+1}) = k$, tak by existovalo k-vrcholové farbenie grafu M_{k+1} pomocou množiny farieb $\{1, 2, \dots, k\}$. Bez ujmy na všeobecnosti môžme predpokladať, že vrchol z je ofarbený farbou k. Potom žiadny z vrcholov množiny W nie je ofarbený farbou k. Následne, prefarbime každý vrchol v_i z množiny $V(M_k)$, ktorý má farbu k, rovnakou farbou akú má vrchol w_i. Nakoľko susedia vrchola w_i v množine $V(M_k)$ sú totožný so susedmi vrchola v_i, týmto spôsobom dostávame $(k-1)$-vrcholové farbenie grafu M_k, čo je v spore s indukčným predpokladom. Teda musí platiť $\chi(M_{k+1}) = k+1$. □

Tvrdenie 6.6. *Pre všetky grafy G platí* $\chi(G) \geq \dfrac{|V(G)|}{\alpha(G)}$.

Dôkaz. Pripomeňme, že $\alpha(G)$ označuje číslo vrcholovej nezávislosti grafu G a teda $|S| \leq \alpha(G)$ pre každú nezávislú množinu $S \subseteq V(G)$. Nech $\chi(G) = k$ a $c\colon V(G) \to \{1, 2, \dots, k\}$ je k-vrcholové farbenie grafu G. Potom pre každú nezávislú množinu $V_i = \{v \in V(G) : c(v) = i\}$, $1 \leq i \leq k$, platí $|V_i| \leq \alpha(G)$. Následne

$$|V(G)| = \sum_{i=1}^{k} |V_i| \leq \sum_{i=1}^{k} \alpha(G) = k \cdot \alpha(G),$$

z čoho vyplýva $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$. □

Uvedieme ešte dolný odhad chromatického čísla v závislosti od počtu vrcholov a hrán.

Veta 6.7. *Ak G je graf s n vrcholmi a m hranami, tak*

$$\chi(G) \geq \frac{n^2}{n^2 - 2m}.$$

Dôkaz. Predpokladajme $\chi(G) = k$ a nech c je k-farbenie grafu G, ktorého farebné triedy sú $V_1, V_2, \ldots, V_k$ s počtom vrcholov $|V_i| = n_i$ pre všetky $i = 1, \ldots, k$. Potom možnosť s najväčším možným počtom hrán nastáva práve vtedy, keď G je úplný k-partitný graf s k partíciami $V_1, V_2, \ldots, V_k$, pričom mohutnosti týchto partícií sú čo najviac rovnaké (každá V_i má veľkosť čo najbližšie k hodnote $\frac{n}{k}$, pre $1 \leq i \leq k$). Toto implikuje

$$m \leq \binom{k}{2} \frac{n^2}{k^2}$$

a teda

$$2m \leq \frac{(k-1)n^2}{k}.$$

Využitím tejto nerovnosti dostávame požadovanú nerovnosť

$$\frac{n^2}{n^2 - 2m} \leq \frac{n^2}{n^2 - \frac{(k-1)n^2}{k}} = k = \chi(G).$$

□

6.1.2 Vzťah medzi $\chi(G)$ a $\Delta(G)$

Vačšina horných odhadov chromatického čísla je daná algoritmami, ktoré produkujú príslušné vrcholové farbenie. Najviac rozšíreným je tzv. pažravý algoritmus. V ďalšom demonštrujeme jeho využitie.

Lema 6.8. *Nech G je n-vrcholový graf a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ je usporiadanie jeho vrcholov, ktoré pre ľubovolné i, $1 \leq i \leq n$, spĺňa $|\{j : j < i,\ v_j v_i \in E(G)\}| \leq k$, t.j. každý vrchol má najviac k susedov, ktorí sú v danom usporiadaní pred ním. Potom $\chi(G) \leq k + 1$.*

Dôkaz. Nech $v_1, v_2, \ldots, v_n$ je usporiadanie vrcholov spĺňajúce uvedenú podmienku. Takzvané pažravé $(k+1)$-farbenie $\varphi\colon V \to \{1, \ldots, k+1\}$ asociované s týmto usporiadaním je definované rekurentne, a to nasledujúcim spôsobom:

$$\varphi(v_i) = \min\big\{\{1, \ldots, k+1\} \smallsetminus \{\varphi(v_j) : j < i, v_j v_i \in E(G)\}\big\},$$

t.j. vrcholu v_i je priradená najmenšia farba, ktorá doposiaľ nebola použitá na ofarbenie žiadneho jeho suseda s menším indexom. Nakoľko každý z vrcholov má najviac k susedov, ktorí ho predchádzajú, v každom z kroku máme aspoň jednu farbu k dispozícii. Evidentne, susedné vrcholy budú ofarbené rôznymi farbami, teda φ reprezentuje $(k+1)$-vrcholové farbenie grafu G a $\chi(G) \leq k + 1$. □

Nakoľko ľubovoľné usporiadanie vrcholov spĺňa podmienku práve dokázanej lemy pre hodnotu parametra $k = \Delta(G)$, dostávame nasledujúce tvrdenie.

Dôsledok 6.9. *Pre všetky grafy platí* $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Horné ohraničenie dané v tomto tvrdení sa vo všeobecnosti nedá vylepšiť. Napríklad $\chi(K_n) = n = \Delta(K_n) + 1$, $\chi(C_{2n+1}) = 3 = \Delta(C_{2n+1}) + 1$, t.j. úplné grafy a nepárne kružnice reprezentujú grafy, pre ktoré sa toto horné ohraničenie reálne nadobúda. Avšak ako neskôr ukážeme, tvz. Brooksova veta, úplné grafy a kružnice nepárnej dĺžky sú jediné typy grafov, pre ktoré platí $\chi(G) = \Delta(G) + 1$.

Veta 6.10. *Pre každý graf G platí*

$$\chi(G) \leq 1 + \max\{\delta(H) : H \subseteq G\},$$

pričom maximum sa berie cez všetky vrcholovo indukované podgrafy H grafu G.

Dôkaz. Označme $k = \max\{\delta(H) : H \subseteq G\}$. Predpokladajme, že graf má n-vrcholov a nech v_n je vrchol grafu $G_n = G$, spĺňajúci $\deg_{G_n}(v_n) = \delta(G_n)$. Potom $\deg_{G_n}(v_n) \leq k$. Položme $G_{n-1} = G_n - v_n$ a podobne ako v prípade grafu G_n, existuje vrchol v_{n-1} taký, že $\deg_{G_{n-1}}(v_{n-1}) = \delta(G_{n-1}) \leq k$. Pokračujúc takýmto spôsobom, zostrojíme postupnosť vrcholov $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a postupnosť indukovaných podgrafov $G_1, G_2, \ldots, G_n$ grafu G, pričom $v_i \in V(G_i)$ pre $1 \leq i \leq n$ a $\deg_{G_i}(v_i) \leq k$. Keďže všetci susedia vrchola v_i, ktorí sú v popísanom usporiadaní pred týmto vrcholom, patria do grafu G_i, toto usporiadanie splňuje podmienku Lemy 6.8. Následne, použitie pažravého farbenia dáva nerovnosť $\chi(G) \leq 1 + k$. □

Číslo $\delta^*(G) = \max\{\delta(H) : H \subseteq G\}$ označuje tzv. degeneráciu grafu G. Očividne, $\delta^*(G) \leq \Delta(G)$ pre všetky grafy. Graf G sa nazýva k-*degenerovaný*, ak každý podgraf grafu G obsahuje vrchol stupňa najviac k. Teda $\delta^*(G)$ označuje najmenšie číslo k, pre ktoré je graf G k-degenerovaný. Ako je možné vidieť, z dôkazu Vety 6.10 vyplýva, že ak graf G je k-degenerovaný tak $\chi(G) \leq k + 1$.

Ako sme už spomínali, našim cieľom je dokázať nasledujúcu vetu.

Veta 6.11 (**Brooks** 1941)**.** *Nech G je súvislý graf. Ak G nie je izomorfný s úplným grafom ani s kružnicou nepárnej dĺžky, tak* $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

K dôkazu tejto vety budeme potrebovať niekoľko pomocných tvrdení.

Lema 6.12. *Pre súvislý graf G platí $\delta^*(G) = \Delta(G)$ práve vtedy, keď G je regulárny.*

Dôkaz. Označme $\Delta(G) = \Delta$. Ak G je regulárny, tak

$$\Delta = \delta(G) \leq \max\{\delta(H) : H \subseteq G\} = \delta^*(G) \leq \Delta,$$

čo znamená $\delta^*(G) = \Delta$.

Naopak, predpokladajme $\delta^*(G) = \Delta$. Potom existuje indukovaný podgraf H grafu G taký, že $\delta(H) = \Delta$. To ale znamená, že H je Δ-regulárny a naviac žiadny vrchol podgrafu H nemôže mať suseda mimo $V(H)$. Keďže G je súvislý, dostávame $H = G$. □

Vzhľadom na Vetu 6.10 dostávame

Dôsledok 6.13. *Ak súvislý graf G nie je regulárny, tak $\chi(G) \le \Delta(G)$.*

Lema 6.14. *Nech G je súvislý $\Delta(G)$-regulárny graf. Ak G obsahuje artikuláciu, tak $\chi(G) \le \Delta(G)$.*

Dôkaz. Nech vrchol $v \in V(G)$ je artikuláciou v grafe G a $C_1, C_2, \dots, C_n$, $n \ge 2$ sú komponenty grafu $G - v$. Pre $1 \le i \le n$ označme G_i podgrafy indukované množinou $V(C_i) \cup \{v\}$. Potom ani jeden z týchto grafov nie je regulárny, keďže $\deg_{G_i}(v) < \Delta(G) = \Delta$. Takže podľa Dôsledku 6.13, pre každý graf G_i existuje Δ-vrcholové farbenie $\varphi_i \colon V(G_i) \to \{1, \dots, \Delta\}$. Nech π_i je ľubovoľná permutácia množiny farieb $\{1, \dots, \Delta\}$ taká, že $\pi_i(\varphi_(v)) = 1$. Potom, každé prepermutovanie farieb, t.j. zobrazenie $\varphi_i \circ \pi_i \colon V(G_i) \to \{1, \dots, \Delta\}$, je taktiež Δ-vrcholovým farbením grafu G_i. Následne, zobrazenie $\Phi \colon V(G) \to \{1, \dots, \Delta\}$ definované predpisom $\Phi(u) = \big(\varphi_i \circ \pi_i\big)(u) = \pi_i(\varphi_i(u))$ ak $u \in V(G_i)$, je Δ-vrcholovým farbením celého grafu G, čo dokazuje $\chi(G) \le \Delta$. □

Lema 6.15. *Nech G je 2-súvislý graf, pre ktorý $\delta(G) \ge 3$. Ak G nie je úplným grafom, tak v grafe G existuje vrchol x a dvojica nesusedných vrcholov v_1, v_2 taká, že $xv_1 \in E(G)$, $xv_2 \in E(G)$ a graf $G - \{v_1, v_2\}$ je súvislý.*

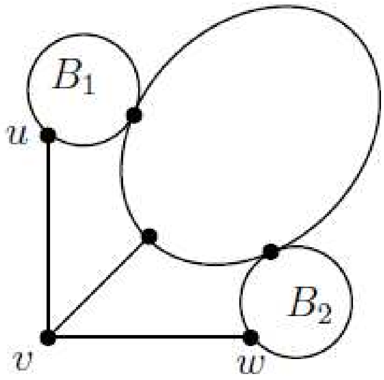
Dôkaz. Najprv predpokladajme, že graf G je 3-súvislý. Keďže G nie je úplný, existuje dvojica vrcholov $u_1, u_2 \in V(G)$, ktorá nie je spojená hranou. Graf G je súvislý, preto medzi vrcholmi u_1 a u_2 musí existovať cesta. Nech P je najkratšia $u_1 - u_2$ cesta v grafe G a nech $u_1 = v_1$, x, v_2 označujú prvý, druhý, respektíve tretí vrchol cesty P. Potom v_1v_2 netvorí hranu, v opačnom prípade by jej existencia viedla ku kratšej ceste ako je P a naviac, graf $G - \{v_1, v_2\}$ je súvislý, lebo podľa predpokladu G je 3-súvislý.

