UNIVERZITA PALACKÉHO

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

P. Emanovský

Cvičení z algebry
(polynomy, alg. rovnice)

OLOMOUC 1992

ISBN 80 – 7067 – 281 – 1

Předmluva

Miniskriptum je určeno studentům učitelství pro 6. – 9. ročník ZŠ studijních kombinací s matematikou. Svým obsahem pokrývá problematiku přednášenou ve 3. a 4. semestru v předmětu algebra a teoretická aritmetika a mělo by sloužit jako zdroj příkladů řešených ve cvičení, při samostatné práci studentů a při zápočtových písemných pracích.

V textu je použita následující symbolika :

N............. množina přirozených čísel,
Z.............množina celých čísel,
Z_n............množina zbytkových tříd modulo n ($n = 2, 3, 4, 5, \ldots$),
Q............. množina racionálních čísel,
R............. množina reálných čísel,
C............. množina komplexních čísel,
I...............obecný obor integrity,
I[x].......... obor integrity polynomů jedné neurčité x nad I (algebraická definice polynomů),
f(x), g(x)..prvky oboru integrity I[x],
$I<t>$...... okruh polynomů jedné proměnné t nad I (funkční definice polynomů),
f(t), g(t)...prvky okruhu $I<t>$,
T..............obecné těleso,
T[x].......... obor integrity polynomů jedné neurčité x nad T,
$I[x_1,\ldots,x_n]$..obor integrity polynomů n neurčitých nad I,
$f(x_1,\ldots,x_n)$, $g(x_1,\ldots,x_n)$.....prvky z $I[x_1,\ldots,x_n]$,
$s_1, s_2,\ldots, s_n$.....elementární symetrické polynomy.

Na závěr jsou uvedeny výsledky prakticky všech úloh a je připojen seznam doporučené studijní literatury.

Chtěl bych na tomto místě poděkovat svému příteli Mgr. Radku Halašovi z katedry algebry a geometrie PřF UP za jeho cenné kritické připomínky, které přispěly ke zkvalitnění textu.

Olomouc, březen 1993 P. E.

I. Polynomy jedné neurčité

1. Polynom $f(x) = 2x - \sqrt{2} + 1/2x^2 - x - x^2\sin(\pi/6)$ z $R[x]$ zapište v normálním tvaru a určete jeho stupeň.

2. Určete počet všech polynomů nultého, prvního, druhého a k-tého stupně v $Z_2[x]$ resp. v $Z_3[x]$.

3. Sestrojte obor integrity charakteristiky 5, který má nekonečně mnoho prvků.

4. Ověřte, zda v oboru integrity $Z_2[x]$ platí:
   a) $(x+1)^2 = x^2+1$
   b) $(x+1)^3 = x^3+x^2+x+1$
   c) $(x+1)^4 = x^4+1$.

5. Ověřte, zda v oboru integrity $Z_3[x]$ platí:
   a) $(x+1)^3 = x^3+1$
   b) $(x+2)^3 = x^3+2$
   c) $(x^2+x+1)(x^2+2x+1) = x^4+x^2+1$.

6. V $Z_2[x]$ jsou dány polynomy $f(x) = 1+x^2+x^3$, $g(x) = x+x^3+x^5$, $h(x) = 1+x^2+x^4$. Určete polynomy $f(x)+g(x)+h(x)$ a $f(x)g(x)$ a stanovte jejich stupně.

7. Dokažte, že polymon, který je součinem libovolných dvou nenulových polynomů z $I[x]$, má stupeň rovný součtu stupňů těchto polynomů.

8. Dokažte, že obor integrity $(I[x],+,.)$ není těleso.

9. Ověřte, zda polynomy $f(t) = 2+t+t^2$, $g(t) = 2+t^2+t^3$ ze $Z_3<t>$ jsou si rovny.

10. Dokažte, že pro konečný obor integrity I obsahuje vždy struktura $(I<t>,+,.)$ netriviální dělitele nuly.

11. Ukažte, že polynomy $f(t) = t^2 - t$, $g(t) = t - 2$ jsou netriviálními děliteli nuly v $(Z_3<t>, +, .)$.

12. Určete všechny kořeny polynomu $f(x)$ z $T[x]$, které leží v tělese T', je-li:

a) $f(x) = x^2 + 1$, $T = T' = Z_2$,
b) $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, $T = T' = Z_2$,
c) $f(x) = x^3 + 1$, $T = T' = Z_3$,
d) $f(x) = x^3 + 2$, $T = T' = Z_3$,
e) $f(x) = 2x - 1$, $T = Z$, $T' = Z, Q$,
f) $f(x) = x^2 - 2$, $T = Q$, $T' = Q, R$,
g) $f(x) = x^2 - x + 1$, $T = R$, $T' = R, C$,
h) $f(x) = x^2 + 3x - 4$, $T = R$, $T' = R, C$.

13. Užitím Bezoutovy věty ověřte, zda:

a) čísla $2, -1$ jsou kořeny polynomu $x^3 - 3x - 2$ nad R,
b) čísla $-2, 1$ jsou kořeny polynomu $x^3 - 3x + 2$ nad R,
c) čísla $3, -1$ jsou kořeny polynomu $x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 54x + 27$ nad R.

14. Ukažte, že polynom $3x^5 - 16x^4 + 25x^3 - 6x^2 - 4x - 8$ je dělitelný polynomem $x - 2$, aniž provedete dělení.

15. Určete hodnotu $f(c)$ polynomu $f(x)$ z $C[x]$ v bodě c, aniž provedete dosazení, je-li:

a) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x - 5$, $c = 3$,
b) $f(x) = 2x^5 - 17x^4 + 23x^3 - 18x^2 + 29x - 7$, $c = 2$,
c) $f(x) = 2x^5 - 5x^3 - 8x$, $c = -3$,
d) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16$, $c = 4$,
e) $f(x) = x^5 + (1 + 2i)x^4 - (1 + 3i)x^2 + 7$, $c = -2 - i$,
f) $f(x) = 4x^3 + x^2$, $c = -1 - i$,
g) $f(x) = x^3 - x^2 - x$, $c = 1 - 2i$,
h) $f(x) = 3x^6 + 7x^5 - 4x^3 + 4x^2 + 6x + 1$, $c = -2$.

16. Určete hodnotu $f(c)$ polynomu $f(x)$ nad Z_5 v bodě c, aniž provedete dosazení, je-li $f(x) = 2x^6 + 2x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 1$, $c = 3$.

17. Pomocí Hornerova schematu určete částečný podíl a zbytek při dělení polynomu $f(x)$ polynomem $g(x)$, je-li:

a) $f(x) = x^5 - x^4 - 13x^3 + 13x^2 + 36x - 36$, $g(x) = x - 2$,
b) $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x - 7$, $g(x) = x + 2$,
c) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$, $g(x) = x - 1$,
d) $f(x) = 2x^5 - 5x^3 - 8x$, $g(x) = x + 3$,
e) $f(x) = 4x^3 + x^2$, $g(x) = x + 1 + i$,
f) $f(x) = x^3 - x^2 - x$, $g(x) = x - 1 + 2i$,
g) $f(x) = x^5 + (1 + 2i)x^4 - (1 + 3i)x^2 + 7$, $g(x) = x + 2 + i$.

18. Určete částečný podíl a zbytek při dělení polynomu $f(x)$ polynomem $g(x)$ nad C, je-li:

a) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$, $g(x) = x^2 - 3x + 1$,
b) $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1$, $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$,
c) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$, $g(x) = x^2 + 2x + 3$,
d) $f(x) = 2x^5 - 7x^4 + 23x^3 - 18x^2 + 29x - 7$, $g(x) = x - 7$,
e) $f(x) = 2x^5 - x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 2x - 1$, $g(x) = 5x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 1$,
f) $f(x) = x^5 + 2x^3 - 3x^2 + 5x - 7$, $g(x) = x + 2$,
g) $f(x) = 4x^3 + 2x^2 + (2 - i)x + i$, $g(x) = x + 1 + i$,
h) $f(x) = x^{82} + 1$, $g(x) = x^2 + 1$.

19. Určete částečný podíl a zbytek při dělení polynomu $f(x)$ polynomem $g(x)$ nad Z_5, je-li $f(x) = 2x^5 - 3x^3 + x$, $g(x) = x + 3$.

20. Za jakých podmínek je polynom $x^3 + px + q$ dělitelný polynomem $x^2 + mx - 1$?

21. Za jakých podmínek polynom $x^2 + mx + 1$ dělí polynom $x^4 + px^2 + q$?

22. Určete největšího společného dělitele polynomů $f(x)$, $g(x)$ z $T[x]$, je-li:

a) $T = Q$, $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + x + 1$, $g(x) = x^3 - x^2 - x + 1$,
b) $T = Q$, $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2$, $g(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$,
c) $T = Q$, $f(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 7x - 6$, $g(x) = 2x^3 - 4x^2 - x + 2$,
d) $T = Q$, $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$, $g(x) = 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 + x + 2$,
e) $T = Q$, $f(x) = x^6 + 3x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4$,
$g(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$,

f) $T = Q, f(x) = 3x^4+3x^3-5x^2+2x-8, g(x) = x^2+2x-5,$
g) $T = Q, f(x) = 7x^6+5x^3+3x+1, g(x) = x^3+x^2+x+1,$
h) $T = Q, f(x) = x^4+3x^3+5x^2+3x+4, g(x) = x^4+3x^3+4x^2+3x+3,$
i) $T = Q, f(x) = x^4+x^3-3x^2-4x-1, g(x) = x^3+x^2-x-1,$
j) $T = Z_3, f(x) = x^5+x^3+x, g(x) = x^4+2x^3+2x,$
k) $T = Z_2, f(x) = x^6+x^5+x^3+x+1, g(x) = x^3+x+1,$
l) $T = Z_2, f(x) = x^4+x^3+x^2+x, g(x) = x^6+x^5+x^4+x^3,$
m) $T = Z_3, f(x) = x^6+x^2+1, g(x) = x^4+x^3+2x+1,$
n) $T = Z_3, f(x) = x^3+2x^2+1, g(x) = 2x^4+x^3+2x+1,$
o) $T = Z_5, f(x) = x^3+x+1, g(x) = x^4+1,$
p) $T = Z_5, f(x) = x^6-3x^5+x^3+2x^2-x+3, g(x) = x^3-2x^2+3x-1.$