V ďalšom predpokladajme, že G nie je 3-súvislý. Teda v grafe G existuje separujúca množina $\{x, y\} \subseteq V(G)$, t.j. $G - \{x, y\}$ je nesúvislý. V tomto prípade, $G - x$ nie je 2-súvislý (vrchol y je artikuláciou v $G - x$) a preto musí obsahovať aspoň dva koncové bloky B_1 a B_2. Keďže G je 2-súvislý, vrchol x musí byť susedný s nejakými vrcholmi $v_1 \in B_1$ a $v_2 \in B_2$, pričom oba vrcholy v_i, $i = 1, 2$ nie sú artikuláciou v grafe $G - x$. To vyplýva z toho, že ak by napríklad x nesusedil so žiadnym vrcholom z bloku B_1, respektíve iba s vrcholom y_1, ktorý je artikuláciou, tak graf G by obsahoval artikuláciu (konkrétne vrchol y_1), čo by bolo v spore s predpokladom 2-súvislosti grafu G. Očividne, v_1v_2 netvorí hranu, ináč by vrcholy v_1 a v_2 nemohli byť v rôznych blokoch grafu G (Obr. 6.2).

Následne $B_1 - v_1$, ako aj $B_2 - v_2$ sú súvislé a to znamená, že aj graf $G - \{x, v_1, v_2\}$ je súvislý. Keďže $\deg_G(x) \ge 3$, vrchol x ma suseda v množine $V(G) \smallsetminus \{v_1, v_2\}$ a teda graf $G - \{v_1, v_2\}$ je súvislý. □

Dôkaz Vety 6.11. Vzhľadom na Dôsledok 6.13 a Lemu 6.14 môžme predpokladať, že G je regulárny 2-súvislý graf. Naviac môžme predpokladať, že $\Delta = \Delta(G) \ge 3$, keďže G je úplný ak $\Delta \le 1$ a G je kružnicou ak $\Delta = 2$ a v týchto prípadoch veta platí.

Nakoľko G nie je úplný, podľa Lemy 6.15 existuje trojica vrcholov $x = v_n, v_1, v_2$ taká, že v_1 a v_2 nie sú susedné, oba susedia s vrcholom v_n a graf $G - \{v_1, v_2\}$ je súvislý. Nech T je nejaká kostra grafu $G - \{v_1, v_2\}$. Oindexujme vrcholy kostry T číslami $3, \dots n$ tak,



Obr. 6.2: Konfigurácia prvkov v dôkaze Lemy 6.15.

že $i < j$ akonáhle $\text{dist}_T(v_i, v_n) > \text{dist}_T(v_j, v_n)$. Takéto očíslovanie je možné dosiahnuť napríklad tak, že zostupne priradzujeme čísla $n-1, \ldots$ vrcholom vo vzdialenosti 1 od vrcholu v_n, následne vo vzdialenosti 2, atď.

Týmto dostaneme usporiadanie vrcholov $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$, pričom každý vrchol v_i, pre $1 \leq i \leq n-1$ bude mať najviac $\Delta - 1$ susedov s menším indexom ako i. Pažravé farbenie grafu G priradí každému z vrcholov v_1 a v_2 farbu 1. Keď dôjde na vrchol v_n, najviac $\Delta - 1$ farieb bude použitých na ofarbenie susedov v_n. To znamená, že na ofarbenie grafu G bude stačiť Δ farieb. □

Podáme aj iný, alternatívny, dôkaz Brooksovej vety [3]. Nech G je graf, ktorého maximálny stupeň spĺňa $\Delta(G) \leq k$. Predpokladajme, že časť grafu G je ofarbená pomocou najviac k farieb. Nech $P = v_1 v_2 \ldots v_j$ je cesta v G, ktorej vrcholy nie sú ofarbené. Potom je možné postupne ofarbiť vrcholy v_1 až v_{j-1} ležiace na tejto ceste k farbami procedúrou popísanou v Leme 6.8, pretože v momente farbenia vrchola v_i je ešte jeho sused v_{i+1} neofarbený. Označíme túto postupnú procedúru farbenia vrcholov cesty ako P-Farb$(v_1, \ldots, v_{j-1}; v_j)$. Po vykonaní procedúry P-Farb$(v_1, \ldots, v_{j-1}; v_j)$ ostane vrchol v_j neofarbený, špeciálne ak $j = 1$ tak P-Farb nerobí nič.

Dokážeme nasledujúce tvrdenie, ktoré reprezentuje ekvivalentnú formuláciu Brooksovej vety.

Veta 6.16. *Nech k je prirodzené číslo a G je graf spĺňajúci $3 \leq \Delta(G) \leq k$. Ak G neobsahuje kliku na $k+1$ vrcholoch, t.j. K_{k+1} ako svoj podgraf, tak $\chi(G) \leq k$.*

Dôkaz. Budeme postupovať indukciou vzhľadom na počet vrcholov n grafu $G = (V, E)$. Pre $n \leq k$ tvrdenie triviálne platí. Môžme predpokladať, že graf G je regulárny. V opačnom prípade môžeme z G odstrániť ľubovoľný vrchol v stupňa menšieho ako k, na graf $G - v$ aplikovať indukčný predpoklad a následne ofarbiť vrchol v farbou, ktorá nie je prítomná v množine jeho susedov.

Nech $v \in V$ je ľubovoľný vrchol. Keďže G neobsahuje K_{k+1} ako podgraf, v množine $N(v)$ susedov vrchola v musí existovať dvojica nesusedných vrcholov x a y. Označme

$v_1 = x$, $v_2 = v$ a $v_3 = y$. Nech $P = v_1v_2v_3 \dots v_r$ je najdlhšia možná cesta začínajúca touto trojicou vrcholov. Vzhľadom na maximalitu dĺžky cesty P, všetci susedia posledného vrchola v_r v rámci G ležia na ceste P.

1. prípad:

Predpokladajme platnosť $r = n$, t.j. P obsahuje všetky vrcholy grafu G. Nech v_j je sused vrchola $v = v_2$, ktorý je odlišný od v_1 a v_3 (taký vrchol musí existovať, keďže $3 \leq \Delta(G)$). Ako prvé, priraďme vrcholom v_1 a v_3 rovnakú farbu. Následne, aplikujme procedúry P-$\textsc{Farb}(v_4, v_5, \dots, v_{j-1}; v_j)$ a P-$\textsc{Farb}(v_n, v_{n-1} \dots, v_j; v_2)$. Nakoniec, ofarbime vrchol v_2, čo je možné, nakoľko susedia v_1 a v_3 majú rovnaké farby.

2. prípad:

Predpokladajme, že $r < n$. Pripomíname, že všetci susedia vrchola v_r ležia na ceste P. Nech v_j je sused v_r s najmenším indexom, teda $C = v_jv_{j+1} \dots v_r$ tvorí cyklus v G. Uvažujme podgraf $G' = G - C$ získaný odstránením všetkých vrcholov z množiny C. Vzhľadom na indukčný predpoklad ofarbime G' pomocou k farieb. Ak medzi G' a C neexistuje žiadna hrana, použitím indukčného predpokladu, ofarbením podgrafu $G[C]$ indukovaného množinou C získame ofarbenie celého grafu G pomocou k farieb.

V ďalšom predpokladajme, že v C existuje vrchol majúci suseda v G'. Nech $v_l \in C$ je vrchol s touto vlastnosťou, ktorý má najväčší možný index a u je jeho sused v G'. Potom $l < r$, lebo vrchol v_r má všetkých susedov v rámci C. Keďže vrchol v_{l+1} má všetkých susedov v C, môžeme mu priradiť rovnakú farbu ako má vrchol u. Následne aplikujme procedúru P-$\textsc{Farb}(v_{l+2}, \dots, v_r, v_j, \dots, v_{l-1}; v_l)$. Ak $v_{l+1} = v_r$, aplikujeme P-$\textsc{Farb}(v_j, \dots, v_{l-1}; v_l)$. Ako posledný ofarbíme vrchol v_l voľnou farbou, ktorá musí v množine jeho susedov existovať, pretože v_l má dvoch susedov, konkrétne u a v_{l+1}, ktorým je priradená rovnaká farba. Týmto spôsobom získame ofarbenie celého grafu G pomocou k farieb. $\square$

Na záver tejto časti spomenieme domnienku, týkajúcu sa horného ohraničenia chromatického čísla, ktorú formuloval B. Reed v roku 1998. Poznamenávame, že táto domnienka momentálne reprezentuje jeden z najdôležitejších otvorených problémov v oblasti farbenia grafov.

Je známe, že pre chromatické číslo χ platia tieto triviálne ohraničenia, dané klikovým číslom a maximálnym stupňom grafu,

$$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Spomínaná domnienka udáva horný odhad chromatického čísla ako aritmetický priemer tohto dolného a horného odhadu.

Domnienka (**B. Reed** 1998)**.** *Pre každý graf G platí*

$$\chi(G) \leq \left\lceil \frac{\omega(G) + \Delta(G) + 1}{2} \right\rceil.$$

Vo všeobecnosti je známe, že platí nasledujúce tvrdenie, dôkaz ktorého taktiež urobil B. Reed.

Veta 6.17. *Pre každý graf G s n vrcholmi platí*

$$\chi(G) \leq \left\lfloor \frac{n+\omega(G)}{2} \right\rfloor.$$

Dôkaz. Budeme postupovať matematickou indukciou vzhľadom na nezáporné číslo $k = |V(G)| - \omega(G)$. Ak $k = 0$, tak G je graf pre ktorý $|V(G)| - \omega(G) = 0$ a teda $G = K_n$ pre nejaké $n \in \mathbb{N}$. V tomto prípade platí $\chi(G) = \omega(G) = n$ a $\chi(G) = \left\lfloor \frac{n+\omega(G)}{2} \right\rfloor$.

Ďalej pre $k \in \mathbb{N}$ predpokladajme, že všetky grafy H s vlastnosťou $|V(H)| - \omega(H) < k$ spĺňajú nerovnosť $\chi(H) \leq \left\lfloor \frac{|V(H)|+\omega(H)}{2} \right\rfloor$. Nech G je n vrcholový graf, pre ktorý $n - \omega(G) = k$. Ukážeme, že $\chi(G) \leq \left\lfloor \frac{n+\omega(G)}{2} \right\rfloor$.

Ak $k = 1$, tak $\omega(G) = n - 1$ a teda

$$\chi(G) = n - 1 = \left\lfloor \frac{2n-1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+\omega(G)}{2} \right\rfloor.$$

Teda môžme predpokladať $k \geq 2$. Keďže G nie je úplný, G obsahuje dvojicu nesusedných vrcholov u a v. Nech $H = G - u - v$. Potom H má $n - 2$ vrcholov a buď $\omega(H) = \omega(G)$, alebo $\omega(H) = \omega(G) - 1$. V oboch prípadoch pre H platí $0 \leq |V(H)| - \omega(H) < k$ a vzhľadom na indukčný predpoklad dostávame

$$\chi(H) \leq \left\lfloor \frac{n-2+\omega(H)}{2} \right\rfloor.$$

Teda existuje $\left\lfloor \frac{n-2+\omega(H)}{2} \right\rfloor$-farbenie grafu H a priradením rovnakej novej farby vrcholom u a v pre graf G dostávame

$$\chi(G) \leq \left\lfloor \frac{n-2+\omega(H)}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{n+\omega(H)}{2} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{n+\omega(G)}{2} \right\rfloor.$$

□

6.2 Hranové farbenie

Hranovým farbením grafu $G = (V, E)$ rozumieme zobrazenie $c\colon E(G) \to S$, pre ktoré platí $c(e_1) \neq c(e_2)$ pre všetky susedné hrany $e_1, e_2 \in E(G)$. Farbenie využívajúce k-farieb budeme nazývať k-hranovým farbením grafu G. Podobne ako v prípade chromatické čísla, definujeme pojem *chromatického indexu* (hranového chromatického čísla) $\chi'(G)$ grafu G ako minimálne k pre ktoré existuje k-hranové ofarbenie grafu G. Teda

$$\chi'(G) = \min\{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : G \text{ je } k\text{-hranovo zafarbitelný}\}.$$

Je vidieť, že problém nájsť hranové farbenie grafu G je ekvivalentný s problémom nájsť vrcholové farbenie jeho hranového grafu $L(G)$, teda $\chi'(G) = \chi(L(G))$. Avšak prechod k vrcholovému farbeniu hranového grafu nedáva nejakú podstatnú výhodu, preto budeme študovať danú problematiku v terminológii hranových farbení.

Hlavným výsledkom v oblasti týkajúcej sa hranového farbenia je nasledujúca veta V. G. Vizinga, ktorá dáva pomerne presný odhad pre veľkosť chromatického indexu.

Veta 6.18 (Vizing 1964). *Pre všetky grafy G platí $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G)+1$.*

Dôkaz. Dolné ohraničenie $\Delta(G) \leq \chi'(G)$ vyplýva z faktu, že ak $\Delta(G)$ hrán inciduje s nejakým vrcholom, tak na ofarbenie každej z týchto hrán je potrebných $\Delta(G)$ rôznych farieb.

Horné ohraničenie je možné dokázať matematickou indukciou vzhľadom na počet hrán. Nech G je graf a $uv_0 \in E(G)$ ľubovoľná hrana. Predpokladajme, vzhľadom na indukčný predpoklad, že $G - uv_0$ je hranovo ofarbený pomocou $\Delta(G)+1$ farieb. Keďže $\Delta(G)$ je maximálny stupeň v grafe G, aspoň jedna z farieb ostáva nevyužitá pri každom vrchole grafu G, špeciálne to platí aj pre vrcholy u a v_0. Zostrojme postupnosť hrán $uv_0, uv_1, \ldots$, a postupnosť farieb $c_0, c_1, \ldots$ nasledovne: pre daný index i vyberme farbu c_i, ktorá je nevyužitá pri vrchole v_i a následne uv_{i+1} bude hrana, ktorá je ofarbená farbou c_i. Tento proces končí (pre $i = k$), ak c_k je nevyužitá farba pri vrchole u, alebo ak pomocou c_k je ofarbená jedna z hrán uv_j, $j < k$.

Prípad 1:

Ak c_k je nevyužitá farba pri vrchole u, tak môžme prefarbiť hrany uv_i farbou c_i pre $0 \leq i \leq k$. Takéto prefarbenie vedie ku korektnému hranovému farbeniu grafu G, keďže každá farba c_i chýba pri vrchole v_i a naviac c_k chýba aj pri vrchole u.

Prípad 2:

Ak c_k je farba, ktorou je ofarbená hrana $uv_{j<k}$, tak prefarbime hrany uv_i farbou c_i pre $0 \leq i < j$ a odoberme farbu z hrany uv_j. Farba c_k (pomenujme ju ako „sivá“) chýba teraz pri vrchole v_j a taktiež pri v_k. V ďalšom nech „čierna“ je farba, ktorá chýba pri vrchole u. Uvažujme tri možnosti: a) Ak sivá taktiež chýba pri u, ofarbíme uv_j touto farbou. b) Ak čierna chýba pri v_j, tak môžme ofarbiť hranu uv_j pomocou čiernej farby. c) Ak čierna je nevyužitá pri v_k, tak ofarbíme hrany uv_i farbou c_i pre $j \leq i < k$ a hranu uv_k ofarbíme čiernou farbou.

Ak nenastane ani jeden z vyššie spomínaných prípadov, tak uvažujme podgraf pozostávajúci iba zo sivých a čiernych hrán. Komponenty tohto podgrafu sú buď cesty alebo kružnice. Vrcholy u, v_j a v_k sú koncovými vrcholmi ciest v tomto „sivo-čiernom“ podgrafe, následkom čoho nemôžu všetky patriť do jedného komponentu. V tomto prípade, vyberme komponent obsahujúci práve jeden z týchto troch vrcholov a vymeňme farby na hranách v rámci tohto komponentu. Týmto zaistíme, že nastane jeden z už skôr spomínaných prípadov a), b), alebo c), t.j. buď pri u bude nevyužitá sivá farba, alebo čierna farba bude chýbať pri jednom z vrcholov v_j alebo v_k. Následne je možné aplikovať jeden z už uvažovaných prípadov. □

Vzhľadom na predchádzajúcu vetu vieme, že v súvislosti s maximálnym stupňom, pre chromatický index grafu existujú len dve možnosti, buď $\chi'(G) = \Delta(G)$, alebo $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$. V prvom prípade hovoríme, že graf G patrí do *Triedy 1*, v druhom prípade, že graf G patrí do *Triedy 2*. Teda jednou z hlavných otázok v rámci hranového farbenia grafov je rozhodnúť, do ktorej z dvoch uvažovaných tried daný graf patrí. Vo všeobecnosti, nie je známa jednoduchá podmienka, ktorá by dávala odpoveď na túto otázku.

V ďalšom, symbolom $\mathcal{G}_{n,1}$ označíme množinu n prvkových grafov, ktoré patria do Triedy 1 a symbolom $\mathcal{G}_n$ množinu všetkých n prvkových grafov. Poznamenávame, že uvažujeme tzv. neoznačkované grafy, t.j. dva n vrcholové grafy sú považované za rôzne, ak sú neizomorfné.

Veta 6.19 (**Erdős, Wilson** 1977)**.** *Takmer všetky grafy patria do Triedy 1, t.j.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\mathcal{G}_{n,1}|}{|\mathcal{G}_n|} = 1.$$

Dôkaz tejto vety je založený na tzv. pravdepodobnostnej metóde a opiera sa o tvrdenie, ktoré hovorí, že takmer všetky grafy majú jediný vrchol maximálneho stupňa. Naviac je známe, že grafy spĺňajúce túto podmienku patria do Triedy 1.

Výsledok Vety 6.19 je možné interpretovať aj nasledovným spôsobom. Uvažujme množinu n vrcholov a zostrojme „náhodný graf" tak, že každá spomedzi $\binom{n}{2}$ možných hrán je v grafe prítomná s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$. Potom, pre dostatočne veľké n, takto získaný graf bude takmer iste (s pravdepodobnosťou blízkou 1) patriť do Triedy 1.

Ukážeme, že Trieda 1 obsahuje všetky bipartitné grafy.

Veta 6.20 (**König** 1916)**.** *Ak G je neprázdny bipartitný graf, tak $\chi'(G) = \Delta(G)$.*

Dôkaz. Nech $G = [X, Y]$ je bipartitný graf s maximálnym stupňom $\Delta(G) = k$. Ukážeme, že G je podgrafom k-regulárneho bipartitného grafu.

Ako prvé, ak je to potrebné, doplňme nové vrcholy do jednej z partícií tak, aby obe mali rovnakú mohutnosť $|X| = |Y| = n$. Označme $M = kn - \sum_{x\in X} \deg(x)$ ako celkový deficit stupňov v G. Ak $k \leq M$, k obom partíciám pridajme M vrcholov a na množine týchto nových vrcholov vytvorme podgraf H' ktorý je $k-1$-regulárny. V prípade, že $k > M$ pridáme k nových vrcholov do oboch partícií, vytvoríme podgraf H' izomorfný s $K_{k,k} - F$, kde F je množina pozostávajúca z M „rovnobežných" hrán (v každej partícii H' bude M vrcholov stupňa $k-1$ a $k-M$ vrcholov stupňa k). Následne pridajme hrany spájajúce deficientné vrcholy z X a Y s vrcholmi z H' na „opačných stranách". Každý z M vrcholov stupňa $k-1$ v H' dostane jednu hranu, čo vyrieši problém s deficitom M hrán v množinách X a Y. Týmto spôsobom získame bipartitný k-regulárny graf H, ktorý je nadgrafom grafu G.

Podľa Dôsledku 5.4 v grafe H existuje perfektné spárenie M_1. Hrany patriace do M_1 ofarbíme farbou 1. Odstránením hrán tohto spárenia, dostaneme (Δ-1)-regulárny graf $H_1 = H - M_1$, v ktorom opäť existuje perfektné spárenie M_2. Hrany patriace do tohto spárenia ofarbíme farbou 2. Takto pokračujeme, čím dostaneme postupnosť $M_1, M_2, \ldots, M_\Delta$ perfektných spárení, pričom hranám z M_i priradíme farbu i. Týmto spôsobom získame hranové farbenie grafu H pomocou Δ farieb. Keďže $G \subseteq H$, platí $\chi'(G) \leq \Delta$.

□

6.3 Zovšeobecnené farbenia

6.3.1 Zoznamové farbenie

Zoznamové farbenie (list coloring) grafov je farbením vrcholov (poprípade hrán), pričom farbu daného vrchola (hrany) je možné vybrať z vopred daného zoznamu farieb.

Podrobnejšie, nech $G = (V, E)$ je graf, kde pre každý vrchol $v \in V$ je daný zoznam $L(v)$ prípustných farieb. Vrcholové farbenie $c\colon V \to S$ sa nazýva (vrcholovým) zoznamovým farbením, ak pre všetky vrcholy $u, v \in V$ platia podmienky: $c(v) \in L(v)$ a $c(u) \neq c(v)$ pre $uv \in E$. *Hranové zoznamové farbenie* je definované analogicky, t.j. pre každú hranu $e \in E$ sa uvažuje zoznam $L(e)$ prípustných farieb, pričom od farbenia $c\colon E \to S$ požadujeme $c(e) \in L(e)$ a $c(e) \neq c(f)$ pre susedné hrany e a f.

Ak $\mathcal{L} = \{L(v) : v \in V\}$ je zoznam prípustných farieb pre vrcholy grafu G a zároveň existuje zoznamové farbenie grafu G vzhľadom na tento zoznam, tak hovoríme, že G je $\mathcal{L}$-zoznamovo ofarbiteľný. Graf G sa nazýva k-zoznamovo ofarbiteľný, ak G je $\mathcal{L}$-zoznamovo ofarbiteľný pre všetky zoznamy $\mathcal{L} = \{L(v) : v \in V\}$ také, že $|L(v)| \geq k$ pre každý vrchol $v \in V$. *Zoznamové chromatické číslo* $\chi_\ell(G)$ grafu G je definované ako minimálne k také, že G je k-zoznamovo ofarbiteľný.

V prípade hranového zoznamového farbenia definujeme *zoznamový chromatický index* $\chi'_\ell(G)$ grafu G, ako minimálne k také, že G je k-hranovo zoznamovo ofarbiteľný.

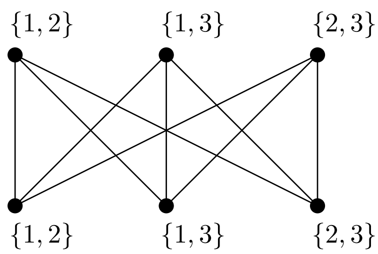
Veta 6.21. *Nech G je graf. Potom*

$$\chi(G) \leq \chi_\ell(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Dôkaz. Nech $\chi_\ell(G) = k$. Potom G je $\mathcal{L}$-zoznamovo ofarbiteľný, kde zoznam $\mathcal{L}$ pozostáva s rovnakých zoznamov $L(v) = \{1, \ldots, k\}$ pre všetky vrcholy $v \in V$. V tomto prípade príslušné zoznamové farbenie je tiež vrcholovým farbením pomocou k farieb, teda $\chi(G) \leq k$.