23. Rozhodněte, které z dvojic polynomů f(x), g(x) z příkladu 22 jsou soudělné a které nesoudělné.

24. Určete násobnost kořene c polynomu f(x) nad C, je-li:
a) $f(x) = x^3-5x^2+3x+9, c = 3,$
b) $f(x) = x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8, c = 2,$
c) $f(x) = x^5+7x^4+16x^3+8x^2-16x-16, c = -2,$
d) $f(x) = x^4-10x^3+36x^2-54x+27, c = 3,$
e) $f(x) = 16x^4-8x+3, c = 1/2,$
f) $f(x) = x^4-5x^3+6x^2+4x-8, c = 2,$
g) $f(x) = (1+i)x^4-4x^3+(3-i)x^2-2x, c = 1-i.$

25. Určete všechny kořeny polynomu f(x) z Q[x], víte-li, že má k-násobný kořen:
a) $f(x) = x^4+5x^3+6x^2-4x-8, k = 3,$
b) $f(x) = x^4-10x^3+36x^2-54x+27, k = 3,$
c) $f(x) = 16x^4-8x+3, k = 2,$
d) $f(x) = x^6-6x^5+9x^4+8x^3-24x^2+16, k = 4,$
e) $f(x) = 2x^5-7x^4-3x^3+26x^2-4x-24, k = 3.$

26. Určete normovaný polynom čtvrtého stupně s reálnými koeficienty, který má dvojnásobný kořen a) $2+i$, b) $1-i\sqrt{3}$.

27. V polynomu $f(x)$ z $Q[x]$ určete absolutní člen b tak, aby polynom $f(x)$ měl k-násobný kořen a určete zbývající kořen polynomu, je-li:
   a) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + b$, $k = 2$,
   b) $f(x) = x^3 - 3x + b$, $k = 2$,
   c) $f(x) = x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 54x + b$, $k = 3$.

28. Přesvědčte se, že polynom $f(x)$ z $Q[x]$ splňuje podmínky pro to, aby měl k-násobný kořen. Určete pak všechny kořeny tohoto polynomu, je-li:
   a) $f(x) = x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 54x + 27$, $k = 3$,
   b) $f(x) = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$, $k = 4$,
   c) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8$, $k = 3$.

29. Dokažte, že polynom $x^n + a$ nemůže mít vícenásobný kořen, je-li a různé od nuly.

30. Určte první derivaci polynomu $f(x) = 3x^5 + 2x^4 + 4x^3 - x^2 + 3x + 2$ nad Z_5 a určete stupeň této derivace.

31. Určete hodnotu polynomu $f(x)$ nad C a jeho derivací v bodě c, je-li:
   a) $f(x) = x^5 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 10$, $c = 2$,
   b) $f(x) = x^4 - 3ix^3 - 4x^2 + 5ix - 1$, $c = 1 + 2i$,
   c) $f(x) = x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 63$, $c = -2$,
   d) $f(x) = 3x^6 + 10x^5 - 10x^3 - 12x^2 - 16x + 7$, $c = -3$,
   e) $f(x) = (1+i)x^4 - 4x^3 + (3-i)x^2 - 2x$, $c = 1 - i$.

32. Pomocí Hornerova schematu vyjádředte polynom $f(x)$ nad C v mocninách dvojčlenu $x - a$, je-li:
   a) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$, $a = 2$,
   b) $f(x) = x^5$, $a = 1$,
   c) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 50x + 90$, $a = 2$,
   d) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$, $a = -1$,
   e) $f(x) = x^4 + 2ix^3 - (1+i)x^2 - 3x + 7 + i$, $a = -i$,
   f) $f(x) = x^4 + (3-8i)x^3 - (21+18i)x^2 - (33-20i)x + 7 + 18i$,
   $a = -1 + 2i$,
   g) $f(x) = 2x^4 - 11x^3 + 14x^2 + 5x - 7$, $a = 2$,
   h) $f(x) = x^4 + bx^3 + b^2x^2 + b^3x + b^4$, $a = b$.

33. Pomocí Hornerova schematu vyjádřete následující polynomy v mocninách x:

a) $(x+3)^4-(x+3)^3+1$,
b) $(x-2)^4+4(x-2)^3+6(x-2)^2+10(x-2)+20$,
c) $(x+1)^4+5(x+1)^3-2(x+1)^2+3(x+1)-6$,
d) $(x+2)^4+3(x+2)^2-7$,
e) $(x+2)^4-(x+2)^3+1$,
f) $2i(x+2)^3-3(x+2)^2+5i(x+2)+2$,
g) $(x-2)^5+10(x-2)^4+36(x-2)^3+62(x-2)^2+48(x-2)+18$,
h) $(x+2)^6-1$,
i) $(x-1)^5+5(x-1)^4+10(x-1)^3+10(x-1)^2+5(x-1)$,
j) $3(x-2)^3+20(x-2)^2+44(x-2)+33$.

34. Pomocí Hornerova schematu vyjádřete následující polynomy v mocninách dvojčlenu $x+3$:

a) $2(x-1)^3-4(x-1)^2+5(x-1)-4$,
b) $(x-1)^3-2(x-1)^2+5$.

35. Vyjádřete polynom $f(x) = x^6+12x^5+60x^4+160x^3+240x^2+192x+63$ nad C v mocninách dvojčlenu $x+2$. Na základě tohoto vyjádření určete všechny kořeny polynomu f(x).

36. Určete polynom, který má tytéž kořeny jako polynom f(x) z C[x], ale všechny jednoduché, je-li:

a) $f(x) = x^6-15x^4+8x^3+51x^2-72x+27$,
b) $f(x) = x^5-6x^4+16x^3-24x^2+20x-8$, $D(x) = x^2-2x+2$
c) $f(x) = 4x^5+20x^4+25x^3-10x^2-20x+8$. $f(x) = (x-2)(x-1+i)^2(x-1-i)^2$

37. Určete všechny kořeny polynomu f(x) z příkladu 36.c).

38. Určete všechny kořeny polynomu f(x) z R[x], víte-li, že jedním z kořenů polynomu f(x) je číslo c:

a) $f(x) = x^4-4x^2+8x-4$, $c = 1+i$,
b) $f(x) = x^6-4x^5+5x^4+4x^3-20x^2+24x-12$, $c = 1-i$ dvojnásobný,
c) $f(x) = x^4-4x^2+8x+35$, $c = 2+i\sqrt{3}$.

39. Určete všechny kořeny a napište rozklad polynomu f(x) nad C, jestliže f(x) má vícenásobné kořeny a jedním z jeho kořenů je číslo c:
a) $f(x) = x^6 + x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x + 1$, $c = -1/2 + i\sqrt{3}/2$,
b) $f(x) = x^6 + x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 4x + 4$, $c = -1/2 + i\sqrt{3}/2$.

40. Určete všechny kořeny polynomu $f(x) = 16x^4 - 64x^3 + 56x^2 + 16x - 15$, víte-li, že tyto kořeny jsou členy aritmetické posloupnosti.

41. Určete všechny kořeny polynomu $f(x) = x^2 + x + 1$ z T[x], které leží v T, a rozložte polynom f(x) v součin ireducibilních polynomů v T, je-li:
a) $T = Z_2$,
b) $T = C$.

42. Na základě výsledku příkladu 41.a) rozhodněte, zda je těleso Z_2 algebraicky uzavřené.

43. Rozhodněte a zdůvodněte, která z následujících těles jsou algebraicky uzavřená: Q, R, C, Z_3, Z_5, Z_p, kde p je prvočíslo.

44. Určete všechny kořeny polynomu $f(x) = x^4 - 2x^2$ z Z_8. Pro každý kořen c z Z_8 napište polynom f(x) ve tvaru $f(x) = (x - c)g(x)$, kde g(x) je z $Z_8[x]$.

45. Dokažte, že kvadratický nebo kubický polynom f(x) z T[x] je ireducibilní nad T právě když f(c) je různé od nuly pro každé c z T. Ukažte, že pro polynomy vyšších stupňů toto tvrzení obecně neplatí.

46. Určete všechny kvadratické a kubické polynomy nad Z_2 a rozhodněte, které z nich jsou ireducibilní.

47. Polynom f(x) z T[x] rozložte v součin ireducibilních polynomů nad T, je-li:
a) $T = Z_2$, $f(x) = x^5 + x^3 + x^2 + 1$,
b) $T = Z_3$, $f(x) = x^4 + x^3 + x + 2$,
c) $T = Z_5$, $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 1$,
d) $T = R$, $f(x) = x^4 + 4$,

e) $T = C$, $f(x) = x^4 + 4$,
f) $T = R$, $f(x) = x^6 - 1$,
g) $T = C$, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$,
h) $T = R$, $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 3$,
i) $T = R$, $f(x) = 16x^4 + 64$.

48. Určete kořeny polynomu $f(x) = x^3 - 7x + 6$ z $R[x]$, je-li jeden z jeho kořenů dvojnásobkem druhého.

49. Určete kořeny polynomu $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$ z $R[x]$, má-li dva dvojnásobné kořeny.

50. Určete kořeny polynomu $f(x) = x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6$ z $R[x]$, je-li součet dvou z nich roven 4.

51. Napište polynom 4. stupně s reálnými koeficienty, kde $a_4 = 1$, jehož dvojnásobným kořenem je číslo $2 + i$.

52. Napište polynom, jehož kořeny jsou dvojnásobky kořenů polynomu $x^3 + 3x + 2$ z $R[x]$.

53. Napište polynom, jehož kořeny jsou o jedničku menší než kořeny polynomu $f(x)$ z $R[x]$, je-li:
a) $f(x) = x^3 - 3x + 1$,
b) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4x - 8$.