Nech $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ je vrcholová množina grafu G a $\mathcal{L} = \{L(v_i) : 1 \leq i \leq n\}$ je ľubovoľný zoznam taký, že $|L(v_i)| \geq \Delta(G) + 1$ pre všetky $1 \leq i \leq n$. Aplikovaním pažravého algoritmu popísaného v Leme 6.8 dostaneme vlastné vrcholové farbenie, čo dokazuje nerovnosť $\chi_\ell(G) \leq \Delta(G) + 1$. $\square$

Vo všeobecnosti nemusí platiť rovnosť $\chi_\ell(G) = \chi(G)$. Na obrázku Obr. 6.3 je znázornený kompletný bipartitný graf $K_{3,3}$, pre ktorý $\chi_\ell(K_{3,3}) = 3$.



Obr. 6.3: Priradenie zoznamov vrcholom grafu $K_{3,3}$ dokazujúce $\chi_\ell(K_{3,3}) > 2$.

Ukážeme, že rozdiel medzi hodnotami $\chi(G)$ a χ_ℓ môže byť ľubovoľne veľký.

Veta 6.22. *Ak r a k sú prirodzené čísla také, že $r \geq \binom{2k-1}{k}$, tak*

$$\chi_\ell(K_{r,r}) \geq k + 1.$$

Dôkaz. Sporom predpokladajme, že pre kompletný bipartitný graf $K_{r,r}$ platí $\chi_\ell(K_{r,r}) \leq k$. Nech $U = \{u_1, \dots, u_r\}$ a $W = \{w_1, \dots, w_r\}$ je rozdelenie grafu $K_{r,r}$ na partície a $S = \{1, 2, \dots, 2k-1\}$ je množina farieb. Existuje $\binom{2k-1}{k}$ k prvkových podmnožín množiny S. Priraďme tieto farebné zoznamy, každému vrcholu jeden, $\binom{2k-1}{k}$ vrcholom z množiny U a $\binom{2k-1}{k}$ vrcholom z množiny W. Ostatným vrcholom z množiny U, resp. W priraďme ľubovoľné k prvkové podmnožiny množiny S. Ukážeme, že pre takéto priradenie zoznamov farieb vrcholom neexistuje korektné ofarbenie.

Nech $c\colon U \cup W \to S$ je ľubovoľné farbenie s vlastnosťou $c(v) \in L(v)$ pre všetky $v \in U \cup W$. Označme $T = \{c(u_i) : 1 \leq i \leq r\}$ ako množinu farieb priradených vrcholom z U a uvažujme dva možné prípady.

Prípad 1: $|T| \leq k-1$. Potom existuje k prvková podmnožina $S' \subseteq S$ taká, že $S' \cap T = \emptyset$. Avšak, $L(u_j) = S'$ pre nejaké j, $1 \leq j \leq r$, teda $c(u_j) \in S' \cap T$, čo predstavuje spor.

Prípad 2: $|T| \geq k$. V tomto prípade existuje k prvková podmnožina $T' \subseteq T$. Teda $L(w_j) = T'$ pre nejaké j, $1 \leq j \leq r$. Avšak farba $c(w_j)$ je taktiež priradená nejakému vrcholu u_i z U, lebo $c(w_j) \in T$. Teda $c(u_i) = c(w_j)$, pričom $u_i w_j \in E(K_{r,r})$, čo znamená, že c nie je vlastné vrcholové farbenie. $\square$

Čo sa týka hranového zoznamového farbenia, hodnota $\chi'(G)$ je dolným ohraničením, t.j. $\chi'_\ell(G) \geq \chi'(G)$, avšak nie je známe, na rozdiel od vrcholového zoznamového farbenia, či existuje graf G, pre ktorý by táto hodnota bola iná. Ohľadom hodnoty $\chi'_\ell(G)$ je teda známa nasledujúca domnienka.

Domnienka (The List Coloring Conjecture). *Pre každý neprázdny graf G platí*

$$\chi'_\ell(G) = \chi'(G).$$

Keďže zoznamový chromatický index grafu G je rovný zoznamovému chromatickému číslu jeho hranového grafu $L(G)$ a taktiež $\chi'(G) = \chi(L(G))$, táto domnienka môže byť ekvivalentne formulovaná ako $\chi_\ell(L(G)) = \chi(L(G))$ pre všetky grafy G.

Je známe, že domnienka týkajúca sa zoznamového chromatického indexu je pravdivá v prípade bipartitných grafov.

Veta 6.23 (**F. Galvin** 1995)**.** *Ak G je bipartitný graf, tak $\chi'_\ell(G) = \chi'(G) = \Delta(G)$.*

6.3.2 Totálne farbenie

Ďalším zovšeobecneným farbením je tzv. totálne farbenie, v ktorom sú farbené vrcholy zároveň s hranami. *Totálnym farbením* grafu $G = (V, E)$ rozumieme zobrazenie $c\colon V \cup E \to S$ také, že (1) $c(u) \neq c(v)$, ak $u, v \in V$ a vrcholy u a v sú susedné, (2) $c(e) \neq c(f)$, ak $e, f \in E$ a hrany e a f sú susedné, (3) $c(v) \neq c(e)$, ak $v \in V$, $e \in E$ a vrchol v je incidentný s hranou e.

Podobne ako v prípade iných typov farbení, povieme, že graf G je totálne k-zafarbiteľný, ak existuje totálne farbenie grafu G využívajúce najviac k farieb. *Totálne chromatické číslo* χ'' grafu G je definované ako minimálne k také, že graf G je totálne k-zafarbiteľný.

Ak c je totálne farbenie grafu G a vrchol $v \in V$ je stupňa $\Delta(G)$, tak farbenie c musí priradiť rôzne farby všetkým hranám incidentým s vrcholom v a taktiež vrcholu v samotnému. To dokazuje, že pre totálne chromatické číslo platí nerovnosť

$$\chi''(G) \geq \Delta(G) + 1, \text{ pre všetky grafy } G.$$

V súvislosti s totálnym farbením grafov existuje domnienka, ktorá tvrdí, podobne ako je to dokázané v prípade chromatického indexu, že hodnota χ'' sa od spomínaného dolného odhadu líši najviac o jedna.

Domnienka (The Total Coloring Conjecture). *Pre každý graf G platí*

$$\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2.$$

Hoci vo všeobecnosti sa nevie, či spomínaná hodnota $\Delta(G)+2$ je horným ohraničením pre totálne chromatické číslo, je známe, že hodnota $\chi'_\ell(G)+2$ horným ohraničením je.

Veta 6.24. *Pre všetky grafy G platí*

$$\chi''(G) \leq \chi'_\ell(G) + 2.$$

Dôkaz. Označme $\chi'_\ell(G) = k$. Ukážeme, že existuje totálne farbenie grafu G, využívajúce $k+2$ farieb. Vzhľadom na Brooksovu vetu, Veta 6.11, dostávame

$$\chi(G) \leq 1 + \Delta(G) \leq 1 + \chi'(G) \leq 1 + \chi'_\ell(G) < 2 + \chi'_\ell(G) = 2 + k.$$

Teda G je vrcholovo $(k+2)$-zafarbiteľný. Nech $c\colon V(G) \to \{1, \ldots, k+2\}$ je nejaké pevne dané vrcholové farbenie grafu G. Pre každú hranu $e = uv$ grafu G, nech

$$L'(e) = \{1, \ldots, k+2\} \setminus \{c(u), c(v)\}$$

je zoznam prípustných farieb hrany e. Keďže $|L'(e)| \geq k$ pre všetky hrany $e \in E(G)$ a naviac $\chi'_\ell(G) = k$, tak existuje vlastné hranové farbenie c' grafu G spĺňajúce $c'(e) \in L'(e)$ pre každú hranu $e \in E(G)$. Teda pre ľubovoľnú hranu $e = uv$ máme $c'(e) \notin \{c(u), c(v)\}$, čo umožňuje definovať totálne farbenie c'' grafu G nasledovne:

$$c'' = \begin{cases} c(x) & \text{ak } x \in V(G) \\ c'(x) & \text{ak } x \in E(G). \end{cases}$$

Je pomerne ľahko vidieť, že c'' je korektné totálne farbenie grafu G pomocou $k+2$ farieb, teda $\chi''(G) \leq k + 2 = \chi'_\ell(G) + 2$. □

Domnienka týkajúca sa zoznamového chromatického indexu tvrdí $\chi'_\ell(G) = \chi'(G)$ pre každý neprázdny graf G. Ak by táto domnienka bola pravdivá, potom vzhľadom na Vizingovu vetu (Veta 6.18) $\chi'(G) \leq 1 + \Delta(G)$, čo by podľa Vety 6.24 znamenalo $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 3$. V roku 1998 M. Molloy a B. Reed dokázali existenciu konštanty c takej, že hodnota $\Delta(G) + c$ je horným ohraničením $\chi''(G)$ každého grafu G. Presnejšie, dokázali nasledovné tvrdenie.

Veta 6.25. *Pre všetky grafy G platí*

$$\chi''(G) \leq \Delta(G) + 10^{26}.$$

Kapitola 7

Planárne grafy

Graf G sa nazýva *planárny*, ak existuje jeho nakreslenie v rovine také, že jeho hrany sa pretínajú iba v koncových vrcholoch. Takéto nakreslenie sa zvykne nazývať rovinnou reprezentáciou grafu G, respektíve vnorením grafu G do roviny. Pod pojmom *rovinný* graf rozumieme graf spolu s jeho konkrétnym vnorením do roviny.

Každá rovinná reprezentácia grafu G rozdeluje rovinu na oblasti, nazývané *steny rovinného grafu*. Každá stena je charakterizovaná množinou hrán, respektíve množinou vrcholov, ktoré tvoria jej hranicu. Pripomíname, že pojem steny grafu je viazaný so špecifickou rovinnou reprezentáciou a nie je definovaný pre neplanárne grafy ako aj v prípade planárnych grafov, ktoré nie sú vnorené do roviny.

Časť roviny, ktorá leží „mimo“ rovinného grafu a nie je ohraničená, je taktiež považovaná za stenu tohto grafu a nazýva sa *vonkajšou stenou.* Množinu stien rovinného grafu G budeme označovať symbolom $F(G)$.

V ďalšom budeme využívať nasledujúce tvrdenie, známe ako Jordanova veta o uzavretej krivke, ktoré uvedieme bez dôkazu. Pod jednoduchou uzavretou krivkou C rozumieme obraz spojitého zobrazenia $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, ktoré spĺňa $\varphi(0) = \varphi(1)$, pričom zobrazenie φ zúžené na polouzavretý interval $[0,1)$ je injektívne.

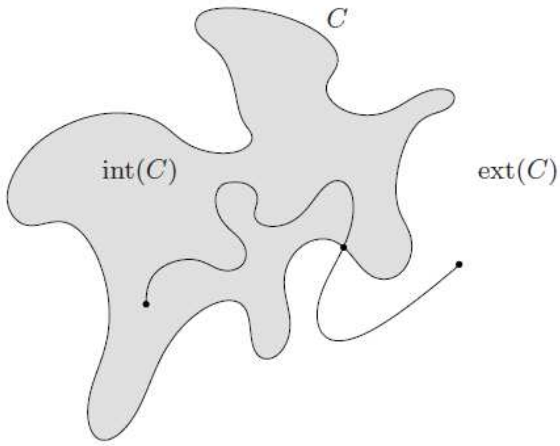
Veta 7.1 **(Jordan).** *Každá jednoduchá uzavretá krivka C v rovine rozdeľuje zvyšok tejto roviny na dve disjunktné oblúkovo súvislé otvorené množiny.*

Poznamenajme, že aj keď tvrdenie Jordanovej vety je intuitívne zrejmé, jeho dôkaz je pomerne náročný. Dve otvorené množiny na ktoré krivka C rozdeľuje rovinu, sa nazývajú vnútrom $\operatorname{int}(C)$ a vonkajškom $\operatorname{ext}(C)$ krivky C. Z Jordanovej vety vyplýva, že každá krivka spájajúca nejaký bod z $\operatorname{int}(C)$ s bodom v $\operatorname{ext}(C)$, pretína krivku C v aspoň jednom bode (Obr. 7.1).

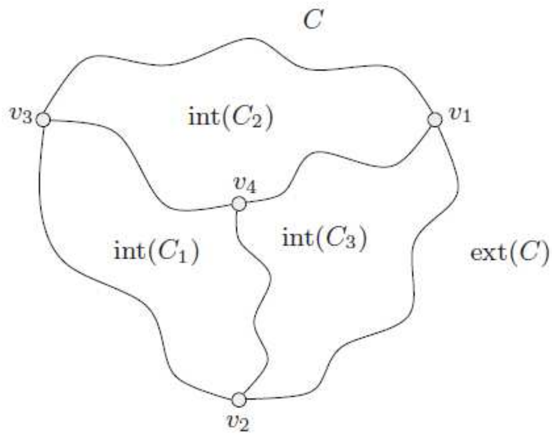
Ako aplikáciu Jordanovej vety dokážeme, že úplný graf K_5 nie je planárny.

Veta 7.2. *K_5 je neplanárny.*

Dôkaz. Sporom predpokladajme, že existuje rovinný graf G, ktorý je vnorením grafu K_5 do roviny, pričom $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Keďže graf G je úplný, každé dva vrcholy grafu G sú spojené hranou. Kružnica $C = v_1v_2v_3v_1$ tvorí jednoduchú uzavretú krivku v rovine, a následne vrchol v_4 musí ležať buď v $\operatorname{int}(C)$ alebo v $\operatorname{ext}(C)$. Bez ujmy na všeobecnosti môžme predpokladať, že $v_4 \in \operatorname{int}(C)$. Potom krivky reprezentujúce



Obr. 7.1: Príklad Jordanovej krivky.



Obr. 7.2: Dôkaz neplanarity grafu K_5.

hrany v_4v_1, v_4v_2 a v_4v_3 taktiež ležia celé (až na koncové vrcholy v_1, v_2 a v_3) v množine $\mathrm{int}(C)$ (Obr. 7.2).

Ďalej, uvažujme kružnice $C_1 = v_2v_3v_4v_2$, $C_2 = v_3v_4v_1v_3$ a $C_3 = v_1v_2v_4v_1$. Všimnime si, že $v_i \in \mathrm{ext}(C_i)$ pre $i = 1, 2, 3$. Nakoľko $v_iv_5 \in E(G)$ a G je rovinný graf, dostávame, že $v_5 \in \mathrm{ext}(C_i)$ pre všetky $i = 1, 2, 3$. To ale znamená, že $v_5 \in \mathrm{ext}(C)$. Avšak podľa Jordanovej vety, krivka odpovedajúca hrane v_5v_4 musí pretínať C v nejakom bode, čo odporuje rovinnosti grafu G. $\square$

7.1 Eulerov vzorec a jeho dôsledky

Veta 7.3 (**Euler** 1752)**.** *Nech G je n vrcholový súvislý rovinný graf, ktorý má m hrán a f stien. Potom*

$$n - m + f = 2. \tag{7.1}$$

Dôkaz. Dokážeme toto tvrdenie matematickou indukciou vzhľadom na počet hrán. Ak graf G má $m = 0$ hrán, potom vzhľadom na súvislosť, obsahuje práve jeden vrchol. Keďže v tomto prípade $f = 1$, dostaneme $n - m + f = 1 - 0 + 1 = 2$.

V ďalšom predpokladajme, že tvrdenie platí pre všetky súvislé rovinné grafy s $m \geq 0$ hranami. Nech G je súvislý rovinný graf obsahujúci $m+1$ hrán. Ak G neobsahuje žiadny cyklus, potom graf G je stromom spĺňajúcim $n-1 = (m+1)$ (každý n vrcholový strom má $n-1$ hrán) a $f = 1$, teda $n - (m+1) + f = (m+1) + 1 - (m+1) + 1 = 2$, t.j. tvredenie platí pre graf G.

V prípade, že graf G obsahuje nejakú kružnicu C, vyberme ľubovoľnú hranu e patriacu do C a vytvorme graf $G' = G - e$. Keďže hrana e patrila cyklu, G' ostane súvislý. Počet hrán m' grafu G' je rovný m, teda vzhľadom na indukčný predpoklad platí $n' - m' + f' = 2$. Avšak $n = n'$, $m' = m$ a $f' = f - 1$, nakoľko hrana e ležala na hranici dvoch stien (jednej vo vnútry C, druhej vo vonkajšku kružnice C). Z tohto dostávame

$$2 = n' - m' + f' = n - m + f - 1 = n - (m+1) + f,$$

čo ukazuje že Eulerov vzťah platí pre graf G. □

Dôsledok 7.4. *Nech G je súvislý planárny graf. Potom všetky vnorenia grafu G do roviny majú rovnaký počet stien.*

Dôsledok 7.5. *Nech G je planárny graf majúci $n \geq 3$ vrcholov a m hrán. Potom*

(i) *$m \leq 3n - 6$, pričom $m = 3n - 6$ práve vtedy, keď každé vnorenie grafu G do roviny je trianguláciou,*
(ii) *$m \leq 2n - 4$, ak G neobsahuje trojuholník.*

Dôkaz. Môžme predpokladať, že G je súvislý. V opačnom prípade pridaním hrán docielime aby graf súvislý bol. Pre jednoduchosť G tiež označuje vnorenie do roviny.

(i) Keďže každá stena obsahuje aspoň 3 hrany, pričom každá z hrán je započítaná v práve dvoch stenách, dostávame nerovnosť $2m \geq 3f$. Použitím Eulerovho vzorca (7.1) a tejto nerovnosti dostaneme

$$6 = 3n - 3m + 3f \leq 3n - 3m + 2m = 3n - m.$$

Je vidieť, že rovnosť $6 = 3n - m$ platí práve vtedy keď $2m = 3f$, t.j., všetky steny grafu G sú trojuholníky.

(ii) Podobne ako v predchádzajúcom prípade, nakoľko graf G neobsahuje trojuholníky, dostaneme nerovnosť $2m \geq 4f$, resp. $m \geq 2f$. Následne

$$4 = 2n - 2m + 2f \leq 2n - 2m + m = 2n - m.$$

□

Dôsledok 7.6. *Grafy K_5 a $K_{3,3}$ nie sú planárne.*

Dôkaz. Graf K_5 má 10 hrán a v prípade, že by bol planárny, podľa nerovnosti (i) by muselo platiť $10 \leq 3 \cdot 5 - 6 = 9$. Podobne graf $K_{3,3}$ má 9 hrán a neobsahuje trojuholníky, teda z (ii) by plynulo $9 \leq 2 \cdot 6 - 4 = 8$. □

Dôsledok 7.7. *Každý planárny graf obsahuje vrchol, ktorého stupeň je najviac päť.*

Dôkaz. Sporom predpokladajme, že existuje planárny graf G, ktorého všetky vrcholy majú stupeň aspoň 6. Potom využitím nerovnosti (i) platnej pre planárne grafy dostávame

$$6n \leq \sum_{v \in V} \deg(v) = 2m \leq 6n - 12.$$

□

Mnohosten alebo polyéder je trojrozmerné geometrické teleso, ktorého povrch sa skladá z konečného množstva stien tvorených pravidelnými alebo nepravidelnými mnohouholníkmi. Ak z každého vrcholu mnohostenu vychádza rovnaký počet hrán a zároveň každá stena je pravidelným mnohouholníkom, potom sa takýto mnohosten nazýva *Platónskym telesom*. Pripomíname, že každý mnohosten sa v rovine dá reprezentovať ako 3-súvislý rovinný graf. Platónskym telesám teda odpovedajú regulárne rovinné grafy, v ktorých každá stena má rovnaký stupeň (je ohraničená rovnakým počtom hrán).

Veta 7.8. *Existuje práve päť Platónskych telies. Sú to pravidelný štvorsten (tetraéder), kocka (pravidelný šeststen, hexaéder), pravidelný osemsten (oktaéder), pravidelný dvanásťsten (dodekaéder) a pravidelný dvadsaťsten (ikosaéder).*

Dôkaz. Nech P je regulárny mnohosten s n vrcholmi, m hranami a f stenami. Označme k stupeň každého vrchola a l stupeň každej steny mnohostena P. Potom platia nasledujúce vzťahy:

$$k \cdot n = 2m \qquad \text{a} \qquad l \cdot f = 2m.$$

Vyjadrením neznámych n a f a ich dosadením do Eulerovho vzorca dostávame

$$\frac{2m}{k} - m + \frac{2m}{l} = 2,$$

čo po predelení výrazom $2m$ je ekvivalentné so vzťahom

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{l} = \frac{1}{m} + \frac{1}{2}. \tag{7.2}$$

Je zrejmé, že $l \geq 3$ (každá stena musí byť ohraničená aspoň troma hranami) a $k \geq 3$ (je geometricky zrejmé, že v každom vrchole mnohostena sa musia stretnúť aspoň tri hrany). Všimnime si, že pravá strana rovnice (7.2) je rovná aspoň $\frac{1}{2}$, teda nemôže súčastne nastať $k \geq 4$ a $l \geq 4$. Následne teda platí $k = 3$ alebo $l = 3$.

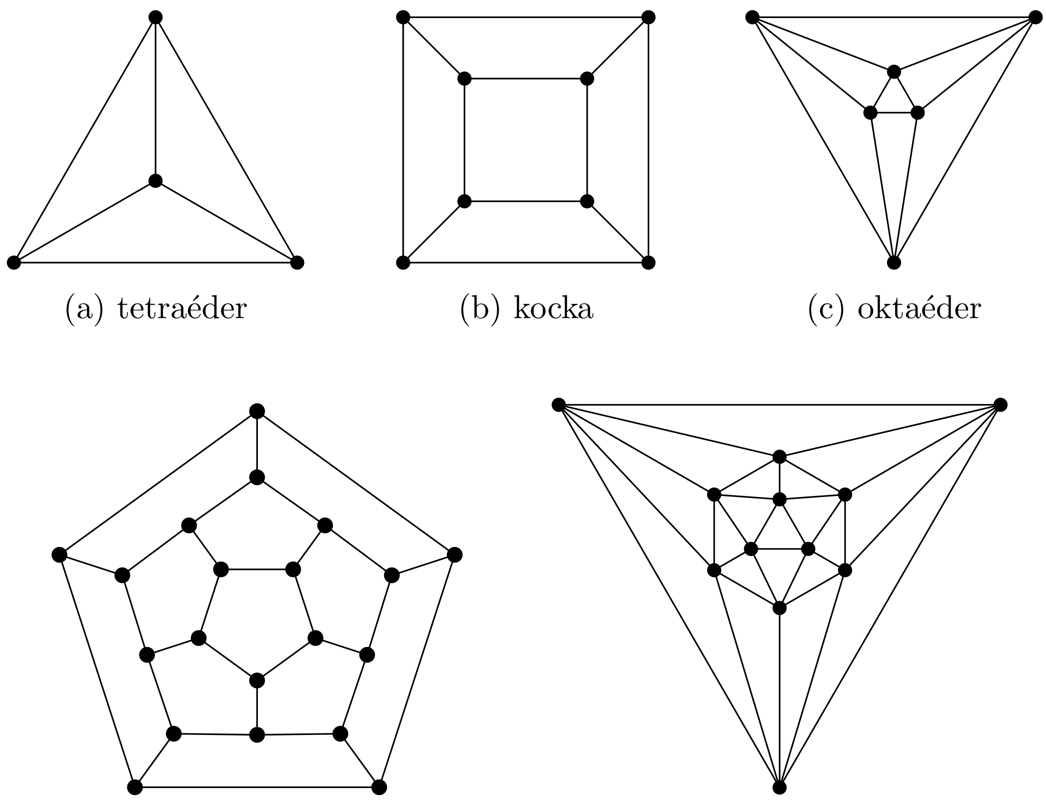
Prípad $k = 3$: Potom z rovnice (7.2) dostávame

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{m} + \frac{1}{6}.$$

Keďže m je kladné číslo, dostávame, že $3 \leq l \leq 5$. To odpovedá dvojiciam (l, m) v tvare $(3, 6)$, $(4, 12)$ a $(5, 30)$, resp. trojiciam (n, m, f) v tvare $(4, 6, 4)$, $(8, 12, 6)$ a $(20, 30, 12)$.