54. Určete kořeny polynomu $4x^3 - 8x^2 + x + 3$, je-li jeden roven součtu ostatních.

55. Určete kořeny polynomu $f(x) = x^3 - 27x^2 + 242x - 720$, je-li jeden kořen aritmetickým průměrem zbývajících kořenů.

56. Určete koeficient a polynomu $f(x) = x^5 - ax^2 - ax + 1$ tak, aby číslo -1 bylo aspoň dvojnásobným kořenem polynomu $f(x)$.

57. Napište polynom třetího stupně, jehož kořeny jsou o jedničku větší než kořeny polynomu $f(x) = x^3 - 3x + 1$, aniž kořeny určíte.

58. Napište polynom třetího stupně, jehož kořeny jsou rovny trojnásobkům kořenů polynomu $f(x) = x^3 + 3x + 2$, aniž kořeny určíte.

59. Určete všechny kořeny polynomu $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 6$ nad R, je-li součet jeho dvou kořenů roven součtu zbývajících kořenů.

60. Určete všechny racionální kořeny polynomu $f(x)$ z $R[x]$, je-li :
a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 14$,
b) $f(x) = 6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$.

61. Řešte rovnici $f(x) = f(10)$, je-li $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

II. Polynomy n neurčitých

1. Určete stupeň a výšku každého členu a celkový stupeň polynomu $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 3x_1^3x_2^5x_4^2 - 5x_1^5x_2^2x_3x_4^3 + 2x_1^4x_2^2x_3^6x_4^5 + 4x_1^3x_2x_3^3x_4^4 - 2x_1^4x_2^3x_3^2x_4^8$. Uspořádejte členy lexikograficky podle výšek a určete vedoucí člen polynomu.

2. Napište všechny navzájem různé polynomy, které vzniknou permutacemi neurčitých v polynomech:
a) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^3 + x_2^3 - 2x_1x_2 + x_3$,
b) $f(x_1,x_2) = x_1 - x_1x_2 + x_2$,
a rozhodněte, je-li daný polynom symetrický.

3. Napište jednoduchý symetrický polynom $f(x_1,x_2,x_3)$ nad Z s vedoucím členem $3x_1^2x_2^2x_3$.

4. Napište jednoduchý symetrický polynom $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ nad Z s lexikograficky uspořádanými členy, je-li jeden z jeho členů $x_2^2x_3^3$.

5. Uveďte příklad symetrického polynomu, jehož vedoucí člen nemá nejvyšší stupeň ze všech členů polynomu.

6. Dané polynomy doplňte vhodnými členy tak, aby vznikly symetrické polynomy a uspořádejte jejich členy lexikograficky podle výšek:

a) $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2x_2 - 3x_2x_3$,
b) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2^2 + x_2^3 + x_1x_2x_3$,
c) $f(x_1,x_2) = x_1^3 + x_1^2 + x_1$,
d) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2x_3 + 3x_1^3$,
e) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^3x_2^2x_3$.

7. Dané symetrické polynomy vyjádřete pomocí elementárních symetrických polynomů

a) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 2\Sigma x_1^3$,
b) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 2\Sigma x_1^3 - \Sigma x_1^2x_2^2$,
c) $f(x_1,x_2) = \Sigma x_1^2x_2$,
d) $f(x_1,x_2,x_3) = \Sigma x_1^2x_2$,
e) $f(x_1,x_2,x_3) = \Sigma x_1^2$,
f) $f(x_1,x_2,x_3) = \Sigma x_1^2x_2^2$,
g) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \Sigma x_1^3x_2$,
h) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \Sigma x_1^2x_2x_3$,
i) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \Sigma x_1^2x_2^2$,
j) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \Sigma x_1^4$,
k) $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = \Sigma x_1^2x_2^2x_3$,
l) $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = \Sigma x_1^3x_2x_3$,
m) $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = \Sigma x_1^3x_2^2$,
n) $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = \Sigma x_1^4x_2$,
o) $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = \Sigma x_1^5$.

8. Určete normovaný polynom 3. stupně nad R, jehož kořeny jsou druhými mocninami kořenů polynomu f(x) nad R, aniž tyto kořeny určíte:

a) $f(x) = x^3 + 5x + 6$,
b) $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$.

9. Určete součet druhých mocnin kořenů polynomu f(x) nad R, aniž tyto kořeny určíte:
   a) $f(x) = x^3 + 2x - 3$,
   b) $f(x) = x^3 + 5x + 6$.

10. Určete hodnotu symetrického polynomu $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \Sigma x_1^3 x_2 x_3$, kde x_1, x_2, x_3, x_4 jsou kořeny polynomu $g(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x + 1$, aniž tyto kořeny určíte.

11. Určete hodnotu symetrického polynomu $f(x_1,x_2,x_3) = \Sigma x_1^2 x_2^2$, kde x_1, x_2, x_3 jsou kořeny polynomu $g(x) = x^3 + 5x + 6$, aniž tyto kořeny určíte.

12. Určete hodnotu symetrického polynomu $f(x_1,x_2,x_3) = \Sigma x_1^3 x_2$, kde x_1, x_2, x_3 jsou kořeny polynomu $g(x) = x^3 - x^2 - 4x + 1$, aniž tyto kořeny určíte.

13. Určete součet čtverců kořenů polynomu $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots +$ $+ a_{n-1} x + a_n$.

14. Určete součet třetích mocnin kořenů polynomu $f(x) = x^5 - 4x^4 +$ $+ 3x^2 - 2x + 6$ nad Z, aniž tyto kořeny určíte.

III. Řešení algebraických rovnic

1. Vypočtěte $i^{15}, i^{28}, i^{17}, i^{34}, i^{-6}, i^{-9}, i^{-15}$.

2. Ověřte, že platí $(1+i)^2 = 2i$, $(1-i)^2 = -2i$ a s využitím těchto vztahů vyjádřete $(1+i)^8$, $(1-i)^{12}$.

3. Určete druhé odmocniny z čísel -4, -25, -144, $-4/9$, -12, -18, $-5/125$, $-45/20$, $-75/35$.

4. Určete reálnou a imaginární část komplexního čísla z, je-li:
   a) $z = (-1/2 + i\sqrt{3}/2)^2$,

b) $z = (-1/2 + i\sqrt{3}/2)^3$,
c) $z = (1+2i)^6$,
d) $z = (2+i)^7 + (2-i)^7$,
e) $z = (1+2i)^5 - (1-2i)^5$,
f) $z = ((2+3i)/(2-3i))^2 - ((2-3i)/(2+3i))^2$,
g) $z = (1+3i)/(1+i)$,
h) $z = (5+5i)/(3-i)$,
i) $z = (13+i)/(5+3i)$,
j) $z = (1+i)/(1-i) + (1-i)/(1+i)$,
k) $z = ((1+i)/(1-i))^2 + ((1-i)/(1+i))^2$,
l) $z = 75/(4-3i)$,
m) $z = 12/i$.

5. Vyjádřete v goniometrickém tvaru komlexní číslo z, je-li :
a) $z = 12$,
b) $z = 4i$,
c) $z = -5$,
d) $z = -7i$,
e) $z = 1 + i\sqrt{3}$,
f) $z = 3 + 3i$,
g) $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$,
h) $z = \sqrt{3} + i$,
i) $z = 4 + 4i\sqrt{3}$,
j) $z = -1 + i$,
k) $z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$,
l) $z = 3 - 3i$,
m) $z = 1 - i\sqrt{3}$,
n) $z = -\sqrt{3} - i$,
o) $z = -2 + 2i\sqrt{3}$.

6. Vyjádřete v algebraickém tvaru komplexní číslo z, je-li:
a) $|z| = 2, \alpha = 0°$; b) $|z| = 3, \alpha = 180°$; c) $|z| = 1, \alpha = 270°$;
d) $|z| = 3, \alpha = 90°$; e) $|z| = 2, \alpha = 45°$; f) $|z| = 2, \alpha = 225°$;
g) $|z| = 4, \alpha = 315°$; h) $|z| = 5, \alpha = 135°$; i) $|z| = 2, \alpha = 135°$;
j) $|z| = 2, \alpha = 30°$; k) $|z| = 5, \alpha = 60°$; l) $|z| = 2, \alpha = 210°$;

m) $|z| = 10, \alpha = 330°$; n) $|z| = 3, \alpha = 120°$; o) $|z| = 1, \alpha = 240°$
p) $|z| = 2/3, \alpha = 60°$; q) $|z| = 5, \alpha = 405°$; r) $|z| = 6, \alpha = 840°$;
s) $|z| = 7/3, \alpha = -45°$.

7. Určete absolutní hodnotu a argument komplexního čísla z, je-li:
a) $z = 3+i$,
b) $z = 4-i$,
c) $z = -2+i$,
d) $z = -1-2i$,
e) $z = 2+i$,
f) $z = 3i+4$,
g) $z = 3i+2$.

8. Vypočtěte algebraicky součin komplexních čísel u, v, vyjádřete tato čísla v goniometrickém tvaru a ověřte platnost věty o absolutní hodnotě a argumentu součinu komplexních čísel:
a) $u = 1+i, v = i-1$,
b) $u = 1+i, v = 1-i$,
c) $u = 1+i, v = -3+3i$,
d) $u = 1+i\sqrt{3}, v = -2-2i\sqrt{3}$,
e) $u = 3\sqrt{3}+3i, v = -\sqrt{3}-i$,
f) $u = 1+i\sqrt{3}, v = \sqrt{3}-i$,
g) $u = -2+2i\sqrt{3}, v = 4-4i\sqrt{3}$.

9. Vypočtěte podíl u/v komplexních čísel u, v, vyjádřete tato čísla v goniometrickém tvaru a ověřte platnost věty o absolutní hodnotě a argumentu podílu komplexních čísel:
a) $u = 1+i, v = i-1$,
b) $u = 1+i, v = 1-i$,
c) $u = -4-4i, v = -2+2i$,
d) $u = 2-3i\sqrt{3}, v = -2\sqrt{3}+2i$,
e) $u = 6+6i\sqrt{3}, v = 3\sqrt{3}-3i$.

10. Vypočtěte algebraicky následující mocniny komplexních čísel a ověřte platnost Moivreovy věty:
a) $(-1/2+i\sqrt{3}/2)^2$,

b) $(-1/2+i\sqrt{3}/2)^3$,
c) $(1+i)^2$,
d) $(2+2i\sqrt{3})^3$,
e) $(1-i\sqrt{3})^6$.

11. Vypočítejte pomocí Moivreovy věty:
a) $(\sqrt{3}/2+i/2)^{12}$,
b) $(\sqrt{3}-i)^4$.

12. Určete všechny k-té odmocniny z jedné pro k = 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 a určete, které z nich jsou primitivní.

13. Určete všechny hodnoty následujících odmocnin z komplexních čísel:
a) $\sqrt[3]{-2+2i}$,
b) $\sqrt[3]{i}$,
c) $\sqrt[3]{1+i}$,
d) $\sqrt[3]{5+10i}$,
e) $\sqrt[4]{-4}$,
f) $\sqrt{1-\sqrt{3}i}$,
g) $\sqrt[4]{-64}$,
h) $\sqrt[6]{-8i}$.

14. Vypočítejte algebraicky i goniometricky druhé odmocniny z komplexního čísla z, je-li:
a) $z = 2i$,
b) $z = -8i$,
c) $z = 3-4i$,
d) $z = -15+8i$,
e) $z = -3-4i$,
f) $z = -11+60i$,
g) $z = 21-20i$,
h) $z = -5+12i$,
i) $z = 7-24i$,
j) $z = 15+8i$,
k) $z = 21+20i$,

l) $z = 4+3i$,
m) $z = 12+5i$,
n) $z = 24-7i$.

15. Řešte nad C kvadratické rovnice s komplexními koeficienty:
a) $x^2-(8-i)x+17-7i = 0$,
b) $x^2-(5+4i)x+6+8i = 0$,
c) $x^2-(2+i)x+(-1+7i) = 0$,
d) $x^2-(3+2i)x+5+i = 0$,
e) $x^2-2(1+i)x-1+2i = 0$,
f) $x^2-(4+2i)x+6+8i = 0$,
g) $x^2-(1-3i)x+2+6i = 0$,
h) $x^2-8x+13-4i = 0$,
i) $x^2-4ix+3+24i = 0$.

16. Řešte nad C kubické rovnice pomocí Cardanových vzorců (příp. nalezením racionálních kořenů):
a) $x^3-9x^2+36-28 = 0$,
b) $x^3-9x-28 = 0$,
c) $x^3-3x-2 = 0$,
d) $x^3+3x^2-6x-36 = 0$,
e) $x^3-7x-6 = 0$,
f) $x^3-15x+22 = 0$,
g) $x^3+3x-14 = 0$,
h) $x^3+24x-56 = 0$,
i) $x^3-6x-9 = 0$,
j) $x^3+36x+208 = 0$,
k) $x^3+3x^2+48x+144 = 0$,
l) $x^3+3x^2+9x-13 = 0$,
m) $x^3-9x^2+21x-13 = 0$,
n) $4x^3-12x^2-x+3 = 0$,
o) $x^3-8x^2+72 = 0$,
p) $x^3+18x-19 = 0$,
q) $x^3-6x-4 = 0$,
r) $x^3-3x+2 = 0$,
s) $x^3+6x^2+9x+4 = 0$,

t) $2x^3+x^2+2x-12=0$,
u) $x^3-4x^2+2x+3=0$,
v) $x^3-20x^2+68x-16=0$,
w) $x^3+6x^2+6x+5=0$,
x) $x^3-4x^2+x+6=0$,
y) $x^3-4x^2-4x-5=0$.

17. Pro které reálné hodnoty parametru b má rovnice $x^3-3x+b=0$ tři různé reálné kořeny?

18. Řešte kubické rovnice z příkladu 16. nalezením racionálních kořenů.

19. Pomocí Viétových vzorců proveďte zkoušku správnosti řešení rovnic z příkladů 15., 16..

20. Řešte následující rovnice převedením na rovnice binomické:
a) $x^3+6x^2+12x=117$,
b) $x^4-4x^3+6x^2-4x=15$.

21. Řešte rovnice 4. stupně nad C:
a) $x^4+2x^3-6x^2-5x+2=0$,
b) $x^4+2x^3+4x^2-7=0$,
c) $x^4+6x^3+16x^2+11=0$,
d) $x^4-2x^3+4x^2+2x-5=0$,
e) $x^4-40x^3+39=0$,
f) $x^4-2x^3+4x^2-13x+10=0$,
g) $x^4-6x^3+10x^2-2x-3=0$,
h) $x^4-2x^3+2x^2+4x-8=0$,
i) $x^4-3x^2-12x+40=0$,
j) $x^4+11x^2+10x+50=0$,
k) $x^4-2x^3+4x^2-2x+3=0$,
l) $x^4+2x^3+8x^2+2x+7=0$,
m) $x^4-x^3-x^2+2x-2=0$,
n) $x^4+2x^3+2x^2+10x+25=0$,
o) $x^4-4x^3+5x^2-2x-6=0$,
p) $x^4-(3/2)x^2+x-3/16\doteq 0$.

22. Pomocí Viétových vzorců proveďte zkoušku správnosti řešení rovnic z příkladu 20..

23. Řešte nalezením racionálních kořenů:

a) $4x^3 - 4x^2 - 11x + 6 = 0,$
b) $x^6 + (1/2)x^5 - (3/2)x^4 + x^2 + x/2 - 3/2 = 0,$
c) $3x^4 + (1/2)x^3 + x^2 - 2x + 1/2 = 0,$
d) $6x^4 - 11x^3 - x^2 - 4 = 0,$
e) $x^5 - 15x^3 + 10x^2 + 60x - 72 = 0,$
f) $x^3 + 3x^2 - 8x + 10 = 0,$
g) $x^6 + 3x^5 + 4x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 16x + 20 = 0,$
h) $6x^4 - 11x^3 - x^2 - 4 = 0,$
i) $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0,$
j) $3x^4 + 11x^3 + 17x^2 + 11x - 6 = 0.$

24. Dokažte, že rovnice $8x^3 - 6x + 1 = 0$ nemá racionální kořen.

25. Určete všechny celočíselné kořeny rovnice $x^3 + 3x^2 - 7x - 6 = 0.$

26. Řešte v C odstraněním vícenásobných kořenů:

a) $x^3 - 3x^2 + 4 = 0,$
b) $x^5 - 15x^3 + 10x^2 + 60x - 72 = 0,$
c) $x^3 - 3x - 2 = 0,$
d) $16x^4 - 8x + 3 = 0,$
e) $x^3 - 5x^2 + 3x + 9 = 0.$

27. Řešte v C vhodnou substitucí:

a) $3x^6 + 2x^4 - 2x^2 - 1 = 0,$
b) $x^6 - 6x^3 + 9 = 0,$
c) $x^6 - 5x^3 + 6 = 0,$
d) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0,$
e) $x^4 - x^2 - 6 = 0,$
f) $x^4 - 22x^2 + 49 = 0.$

28. Řešte v C reciproké rovnice:

a) $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0,$

b) $x^3+x^2+x+1 = 0$,
c) $6x^6+5x^5-44x^4+44x^2-5x-6 = 0$,
d) $5x^4-26x^3+10x^2-26x+5 = 0$,
e) $x^5-11x^4+17x^3+17x^2-11x+1 = 0$,
f) $x^5-19x^4+76x^3-76x^2+19x-1 = 0$,
g) $x^{10}-6x^9+12x^8-8x^7-x^6+x^4+8x^3-12x^2+6x-1 = 0$,
h) $x^8-x^7+20x^6-19x^5+19x^3-20x^2+x-1 = 0$,
i) $x^4+x^3+x^2+x+1 = 0$,
j) $6x^6-35x^5+56x^4-56x^2+35x-6 = 0$,
k) $x^7-2x^6-x^4-x^3-2x+1 = 0$,
l) $2x^5-11x^4+11x^3+11x^2-11x+2 = 0$,
m) $4x^5+12x^4+11x^3+11x^2+12x+4 = 0$,
n) $6x^6+13x^5+6x^4-6x^2-13x-6 = 0$,
o) $2x^5-5x^4+2x^3+2x^2-5x+2 = 0$,
p) $x^8-x^7+39x^6-80x^5+100x^4-80x^3+39x^2-10x+1 = 0$.

29. Řešte v C binomické rovnice:
a) $x^8-1 = 0$,
b) $x^5+4+4i = 0$,
c) $x^4+1 = 0$,
d) $3x^6-3 = 0$,
e) $x^3+5 = 0$,
f) $x^3-5 = 0$,
g) $x^4-16 = 0$,
h) $x^4+16 = 0$,
i) $x^4-81 = 0$,
j) $x^4+4 = 0$,
k) $x^4+64 = 0$,
l) $x^4+8-8i\sqrt{3} = 0$,
m) $x^5-32 = 0$,
n) $x^6+64 = 0$,
o) $x^6-729 = 0$,
p) $x^8-256 = 0$,
q) $x^8-81 = 0$,
r) $x^{12}-4096 = 0$,
s) $x^3+2-2i = 0$.

30. Řešte v C následující binomické rovnice algebraicky jako rovnice reciproké:

a) $x^4 + 1 = 0$,
b) $x^8 - 1 = 0$,
c) $x^8 + 1 = 0$.

31. Řešte algebraicky (rozkladem příslušných polynomů) rovnice a), d), e), f), g) z příkladu 29.

32. Převeďte vhodnou substitucí rovnici a) $6x^3 + 13x^2 - 26x + 5 = 0$, b) $x^4 + 16 = 0$ na rovnici reciprokou a řešte ji v C.

33. Řešte v C:

a) $x^6 + 4x^3 = 0$,
b) $2x^4 + 8 = 0$,
c) $x^6 + 5x^3 + 6 = 0$,
d) $x^5 + 2x^4 - 9x^3 - 4x^2 + 30x - 36 = 0$.