Prípad $l = 3$: Potom z rovnice (7.2) dostávame

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{m} + \frac{1}{6},$$



(a) tetraéder (b) kocka (c) oktaéder

(d) dodekaéder (e) ikosaéder

Obr. 7.3: Grafy prislúchajúce Platónskym telesám.

čo odpovedá dvojiciam (k, m) v tvare $(3, 6)$, $(4, 12)$ a $(5, 30)$, resp. trojiciam (n, m, f) v tvare $(4, 6, 4)$, $(6, 12, 8)$ a $(12, 30, 20)$.

Dostávame teda 5 rôznych riešení, ktorým odpovedá päť Platónskych telies: tetraéder $(4, 6, 4)$, kocka $(8, 12, 6)$, oktaéder $(6, 12, 8)$, dodekaéder $(20, 30, 12)$, ikosaéder $(12, 30, 20)$.

Rozborom prípadov sa dá dokázať, že iné Platónske telesá neexistujú. $\square$

7.2 Charakterizácia planárnych grafov

Veta 7.9 (**Kuratowski** 1930)**.** *Graf je planárny práve vtedy, keď neobsahuje žiadne podrozdelenie K_5 ani $K_{3,3}$ ako svoj podgraf.*

7.3 Farbenie planárnych grafov

Veta o štyroch farbách.

Veta 7.10 (**Appel, Haken** 1977)**.** *Každý planárny graf je (vrcholovo) 4-zafarbiteľný.*

Veta 7.11 (**Heawood** 1890)**.** *Každý planárny graf je 5-zafarbiteľný.*

Dôkaz. Postupujme indukciou vzhľadom na počet vrcholov grafu. Je zrejmé, že tvrdenie platí pre graf s jedným vrcholom.

Ďalej predpokladajme, že tvrdenie platí pre všetky n vrcholové planárne grafy a nech G je $n+1$ vrcholový planárny graf. Podľa Dôsledku 7.7 graf G obsahuje vrchol v spĺňajúci $\deg(v) \leq 5$. Vzhľadom na indukčný predpoklad graf $G - v$ je 5-zafarbitelný. Nech c je nejaké (vlastné) farbenie grafu $G-v$ pomocou 5 farieb. Pomocou c zostrojíme farbenie grafu G, ktoré využíva najviac päť farieb.

Ako prvý prípad predpokladajme, že nejaká farba, povedzme i, chýba pri nejakom susedovi vrchola v. Potom farbenie c grafu $G - v$ je možné rozšíriť na G položením $c(v) = i$ (poznamenajme, že toto nastane vždy ak $\deg(v) \leq 4$).

Ďalej teda predpokladajme, že vrchol v má práve 5 susedov, ktorým sú priradené rôzne farby. Nech v_1, v_2, v_3, v_4 a v_5 sú týto susedia, označený v rovinnom grafe G v protismere hodinových ručičiek. Vzhľadom na možnosť permutácie farieb, môžme predpokladať, že $c(v_i) = i$ pre všetky indexy $1 \leq i \leq 5$.

Nech $G_{i,j}$ pre $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq 5$ je podgraf grafu G indukovaný vrcholmi, ktoré majú farbu i alebo j. Ďalej, označme $C_{1,3}$ komponent v podgrafe $G_{1,3}$ obsahujúci vrchol v_1. Ak vrchol v_3 nepatrí do $C_{1,3}$, môžme v rámci komponentu $C_{1,3}$ navzájom vymeniť farby 1 a 3, a následne priradiť farbu 1 vrcholu v, čím získame farbenie grafu G piatimi farbami. Ak $v_3 \in C_{1,3}$, tak v tomto komponente $C_{1,3}$ musí existovať cesta P medzi vrcholmi v_1 a v_3, ktorá spolu s hranami vv_1 a vv_3 tvorí kružnicu C. Táto kružnica separuje vrcholy v_2 a v_4 (jeden leží vo vnútri C, druhý vo vonkajšku). Následkom toho vrchol v_4 nemôže patriť do komponentu $C_{2,4}$ podgrafu $G_{2,4}$ obsahujúceho v_2, lebo v opačnom prípade by nejaká hrana cesty spájajúcej vrcholy v_2 a v_4 musela pretínať nejakú hranu kružnice C. Teda je možné v rámci komponentu $C_{2,4}$ navzájom vymeniť farby 2 a 4, a následne ofarbiť vrchol v farbou 2, čím získame farbenie grafu G pomocou piatich farieb. □

V roku 1976 Vizing a v roku 1979 Erdős, Rubin a Taylor vyslovili domnienku, že všetky planárne grafy sú 5-zoznamovo ofarbiteľné, pričom existujú planárne grafy, ktoré nie sú 4-zoznamovo ofarbiteľné. Obe tieto domnienky boli dokázané okolo roku 1993.

Veta 7.12 (**Thomassen** 1994). *Každý planárny graf je 5-zoznamovo ofarbiteľný, t.j.* $\chi_\ell(G) \leq 5$ *pre všetky planárne grafy* G.

V roku 1993 M. Voigt našla príklad planárneho grafu, majúceho 238 vrcholov, ktorý nie je 4-zoznamovo ofarbiteľný.

Veta 7.13 (**Voigt** 1993). *Existuje planárny graf* G*, pre ktorý* $\chi_\ell(G) = 5$.

7.4 Miery neplanarity

7.4.1 Hrúbka grafu

Hrúbka grafu $G = (V, E)$ je definovaná ako minimálne k také, že existuje systém planárnych podgrafov $G_i = (V, E_i) \subseteq G$, $1 \leq i \leq k$, tvoriacich rozklad množiny hrán grafu G, t.j. $\cup_{i=1}^{k} E_i = E$ a $E_i \cap E_j = \emptyset$ pre $i \neq j$. Hrúbku grafu G označujeme symbolom $\theta(G)$. Tefa je zrejmé, že $\theta(G) = 1$ práve vtedy, keď G je planárny. Grafy spĺňajúce $\theta(G) = 2$ sa zvyknú nazývať aj ako biplanárne.

Vzhľadom na Eulerov vzorec a jeho dôsledok, týkajúci sa maximálneho počtu hrán v planárnom grafe, dostávame nasledujúci dolný odhad.

Lema 7.14. *Nech G je graf s $n > 2$ vrcholmi a m hranami. Potom*

i) $\theta(G) \geq \left\lceil \dfrac{m}{3n-6} \right\rceil$,

ii) $\theta(G) \geq \left\lceil \dfrac{m}{2n-4} \right\rceil$, *ak G neobsahuje trojuholník.*

Vo všeobecnosti sú známe nasledujúce horné odhady, ktoré sa vzťahujú na počet hrán a maximálny stupeň grafu.

Veta 7.15. *Nech $G = (V, E)$ je graf s $|E| = m$ hranami a maximálnym stupňom $\Delta(G) = \Delta$. Potom*

i) $\theta(G) \leq \left\lfloor \sqrt{\dfrac{m}{3}} + \dfrac{7}{6} \right\rfloor$,

ii) $\theta(G) \leq \left\lceil \dfrac{\Delta}{2} \right\rceil$.

Konkrétne hodnoty hrúbky sú známe len pre niektoré triedy grafov. Uvedieme ich v prípade úplných grafov K_n a úplných bipartitných grafov $K_{m,n}$.

Veta 7.16. *Hrúbka úplného grafu K_n je*

$$\theta(K_n) = \left\lfloor \frac{n+7}{6} \right\rfloor, \ \textit{pre } n \neq 9, 10 \ \textit{ a } \ \theta(K_9) = \theta(K_{10}) = 3.$$

Hrúbka úplného bipartitného grafu $K_{m,n}$ je

$$\theta(K_{m,n}) = \left\lfloor \frac{m \cdot n}{2(m+n-2)} \right\rfloor,$$

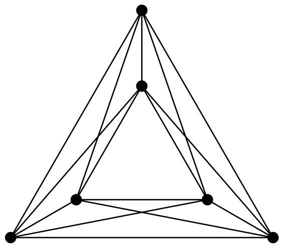
okrem prípadu, keď obe čísla m, n sú nepárne, $m \leq n$ a existuje celé číslo k, spĺňajúce

$$n = \left\lfloor \frac{2k(m-2)}{m-2k} \right\rfloor.$$

7.4.2 Priesečníkové číslo

Nakreslenie grafu G v rovine sa nazýva *dobré*, ak žiadne dve hrany sa nepretínajú viac ako raz, žiadne dve susedné hrany sa nepretínajú a žiadne tri hrany sa nepretínajú v jednom spoločnom bode.

Priesečníkové číslo $\nu(G)$ grafu G je minimálny počet priesečníkov, ktorý sa berie vzhľadom na všetky možné dobré nakreslenia grafu G v rovine.



Obr. 7.4: Nakreslenie K_6 s troma priesečníkmi.

Príklad 7.17. Ukážeme, že $\nu(K_6) = 3$. Na obrázku Obr. 7.4 je dobré nakreslenie K_6, ktoré má 3 priesečníky, teda $\nu(K_6) \leq 3$. Naopak vieme, že K_6 má 15 hrán. Avšak podľa Dôsledku 7.5, planárny 6 vrcholový graf môže mať najviac $3 \cdot 6 - 6 = 12$ hrán. Pridanie každej zo zvyšných 3 hrán vedie k aspoň jednému prekríženiu (celkovo trom), teda $\nu(K_6) \geq 3$.

Veta 7.18. *Nech G je n vrcholový graf s m hranami a nech $k = \max\{|E(H)| : H \subseteq G,\ H$ planárny$\}$ je rovné maximálnemu počtu hrán v planárnom podgrafe grafu G. Potom $\nu(G) \geq m - k$ a taktiež $\nu(G) \geq \frac{m^2}{2k} - \frac{m}{2}$.*

Dôkaz. Nech G je rovinný graf, t.j. je dané jeho nakreslenie v rovine, a H je maximálny rovinný podgraf G, ktorý má najviac k hrán (v danom nakreslení sa hrany H nepretínajú). Potom ľubovoľná hrana mimo $E(H)$ pretína aspoň jednu hranu z $E(H)$, pretože v opačnom prípade by ju bolo možné pridať k podgrafu H, čo by bolo v rozpore s maximalitou H. Keďže H má najviac k hrán, existuje aspoň $m - k$ prekrížení medzi hranami z $E(G) \setminus E(H)$ a hranami z $E(H)$.