34. Metodou půlení intervalu určete reálný kořen rovnice $x^3 + 2x^2 - 3x - 6 = 0$ s přesností na dvě desetinná místa.

35. Metodou tětiv určete reálný kořen rovnice $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 11x - 12 = 0$ ležící v intervalu $(3; 4{,}5)$ s přesností na dvě desetinná místa.

36. Metodou tětiv určete reálný kořen rovnice $x^3 - 3x^2 - 9x + 5 = 0$ s přesností na šest desetinných míst.

37. Řešte úlohu 36. Newtonovou metodou tečen.

38. Určete hrubý odhad horní a dolní hranice reálných kořenů rovnice:

a) $x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 52x^2 + 7x + 17 = 0$,
b) $x^5 - 2x^4 + 3x^2 + 4x - 6 = 0$.

39. Určete Sturmův řetězec polynomu f(x), je-li:

a) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 8x - 8$,
b) $f(x) = x^4 + 12x - 5$.

40. Separujte reálné kořeny polynomu $f(x)$, je-li:

a) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 8x - 8$,

b) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x - 5$,

c) $f(x) = 4x^8 - 5x^7 + x^6 - x^4 + 3x^3 - x^2 + 10x - 2$.

Výsledky úloh:

I. Polynomy jedné neurčité

1. $f(x) = -\sqrt{2}+x$, st $f(x) = 1$; 2. 1, 2, 4, 2^k, resp. 2, 6, 18, 2.3^k; 3. $Z_5[x]$; 6. $x+x^4+x^5$, $x+x^4+x^6+x^7+x^8$; 9. ano; 13. a) ano, b) ano, c) 3 ano, -1 ne; 15. a) 43, b) -45, c) -327, d) 136, e) $-1-44i$, f) $8-6i$, g) $-9+8i$, h) 5; 16. 2; 17. a) $x^4+x^3-11x^2-9x+18$, 0, b) $x^4-5x^3+10x^2-20x+42$, -91, c) x^3-x^2+3x-3, 5, d) $2x^4-6x^3+13x^2-39x+109$, -327, e) $4x^2-(3+4i)x+(-1+7i)$, $8-6i$, f) $x^2-2ix-5-2i$, $-9+8i$, g) $x^4+(-1+i)x^3+(3-i)x^2+(-8-4i)x+12+16i$, $1-44i$; 18. a) $2x^2+3x+11$, $25x-5$, b) $(1/3)x-(7/9)$, $(-26/9)x-(2/9)$, c) $2x-1$, $-2x+4$, d) $2x^4-3x^3+2x^2-4x+1$, 0, e) $(2/25)x+(1/25)$, $(2/25)(19x^3-12x^2+19x-12)$, f) $x^4-2x^3+6x^2-15x+35$, -77, g) $4x^4+(-2-4i)x+5i$, $5-4i$, h) $x^{80}-x^{78}+x^{76}-x^{74}+\ldots-x^2+1$, 0; 19. $2x^4+4x^3+1$, 2; 20. $p = -q^2-1$, $m = q$; 21. 1) $q = p-1$, $m = 0$, 2) $q = 1$, $m = \sqrt{(2-p)}$ nebo $m = -\sqrt{(2-p)}$; 22. a) x^2-1, b) $x-1$, c) $x-2$, d) x^2+3x+2, e) x^2+3x+2, f) 1, g) $x+1$, h) x^2+1, i) 1, j) x^2+x, k) 1, l) $x^4+x^3+x^2+x$, m) 1, n) 1, o) 1, p) $x+3$; 23. nesoudělné f), i), k), m), n), o); 24. a) dvojnásobný, b) trojnásobný, c) čtyřnásobný, d) trojnásobný, e) dvojnásobný, f) trojnásobný, g) jednoduchý; 25. a) -2 trojnásobný, 1, b) 3 trojnásobný, 1, c) 1/2 dvojnásobný, $-3/4 + i\sqrt{15}/4$, $-3/4-i\sqrt{15}/4$, d) 2 čtyřnásobný, -1 dvojnásobný, e) 2 trojnásobný, $-3/2$, -1; 26. a) $x^4-8x^3+26x^2-40x+25$, b) $x^4-4x^3+12x^2-16x+16$; 27. a) 1) $b = 9$, 3 dvojnásobný, -1, 2) $b = -13/27$, 1/3 dvojnásobný, 13/3, b) 1) $b = -2$, -1 dvojnásobný, 2, 2) $b = 2$, 1 dvojnásobný, -2, c) $b = 27$, 3 trojnásobný, 1; 28. a) 3 trojnásobný, 1, b) -1 čtyřnásobný, 2 dvojnásobný, c) 2 trojnásobný, -1; 30. $3x^3+2x^2-2x+3$; 31. a) 18, 48, 124, 216, 240, 120, b) $-12-2i$, $-16+8i$, $-8+30i$, $24+30i$, 24, c) -1, 0, 0, 0, 0, 0, 720, d) 26, -538, 2046, -4380, 6120, -5280, 2160, e) 0, 2, $6-2i$, 24, $24+24i$; 32. a) $3(x-2)^3+20(x-2)^2+44(x-2)+33$, b) $(x-1)^5+5(x-1)^4+10(x-1)^3+10(x-1)^2+5(x-1)+1$, c) $(x-2)^4-18(x-2)+38$, d) $(x+1)^4-2(x+1)^3-3(x+1)^2+4(x+1)+1$, e) $(x+i)^4-2i(x+i)^3-(1+i)(x+i)^2-5(x+i)+7+5i$, f) $(x+1-2i)^4-(x+1-2i)^3+2(x+1-2i)+1$, g) $2(x-2)^4+5(x-2)^3-4(x-2)^2-7(x-2)+3$, h) $(x-b)^4+5b(xb)^3+$

$+10b^2(xb)^2+10b^3(x-b)+5b^4$; **33**. a) $x^4+11x^3+45x^2+81x+55$, b) $x^4-4x^3+6x^2+2x+8$, c) $x^4+9x^3+19x^2+18x+1$, d) $x^4+8x^3+27x^2+44x+21$, e) $x^4+7x^3+18x^2+20x+9$, f) $2ix^3+(12i-3)x^2+(29i-12)x+(26i-10)$, g) $x^5-4x^3+6x^2-8x+10$, h) $x^6+12x^5+60x^4+160x^3+240x^2+192x+63$, i) x^5, j) $3x^3+2x^2+1$; **34**. a) $2(x+3)^3-28(x+3)^2+133(x+3)-216$, b) $(x+3)^3-14(x+3)^2+64(x+3)--91$; **35**. $(x+2)^6-1$, -1, -3, $-5/2+i\sqrt{3}/2$, $-5/2-i\sqrt{3}/2$, $-3/2+i\sqrt{3}/2$, $-3/2-i\sqrt{3}/2$; **36**. a) x^3-x^2-2x+9, b) x^3-4x^2+6x-4, c) $2x^2+3x-2$; **37**. $1/2$ dvojnásobný, -2 trojnásobný; **38**. a) $1+i$, $1-i$, $-1+\sqrt{3}$, $-1-\sqrt{3}$, b) $1-i$ dvojnásobný, $1+i$ dvojnásobný, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, c) $2+i\sqrt{3}$, $2-i\sqrt{3}$, $-2+i$, $-2-i$; **39**. a) $-1/2+i\sqrt{3}/2$, $-1/2-i\sqrt{3}/2$, i dvojnásobný, $-i$ dvojnásobný, b) $-1/2+i\sqrt{3}/2$, $-1/2-i\sqrt{3}/2$, $i\sqrt{2}$ dvojnásobný, $-i\sqrt{2}$ dvojnásobný; **40**. $-1/2$, $1/2$, $3/2$, $5/2$; **41**. a) neexistuje, b) $-1/2+i\sqrt{3}/2$, $-1/2-i\sqrt{3}/2$; **42**. není; **43**. C; **44**. 0, 2, 4, 6, $x^4-2x^2=x(x^3+6x^2+2x-4)=(x-2)(x^3+2x^2+2x+4)=(x-4)(x^3+4x^2-2x)=(x-6)(x^3+6x^2+2x-4)$; **46**. x^2, $x+x^2$, $1+x^2$, $1+x+x^2$, x^3, x^2+x^3, $x+x^3$, $x+x^2+x^3$, $1+x^3$, $1+x^2+x^3$, $1+x+x^3$, $1+x+x^2+x^3$, ireducibilní jsou $1+x+x^2$, $1+x^2+x^3$, $1+x+x^3$; **47**. a) $(x+1)^3(x^2+x+1)$, b) $(x^2+x+2)(x^2+1)$, c) $(x+3)(x^2+4x+2)$, d) $(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$, e) $(x-1-i)(x+1+i)(x-1+i)(x+1-i)$, f) $(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$, g) $(x-1)^2(x-3)$, h) $(x-3)(x^2-x+1)$, i) $16(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$; **48**. 1, 2, -3; **49**. -1 dvojnásobný, 2 dvojnásobný; **50**. 1 dvojnásobný, 2, 3; **51**. $x^4-8x^3+26x^2-40x+25$; **52**. $x^3+12x+16$; **53**. a) x^3+3x^2-1, b) $x^4+4x^3+4x^2+4x-5$; **54**. 1, $-1/2$, $3/2$; **55**. 8, 9, 10; **56**. -5; **57**. x^3-3x^2+3x; **58**. $x^3+27x+54$; **60**. a) 2, b) -3, $1/2$; **61**. -8, 10.