Po odstránení hrán z $E(H)$ ostáva aspoň $m - k$ hrán. Rovnaký argument dáva aspoň $(m - k) - k$ prekrížení hrán v nakreslení zostávajúcej časti grafu. Iterovaním tohto postupu dostávame v nakreslení celého grafu G aspoň

$$\sum_{i=1}^{t}(m - ik) = mt - k \cdot \frac{t(t+1)}{2}$$

prekrížení, kde $t = \lfloor m/k \rfloor$. Napíšme $m = tk + r$, kde $0 \leq r \leq k - 1$ a nahraďme $t = (m - r)/k$ v predchádzajúcom výraze. Po úprave dostávame

$$\nu(G) \geq \frac{m^2}{2k} - \frac{m}{2} + \frac{r(k-r)}{2k} \geq \frac{m^2}{2k} - \frac{m}{2}.$$

□

Veta 7.19. *Pre priesečníkové číslo $\nu(K_n)$ úplného grafu K_n, $n \geq 5$ platí*

$$\frac{1}{5}\binom{n}{4} \leq \nu(K_n) \leq \binom{n}{4}.$$

Dôkaz. Horné ohraničenie je dané tým, že priesečníkové číslo n vrcholového grafu nemože byť väčšie ako $\binom{n}{4}$. To vyplýva z toho, že môžme umiestniť vrcholy na obvod kružnice, pričom hrany budú tvoriť tetivy (lokálne zmenené z úsečiek na krivky tak, aby výsledné nakreslenie bolo dobré). V prípade K_n, každá štvorica vrcholov vytvára práve jedno prekríženie, teda celkový počet priesečníkov v tomto nakreslení K_n neprekračuje počet všetkých 4 prvkových podmnožín.

Na dôkaz dolného ohraničenia použijeme matematickú indukciu. Pre $n = 5$ dostávame $\frac{1}{5}\binom{5}{4} = 1$ a nakoľko K_5 je neplanárny, máme $\nu(K_5) \geq 1$, teda tvrdenie v tomto prípade platí. Ďalej uvažujme nakreslenie K_5 v rovine s najmenším počtom priesečníkov. Takéto nakreslenie obsahuje n nakreslení K_{n-1}, každé získané vymazaním jedného vrchola. Každé takéto podnakreslenie obsahuje aspoň $\nu(K_{n-1})$ prekrížení. Celkovo takto napočítame viac ako $n\nu(K_{n-1})$ priesečníkov, avšak každý z nich v nakreslení K_n je započítaný $n-4$ krát (nie je započítaný v prípade, ak chýba vrchol z nejakej krížiacej sa hrany). Teda platí nerovnosť $(n-4)\nu(K_n) \geq n\nu(K_{n-1})$.

Následne, využitím predpokladu $\nu(K_{n-1}) = \frac{1}{5}\binom{n-1}{4}$, dostávame

$$\nu(K_n) \geq \frac{n}{n-4}\nu(K_{n-1}) = \frac{n}{n-4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24} = \frac{1}{5}\binom{n}{4}.$$

□

Predchádzajúce tvrdenie dáva pre priesečníkové číslo $\nu(K_n)$ asymptotický odhad v tvare $\frac{1}{120}n^4 + O(n^3) \leq \nu(K_n) \leq \frac{1}{24}n^4 + O(n^3)$. V skutočnosti, je známe nasledovné vylepšenie

Veta 7.20 (Guy, 1972). $\frac{1}{80}n^4 + O(n^3) \leq \nu(K_n) \leq \frac{1}{64}n^4 + O(n^3)$.

V prípade úplných bipartitných grafov $K_{m,n}$ sú známe nasledujúce nerovnosti týkajúce sa priesečnikového čísla.

Veta 7.21. *Nech $m \leq n$ sú prirodzené čísla. Potom pre $\nu(K_{m,n})$ platí*

$$\frac{m(m-1)}{5}\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor \leq \nu(K_{m,n}) \leq \left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m-1}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor.$$

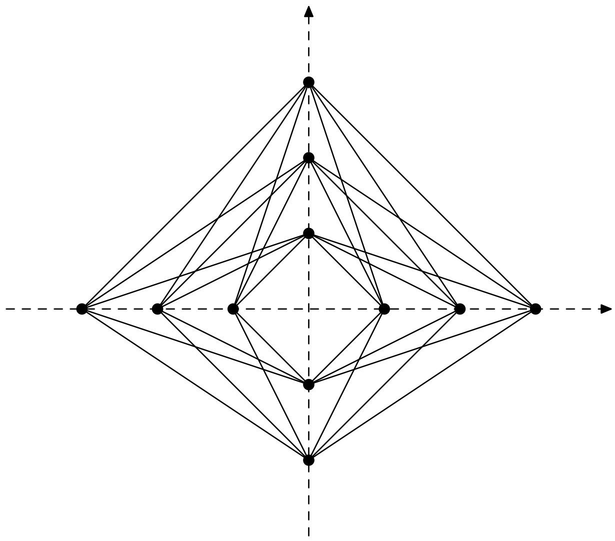
Horné ohraničenie pre $\nu(K_{m,n})$ sa dosiahne nakreslením $K_{m,n}$ nasledovným spôsobom. Umiestnime $\lceil\frac{n}{2}\rceil$ vrcholov na kladnú y-ovú os, zvyšných $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ vrcholov na zápornú y-ovú os a podobne rozdeľme m vrcholov pozdĺž kladnej a zápornej osi x. Následne spojme všetky vrcholy na osi x so všetkými vrcholmi na osi y. Na obrázku Obr. 7.5 je zachytené nakreslenie $K_{6,5}$ tohoto typu. Je známe, že takéto nakreslenie je optimálne v prípade $\min\{m, n\} \leq 6$.

V súčastnosti presné hodnoty priesečníkových čísel úplných a úplných bipartitných grafov vo všeobecnosti nie sú známe. Avšak existujú domnienky, ktoré presnú hodnotu týchto čísel udávajú nasledovne.

Domnienka.

$$\nu(K_n) = \frac{1}{4}\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n-2}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n-3}{2}\right\rfloor.$$

$$\nu(K_{m,n}) = \left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m-1}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor.$$



Obr. 7.5: Optimálne nakreslenie $K_{6,5}$.

Na záver tejto časti dokážeme tvrdenie týkajúce sa dolného odhadu priesečníkového čísla, týkajúceho sa ľubovoľných grafov, majúcich dostatočný počet hrán.

Veta 7.22 (**Ajtai, Chvátal, Newborn, Szemerédi** 1982, **Leighton** 1983)**.**
Nech G je n vrcholový graf s m hranami. Ak $m \geq 4n$, tak $\nu(G) \geq \dfrac{1}{64}\dfrac{m^3}{n^2}$.

Dôkaz. Dôkaz urobíme matematickou indukciou vzhľadom na počet vrcholov grafu n.

Ako prvý krok ukážeme, že tvrdenie platí pre všetky grafy s $m \leq 5n$ hranami (toto zahŕňa všetky grafy s najviac 11 vrcholmi). Vzhľadom na predpoklad vety máme $4n \leq m \leq 5n$ a teda $m = \alpha n$ pre racionálne číslo $\frac{m}{n} = \alpha \in \langle 4, 5\rangle$. Poznamenajme, že pre $\alpha \in \langle 4, 5\rangle$ platí nerovnosť $\alpha - 3 \geq \frac{1}{64}\alpha^3$. Použitím Vety 7.18 a uvedených nerovností dostávame

$$\nu(G) \geq m - (3n-6) \geq m - 3n = n(\alpha - 3) \geq \frac{n}{64}\alpha^3 = \frac{1}{64}\frac{m^3}{n^2}.$$

V ďalšom predpokladajme $n > 11$, $m > 5n$ a taktiež, že tvrdenie platí pre všetky grafy s menej ako n vrcholmi. Uvažujme nakreslenie grafu $G = (V, E)$ s najmenším možným počtom priesečníkov. Každý priesečník sa vyskytuje $n-4$ krát v nakresleniach získaných odstránením jedného vrchola (okrem 4 vrcholov, ktoré tvoria konce dvoch prekrížených hrán). Pre $v \in V$ graf $G - v$ má $n-1$ vrcholov a $m - \deg(v)$ hrán. Naviac platí $\deg(v) \leq n-1$, teda $m - \deg(v) > 5n - (n-1) = 4n + 1 > 4(n-1)$, čo podľa indukčného predpokladu znamená, že pre graf $G - v$ platí $\nu(G - v) \geq \frac{1}{64} \cdot \frac{(m-\deg(v))^3}{(n-1)^2}$. Následkom toho pre celkový počet priesečníkov dostávame nerovnosť

$$(n-4)\nu(G) \geq \sum_{v \in V} \nu(G - v) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{64} \cdot \frac{(m - \deg(v))^3}{(n-1)^2}. \tag{7.3}$$

Ak uvažujeme funkciu n premenných $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}(m - x_i)^3$, tak za podmienok $\sum_{i=1}^{n} x_i = 2m$, $x_i > 0$ pre $i = 1, \ldots, n$, táto funkcia nadobúda minimálnu hodnotu v prípade $x_1 = \cdots = x_n = 2m/n$. Využitím tohto faktu a nerovnosti (7.3) dostávame

$$\nu(G) \geq \frac{1}{64(n-4)(n-1)^2} \sum_{i=1}^{n} \left(m - \frac{2m}{n} \right)^3 = \frac{n(n-2)^3 m^3}{64(n-1)^2(n-4)n^3} \geq \frac{1}{64} \cdot \frac{m^3}{n^2},$$

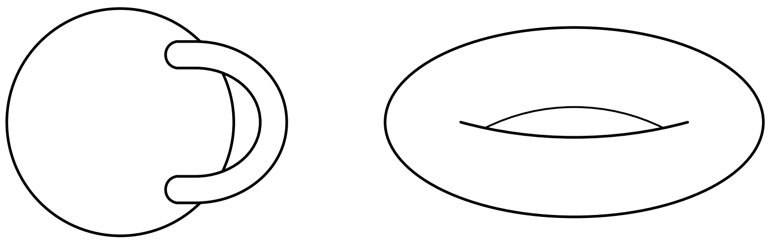
pričom posledná nerovnosť plynie z faktu $(n-2)^3 \geq (n-1)^2(n-4)$. □

7.4.3 Rod grafu, vnorenia na orientovateľné plochy

Namiesto minimalizácie prekrížení v rovine, je možné vyhnúť sa kríženiam tým, že grafy budeme kresliť na iné plochy. Je dobré si uvedomiť, že čo sa priesečníkov týká, je kreslenie grafov do roviny ekvivalentné s kreslením grafov na guľovú plochu (sféru). Plochy v $\mathbb{R}^3$ sa vo všeobecnosti delia na orientovateľné a neorientovateľné.

Voľne povedané, plocha sa nazýva *orientovateľná* ak má dve strany, pričom je možné rozhodnúť, ktorá z nich je „vrchná“ a ktorá „spodná“. Typickým príkladom orientovateľnej plochy je guľová plocha a neorientovateľnej plochy Möbiov list. Pre názornosť sa v ďalšom budeme zaoberať iba uzavretými orientovateľnými plochami. Uzavretou plochou rozumieme kompaktnú plochu bez hranice.

V topológii je známa fundamentálna veta, ktorá charakterizuje uzavreté orientovateľné plochy nasledovne: *každá uzavretá orientovateľná plocha je homeomorfná (existuje spojité bijektívne zobrazenie so spojitou inverziou) s plochou S_γ, t.j. so sférou, ku ktorej je pridaných γ rúčok, $\gamma \geq 0$ celé.* Rúčkou rozumieme zakrivenú valcovú plochu prepájajúcu dve kruhové diery v ploche. Plocha vytvorená pridaním jednej rúčky ku guľovej ploche je homeomorfná s plochou nazývanou torus (Obr. 7.6).



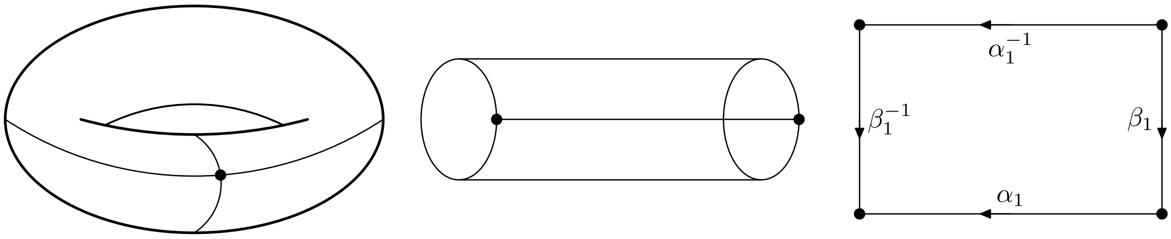
Obr. 7.6: Guľová plocha s jednou rúčkou a torus.

Počet rúčok pridaných ku guľovej ploche sa nazýva *(orientovateľný) rod plochy (ang. genus).*

Ak počet rúčok, ktoré sú pridané k ploche je relatívne malý, je vhodné kombinatoricky reprezentovať plochu S_γ ako mnohouholník. Vo všeobecnosti, pre uzavretú orientovateľnú plochu S_γ vezmime 4γ-uholník, pričom stotožníme jeho strany podľa vzoru

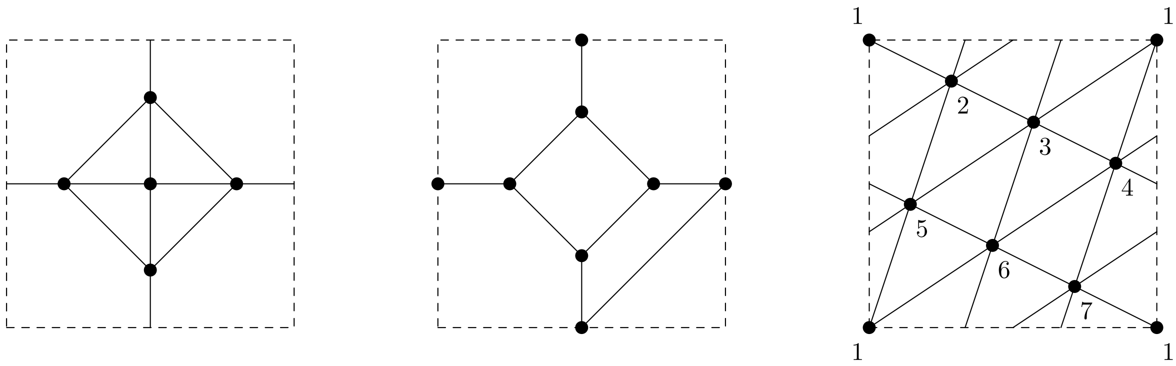
$$\alpha_1, \beta_1, \alpha_1^{-1}, \beta_1^{-1}, \ldots, \alpha_\gamma, \beta_\gamma, \alpha_\gamma^{-1}, \beta_\gamma^{-1}.$$

Symboly α_i, β_i označujú orientáciu hrán v jednom, pevne zvolenom smere (napr. v smere hodinových ručičiek), a symboly α_i^{-1}, β_i^{-1} označujú orientáciu v opačnom smere (v protismere hodinových ručičiek). Hrana α_i (podobne hrana β_i) je stotožnená s hranou α_i^{-1} (β_i^{-1}) v smere ich orientácií. Na obrázku Obr. 7.7 je znázornená takáto kombinatorická charakterizácia plochy S_1, alias torusu, získaná vhodným rozrezaním tejto plochy.



Obr. 7.7: Kombinatorická charakterizácia torusu.

Hovoríme, že graf G je *vnorený* na plochu S, ak existuje jeho reprezentácia (nakreslenie) v S taká, že žiadne dve krivky zodpovedajúce hranám sa v rámci S nepretínajú. *(Orientovateľný) rod grafu* G je najmenšie prirodzené číslo γ také, že G má vnorenie na plochu S_γ. Rod grafu G označujeme symbolom $\gamma(G)$.



Obr. 7.8: Vnorenie K_5, $K_{3,3}$ a K_7 na torus.

Dôležitý pojem týkajúci sa vnorení, je tzv. bunkové vnorenie grafu na plochu. Graf G je *bunkovo vnorený* na plochu S, ak je vnorený na S a každý komponent množiny $S \setminus G$ je homeomorfný vnútrajšku kružnice v $\mathbb{R}^2$ (tzv. otvorenému disku). Inými slovami, graf vnorený na plochu S rozdeľuje túto plochu na oblasti, rovnako ako rovinný graf rozdeľuje rovinu na steny. Graf je bunkovo vnorený na S práve vtedy, keď každú jednoduchú uzavretú krivku, ktorá sa nachádza vo vnútri ľubovoľnej oblasti, je možné spojito („bez roztrhnutia“) skontrahovať do jediného bodu.

Pokiaľ sa jedná o vnorenia do roviny (plocha S_0), každé vnorenie súvislého planárneho grafu je bunkové. Ak je graf nesúvislý, nejedná sa o bunkové vnorenie (slučka okolo komponetu súvislosti, nachádzajúca sa vo vonkajšej stene, sa nedá spojite kontrahovať do jediného bodu). Je možné ukázať, že ak súvislý graf G je vnorený na plochu orientovateľného rodu $\gamma(G)$, tak sa nutne jedná o bunkové vnorenie.

Podobne ako pre planárne grafy, platí obdoba vzťahu (7.1) tzv. Eulerov vzorec pre plochy vyššieho rodu.

Veta 7.23. *Nech G je súvislý graf s n vrcholmi, m hranami a f stenami, ktorý je bunkovo vnorený na plochu S_γ, $\gamma \geq 0$. Potom*

$$n - m + f = 2 - 2\gamma. \tag{7.4}$$

Vzhľadom na to, že každé vnorenie súvislého grafu G na plochu $S_{\gamma(G)}$ je bunkové, dostávame

Dôsledok 7.24. *Pre káždé vnorenie súvislého grafu G na plochu $S_{\gamma(G)}$ platí*

$$n - m + f = 2 - 2\gamma(G).$$

Lema 7.25. *Nech G je n vrcholový graf s m hranami, ktorý je vnorený na plochu S_γ, $\gamma \geq 0$. Potom pre počet hrán platí*

$$m \leq 3(n - 2 + 2\gamma).$$

Dôkaz. Nech G je graf vnorený na plochu S_γ, $\gamma \geq 0$. Potom platí $\gamma(G) \leq \gamma$. Nech vnorenie grafu G na plochu S_γ má f stien $F_1, F_2, \ldots, F_f$, $f \geq 1$, pričom m_i označuje počet hrán na hranici steny F_i. Teda $m_i \geq 3$. Keďže každá hrana je na hranici jednej alebo dvoch stien, dostávame

$$3f \leq \sum_{i=1}^{f} m_i \leq 2m.$$

Využitím (7.4) a nerovností $\gamma(G) \leq \gamma$ a $3f \leq 2m$ máme

$$6 - 6\gamma \leq 6 - 6\gamma(G) = 3n - 3m + 3f \leq 3n - 3m + 2m = 3n - m.$$

□

Veta 7.26 (**Heawood** 1890). *Ak graf G je vnoriteľný na plochu S_γ, $\gamma > 0$, tak*

$$\chi(G) \leq \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48\gamma}}{2} \right\rfloor. \tag{7.5}$$

Dôkaz. Položme $c = (7 + \sqrt{1 + 48\gamma})/2$. Na dôkaz nerovnosti (7.5) stačí ukázať, že každý graf vnoriteľný na plochu S_γ obsahuje vrchol stupňa najviac $c - 1$ (z toho použitím indukcie vzhľadom na počet vrcholov vyplýva $\chi(G) \leq c$).

Keďže $\chi(G) \leq c$ pre každý graf G s najviac c vrcholmi, v ďalšom môžme predpokladať, že pre počet vrcholov n grafu G platí $n > c$. Použitím Lemy 7.25 ukážeme, že priemerný (tým pádom aj minimálny) stupeň grafu G je najviac $c - 1$.

Keďže c je koreňom kvadratickej rovnice $c^2 - 7c + (12 - 12\gamma) = 0$, máme $c - 1 = 6 - (12 - 12\gamma)/c$. Nech m označuje počet hrán grafu G. Potom pre priemerný stupeň dostávame

$$\frac{2m}{n} \leq \frac{6(n - 2 + 2\gamma)}{n} = 6 - \frac{12 - 12\gamma}{n} \leq 6 - \frac{12 - 12\gamma}{c} = c - 1,$$

pričom posledná nerovnosť platí vďaka $n > c$ a $\gamma > 0$. □

Poznamenajme, že Heawoodov vzorec dáva správnu hodnotu aj v prípade $\gamma = 0$ t.j., $\chi(G) \leq 4$ pre všetky grafy G vnoriteľné na guľovú plochu S_0 (planárne grafy). Avšak všetky doteraz známe dôkazy Heawoodovho vzorca využívajú predpoklad $\gamma > 0$, teda neposkytujú korektný dôkaz vety o štyroch farbách.

Vo všeobecnosti určiť rod grafu je pomerne ťažký problém. Spomenieme výsledok týkajúci sa úplných grafov.

Veta 7.27 (**Ringel, Youngs** 1968)**.** *Pre* $n \geq 3$

$$\gamma(K_n) = \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil .$$

Cvičenia

1. Použitím podobných argumentov ako v dôkaze Vety 7.2 ukážte, že graf $K_{3,3}$ je neplanárny.

Literatúra

[1] Bondy A., Murty U.S.R.: Graph Theory, Springer-Verlag London, 2008.

[2] Matoušek J., Nešetřil J.: Kapitoly z diskrétní matematiky, Nakladatelství Karolinum, 2010.

[3] Zając M., A Short Proof of Brooks' Theorem, arXiv:1805.11176, 2018.

Register

číslo
  priesečníkové, 57
ťah, 9
  Eulerovský, 21

algoritmus
  pažravý, 40
artikulácia, 17

bunkové vnorenie, 62

cesta, 8, 9
  alternujúca, 27
  Hamiltonovská, 22
  rozširujúca, 27
chromatické(ý)
  číslo, 37
  index, 45

digraf, 6
domnienka
  Reedova, 44

farbenie
  hranové, 45
  hranové zoznamové, 48
  totálne, 49
  vrcholové, 37
  zoznamové, 47

graf, 5
  k-chromatický, 37
  k-degenerovaný, 41
  k-súvislý, 17
  k-zafarbitelný, 37
  bipartitný, 8
  Eulerovský, 21
  Hamiltonovský, 22
  hranový, 7
  kompletný, 8
  Mycielskeho, 38
  planárny, 51
  regulárny, 8
  rovinný, 51
  súvislý, 9
  uzavretý, 22
grafová postupnosť, 10

homomrfizmus, 7
hrúbka grafu, 56
hyperkocka, 8

izomorfizmus, 7

komplement, 7
komponent
  (ne)párny, 33
komponent súvislosti, 9
kostra, 14
kružnica, 8, 9
  Hamiltonovská, 22

les, 13

matica
  dvojito stochastická, 31
  permutačná, 31
most, 17
multigraf, 6

Platónske teleso, 54
podgraf, 6
  faktorový, 6
  indukovaný, 6
  vlastný, 6
podrozdelenie, 7
pseudograf, 6

rod

grafu, 62
plochy, 61

súčin
Karteziánsky, 7
tenzorový, 7
sled, 8
spárenie, 27
maximálne, 27
najpočetnejšie, 27
perfektné, 27
stena, 51
strom, 13
stupeň
súvislosti, 17
stupeň vrchola, 6
maximálny, 6
minimálny, 6

Trieda 1,2, 46

uzáver, 22

veta
Birkhoff–von Neumannova, 31
Eulerova, pre rovinné grafy, 52
Kuratowského, 55
Mengerova, 19
Vizingova, 45
vnorenie, 7
vzdialenosť, 9

zjednotenie, 7