ax^3-3ax^2-3a

II. Polynomy n neurčitých

1. 10, 11, 17, 11, 17, stupeň polynomu je 17, výšky podle velikosti (5, 2, 1, 3), (4, 3, 2, 8), (4, 2, 6, 5), (3, 5, 0, 2), (3, 1, 3, 4), vedoucí člen je $x_1^5x_2^2x_3x_4^3$; **2**. a) 3 různé polynomy – není symetrický, b) je symetrický; **3**. $3x_1^2x_2^2x_3+3x_1^2x_3^2x_2+3x_2^2x_3^2x_1$; **4**. $x_1^3x_2^2+x_1^3x_3^2+x_1^3x_4^2+x_1^2x_2^3+x_1^2x_3^3+x_1^2x_4^3+x_2^3x_3^2+x_2^3x_4^2+x_2^2x_3^3+x_2^2x_4^3+x_3^3x_4^2+x_3^2x_4^3$; **5**. např. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_1x_2x_3+x_2^2+x_3^2$; **6**. a) $2x_1^2x_2+2x_1^2x_3+2x_1x_2^2-3x_1x_2+2x_1x_3^2-3x_1x_3+2x_2^2x_3+2x_2x_3^2-3x_2x_3$, b) $x_1^3+x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1x_2^2+x_1x_2x_3+x_1x_3^2+x_2^3+x_2^2x_3+x_2x_3^2+x_3^3$, c) $x_1^3+x_1^2+x_1+x_23+x_2^2+x_2$,

d) $3x_1^3 + x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_1^2x_4^2 + 2x_1x_2x_3 + 2x_1x_2x_4 + 2x_1x_3x_4 + 3x_2^3 + x_2^2x_3^2 + {}$ $+ x_2^2x_4^2 + 2x_2x_3x_4 + 3x_3^3 + x_3^2x_4^2 + 3x_4^3$, e) $x_1^3x_2^2x_3 + x_1^3x_2x_3^2 + x_1^2x_2^3x_3 + x_1^2x_2x_3^3 + x1x_2^3x_3^2 + x1x_2^2x_3^3$; 7. a) $2s_1^3 -$ $- 6s_1s_2 + 6s_3$, b) $2s_1^3 - 6s_1s_2 + 6s_3 + 2s_1s_3 - s_2^2 - 2s_4$, c) s_1s_2, d) $s_1s_2 - 3s_3$, e) $s_1^2 - 2s_2$, f) $s_1^2 - 2s_1s_3$, g) $s_1^2s_2 - s_1s_3 - 2s_2^2 + 4s_4$, h) $s_1s_3 - 4s_4$, i) $s_2^2 - 2s_1s_3 + 2s_4$, j) $s_1^4 - 4s_1^2s_2 + 2s_2^2 + 4s_1s_3 - 4s_4$, k) $s_2s_3 - 3s_1s_4 + 5s_5$, l) $s_1^2s_3 - 2s_2s_3 - s_1s_4 + 5s_5$, m) $s_1s_2^2 - 2s_1^2s_3 - s_2s_3 + 5s_1s_4 - 5s_5$, n) $s_1^3s_2 -$ $- 3s_1s_2^2 - s_1^2s_3 + 5s_2s_3 + s_1s_4 - s_5$, o) $s_1^5 - 5s_1^3s_2 + 5s_1s_2^2 + 5s_1^2s -$ $- 5s_2s_3 - 5s_1s_4 + 5s_5$; 8. a) $x^3 + 10x^2 + 25x - 36$, b) $x^3 + 3x^2 + 2x - 1$, 9. a) -4, b) -10; 10. 16; 11. 25; 12. -35; 13. $a_1^2 - 2a_2$; 14. 55

III. Řešení algebraických rovnic

1. $-i, 1, i, -1, -1, -i, i$; 2. $16, -64$; 3. $2i, -2i, 5i, -5i, 12i, -12i, i2/3, -i2/3, 2i\sqrt{3}, -2i\sqrt{3}, 3i\sqrt{2}, -3i\sqrt{2}, i\sqrt{3/5}, -i\sqrt{3/5}, 3i/2, -3i/2, i\sqrt{105}/7, -i\sqrt{105}/7$; 4. a) $a = -1/2, b = -\sqrt{3}/2$, b) $a = 1, b = 0$, c) $a = 117, b = 44$, d) $a = -556, b = 0$, e) $a = 0, b = -76$, f) $a = 0, b = -240/169$, g) $a = 2, b = 1$, h) $a = 1, b = 2$, i) $a = 2, b = -1$, j) $a = 0, b = 0$, k) $a = -2, b = 0$, l) $a = 12, b = 3$, m) $a = 0, b = -12$; 5. a) $12(\cos 0° + i\sin 0°)$, b) $4(\cos 90° + i\sin 90°)$, c) $5(\cos 180° + i\sin 180°)$, d) $7(\cos 270° + i\sin 270°)$, e) $2(\cos 60° + i\sin 60°)$, f) $3\sqrt{2}(\cos 45° + i\sin 45°)$, g) $2(\cos 45° + i\sin 45°)$, h) $2(\cos 30° + i\sin 30°)$, i) $8(\cos 60° + i\sin 60°)$, j) $\sqrt{2}(\cos 135° + i\sin 135°)$, k) $2(\cos 225° + i\sin 225°)$, l) $3\sqrt{2}(\cos 315° + i\sin 315°)$, m) $2(\cos 300° + {}$ $+ i\sin 300°)$, n) $2(\cos 210° + i\sin 210°)$, o) $4(\cos 120° + i\sin 120°)$; 6. a) 2, b) -3, c) $-i$, d) $3i$, e) $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$, f) $-3\sqrt{2} - i3\sqrt{2}$, g) $2\sqrt{2} - i2\sqrt{2}$, h) $-5\sqrt{2}/2 + i5\sqrt{2}/2$, i) $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$, j) $\sqrt{3} + i$, k) $3 + i3\sqrt{3}$, l) $-4\sqrt{3} - 4i$, m) $5\sqrt{3} - 5i$, n) $-3/2 + i3\sqrt{3}/2$, o) $-1/2 - i\sqrt{3}/2$, p) $1/3 + i\sqrt{3}/3$, q) $5\sqrt{3}/2 +$ $+ i5\sqrt{3}/2$, r) $-3 + i3\sqrt{3}$, s) $7\sqrt{2}/6 - i7\sqrt{2}/6$; 7. a) $\sqrt{10}$, 18°26′, b) $\sqrt{17}$, 345°57′, c) $\sqrt{5}$, 153°26′, d) $\sqrt{5}$, 243°26′, e) $\sqrt{5}$, 26°34′, f) 5, 36°52′, g) $\sqrt{13}$, 33°41′; 8. a) $-2 = \sqrt{2}(\cos 45° + i\sin 45°)\sqrt{2}(\cos 135° + i\sin 135°) =$ $= 2(\cos 180° + {} + i\sin 180°$, b) $2 = \sqrt{2}(\cos 45° + i\sin 45°)\sqrt{2}(\cos 315° + i\sin 315°) =$ $= 2(\cos 360° + \sin 360°)$, c) $-6 = \sqrt{2}(\cos 45° + i\sin 45°)3\sqrt{2}(\cos 135° + i\sin 135°) =$ $= 6(\cos 180° + i\sin 180°)$, d) $4 - 4i\sqrt{3} = 2(\cos 60° + i\sin 60°)4(\cos 240° +$ $+ i\sin 240°) = 8(\cos 300° + i\sin 300°)$, e) $-6 - 6i\sqrt{3} = 6(\cos 30° + i\sin 30°)$ $2(\cos 210° + i\sin 210°) = 12(\cos 240° + i\sin 240°)$, f) $2\sqrt{3} + 2i = 2(\cos 60° +$

$+ i\sin 60^\circ)2(\cos 330^\circ + i\sin 330^\circ) = 4(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$, g) $16 + 16i\sqrt{3} = 4(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)8(\cos 300^\circ + i\sin 300^\circ) = 32(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$; **9**. a) $-i = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ):\sqrt{2}(\cos 135^\circ + \sin 135^\circ) = \cos(-90^\circ) + i\sin(-90^\circ)$, b) $i = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ):\sqrt{2}(\cos 315 + i\sin 315^\circ) = \cos(-270^\circ) + i\sin(-270^\circ)$, c) $2i = 4\sqrt{2}(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ):2\sqrt{2}(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ) = 2(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ)$, d) $-3\sqrt{3}/4 + i3\sqrt{3}/ = 6(\cos 300^\circ + i\sin 300^\circ):4(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ) = 3/2(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ)$, e) $2i = 12(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ):6(\cos 330^\circ + i\sin 330^\circ) = 2(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ)$; **10**. a) $-1/2 - i\sqrt{3}/2 = (\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)^2 = \cos 240^\circ + i\sin 240^\circ$, b) $1 = (\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)^3 = \cos 360^\circ + i\sin 360^\circ$, c) $2i = (\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ))^2 = 2(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ)$, d) $-64 = (4(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ))^3 = 64(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ)$, e) $64 = (2(\cos 300^\circ + i\sin 300^\circ))^6 = 64(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$;
11. a) $(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)^{12} = 1$, b) $(2(\cos(-30^\circ) + i\sin(-30^\circ))^4 = 16(\cos(-120^\circ) + i\sin(-120^\circ)) = -8(1 + i\sqrt{3})$; **12**. $k = 2: x_1 = 1, x_2 = -1$, primitivní x_2, $k = 3: x_1 = 1, x_2 = -1/2 + i\sqrt{3}/2, x_3 = -1/2 - i\sqrt{3}/2$, primitivní x_2, x_3, $k = 4: x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = i, x_4 = -i$, primitivní x_3, x_4, $k = 6: x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 1/2 + i\sqrt{3}/2, x_4 = 1/2 - i\sqrt{3}/2, x_5 = -1/2 + i\sqrt{3}/2, x_6 = -1/2 - i\sqrt{3}/2$, primitivní x_3, x_4, $k = 8: x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = i, x_4 = -i, x_5 = \sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2, x_6 = \sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2, x_7 = -\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2, x_8 = -\sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2$, primitivní x_5, x_6, x_7, x_8, $k = 12: x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = i, x_4 = -i, x_5 = 1/2 + i\sqrt{3}/2, x_6 = 1/2 - i\sqrt{3}/2, x_7 = -1/2 + i\sqrt{3}/2, x_8 = -1/ - i\sqrt{3}/2, x_9 = \sqrt{3}/2 + i/2, x_{10} = \sqrt{3}/2 - i/2, x_{11} = -\sqrt{3}/2 + i/2, x_{12} = -\sqrt{3}/2 - i/2$, primitivní $x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}$, $k = 24: x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = i, x_4 = -i, x_5 = 1/2 + i\sqrt{3}/2, x_6 = 1/2 - i\sqrt{3}/2, x_7 = -1/2 + i\sqrt{3}/2, x_8 = -1/2 - i\sqrt{3}/2, x_9 = \sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2, x_{10} = \sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2, x_{11} = -\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2, x_{12} = -\sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2, x_{13} = \sqrt{3}/2 + i/2, x_{14} = \sqrt{3}/2 - i/2, x_{15} = -\sqrt{3}/2 + i/2, x_{16} = -\sqrt{3}/2 - i/2, x_{17} = (\sqrt{6} + \sqrt{2} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2}))/4, x_{18} = -(\sqrt{6} + \sqrt{2} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2}))/4, x_{19} = (\sqrt{6} + \sqrt{2} - i(\sqrt{6} - \sqrt{2}))/4, x_{20} = -(\sqrt{6} + \sqrt{2} - i(\sqrt{6} - \sqrt{2}))/4, x_{21} = (\sqrt{6} - \sqrt{2} + i(\sqrt{6} + \sqrt{2}))/4, x_{22} = -(\sqrt{6} - \sqrt{2} + i(\sqrt{6} + \sqrt{2}))/4, x_{23} = (\sqrt{6} - \sqrt{2} - i(\sqrt{6} + \sqrt{2}))/4, x_{24} = -(\sqrt{6} - \sqrt{2} - i(\sqrt{6} + \sqrt{2}))/4$, primitivní $x_{17}, x_{18}, x_{19}, x_{20}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}$; **13**. a) $\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ) = 1 + i$, $\sqrt{2}(\cos 165^\circ + i\sin 165^\circ) = -(\sqrt{3} + 1)/2b) + i(\sqrt{3} - 1)/2$, $\sqrt{2}(\cos 285^\circ + i\sin 285^\circ) = (\sqrt{3} - 1)/2 - i(\sqrt{3} + 1)/2$, b) $-i, \sqrt{3}/2 + i/2, -\sqrt{3}/2 + i/2$, c) $\sqrt[6]{2}(\cos(15^\circ + k120^\circ) + i\sin(15^\circ + k120^\circ)), k = 0, 1, 2$, d) $\sqrt[6]{125}(\cos(21^\circ 9' + k120^\circ) + i\sin(21^\circ 9' + k120^\circ)), k = 0, 1, 2$, e) $1 + i, 1 - i, -1 + i, -1 - i$,

f) $\sqrt{6}/2 - i\sqrt{2}/2$, $-\sqrt{6}/2 + i\sqrt{2}/2$, g) $2+2i$, $2-2i$, $-2+2i$, $-2-2i$, h) w, we, we^2, we^3, we^4, we^5, kde $w = 1+i$, $e = 1/2 + i\sqrt{3}/2$; 14. a) $1+i$, $-1-i$, b) $2-2i$, $-2+2i$, c) $2-i$, $-2+i$, d) $1+4i$, $-1-4i$, e) $1-2i$, $-1+2i$, f) $5+6i$, $-5-6i$, g) $5-2i$, $-5+2i$, h) $2+3i$, $-2-3i$, i) $4-3i$, $-4+3i$, j) $4+i$, $-4-i$, k) $5+2i$, $-5-2i$, l) $3\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$, $-3\sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2$, m) $5\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$, $-5\sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2$, n) $7\sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2$, $-7\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$; 15. a) $5+i$, $3-2i$, b) $3+4i$, 2, c) $3-i$, $-1+2i$, d) $2+3i$, $1-i$, e) $2+i$, i, f) $3-i$, $1+3i$, g) $2-4i$, $-1+i$, h) $6+i$, $2-i$, i) $3-2i$, $-3+6i$; 16. a) 1, $4+i2\sqrt{3}$, $4-i2\sqrt{3}$, b) 4, $-2+i\sqrt{3}$, $-2-i\sqrt{3}$, c) 2, -1 dvojnásobný, d) 4, $-2+i\sqrt{3}$, $-2-i\sqrt{3}$, e) -1, -2, 3 casus irreducibilis, f) 2, $-1+2\sqrt{3}$, $-1-2\sqrt{3}$ casus irreducibilis, g) 2, $1+i\sqrt{6}$, $1-i\sqrt{6}$, h) 2, $-1+3i\sqrt{3}$, $-1-3i\sqrt{3}$, i) 3, $-3/2+i\sqrt{3}/2$, $-3/2-i\sqrt{3}/2$, j) -4, $2+4i\sqrt{3}$, $2-4i\sqrt{3}$, k) -3, $4i\sqrt{3}$, $-4i\sqrt{3}$, l) 1, $-2+3i$, $-2-3i$, m) 1, $4+\sqrt{3}$, $4-\sqrt{3}$, n) 3, $1/2$, $-1/2$, o) 6, $1+\sqrt{13}$, $1-\sqrt{13}$, p) 1, $-1/2+i5\sqrt{3}/2$, $-1/2-$ $-i5\sqrt{3}/2$, q) -2, $1+\sqrt{3}$, $1-\sqrt{3}$, r) -2, 1 dvojnásobný, s) -4, -1 dvojnásobný, t) $3/2$, $-1+i\sqrt{3}$, $-1-i\sqrt{3}$, u) 3, $1/2+\sqrt{5}/2$, $1/2\sqrt{5}/2$, v) 4, $8+2\sqrt{15}$, $8-2\sqrt{15}$, w) -5, $-1/2+i\sqrt{3}/2$, $-1/2-i\sqrt{3}/2$, x) -1, 2, 3, y) 5, $-1/2+i\sqrt{3}/2$, $-1/2-i\sqrt{3}/2$; 17. $-2 < b < 2$; 20. a) 3, $-9/2+i5\sqrt{3}/2$, $-9/2-i5\sqrt{3}/2$, b) 3, -1, $1+2i$, $1-2i$; 21. a) -1, 2, $-3/2+\sqrt{13}/2$, $-3/2-\sqrt{13}/2$, b) 0, 1, $-3/2+i\sqrt{19}/2$, $-3/2-i\sqrt{19}/2$, c) 0, -1, $-5/2+i\sqrt{19}/2$, $-5/2-i\sqrt{19}/2$, d) 1, -1, $1+2i$, $1-2i$, e) 1, 3, $-2+3i$, $-2-3i$, f) 1, 2, $-5/2+i\sqrt{19}/2$, $-5/2-i\sqrt{19}/2$, g) 1, 3, $1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$, h) 2, -2, $1+i\sqrt{3}$, $1-i\sqrt{3}$, i) $2+i$, $2-i$, $-2+2i$, $-2-2i$, j) $1+3i$, $1-3i$, $-1+2i$, $-1-2i$, k) i, $-i$, $1+i\sqrt{2}$, $1-i\sqrt{2}$, l) i, $-i$, $-1+i\sqrt{6}$, $-1-i\sqrt{6}$, m) $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $1/2+i\sqrt{3}/2$, $1/2-i\sqrt{3}/2$, n) $1+2i$, $1-2i$, $-2+i$, $-2-i$, o) $1+\sqrt{3}$, $1-\sqrt{3}$, $3+\sqrt{5}$, $3-\sqrt{5}$, p) $1/2$ trojnásobný, $-3/2$; 23. a) 2, $1/2$, $-3/2$, b) $-3/2$, 1, $\sqrt{2}/2+i\sqrt{2}/2$, $\sqrt{2}/2-i\sqrt{2}/2$, $-\sqrt{2}/2+i\sqrt{2}/2$, $-\sqrt{2}/2-i\sqrt{2}/2$, c) $1/2$, $1/3$, $-1/2+i\sqrt{3}/2$, $-1/2-i\sqrt{3}/2$, d) 2, $-2/3$, $1/2$, $1/3$, e) 2 trojnásobný, -3 dvojnásobný, f) -5, $1+i$, $1-i$, g) 1 dvojnásobný, -2 dvojnásobný, $-1/2+i\sqrt{19}/2$, $-1/2-i\sqrt{19}/2$, h) $-2/3$, 2, $1/4+i\sqrt{7}/4$, $1/4-i\sqrt{7}/4$, i) 2, 4, -3, j) $1/3$, -2, $-1+i\sqrt{2}$, $-1-i\sqrt{2}$; 26. a) -1, 2 dvojnásobný, b) 2 trojnásobný, -3 dvojnásobný, c) 2, -1 dvojnásobný, d) $1/2$ dvojnásobný, $-1/2+i\sqrt{2}/2$, $-1/2-i\sqrt{2}/2$, e) 3 dvojnásobný, -1; 27. a) i, $-i$, $\sqrt{(1+\sqrt{13})/6}$, $-\sqrt{(1+\sqrt{13})/6}$, $\sqrt{(1-\sqrt{13})/6}$, $-\sqrt{(1-\sqrt{13})/6}$, b) $\sqrt[3]{3}$ dvojnásobný, $-\sqrt[3]{3}/2+i\sqrt{3}/2$ dvojnásobný, $-\sqrt[3]{3}/2-i\sqrt{3}/2$ dvojnásobný, c) $\sqrt[3]{3}$, $-\sqrt[3]{3}/2+\sqrt[3]{3}.3i/2$, $\sqrt[3]{2}$, $-\sqrt[3]{2}/2+i.\sqrt[3]{2}\sqrt{3}/2$, d) $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, e) $i\sqrt{2}$, $-i\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$,

f) $\sqrt{(11+6\sqrt{2})}$, $-\sqrt{(11+6\sqrt{2})}$, $\sqrt{(11-6\sqrt{2})}$, $-\sqrt{(11-6\sqrt{2})}$; 28. a) i, $-i$, $-1/2+i\sqrt{3}/2$, $-1/2-i\sqrt{3}/2$, b) -1, i, $-i$, c) 1, -1, $-1/3$, -3, $1/2$, 2, d) 5, $1/5$, i, $-i$, e) -1, $9/2+\sqrt{77}/2$, $9/2-\sqrt{77}/2$, $3/2+\sqrt{5}/2$, $3/2-\sqrt{5}/2$, f) 1, $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$, $7+4\sqrt{3}$, $7-4\sqrt{3}$, g) 1 pětinásobný, -1, $-1/2+i\sqrt{3}$, $-1/2-i\sqrt{3}$, $3/2+\sqrt{5}/2$, $3/2-\sqrt{5}/2$, h) 1, -1, $1/2+i\sqrt{3}/2$, $1/2-i\sqrt{3}/2$, $i3\sqrt{2}/2+ + i\sqrt{2}\sqrt{11}/2$, $i3\sqrt{2}/2-i\sqrt{2}\sqrt{11}/2$, $-i3\sqrt{2}/2+i\sqrt{2}\sqrt{11}/2$, $-i3\sqrt{2}/2-i\sqrt{2}\sqrt{11}/2$, i) $(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{(10+2\sqrt{5})})/4$, $(-1+\sqrt{5}-i\sqrt{(10+2\sqrt{5})})/4$, $(-1-\sqrt{5}+ + i\sqrt{(10-2\sqrt{5})})/4$, $(-1-\sqrt{5}-i\sqrt{(10-2\sqrt{5})})/4$, j) 1, -1, 3, $1/3$, 2, $1/2$, k) -1, $1/2+i\sqrt{3}/2$, $1/2-i\sqrt{3}/2$, $1/2+\sqrt{3}/2+\sqrt{(2\sqrt{3})}/2$, $1/2+\sqrt{3}/2\sqrt{(2\sqrt{3})}/2$, $1/2-\sqrt{3}/2+\sqrt{(2\sqrt{3})}/2$, $1/2-\sqrt{3}/2-\sqrt{(2\sqrt{3})}/2$, l) -1, 2, $1/2$, $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$, m) -1, -2, $-1/2$, $1/4+i\sqrt{15}/4$, $1/4-i\sqrt{15}/4$, n) 1, -1, i, $-i$, $-3/2$, $-2/3$, o) -1, 2, $1/2$, $1/2+i\sqrt{3}/2$, $1/2-i\sqrt{3}/2$, p) 1 dvojnásobný, $1/2+i\sqrt{3}/2$, $1/2-i\sqrt{3}/2$, $3/2+\sqrt{5}/2$, $3/2-\sqrt{5}/2$, $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$; 29. a) 1, -1, i, $-i$, $\sqrt{2}/2+i\sqrt{2}/2$, $-\sqrt{2}/2-i\sqrt{2}/2$, b) $1+i$, $\sqrt{2}(\cos 117^\circ+i\sin 117^\circ)$, $\sqrt{2}(\cos 189^\circ+ + i\sin 189^\circ)$, $\sqrt{2}(\cos 261^\circ+i\sin 261^\circ)$, $\sqrt{2}(\cos 333^\circ+i\sin 333^\circ)$, c) $\sqrt{2}/2+i\sqrt{2}/2$, $-\sqrt{2}/2-i\sqrt{2}/2$, $\sqrt{2}/2-i\sqrt{2}/2$, $-\sqrt{2}/2+i\sqrt{2}/2$, d) 1, -1, $1/2+i\sqrt{3}/2$, $1/2-i\sqrt{3}/2$, $-1/2+i\sqrt{3}/2$, $-1/2-i\sqrt{3}/2$, e) $-\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{5}(1+i\sqrt{3})/2$, $\sqrt[3]{5}(1- - i\sqrt{3})/2$, f) $\sqrt[3]{5}$, $-\sqrt[3]{5}(1+i\sqrt{3})/2$, $-\sqrt[3]{5}(1i-\sqrt{3})/2$, g) $2i$, $-2i$, 2, -2, h) $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $\sqrt{2}-i\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$, i) 3, -3, $3i$, $-3i$, j) $1+i$, $1-i$, $-1+i$, $-1-i$, k) $2+2i$, $2-2i$, $-2+2i$, $-2-2i$, l) $\sqrt{3}+i$, $-\sqrt{3}-i$, $1-i\sqrt{3}$, $-1+i\sqrt{3}$, m) $2(\cos k72^\circ+i\sin k72^\circ)$ $k = 0, 1, 2, 3, 4$, n) $\sqrt{3}+i$, $\sqrt{3}-i$, $-\sqrt{3}+i$, $-\sqrt{3}-i$, $2i$, $-2i$, o) 3, -3, $3/2+i3\sqrt{3}/2$, $3/2-i3\sqrt{3}/2$, $-3/2+i3\sqrt{3}/2$, $-3/2-i3\sqrt{3}/2$, p) 2, -2, $2i$, $-2i$, $-2+2i$, $-2-2i$, $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $\sqrt{2}-i\sqrt{2}$, q) $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, $i\sqrt{3}$, $-i\sqrt{3}$, $\sqrt{6}/2+i\sqrt{6}/2$, $\sqrt{6}/2-i\sqrt{6}/2$, $-\sqrt{6}/2+i\sqrt{6}/2$, $-\sqrt{6}/2-i\sqrt{6}/2$, r) 2, -2, $2i$, $-2i$, $\sqrt{3}+i$, $\sqrt{3}-i$, $-\sqrt{3}+i$, $-\sqrt{3}-i$, $1+i\sqrt{3}$, $1-i\sqrt{3}$, $-1+i\sqrt{3}$, $-1-i\sqrt{3}$, s) $1+i$, $-(\sqrt{3}+1)/2+(\sqrt{3}-1)i/2$, $(\sqrt{3}-1)/2-(\sqrt{3}+1)i/2$; 30. a) $\sqrt{2}/2+i\sqrt{2}/2$, $-\sqrt{2}/2-i\sqrt{2}/2$, $\sqrt{2}/2-i\sqrt{2}/2$, $-\sqrt{2}/2+i\sqrt{2}/2$, b) 1, -1, i, $-i$, $\sqrt{2}/2+i\sqrt{2}/2$, $\sqrt{2}/2-i\sqrt{2}/2$, $-\sqrt{2}/2+i\sqrt{2}/2$, $-\sqrt{2}/2-i\sqrt{2}/2$, c) $(\sqrt{(2+\sqrt{2})}+i\sqrt{(2-\sqrt{2})})/2$, $(\sqrt{(2+\sqrt{2})}-i\sqrt{(2-\sqrt{2})})/2$, $-(\sqrt{(2+\sqrt{2})}+i\sqrt{(2- -\sqrt{2})})/2$, $-(\sqrt{(2+\sqrt{2})}-i\sqrt{(2-\sqrt{2})})/2$, $(\sqrt{(2-\sqrt{2})}+i\sqrt{(2+\sqrt{2})})/2$, $(\sqrt{(2-\sqrt{2})}- - i\sqrt{(2+\sqrt{2})})/2$, $-(\sqrt{(2-\sqrt{2})}+i\sqrt{(2+\sqrt{2})})/2$, $-(\sqrt{(2-\sqrt{2})}-i\sqrt{(2+\sqrt{2})})/2$; 32. a) substituce $x = 2y$, 2, $-3/2$, $-8/3$, b) sub. $x = 2y$, $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $\sqrt{2}-i\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$, 33. a) 0 trojnásobný, $\sqrt[3]{4}/2+i\sqrt{3}.\sqrt[3]{4}/2$, $\sqrt[3]{4}/2- - i\sqrt{3}.\sqrt[3]{4}/2$, b) $1+i$, $1-i$, $-1+i$, $-1-i$, c) $\sqrt[3]{3}$, $-\sqrt[3]{3}/2+i.\sqrt[3]{3}\sqrt{3}/2$, $-\sqrt[3]{3}/2-i.\sqrt[3]{3}\sqrt{3}/2$, $\sqrt[3]{2}$, $-\sqrt[3]{2}/2+i.\sqrt[3]{2}\sqrt{3}/2$, $-\sqrt[3]{2}/2-i.\sqrt[3]{2}\sqrt{3}/2$,

d) -3 dvojnásobný, 2, $1+i$, $1-i$; <u>34</u>. 1,73; <u>35</u>. 3,99; <u>36</u>. 0,488872; <u>37</u>. 0,488872; <u>38</u>. a) $< -53{,}53 >$, b) $< -7{,}7 >$; <u>39</u>. a) $x^4 - 5x^2 + 8x - 8$, $4x^3 - 10x + 8$, $5x^2 - 12x + 16$, $-3x + 284$, -1, b) $x^4 + 12x - 5$, $4x^3 + 12$, $-9x + 5$, -8248; <u>40</u>. a) dva reálné kořeny v intervalech $(-3, -2)$, $(1,2)$, b) $(-2, -1)$, $(2,3)$, c) $(-2, -1)$, $(0,1)$.

Seznam doporučené literatury:

1. Blažek, J., Koman, M., Vojtášková, B.: Algebra a teoretická aritmetika 2, SPN Praha 1985 ,

2. Jiroušek, M.: Sbírka úloh z algebry, skriptum, Praha 1964,

3. Kopecký, M., Emanovský, P.: Sbírka řešených příkladů z algebry, skriptum PdF UP, Olomouc 1990,

4. Kořínek, V.: Základy algebry, NČSAV Praha 1956,

5. Krutský, F.: Polynomy n neurčitých, řešení algebraických rovnic, miniskriptum PřF UP, Olomouc 1991,

6. Schwarz, Š.: Základy náuky o riešení rovníc, NČSAV Praha 1958.

OBSAH:

Určeno:	pro studující učitelství 6. – 9. roč. ZŠ PdF UP
Autor:	RNDr. Petr E m a n o v s k ý
Název:	**CVIČENÍ Z ALGEBRY (POLYNOMY, ALG. ROVNICE)**
Vydání:	I.
Místo a rok vydání:	Olomouc 1993
Nakladatelství:	Vydavatelství Univerzity Palackého v Olomouci
Počet stran:	32
Odpovědný redaktor:	Doc. RNDr. Josef K r á t o š k a
Tiskárna:	ediční středisko RUP Olomouc, č. z. 96/93
AA – VA:	0,99 – 1,27
Náklad:	300 výtisků
Tématická skupina:	17/31
Cena:	7,– Kč
Číslo nominál. skupiny:	63/II/10
Vydavatelské oprávnění:	MK ČSR č. 21.514/79 ze dne 4. 12. 1979